S^*-良滤空间和d^*-空间⋆

Nana Han[a]、Siheng Chen[b]、Qingguo Li[*]

[a]中国湖南省长沙市湖南大学数学学院，*410082*[b]中国湖南省长沙市长沙理工大学数学与统计学院，*410114*

arXiv:2601.11281v1 [math.GN] 16 Jan 2026

摘要

近期，Xu在 [24] 提出了一种强良滤空间，并系统地研究了其若干性质与刻画。本文引入一类新的T_0-空间，称为S^*-良滤空间，它严格包含强良滤空间类。首先，我们建立了S^*-良滤空间、d^*-空间与弱良滤空间之间的一些联系。随后证明，对于任意有向完备偏序集P，Scott 空间 ΣP是d^*-空间，当且仅当它是S^*-良滤空间。此外，我们讨论了S^*-良滤空间的一些基本性质。我们证明，若Y是S^*-良滤空间，则赋予Isbell拓扑的函数空间TOP(X, Y)不一定是S^*-良滤空间。最后，我们研究了S^*-良滤空间的Smyth幂空间。此外，我们证明Johnstone的非 sober 有向完备偏序集例子是S^*-良滤空间，但并非强良滤空间，从而明确揭示了这两类有向完备偏序集之间的差异。

关键词：强良滤空间；S^*-良滤空间；Johnstone 例子；函数空间；Smyth 幂空间

1. 引言

域理论是程序设计语言指称语义的基础支柱（见[3, 18]）。作为域理论中最重要的三类空间，Sob 空间、良滤空间和 d-空间已被众多学者从多个方面进行了广泛研究。例如，在 [11], Liu、Li 和 Ho 证明，对于任意非空 T_0-空间 X，若从 X 到 Y 的连续函数所构成的函数空间 [X, Y] 赋予 Isbell拓扑后是 d-空间（分别为良滤空间），则 Y 是 d-空间（分别为良滤空间）。在[15], Li 等人证明，对于任意非空 T_0-空间 X，若 Y 是良滤空间，则赋予 Isbell拓扑的函数空间 [X, Y]是良滤空间。同时，他们还证明，对于任意非空 T_0-空间 X，若 Y 和 Σ(O(X))都是 Sob 空间，则赋予 Isbell拓扑的函数空间 [X, Y] 是 Sob 空间。在 [25], Xu等人证明，T_0-空间 X 是良滤空间，当且仅当 P_S(X) 是良滤空间，当且仅当 P_S(X) 是 d-空间，

⋆本研究得到国家自然科学基金（12231007）、国家自然科学基金（12401594）和湖南省教育厅科学研究基金（25C0114）的资助。

*通讯作者电子邮箱：hnnmaths@163.com (Nana Han)、mathlife@sina.cn (Siheng Chen)、liqingguoli@aliyun.com (Qingguo Li)

其中，空间的 Smyth 幂空间 $P_S(X)$ 是由所有非空饱和紧集构成的集合，并赋予上 Vietoris 拓扑。空间 X 特别地，一些学者从范畴论的角度研究了这三类空间，并得出结论：由所有 Sob 空间（分别为良滤空间、d-空间）及连续映射构成的范畴 **Sob** （分别为 $\mathbf{Top}_w$、$\mathbf{Top}_d$ ）是由所有$\mathbf{Top}_0$ T_0-空间及连续映射构成的范畴中的反射子范畴（见[8, 21, 22]）。

众所周知，Rudin 引理在域理论中占据着重要地位（见 [3, 4]）。随后，Heckmann 和 Keimel 在 [5] 中提出了 Rudin 引理的一个拓扑变体。受 Rudin 引理的拓扑变体以及 Xi 和 Lawson 关于良滤空间的工作 [26] 启发，Xu 和 Zhao 在 [27]中给出了良滤空间和 Sob 空间的一系列刻画，并提出了强 d-空间的概念。此后，许多学者探讨了强 d-空间的一些性质 [9, 10, 15, 27, 28]。最近，为了探索T_2-空间与 d-空间之间更细致的联系，Xu 在 [24]中提出了强良滤空间的定义。它与良滤空间和强 d-空间密切相关。

近年来，对 Sob 空间和良滤空间的一些弱化版本的研究已成为一个重要的研究方向。例如，Lu 和 Li 在 [13], 中引入了弱良滤空间的概念，并证明 Johnstone 例子是弱良滤的，但不是良滤的。此外，他们证明，对于弱良滤有向完备偏序集P，相干性等价于对任意x、$y \in P$，$\uparrow x \cap \uparrow y$ 的紧致性，这推广了 [7]中的关键结果。Lu、Liu 和 Li 在 [12], 中提出了弱 Sob 空间的概念，而 [14]研究了弱 Sob 性的一些刻画。Chu 和 Li 在 [2], 中提出了d^*-空间的定义，它严格弱于强 d-空间。此外，他们还给出了d^*-空间的一些基本性质和刻画。受这些工作启发，本文的主要目标是引入一类新的拓扑空间，称为S^*-良滤空间，它严格弱于强良滤空间。同时，我们研究了它们的一些基本性质，并建立了T_2-空间、S^*-良滤空间、d^*-空间和弱良滤空间之间的特定关系，从而进一步丰富T_0 拓扑空间理论。本文的结构安排如下。

Se节2 介绍了本文其余部分所需的一些定义和相关结果。

第3节回顾d^*-空间的概念及一些重要结果。我们给出了d^*-空间的若干刻画，并证明，所有$\mathbf{Top}_{d^*}$ 范畴中由连续映射构成的d^*-空间范畴不是所有$\mathbf{Top}_0$ 范畴中由连续映射构成的T_0-空间范畴的反射子范畴。

第4 节提出了一类新的拓扑空间，称为S^*-良滤空间，它严格包含所有强良滤空间。我们建立了介于T_2-空间与弱良滤空间之间的空间的具体联系。我们证明，对于任意有向完备偏序集P，其 Scott 空间 ΣP 是d^*-空间，当且仅当它是S^*-良滤的。此外，我们证明，Johnstone的非 sober 有向完备偏序集例子是S^*-良滤的，但并非强良滤，从而明确区分了这两类有向完备偏序集。

第5 节将进一步探讨S^*-良滤空间的更多性质。首先，我们证明S^*-良滤性具有闭遗传性和饱和遗传性。其次，我们证明，若一族T_0-空间的积空间 X_i 是一个S^*-良滤空间，则每个空间 X_i 都是一个 S^*-良滤空间。同时，我们给出一个例子来说明

一族S^*-良滤空间的积一般并非S^*-良滤空间。此外，我们验证了：对于某个非空空间X，若赋予 Isbell拓扑的函数空间 TOP(X, Y)是一个S^*-良滤空间，则Y 是一个S^*-良滤空间。然而，反过来并不成立。

第6 节讨论了 S^*-良滤子性。

2. 预备知识

本节回顾本文将要用到的一些基本概念和结果。更多细节请参阅 [1, 3, 4]。

设 $(P, \leq)$ 是一个偏序集。给定 P 的任意子集 X，记 $\downarrow X = \{y \in P \mid y \leq x \text{ for some } x \in X\}$ and$\uparrow X = \{y \in P \mid x \leq y \text{ for some } x \in X\}$。对于任意元素 $x \in P$，记 $\downarrow x$ 表示 $\downarrow\{x\}$，记 $\uparrow x$ 表示 $\uparrow\{x\}$。如果 P 的子集 A 满足 $A = \uparrow A$（分别地，$A = \downarrow A$），则称 A 为上集（分别为下集）。如果每个非空子集 A 在 P 中都有上确界 $\bigvee A$，则称偏序集 P 为上确界完备偏序集。令 $P^{(<\omega)} = \{F \subseteq P \mid F \text{ 是一个非空有限子集}\}$，且 $\text{Fin } P = \{\uparrow F \mid F \in P^{(<\omega)}\}$。自然数集记为 $\mathbb{N}$，并令 $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N}\backslash\{0\}$。

