arXiv:2601.11306v1 [math.QA] 16 Jan 2026

$GL(m)$ 型量子矩阵的谱表示

Dimitry Gurevich*现代数学高等学校，莫斯科物理技术学院

Pavel Saponov†俄罗斯国立高等经济大学，俄罗斯联邦莫斯科米亚斯尼茨卡娅街*20*号，邮编*101000*；以及俄罗斯科学院库尔恰托夫研究所国家研究中心高能物理研究所

”

普罗特维诺 *142281*，俄罗斯联邦

Mikhail Zaitsev‡俄罗斯国立高等经济大学，俄罗斯联邦莫斯科市米亚斯尼茨卡娅街*20*号，*101000*

2026年1月19日

摘要

本文研究与偶斜可逆海克对称性相对应的反射方程代数 $\mathcal{L}(R)$。我们的主要结果是，计算以整数分拆为标记的有限维表示中， $\mathcal{L}(R)$ 的生成矩阵 L 的谱值的特征标。众所周知，这些谱值属于反射方程代数中心的一个代数扩张，而中心中的元素可以表示为谱值的对称函数。作为我们方法的应用，我们计算了上述有限维表示中幂和 $\mathrm{Tr}_R(L^n)$ 的特征标。

在 Drinfeld-Jimbo R-矩阵的一个特例中，包络代数 $U(gl(N))$ 可以作为反射方程代数的一个特定极限得到。在这一极限下，我们关于幂和的结果与 [PP] 中得到的结果一致。

AMS 数学主题分类，2020： 81R60

关键词： 反射方程代数、特征子代数、Cayley-Hamilton 恒等式、量子矩阵的谱、量子特征值的特征标。

1 引言

量子矩阵是指由某个代数的生成元构成的矩阵 L，它与两个相容的编织算子 R 和 F 相关联（定义和详细说明见 [IOP] ）。本文研究的是这类代数的一个特定子类，对应于如下情形

*gurevich@ihes.fr

†Pavel.Saponov@ihep.ru

‡mzaicev02@gmail.com

$F = R$。这类代数称为反射方程（RE）代数，记作 $\mathcal{L}(R)$。这类代数的共同特征是，其生成矩阵 L 满足一个多项式关系，且关系的系数在 $\mathcal{L}(R)$ 中是中心的。该关系是经典凯莱-哈密顿恒等式的非交换类比。这一性质使我们能够将生成矩阵 L 的特征值引入为代数 $\mathcal{L}(R)$ 的中心扩张中的元素。本文旨在计算矩阵 L 的特征值在代数 $\mathcal{L}(R)$ 的一族（猜想为不可约）表示中的特征标，其中 R 是双秩为 $(m|0)$ 的偶 Hecke 对称（见第2节）。对应于这类 Hecke 对称的代数 $\mathcal{L}(R)$ 称为 $GL(m)$ 型反射方程代数。

我们以代数 $U(gl(N))$ 为例，说明上述构造。该代数可视为反射方程代数的一个特定极限，后者与 R 相关，而 R 源自 $U_q(sl(N))$——即所谓的 Drinfeld-Jimbo R-矩阵（见第 3 节）。

设 $\hat{}l_i^j$, $1 \le i,\ j \le N$为 $U(gl(N))$ 的标准生成元，它们满足以下交换关系组：

$$\hat{l}_i^j\,\hat{l}_k^m - l_k^m\,\hat{l}_i^j = \hat{l}_i^m\,\delta_k^j - \hat{l}_k^j\,\delta_i^m.$$

该关系组可写成以下矩阵形式：

$$P\,(\hat{L}\otimes I)\,P\,(\hat{L}\otimes I) - (\hat{L}\otimes I)\,P\,(\hat{L}\otimes I)\,P = P\,(\hat{L}\otimes I) - (\hat{L}\otimes I)\,P, \tag{1.1}$$

其中 $\hat{}\ L = \|\hat{}l_i^j\|_{1\le i,\ j\le N}$, I是 $N\times N$单位矩阵，而 P是通常的翻转 $N^2\times N^2$矩阵。矩阵 $\hat{}L$ 称为代数 $U(gl(N))$ 的生成矩阵。

$\hat{}$ 生成矩阵 L 满足一个多项式关系，它是通常的凯莱-哈密顿恒等式的类似形式：

$$\hat{L}^N + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k a_k(\hat{L})\,\hat{L}^{N-k} = 0, \tag{1.2}$$

$\hat{}$ 其中系数 $a_k(L)$ 属于代数 $U(gl(N))$ 的中心 $Z(U(gl(N))$。

$\hat{}$ 我们以自然方式引入生成矩阵 L的谱值（或特征值）$\hat{}\mu_i$, $1\le i\le N$：

$$a_1(\hat{L}) = \sum_{i=1}^{N}\hat{\mu}_i, \qquad a_2(\hat{L}) = \sum_{i<j}^{N}\hat{\mu}_i\,\hat{\mu}_j, \qquad \dots \qquad a_N(\hat{L}) = \prod_{i=1}^{N}\hat{\mu}_i. \tag{1.3}$$

特征值 $\hat{}\mu_i$被假定为扩张代数 $U(gl(N))[\hat{}\mu_1,\ \dots\dots,\ \hat{}\mu_N]$中的中心元。根据定义（1.3），凯莱-哈密顿恒等式（1.2）可以在扩张代数中写成因式分解形式：

$$\prod_{k=1}^{N}(\hat{L} - \hat{\mu}_k\,I) = 0.$$

此外，代数 $U(gl(N))[\hat{}\mu_1,\ \dots\dots,\ \hat{}\mu_N]$ 的任意中心元都可以表示为特征值 $\hat{}\mu_k$的对称函数。

众所周知，代数 $U(gl(N))$ 的任意有限维不可约表示（按同构类计）都可以由一个分拆标记

$$\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_N \ge 0).$$

由于代数 $gl(N)$ 是约化的，因此在此类表示 π_λ 中，任意中心元 $z\in Z(U(gl(N)))$ 的像 $\pi_\lambda(z)$ 都是一个标量算