偏序集P 的非空子集D 称为有向集（相应地，称为滤子），如果对于任意x、$y \in D$，都存在$z \in D$，使得$x \leq z$（相应地，$z \leq x$），并且$y \leq z$（相应地，$z \leq y$）。如果偏序集P 的每个有向子集都有上确界，则称P 为有向完备偏序集（简称 dcpo）。P 的所有有向集构成的集合记为 $\mathcal{D}(P)$。

对于x、$y \in P$ 中的两个元素，如果对于所有满足上确界 $\bigvee E$存在的有向子集$E \subseteq P$，只要$y \leq \bigvee E$，就总存在$e \in E$使得$x \leq e$，则称x远低于y，记作$x \ll y$。对于任意$x \in P$，如果$x \ll x$，则称x为P 的紧元。P 的所有紧元构成的集合记为 K(P)。如果对于任意$x \in P$，都有$x = \bigvee(\downarrow x \cap K(P))$，即对于所有$x \in P$，集合$x\downarrow \cap K(P)$是有向集，且x是其上确界，则称偏序集P 为代数的。如果对于每个元素$a \in P$，集合$x \in P \mid x \ll a\}$是有向集，且$a = \bigvee\{x \in P \mid x \ll a\}$，则称偏序集P 为连续偏序集。连续有向完备偏序集称为域。

偏序集 P 的子集 U 称为 Scott 开的，若满足：(i) $U = \uparrow U$；(ii) 对于 P 的任意有向子集 D，若 $\bigvee D$ 存在，且 $\bigvee D \in U$，则 $D \cap U \neq \emptyset$。P 的所有 Scott 开子集构成一个拓扑，称为 P 上的 Scott 拓扑，记作 $\sigma(P)$。空间 $\Sigma P = (P, \sigma(P))$ 称为 P 的 Scott 空间。P 的子集 A 称为 Scott 闭的，若满足：(i) $A = \downarrow A$；(ii) 对于 P 的任意有向子集 D，若 $D \subseteq A$，则当 $\bigvee D$ 存在时，$\bigvee D \in A$。

本文中，所有拓扑空间均假设为 T_0。对于任意拓扑空间 X，我们用 $cl(Y)$ 表示 X 的子集 Y 的闭包。(X, τ) 上的特化序 $\leq_\tau$ 定义为：$x \leq_\tau y$ 当且仅当 $x \in cl_\tau(\{y\})$。显然，$cl_\tau(\{y\}) = \downarrow_\tau y$。设 $O(X)$（分别地，$\Gamma(X)$）表示 X 的所有开子集（分别地，闭子集）构成的集合。

对于空间 X 的任意子集 Y，Y 的饱和化记作 sat(Y)，定义为

$$\text{sat}(Y) = \bigcap \{U \in O(X) \mid Y \subseteq U\},$$

或者等价地，$\text{sat}(Y) = \uparrow Y$ 关于特化序。若 X 的子集 Y 满足 $Y = \text{sat}(Y)$，则称其为饱和的。

对于拓扑空间 X，令 $K(X)$ 表示由 X 的所有非空紧致饱和子集构成的偏序集，并赋予 Smyth 序；也就是说，对于 $K_1, K_2 \in K(X)$，当且仅当 $K_2 \subseteq K_1$ 时，$K_1 \leq K_2$。

定义 2.1. ([20]) 若拓扑空间中的每个紧致子集（不一定是 T_2）都是闭集，则称该空间为 KC 空间。

容易看出，每个T_2 空间都是KC空间，而每个KC空间都是T_1。

定义 2.2。 ([3, 4]) 设X 是一个拓扑空间。

(1) X 的非空子集 A 称为不可约的，如果对于任意 B、C $\in \Gamma(X)$，A $\subseteq$ B $\cup$ C 都蕴含 A $\subseteq$ B 或 A $\subseteq$ C。用 $\mathrm{Irr}_c(X)$ 表示 X 的所有不可约闭集组成的集合。如果对于每个 A $\in \mathrm{Irr}_c(X)$，都存在唯一的点 x $\in$ X，使得 A = cl{x}，则称拓扑空间 X 为清醒空间。(2) 如果对于任意滤族 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 以及任意开集 U，$\bigcap_{i\in I} K_i \subseteq U$ 都蕴含存在某个 $i \in I$ 使得 $K_i \subseteq U$，则称拓扑空间 X 为良滤子空间。

定义 2.3。 ([13]) 如果一个拓扑空间 X 满足：对任意滤族 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 和 $U \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$,$\bigcap_{i\in I} K_i \subseteq U$ 蕴含 $K_i \subseteq U$ 对某个 $i \in I$ 成立，则称其为弱良滤空间。

定义 2.4。 ([27]) 一个 T_0-空间 X 称为强 d-空间，如果对于任意 $D \in \mathcal{D}(X)$、$x \in X$ 和 $U \in O(X)$，$\bigcap_{d\in D} \uparrow d \cap \uparrow x \subseteq U$ 蕴含 $\uparrow d \cap \uparrow x \subseteq U$ 对某个 $d \in D$ 成立。所有强 d-空间及其连续映射构成的范畴记作 **S-Top**$_d$。

定义 2.5. ([24]) 一个 T_0-空间 X 称为强良滤空间，如果对于任意滤族 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(X)$、G $\in$ K(X) 和 U $\in O(X)$，$\bigcap_{i\in I} K_i \cap G \subseteq U$ 蕴含 $K_i \cap G \subseteq U$ 对某个 $i \in I$ 成立。所有强良滤空间及其连续映射构成的范畴记作 S-Top$_w$。

在 [24], Xu 证明了，每个强良滤空间都是良滤空间，并且每个强良滤空间都是强 d-空间。

定义 2.6。 ([3, 21]) 若空间 X （赋予特化序）是有向完备偏序集，且 $O(X) \subseteq \sigma(X)$，则称X 为d-空间（或单调收敛空间）。

令 **Top**$_0$ 表示所有T_0-空间及其连续映射所构成的范畴。在 [8], Keimel 和 Lawson 证明，若满子范畴 **K** 满足以下四个条件，则它在**Top**$_0$ 中是反射的：

(K1) K 包含所有 Sob 空间；(K2) 若 X $\in$ K 且 Y 与 X 同胚，则 Y $\in$ K；(K3) 若 $\{X_i \mid i \in I\} \subseteq K$ 是清醒空间的一个子空间族，则子空间$\bigcap_{i\in I} X_i \in K$；(K4) 若 $f : X \to Y$ 是从清醒空间 X 到清醒空间 Y 的连续映射，则对 Y 的任意子空间 Z，若 Z $\in$ K，则 $f^{-1}(Z) \in K$。

设X 是一个T_0-空间。与X 相关联的 b-拓扑是这样一种拓扑，其基为族 $\{U \cap cl(\{x\}) \mid x \in U \in O(X)\}$ [19]。

定义 2.7. ([17]) 对于**KTop**$_0$的一个子范畴，我们称

(1) 若$_{i\in I}X_i \in \mathbf{K}$，则乘积$\prod$是$\mathbf{K}$ 中的对象；当且仅当 $\{X_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbf{K}$时，$\mathbf{K}$ 称为积封闭；(2) 若A 是某个$X \in \mathbf{K}$的 b-闭子空间，且$A \in \mathbf{K}$，则$\mathbf{K}$ 称为 b-闭遗传。

引理 2.8. *([17])* 设 $\mathbf{K}$ 是 $\mathbf{Top}_0$ 的一个满子范畴，且 $\mathbf{K} \nsubseteq \mathbf{Top}_1$. 则 $\mathbf{K}$ 是$\mathbf{Top}_0$ 中的反射子范畴，当且仅当 $\mathbf{K}$是积封闭且 b-闭遗传的。

3. d-空间

d-空间的概念由 Chu 和 Li 在 [2] 中引入。更多详情请参阅 [2]。

定义 3.1. ([2]) 若一个 T_0-空间 X 满足：对于任意 $D \in \mathcal{D}(X)$、$x \in X$ 和 $U \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$, $\bigcap_{d\in D} \uparrow d \cap \uparrow x \subseteq U$ 蕴含 $\uparrow d \cap \uparrow x \subseteq U$，其中某个 $d \in D$，则称其为 d^*-空间。所有 d^*-空间及其连续映射构成的范畴记为 $\mathbf{Top}_{d^*}$。

以下结果显然成立。

注 3.2. (1) 每个强 d-空间都是d^*-空间。

(2) 每个T_1-空间都是d^*-空间。(3) 每个KC 空间都是d^*-空间。(4) 每个带有 Scott 拓扑的上确界完备偏序集（尤其是每个完备格）都是d^*-空间。类似于 [27]，中给出的强 d-空间刻画，我们有以下结果。

命题 3.3. 对于 T_0-空间 X，以下两个条件等价：

(1) X 是一个 d^*-空间。(2) 对于任意 $D \in \mathcal{D}(X)$、$\uparrow F \in \mathbf{Fin}\, X$ 和 $U \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$，若 $\bigcap_{d\in D} \uparrow d \cap \uparrow F \subseteq U$，则存在某个 $d \in D$，使得 $\uparrow d \cap \uparrow F \subseteq U$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 设 $D \in \mathcal{D}(X)$、$\uparrow F \in \mathrm{Fin}\, X$ 和 $U \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$ 满足 $\bigcap_{d\in D} \uparrow d \cap \uparrow F \subseteq U$。令 $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$。则 $\bigcap_{d\in D} \uparrow d \cap \uparrow F = \bigcup_{i=1}^{n} (\bigcap_{d\in D} \uparrow d \cap \uparrow x_i) \subseteq U$。因此，对于任意 $x_i \in F$，$\bigcap_{d\in D} \uparrow d \cap \uparrow x_i \subseteq U$。由于 X 是 d^*-空间，存在 $d_{x_i} \in D$，使得 $\uparrow d_{x_i} \cap \uparrow x_i \subseteq U$。由于 D 是有向的且 F 有限，因此存在 $d_0 \in D$，使得 $\bigcup_{i=1}^{n} (\uparrow d_0 \cap \uparrow x_i) \subseteq U$。由此可得，对于某个 $d_0 \in D$，$\uparrow d_0 \cap \bigcup_{i=1}^{n} \uparrow x_i = \uparrow d_0 \cap \uparrow F \subseteq U$。

(2) $\Rightarrow$ (1) 平凡。 □

引理 3.4。 *([2])* 对于有向完备偏序集 P，以下两个条件等价：

(1) ΣP 是一个 d^*-空间。(2) 对于任意 $C \in \Gamma(\Sigma P)\backslash\{P\}$ 和 $x \in P$，$\downarrow(\uparrow x \cap C) \in \Gamma(\Sigma P)$。

引理 3.5. *([5])* 设 P 是一个有向完备偏序集，U 是 P 的一个 *Scott*开集，且 $\{\uparrow F_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbf{Fin}\, P$ 是一个滤族，并且$\bigcap_{i\in I} \uparrow F_i \subseteq U$.那么对于某个 $i \in I$，有 $\uparrow F_i \subseteq U$。

命题 3.6. 对于有向完备偏序集 P，以下两个条件等价:

(1) ΣP 是一个 d^*-空间。(2) 对于任意滤族 $\{\uparrow F_d \mid d \in D\} \subseteq \mathbf{Fin}\ P$，若 $\uparrow F \in \mathbf{Fin}\ P$ 且 $U \in \sigma(P)\backslash\{\emptyset\}$，并且 $\bigcap_{d\in D} \uparrow F_d \cap \uparrow F \subseteq U$，则存在某个 $d \in D$，使得$\uparrow F_d \cap \uparrow F \subseteq U$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 假设 $\{\uparrow F_d \mid d \in D\} \subseteq \mathrm{Fin}\ P$，$\uparrow F \in \mathrm{Fin}\ P$ 且 $U \in \sigma(P)\backslash\{\emptyset\}$ 满足 $\bigcap_{d\in D} \uparrow F_d \cap \uparrow F \subseteq U$。那么 $\bigcap_{d\in D} \uparrow F_d \cap \downarrow(\uparrow F \cap (X\backslash U)) = \emptyset$。因此，$\bigcap_{d\in D} \uparrow F_d \subseteq X\backslash\downarrow(\uparrow F \cap (X\backslash U))$，且 $X\backslash\downarrow(\uparrow F \cap (X\backslash U)) \in \sigma(P)\backslash\{\emptyset\}$，由引理 3.4 可知。由引理 4.21 可得，对于某个 $d \in D$，有 $\uparrow F_d \subseteq X \backslash \downarrow(\uparrow F \cap (X \backslash U))$。因此，对于某个 $d \in D$，有 $\uparrow F_d \cap \uparrow F \subseteq U$。

(2) $\Rightarrow$ (1) 显然。 □

d^*-空间最基本的性质之一是以下结果。

引理 3.7. *([2])* d^*-空间的收缩是一个 d^*-空间。

命题 3.8. 设 $\{X_i \mid i \in I\}$ 是一族 T_0-空间。若积空间 $\prod_{i\in I} X_i$ 是一个 d^*-空间，则对每个 $i \in I$，X_i 都是一个 d^*-空间。

证明。 设 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 是一个 d^*-空间。对每个 $i \in I$，X_i 是 X的收缩。由引理 3.7 可知，X_i 对每个 d^*-空间$i \in I$。

□

反过来，一个自然会提出这样的问题：任意一族d^*-空间的积空间是否仍然是一个d^*-空间?

在 [2], 中，作者给出了一个例子，说明两个d^*-空间的积空间不是d^*-空间。因此，任意一族d^*-空间的积空间都不是d^*-空间。

在 [15], 中，我们知道范畴**S-Top**$_d$ 不是**Top**$_0$的反射子范畴。由引理2.8，我们可以立即得到以下结果。

定理 3.9。范畴**Top**$_{d^*}$ 不是**Top**$_0$的反射子范畴。

4. S^*-良滤空间

本节中，受 Lu 和 Li 关于弱良滤空间的工作 [13] 启发，我们引入S^*-良滤空间。

定义 4.1. 若 T_0 空间 X 对任意滤族 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(X)$、$G \in K(X)$ 和 $U \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$, $\bigcap_{i\in I} K_i \cap G \subseteq U$ 都满足: 存在某个 $i \in I$ 使得 $K_i \cap G \subseteq U$，则称 X 为 S^*-良滤空间。所有 S^*-良滤空间及其连续映射构成的范畴记为 S^*-Top_w。

显然，每个强良滤空间都是S^*-良滤空间。下一个例子表明，一般而言，S^*-良滤空间未必是强良滤空间。

例 4.2. 考虑空间 $\Sigma\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \sigma(\mathbb{N}))$，其中 $\mathbb{N}$ 是配备了通常序下 Scott 拓扑的自然数集。于是

(a) $\Sigma\mathbb{N}$ 是一个S^*-良滤空间。

假设 $\{\uparrow n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq K(\Sigma\mathbb{N})$ 是一个滤族，$\uparrow m \in K(\Sigma\mathbb{N})$，且 $U \in O(\Sigma\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}$满足 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \uparrow n \cap \uparrow m \subseteq U$。那么 $D = \{n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是一个有向集。若 D 是有限的，则 $\bigcap_{n\in D} \uparrow n \cap \uparrow m = \uparrow \sup D \cap \uparrow m \subseteq U$。若 D 是无限的，则$\bigcap_{n\in D} \uparrow n = \emptyset$。因此 $\bigcap_{n\in D} \uparrow n \cap \uparrow m \subseteq U$。由于 $U \neq \emptyset$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $U = \uparrow k$。因此，存在 $l \in D$ 使得 $k \leq l$。由此可得，对于某个 $l \in D$，$\uparrow l \cap \uparrow m \subseteq U$。

（b） $\Sigma\mathbb{N}$ 不是强良滤空间。

事实上，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \uparrow n = \emptyset$。但对于任意$n \in \mathbb{N}, \uparrow n \neq \emptyset$。这表明 $\Sigma\mathbb{N}$ 不是良滤空间。因此，它不是强良滤空间。

例子4.2 还表明，一个S^*-良滤空间未必是良滤空间。

命题4.3。</style}一个 T-空间 X 是 S-良滤的，当且仅当对于每个滤族 Ki IK(X)，$G \in K(X)$且 $C \in \Gamma(X)\backslash\{X\}$，若对每个 $i \in I$ 都有 $K_i \cap G \cap C \neq \emptyset$，则 $K_i \cap G \cap C \neq \emptyset \bigcap_{i\in I}$ *</style}*。

若偏序集*P </style}*配备 *Scott* 拓扑*(P)* 后成为一个S^*-良滤空间（分别为强良滤空间、弱良滤过空间），则称偏序集*P </style}*是S^*-良滤的（分别为强良滤、弱良滤过）。

命题4.4。 设 P 是具有最大元 $\top$ 的有向完备偏序集。那么，P 是强良滤的，当且仅当它是 S^*-良滤的。

证明。若 P 是强良滤的，则它是 S^*-良滤的。反过来，设 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(\Sigma P)$ 是一个滤族，$G \in K(\Sigma P)$，且 $U \in O(X)$ 满足 $\bigcap_{i\in I} K_i \cap G \subseteq U$。则 $\top \in \bigcap_{i\in I} K_i \cap G$，即 $\bigcap_{i\in I} K_i \cap G \neq \emptyset$。由此可得 $U \neq \emptyset$。因此，由于 P 是 S^*-良滤的，存在 $i \in I$ 使得 $K_i \cap G \subseteq U$。这意味着 P 是强良滤的。

□

若空间 X 中任意两个紧饱和集的交仍为紧集，则称该空间为相干的。显然，每个 KC空间都是相干的。

命题 4.5。 设 X 是一个 T_0空间。考虑以下条件：

(1) X 是 S^*-良滤子；(2)
X 是弱良滤过。

那么(1) $\Rightarrow$ (2)。此外，(1) $\Leftrightarrow$ (2) 若 X 是相干的。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 设 X 是一个 S^*-良滤空间。假设 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 是一个滤族，且 $U \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$ 满足 $\bigcap_{i\in I} K_i \subseteq U$。取一个 $i_0 \in I$，令 $G = K_{i_0}$。那么 $\bigcap_{i\in I} K_i \cap G = \bigcap_{i\in I} K_i \subseteq U$。因此，由 X 的 S^*-良滤性，存在 $i_1 \in I$ 使得 $K_{i_1} \cap K_{i_0} \subseteq U$。所以存在 $i_2 \in I$ 使得 $K_{i_2} \subseteq K_{i_1} \cap K_{i_0} \subseteq U$。这说明 X 是一个弱良滤空间。

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 X 是一个相干弱良滤空间。假设 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 是一个滤族，$G \in K(X)$，且 $U \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$ 满足 $\bigcap_{i\in I} K_i \cap G \subseteq U$。若存在 $i_0 \in I$ 使得 $K_{i_0} \cap G = \emptyset$，则 $K_{i_0} \cap G \subseteq U$。现在假设对所有 $i \in I$，都有 $K_i \cap G \neq \emptyset$。那么对所有 $i \in I$，由 X 的相干性可知，$K_i \cap G \in K(X)$，$\{K_i \cap G \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 是一个滤族。因此，$\bigcap_{i\in I}(K_i \cap G) = \bigcap_{i\in I} K_i \cap G \subseteq U$。由于 X 是弱良滤空间，存在 $i_1 \in I$ 使得 $K_1 \cap G \subseteq U$。因此，X 是一个 S^*-良滤空间。

□

由命题4.5，得到以下推论。

推论 4.6. 设 X 是一个 KC空间。若 X 是弱良滤空间，则 X 是 S^*-良滤空间。

定义 4.7. ([23]) 若偏序集 P 满足：对 P 的任意有向子集 D，只要 $\bigcap_{d\in D} \uparrow d \neq \emptyset$，$D$ 在 P 中就有最小上界，则称 P 为相容有向完备偏序集。

引理 4.8. *([13])* 设 (X, τ) 是一个弱良滤空间。那么$\Omega(X)$ 是一个相容有向完备偏序集，且 $\tau \subseteq \sigma(\Omega(X))$，其中 $\Omega(X) = (X, \leq_\tau)$。

推论 4.9. 设 (X, τ) 是一个 S^*-良滤空间。那么$\Omega(X)$ 是一个相容有向完备偏序集，且 $\tau \subseteq \sigma(\Omega(X))$，其中 $\Omega(X) = (X, \leq_\tau)$。

下面的例子说明，非相干弱良滤空间未必是S^*-良滤空间。

例 4.10. 令$P = \mathbb{N}^+ \cup \{\omega, a\} \cup \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$。在$P$ 上定义如下序：$\leq$

$x \leq y$当且仅当

(1) $x \leq y$ 属于 $\mathbb{N}^+$；或 (2) $x \in \mathbb{N}^+ \cup \{\omega\}$，$y = \omega$；或 (3) $x = a$，$y \in \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$；或
(4) $x \in \mathbb{N}^+$，$y \in \{\omega_n \mid n \geq x\}$。

显然，P 是有向完备偏序集，且对所有 $x \in P\backslash\{\omega\}$，都有 $x \ll x$。因此，P 是代数域。于是，ΣP 是清醒的；故它是良滤空间。由此可知，ΣP 是弱良滤空间。但是，对于 $\uparrow 2, \uparrow a \in K(\Sigma P)$，显然，$\uparrow 2 \cap \uparrow a = \{\omega_2, \omega_3, ..., \omega_n, ...\}$并不紧致。因此，$\Sigma P$ 不相干。给定 $m \in \mathbb{N}^+$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} \uparrow n \cap \uparrow a = \emptyset \subseteq \{\omega_m\} \in \sigma(P)$，但是$\uparrow n \cap \uparrow a = \{\omega_n, \omega_{n+1}, ...\} \nsubseteq \{\omega_m\}$对任意 $n \in \mathbb{N}^+$都成立。因此，ΣP 不是 S^*-良滤空间。

例 4.10 同样表明，良滤空间未必是 S^*-良滤子的。

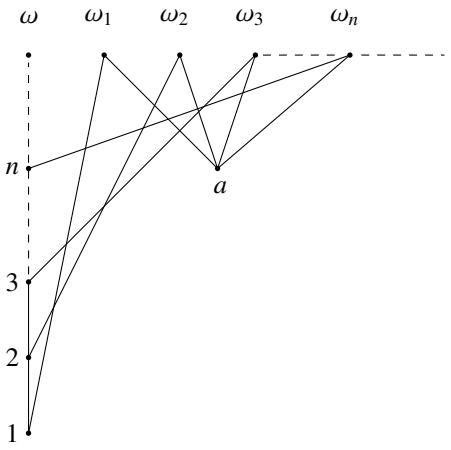


图1：偏序集P，见例4.10。

命题4.11。(1) 每个 T_2-空间都是 S^*-良滤空间。

(2) 每个 S^*-良滤子空间都是 d^*-空间。

证明。(1) 设 X 是一个 T_2-空间。那么 X 是弱良滤的，且 $K(X) \subseteq \Gamma(X)\backslash\{\emptyset\}$。对于任意 $K_1, K_2 \in K(X)$，有 $K_1 \cap K_2$ 是 X 的紧子集。因此，X 是相干的。由命题 4.5 可知，X 是一个 S^*-良滤空间。

(2) 设 X 是一个 S^*-良滤空间。假设 $D \in \mathcal{D}(X)$、$x \in X$ 且 $U \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$ 满足 $\bigcap_{d\in D} \uparrow d \cap \uparrow x \subseteq U$。那么 $\{\uparrow d \mid d \in D\} \subseteq K(X)$ 是一个滤族，且 $\uparrow x \in K(X)$。由于 X 是一个 S^*-良滤空间，存在 $d_0 \in D$，使得 $\uparrow d_0 \cap \uparrow x \subseteq U$。因此，X 是一个 d^*-空间。

□

由命题 4.5 和 4.11，可得以下结果。

推论4.12. 每个相干弱良滤空间都是一个 d^*-空间。

下面的例子说明，一般而言，d^*-空间未必是 S^*-良滤空间。

例4.13. 令 $X_1 = (\mathbb{N}, \tau_{cof})$ 为自然数集 $\mathbb{N}$ 配备余有限拓扑 $\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid X\backslash U \text{ 为有限集}\}$ 所得的空间，并令 $X_2 = (\{a\}, \tau_2)$ 为单点集 $\{a\}$ 配备离散拓扑 $\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}\}$ 所得的空间。考虑空间 $X = (X_1 \cup X2, \tau)$，其中 τ 是余有限拓扑与离散拓扑的公共加细 $\tau_{cof} \vee \tau_2$。由于每个单点集都是闭集，X 是一个 T_1-空间。因此，它是一个 d^*-空间。接下来，我们声称 X 不是 S^*-良滤空间。事实上，$K(X) = 2^X\backslash\{\emptyset\}$。令 $\mathcal{K} = \{X\backslash F \mid F \in X^{(<\omega)}\}$。则 $\mathcal{K} \subseteq K(X)$ 是一个滤族。显然，$\bigcap \mathcal{K} = \emptyset \subseteq \{a\}$。但是，对所有 $F \in X^{(<\omega)}$，$X\backslash F \not\subseteq \{a\}$。因此，X 不是弱良滤空间。由命题 4.5 可知，它不是 S^*-良滤空间。

例4.13还表明，一般而言，d^*-空间未必是弱良滤空间。下一个例子表明，存在一个S^*-良滤空间，但它不是 Sob 空间。

例4.14. 令 X = (R, τ_{coc}) 表示由实数集 R 配备余可数拓扑所构成的空间τ_{coc} = {∅} ∪ {U ⊆ X | X\U 是可数集}。那么 Irr_c(X) = {X} ∪ {{x} | x ∈ X}，且 K(X) = {F ⊆ X |F 是非空有限集}。显然，X 是一个 T_1-空间，但不是 Sob 空间。假设 $\mathcal{K}$ = {F_i | i ∈ I} ⊆ K(X) 是一个滤族，且 U ∈ O(X)\{∅} 满足 ⋂$\mathcal{K}$ ⊆ U。那么 $\mathcal{K}$ 有最小元素 F_{i_0}，因为 $\mathcal{K}$ 是滤子，且所有 F_i 都是有限的。因此，F_{i_0} = ⋂$\mathcal{K}$ ⊆ U，也就是说，X 是一个弱良滤空间。由于 X 是相干的，由命题 4.5 可知，X 是一个 S^*-良滤空间。

图 2 展示了介于 T_2-空间与弱良滤空间之间的空间之间的关系 ce.

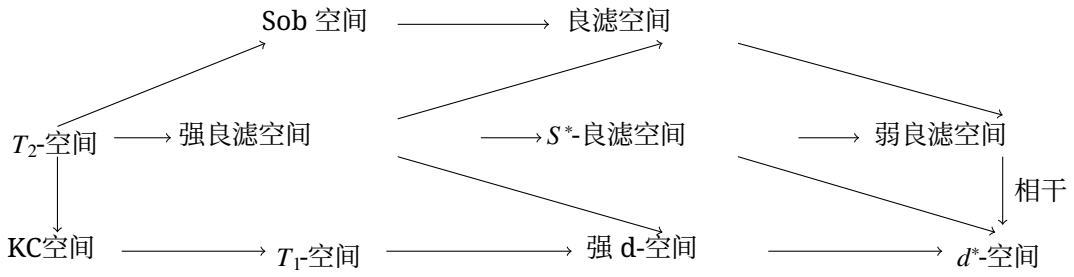


图2：介于T_2-空间与弱良滤空间之间各类空间的关系。

引理4.15。 *([24])* 设 X 是一个 T_0-空间，满足对于任意非空的 C ∈ Γ(X)和 K ∈ K(X)，max(C) ≠ ∅ 且 ↓(C ∩ K) 是闭集，则 X 是强良滤空间。

由引理4.15，可得以下结果。

命题4.16。 设 X 是一个 T_0-空间，满足对于任意非空的 C ∈ Γ(X)\{X}和 K ∈ K(X)，max(C) ≠ ∅ 且 ↓(C ∩ K) 是闭集，则 X 是 S^*-良滤空间。

引理4.17。 *([24])* 设 X 是一个 d-空间，满足对于任意非空的 C ∈ Γ(X) 和 K ∈ K(X)， ↓(C ∩ K) 是闭集。则 X 是强良滤空间。

以下结果直接由引理4.17得出。

命题4.18。 设 X 是一个 d-空间，使得对任意非空 C ∈ Γ(X)\{X} 以及 K ∈ K(X)， ↓(C ∩ K) 都是闭集。则 X 是 S^*-良滤子空间。

引理4.19。 *([24])* 对于有向完备偏序集 P 和 C ⊆ P，以下两个条件等价：

(1) ↓(↑x ∩C) ∈ Γ(ΣP) 对所有 x ∈ P 成立；(2) ↓(K ∩ C) = ⋃$_{k∈K}$ ↓(↑k ∩C) ∈ Γ(ΣP) 对所有 K ∈ K(ΣP)成立。

T以下陈述是引理 3.4、4.19 以及命题 4.11、4.16的直接推论。

定理4.20. 对于有向完备偏序集 P，以下四个条件等价：

(1) ΣP 是一个 d^*-空间；*(2)* 对任意 $x \in P$ 和 $C \in \Gamma(\Sigma P)\backslash\{P\}$，$\downarrow(\uparrow x \cap C) \in \Gamma(\Sigma P)$；*(3)* 对任意 $K \in K(\Sigma P)$ 和 $C \in \Gamma(\Sigma P)\backslash\{P\}$，$\downarrow(K \cap C) \in \Gamma(\Sigma P)$；*(4)* ΣP 是一个 S^*-良滤空间。

引理 4.21。*([13])* 设 P 是一个弱良滤偏序集。那么，P 是相干的，当且仅当 $\uparrow x \cap \uparrow y$ 对所有 $x,y \in P$ 都是紧致的。

下一个例子说明，S^*-良滤有向完备偏序集未必是强良滤的。

例 4.22。考虑 Johnstone 在 [6], 中构造的有向完备偏序集 $\mathbb{J} = \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \cup \{\omega\})$，其序关系定义为：$(j, k) \leq (m, n)$ 当且仅当 $j = m$ 且 $k \leq n$，或者 $n = \omega$ 且 $k \leq m$。那么 $\mathbb{J}$ 是一个有向完备偏序集。对于每个 $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\uparrow(x, y) \cap (\mathbb{N} \times \{\omega\}) = \{(x, \omega)\} \cup \{(z, \omega) \mid z \in \mathbb{N} \text{ and } y \leq z\}.$$

因此，$(\mathbb{N}\times\{\omega\})\backslash\uparrow(x, y)$ 是有限的。对于任意 $U \in \sigma(\mathbb{J})\backslash\{\emptyset\}$，存在 $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$，使得 $(x, y) \in U$。所以 $(\mathbb{N}\times\{\omega\})\backslash U$ 是有限的。

假设 $K \subseteq \mathbb{N}\times\{\omega\}$ 是一个非空子集，且 $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \sigma(\mathbb{J})$ 是 K 的有向开覆盖，并且 $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$。对于任意 $(x, \omega) \in K$，存在 $j \in I$，使得 $(x, \omega) \in U_j$。由于 $(\mathbb{N}\times\{\omega\})\backslash U_j$ 是有限的，且 $K\backslash U_j \subseteq (\mathbb{N}\times\{\omega\})\backslash U_j$，因此 $K\backslash U_j$ 是有限的。所以，存在 $k \in I$，使得 $K\backslash U_j \subseteq U_k$。对于 U_j 和 U_k，存在 $l \in I$，使得 $U_j \cup U_k \subseteq U_l$。因此，$K = (K \cap U_j) \cup (K\backslash U_j) \subseteq U_j \cup U_k \subseteq U_l$。也就是说，$K \in K(\Sigma\mathbb{J})$。

众所周知，$\Sigma\mathbb{J}$ 是一个弱良滤空间 [13, 例 3.1]。接下来，我们声称 $\Sigma\mathbb{J}$ 是相干的。对于任意 (x_1, y_1)、$(x_2, y_2) \in \mathbb{J}$，我们声称 $\uparrow(x_1,y_1) \cap \uparrow(x_2,y_2)$ 是紧致的。如果 $x_1 = x_2$,，不妨设 $y_1 \leq y_2$,，则 $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$，且 $\uparrow(x_1,y_1) \cap \uparrow(x_2,y_2) = \uparrow(x_2,y_2)$ 是紧致的。如果 $x_1 \neq x_2$,，则$\uparrow(x_1, y_1) \cap \uparrow(x_2, y_2) = \{(m, \omega) \mid m \geq \max\{y_1, y_2\}\} \subseteq \mathbb{N} \times \{\omega\}$。因此，根据前面的段落，$\uparrow(x_1,y_1) \cap \uparrow(x_2,y_2)$ 是紧致的。所以，根据引理 4.21，$\Sigma\mathbb{J}$ 是相干的。由命题 4.5 可知，$\Sigma\mathbb{J}$ 是一个 S^*-良滤空间。

现在我们断言，$\Sigma\mathbb{J}$ 不是强良滤空间。显然，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \uparrow(2, n) \cap \uparrow(3, 3) = \emptyset$，但对于任意$n \geq 3$，$\uparrow(2, n) \cap \uparrow(3, 3) = \{(m, \omega) \mid n \leq m\} \neq \emptyset$。因此，$\Sigma\mathbb{J}$ 不是强 d-空间；故它不可能是强良滤空间。

5. S^*-良滤空间的一些基本性质

本节将探讨S^*-良滤空间的更多性质。首先，我们证明S^*-良滤性具有闭遗传性和饱和遗传性。

命题 5.1。S^*-良滤空间的非空闭子空间是一个 S^*-良滤空间。

证明。设 X 是一个 S^*-良滤空间，Y 是 X 的非空闭子空间。假设 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(Y)$ 是一个滤族，$G \in K(Y)$，且 $C \in \Gamma(Y)\backslash\{Y\}$ 满足对所有 $i \in I$ 均有 $K_i \cap G \cap C \neq \emptyset$。那么 $\{\uparrow_X K_i \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 是一个滤族，$\uparrow_X G \in K(X)$，且 $C \in \Gamma(X)\backslash\{X\}$。显然，$\uparrow_X G \cap Y = G$，且对每个 $i \in I$，都有 $\uparrow_X K_i \cap G = K_i$。因此，

$\uparrow_X K_i \cap \uparrow_X G \cap C = \uparrow_X K_i \cap \uparrow_X G \cap C \cap Y = K_i \cap G \cap C \neq \emptyset$。由于 X 是一个 S^*-良滤空间，由命题4.3可得 $\bigcap_{i\in I} \uparrow_X K_i \cap \uparrow_X G \cap C \neq \emptyset$。因此 $\bigcap_{i\in I} K_i \cap G \cap C = \bigcap_{i\in I}(\uparrow_X K_i \cap Y) \cap (\uparrow_X G \cap Y) \cap (C \cap Y) = \bigcap_{i\in I} \uparrow_X K_i \cap \uparrow_X G \cap C \neq \emptyset$。这说明 Y 是一个 S^*-良滤空间。

□

命题5.2。 S^*-良滤空间的非空饱和子空间是一个 S^*-良滤空间 *ace.*

证明。设 X 是一个 S^*-良滤空间，Y 是 X 的非空饱和子空间。假设 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(Y)$ 是一个滤族，$G \in K(Y)$，且 $U \in O(Y)\backslash\{\emptyset\}$ 满足 $\bigcap_{i\in I} K_i \cap G \subseteq U$。那么存在 $V \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$ 使得 $U = V \cap Y$。由于 $Y = \uparrow_X Y$，我们得到 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 是一个滤族，$G \in K(X)$。因此，$\bigcap_{i\in I} K_i \cap G \subseteq U \subseteq V$。由 X 的 S^*-良滤性，存在 $i_0 \in I$，使得 $K_{i_0} \cap G \subseteq V$。由此可得 $K_{i_0} \cap G \subseteq V \cap Y = U$。因此，Y 是一个 S^*-良滤空间。

□

其次，我们将讨论 S^*-良滤空间在收缩映射下的像是否仍为 S^*-良滤空间。

若存在两个连续映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$，使得 $f \circ g = id_Y$，则称拓扑空间 Y 是拓扑空间 X 的收缩。众所周知，T_0-空间的收缩是 T_0-空间 [4]。

命题 5.3。 S^*-良滤空间的收缩是 S^*-良滤空间。

证明。设 X 是一个 S^*-良滤空间，Y 是 X 的一个收缩。则 Y 是一个 T_0-空间，并且存在连续映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$，使得 $f \circ g = id_Y$。设 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(Y)$ 是一个滤族，$G \in K(Y)$，且 $U \in O(Y)\backslash\{\emptyset\}$ 满足 $\bigcap_{i\in I} K_i \cap G \subseteq U$。由于 f 和 g 连续，我们得到 $f^{-1}(U) \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$，并且对于任意 $K \in K(Y)$，g(K) 是紧致的。于是 $\{\uparrow g(K_i) \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 是一个滤族，且 $\uparrow g(G) \in K(X)$。我们声称，$\bigcap_{i\in I} \uparrow g(K_i) \cap \uparrow g(G) \subseteq f^{-1}(U)$。事实上，对于任意 $x \in \bigcap_{i\in I} \uparrow g(K_i) \cap \uparrow g(G)$，有

$$
\begin{aligned}
f(x) \in f\left(\bigcap_{i\in I} \uparrow g(K_i) \cap \uparrow g(G)\right) &\subseteq f\left(\bigcap_{i\in I} \uparrow g(K_i)\right) \cap f(\uparrow g(G)) \\
&\subseteq \bigcap_{i\in I} f(\uparrow g(K_i)) \cap f(\uparrow g(G)) \\
&\subseteq \bigcap_{i\in I} \uparrow (f(g(K_i)) \cap \uparrow f(g(G)) \\
&\subseteq \bigcap_{i\in I} \uparrow K_i \cap \uparrow G \\
&\subseteq \bigcap_{i\in I} K_i \cap G \\
&\subseteq U,
\end{aligned}
$$

也就是说，$x \in f^{-1}(U)$。因此，$\bigcap_{i\in I} \uparrow g(K_i) \cap \uparrow g(G) \subseteq f^{-1}(U)$。由于 X 是 S^*-良滤空间，存在 $i_0 \in I$，使得 $\uparrow g(K_{i_0}) \cap \uparrow g(G) \subseteq f^{-1}(U)$。对于任意 $t \in K_{i_0} \cap G$，可得 $g(t) \in g(K_{i_0} \cap G) \subseteq g(\uparrow K_{i_0}) \cap g(\uparrow G) \subseteq \uparrow g(K_{i_0}) \cap \uparrow g(G) \subseteq f^{-1}(U)$。因此，$t \in g^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ g)^{-1}(U) = U$。也就是说，某个 $i_0 \in I$ 满足 $K_{i_0} \cap G \subseteq U$。因此，Y 是 S^*-良滤空间。

□

命题 5.4。 设 $\{X_i \mid i \in I\}$ 是一族 T_0-空间。若积空间 $\prod_{i\in I} X_i$ 是 S^*-良滤空间，则对每个 $i \in I$，X_i 都是 S^*-良滤空间。

证明。 设 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 是一个 S^*-良滤空间。对于每个 $i \in I$，X_i 是 X的一个收缩。由命题5.3 可知，对于每个 X_i，它都是一个 S^*- 良滤空间。$i \in I$。

□

在 [24], 中已经证明，两个强良滤空间的积不一定是强良滤空间。下面的例子表明，两个 S^*-良滤空间的积不一定是S^*-良滤空间。

对于链 $2 = \{0, 1\}$，赋予 Scott 拓扑的空间 2 称为 Sierpi´nski 空间。特别地，该空间是清醒的。

例 5.5。考虑例 4.2 中的空间 $\Sigma\mathbb{N}$ 和 Sierpi´nski 空间 $\Sigma 2$。显然， $\Sigma\mathbb{N}$ 和 $\Sigma 2$ 是 S^*-良滤空间。容易证明 $\Sigma\mathbb{N} \times \Sigma 2 = \Sigma(\mathbb{N} \times 2)$。我们声称 $\Sigma\mathbb{N} \times \Sigma 2$ 不是 S^*-良滤空间。事实上，$\{\uparrow(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq K(\Sigma\mathbb{N} \times \Sigma 2)$ 是一个滤族，且 $U = \uparrow(n, 1) = \uparrow n \times \{1\}$。于是，U 是 $\Sigma\mathbb{N} \times \Sigma 2$ 的非空 Scott 开子集，并且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \uparrow(n, 0) = \emptyset \subseteq U$。但对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $\uparrow(n, 0) \not\subseteq U$。因此， $\Sigma\mathbb{N} \times \Sigma 2$ 不是弱良滤空间。由命题 4.5 可知， $\Sigma\mathbb{N} \times \Sigma 2$ 不是 S^*-良滤空间。

由例5.5 和引理2.8，我们可以立即推出以下结果。

命题 5.6。 **S^*-Top$_W$** 范畴不是**Top**$_0$的反射子范畴。

最后，我们将讨论与S^*-良滤空间相关的函数空间。

给定拓扑空间X 和Y，令 TOP(X,Y) 表示从X 到Y的所有连续函数组成的集合。

定义 5.7。 ([3]) 对于两个空间X 和Y，集合 TOP(X,Y) 上的 Isbell拓扑由以下形式的子基生成

$$N(H \leftarrow V) = \left\{f \in TOP(X, Y) \mid f^{-1}(V) \in H\right\},$$

其中H 是完备格 $O(X)$ 的 Scott 开子集，而V 是Y中的开子集。令 [X,Y] 表示赋予 Isbell拓扑的 TOP(X,Y)。

引理 5.8。 *([14])* 设 X 和 Y 是两个 T_0 空间。考虑映射

$$\xi : Y \to [X, Y]$$

$$y \mapsto \xi_y,$$

其中 $\xi_y(x) = y$ 对所有 $x \in X$ 都成立。则 ξ 是连续的。

引理 5.9。 *([15])* 设 X 是一个非空 T_0 空间。对每个 $x \in X$，定义函数 F_x: $[X, Y] \to Y$，其中 $F_x(f) = f(x)$对任意 $f \in [X,Y]$成立。则 F_x 是连续的。

由引理 5.8 和 5.9 可知 Y 是 [X的收缩， Y]。由命题 5.3，可得以下结论。

命题 5.10。 若 X 是一个非空 T_0 空间，且 $[X, Y]$ 是一个 S^*-良滤空间，则 Y 是一个 S^*-良滤空间。

反过来，人们自然会提出以下问题:

If X 是一个非空的 T_0-空间，且 Y 是一个 S^*-良滤空间，那么 $[X、Y]$ 是否为一个 S^*-良滤空间 ？

下面的例子对这个问题给出了否定的回答。

例 5.11。 考虑空间 $\Sigma\mathbb{N}$ 和 Sierpi´nski 空间 $\Sigma 2$，它们见例 5.5。对任意 $n \in \mathbb{N}$，定义函数f_n： $\Sigma 2 \to \Sigma\mathbb{N}$如下

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x = 1; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 f_n 是连续的，且 $\{\uparrow f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq K([\Sigma 2, \Sigma\mathbb{N}])$ 是一个滤族。事实上， $\{\{0,1\}\} \subseteq O(\Sigma 2)$ 和 $\uparrow 4 \in \sigma(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}$。令 $U = N(\{\{0,1\}\} \leftarrow \uparrow 4) = \{g \in [\Sigma 2, \Sigma\mathbb{N}] \mid g^{-1}(\uparrow 4) \in \{\{0,1\}\}\} = \{g \in [\Sigma 2, \Sigma\mathbb{N}] \mid g^{-1}(\uparrow 4) = \{0,1\}\}$。于是$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f_n = \emptyset \subseteq U$。然而，对任意 $n \in \mathbb{N}$，由于以下事实，$f_n \notin U$

$$f_n^{-1}(\uparrow 4) = \begin{cases} \{1\}, & n \geq 4; \\ \emptyset, & n < 4. \end{cases}$$

因此 $\uparrow f_n \not\subseteq U$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$。这意味着 $[\Sigma 2, \Sigma\mathbb{N}]$ 不是弱良滤空间。因此，根据命题 *4.5*，它不是一个 S^*-良滤空间。

6. S^*-良滤性：Smyth幂空间

本节将重点研究 Smyth幂空间的 S^*-良滤性。

对于拓扑空间 X，X 的所有非空紧饱和子集组成的集合记为 $K(X)$，由以下集合生成一个典范拓扑:

$$\Box U = \{K' \in K(X) \mid K' \subseteq U\},$$

其中 U 遍历 X 的开子集，这就是所谓的上 Vietoris 拓扑。我们用 $P_S(K(X))$ 表示由此得到的拓扑空间。$P_S(K(X))$，简记为 $P_S(X)$，称为 X 的 Smyth 幂空间或上空间（见 [5, 16]）。显然，$P_S(X)$ 上的特化序为反包含序，即 $K_1, K_2 \in K(X)$，当且仅当 $K_1 \leq K_2$。

命题 6.1。 设 X 是一个 T_0-空间。若 $P_S(X)$ 是一个 d^*-空间，则 X 是一个 S^*-良滤空间。

证明。假设 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 是一个滤族，$G \in K(X)$，且 $U \in O(X)\backslash\{\emptyset\}$ 满足$\bigcap_{i\in I} K_i \cap G \subseteq U$。那么 $\{K_i \mid i \in I\} \in \mathcal{D}(P_S(X))$，并且$\bigcap_{i\in I} \uparrow_{P_S(X)} K_i \cap \uparrow_{P_S(X)} G = \{K \in P_S(X) \mid K \subseteq \bigcap_{i\in I} K_i \cap G\} \subseteq \Box U$。由于 $P_S(X)$ 是一个 d^*-空间，存在 $i_0 \in I$ 使得 $\uparrow_{P_S(X)} K_{i_0} \cap \uparrow_{P_S(X)} G \subseteq \Box U$。对于任意 $x \in K_{i_0} \cap G$，有 $\uparrow x \in \uparrow_{P_S(X)} K_{i_0} \cap \uparrow_{P_S(X)} G \subseteq \Box U$。因此， $\uparrow x \subseteq U$，即 $x \in U$。所以 X 是一个 S^*-良滤空间。

□

由命题 4.11 和 6.1 可立即得到以下推论

推论 6.2。 *([2])* 设 X 为 T_0-空间。如果 $P_S(X)$ 是 d^*-空间，则 X 是 d^*-空间。

L引理 6.3。 *([13])* 对于弱良滤空间 X 和滤族 $\mathcal{K} \subseteq K(X)$，$\bigcap \mathcal{K} \in K(X)$。

命题 6.4。 设 X 为 T_0-空间。如果 X 是相干弱良滤空间，则 $P_S(X)$ 是 d^*-空间。

证明。设 X 是相干弱良滤空间。假设 $\{K_i \mid i \in I\} \in \mathcal{D}(P_S(X))$、$G \in P_S(X)$ 以及 $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(P_S(X))\backslash\{\emptyset\}$ 满足 $\bigcap_{i\in I} \uparrow_{P_S}(X)K_i \cap \uparrow_{P_S}(X)G \subseteq \mathcal{U}$。则 $\{K_i \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 是一个滤族，并且 $\mathcal{U} = \bigcup_{j\in J} \square U_j$，其中某个 $\{U_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{O}(X)\backslash\{\emptyset\}$。如果存在 $i_0 \in I$ 使得 $K_{i_0} \cap G = \emptyset$，则 $\uparrow_{P_S}(X)K_{i_0} \cap \uparrow_{P_S}(X)G \subseteq \mathcal{U}$。现在设对于所有 $i \in I$ 都有 $K_i \cap G \neq \emptyset$。则对于所有 $i \in I$，$K_i \cap G$ 是紧致的，因为 X 是相干的。因此，$\{K_i \cap G \mid i \in I\} \subseteq K(X)$ 是一个滤族，并且根据引理 6.3，$\bigcap_{i\in I}(K_i \cap G) \in K(X)$。所以 $\uparrow_{P_S}(X) \bigcap_{i\in I}(K_i \cap G) = \bigcap P_S(X) \uparrow_{P_S}(X)K_i \cap \uparrow_{P_S}(X)G \subseteq \mathcal{U} = \bigcup_{j\in J} \square U_j$。这意味着存在 $j_0 \in J$，使得 $\bigcap_{i\in I}(K_i \cap G) \in \square U_{j_0}$。因此，$\bigcap_{i\in I}(K_i \cap G) \subseteq U_{j_0}$。由 X 的弱良滤性，存在 $i_1 \in I$，使得 $K_{i_1} \cap G \subseteq U_{j_0}$。因此，$\uparrow_{P_S}(X)K_{i_1} \cap \uparrow_{P_S}(X)G = \uparrow_{P_S}(X)K_{i_1} \cap G \subseteq \square U_{j_0} \subseteq \mathcal{U}$。于是，$P_S(X)$ 是一个 d^*-空间。

□

以下两个推论由命题 4.5 和 6.4显然可得。

Co论 6.5。 设 X 是一个 T_0-空间。若 X 是相干的 S^*-良滤空间，则 $P_S(X)$ 是一个 d^*-空间 .

推论 6.6。 设 X 是一个 KC空间。若 X 是 S^*-良滤空间，则 $P_S(X)$ 是一个 d^*-空间。

由命题 4.5、4.11、6.1 和 6.4，我们可推得以下结论。

定理 6.7。 设 X 是一个 T_0-空间。考虑以下条件：

(1) $P_S(X)$ 是一个 S^*-良滤空间；(2) $P_S(X)$ 是一个 d^*-空间；(3) X 是一个 S^*- 良滤空间；(4) X 是一个弱良滤空间。

那么，(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4)。此外，(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) 若 X 是相干的。

推论 6.8。 设 X 是一个 T_0-空间。考虑以下条件：

(1) $P_S(X)$ 是一个 S^*-良滤空间；(2) $P_S(X)$ 是一个 d^*-空间；(3) X 是一个 S^*- 良滤空间；(4) X 是一个弱良滤空间。

那么(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4)。此外，(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) 如果 X 是 KC空间。

对于 T_0-空间 X 和 U $\in O(X)$，令 $\diamond U = \{A \in \Gamma(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}$。$\Gamma(X)\backslash\{\emptyset\}$ 上的下维埃托里斯拓扑是以 $\{\diamond V \mid V \in O(X)\}$ 为子基的拓扑，由此得到的空间记为 $P_H(X)$，称为 X [16] 的 Hoare 幂空间或下空间。

引理 6.9. *([29])* 对于 T_0-空间 X，*Hoare*幂空间 $P_H(X)$ 是强良滤空间。

推论 6.10. 对于 T_0-空间 X，*Hoare*幂空间 $P_H(X)$ 是 S^*-良滤空间。

参考文献

[1] S. Abramsky, A. Jung，域理论，载于：S. Abramsky, D. Gabbay, T. Maibaum（编），《语义结构》，载于：《计算机科学逻辑手册》第3卷，Clarendon Press，1994，第1-168页。[2] X. Chu, Q. Li，d^*-空间，《理论信息学与计算机科学电子札记》2（2023）1-7。[3] G. Gierz, K. Hofmann, K. Keimel, J. Lawson, M. Mislove, D. Scott，《连续格与域》，《数学及其应用百科全书》第93卷，剑桥大学出版社，2003。[4] J. Goubault-Larrecq，《非豪斯多夫拓扑与域理论》，《新数学专著》第22卷，剑桥大学出版社，2013。[5] R. Heckmann, K. Keimel，拟连续域与Smyth幂域，《理论信息学与计算机科学电子札记》298（2013）215-232。[6] P. Johnstone，Scott并非总是Sob空间，载于：B. Banaschewski, R.-E. Hoffmann（编），《连续格会议论文集》，不来梅，1979，第871卷，Springer，柏林、海德堡，1981，第282-283页。[7] X. Jia, A. Jung, Q. Li，关于有向完备偏序集相干性的一则注记，《拓扑学及其应用》209（2016）235-238。[8] K. Keimel, J. Lawson，D-完备化与d-拓扑，《纯粹与应用逻辑年刊》159(3)（2009）292-306。[9] J. Lawson, X. Xu，由可数多个局部紧子空间确定的空间，《拓扑学及其应用》353（2024）108973。[10] J. Lawson, X. Xu，T_0-空间与下拓扑，《计算机科学中的数学结构》34（2024）467-490。[11] B. Liu, Q. Li, W. Ho，关于与d-空间相关的函数空间，《拓扑学及其应用》300（2021）107757。[12] C. Lu, D. Liu, Q. Li，c-空间函数空间上的Isbell拓扑与Scott拓扑相等，《休斯敦数学杂志》45 (1)（2019）265-284。

[13] C. Lu, Q. Li，弱良滤过与相干性，《拓扑学及其应用》230（2017）373-380。[14] C. Lu, Q. Li，弱 Sob 性与上空间的一些刻画，《拓扑学及其应用》298（2021）107711。[15] Q. Li, M. Jin, H. Miao, S. Chen，关于Sob空间相关若干结果，《数学科学学报》43(4)（2023）1477-1490。[16] A. Schalk，《广义幂构造的代数》，博士论文，达姆施塔特工业大学，1993。[17] C. Shen, X. Xi, D. Zhao，域理论中某些T_0-空间范畴的反射性，《落基山数学杂志》54（2024）1149-1166。[18] D. Scott，指称语义的域。载于：《计算机科学讲义》第140卷，Springer Verlag，1982，第577-613页。[19] L. Skula，关于所有拓扑空间范畴的一个反射子范畴，《美国数学学会汇刊》142（1969）37-41。[20] A. Wilansky，介于T_1 与T_2, 之间，《美国数学月刊》74（1967）261-266。[21] O. Wyler，Dedekind完备偏序集与Scott拓扑，第384-389页，载于《连续格》（不来梅，1979），B. Banaschewski和R.-E. Hoffmann编，数学讲义871，Springer，纽约，1981。[22] G. Wu, X. Xi, X. Xu, D. Zhao，良滤化的存在性，《拓扑学及其应用》267（2019）107044。[23] L. Xu，一致连续偏序集及其有向完备化，《扬州大学学报（自然科学版）》3（2000）1-10。[24] X. Xu，强良滤空间与强 d-空间，《拓扑学及其应用》377（2026）109654。[25] X.Xu, C. Shen, X. Xi, D. Zhao，关于由良滤空间确定的T_0-空间，《拓扑学及其应用》282（2020）107323。[26] X. Xi, J. Lawson，关于良滤空间与有序集，《拓扑学及其应用》228（2017）139-144。[27] X. Xu, D. Zhao，关于拓扑Rudin引理、良滤空间与Sob空间，《拓扑学及其应用》272（2020）107080。[28] X. Xu, D. Zhao，关于良滤空间与Sob空间的一些公开问题，《拓扑学及其应用》301（2021）107540。

[29] X. Xu、Y. Yang、L. Chen，《上确界完备偏序集上拓扑的强良过滤性》，arXiv 电子预印本（2025）。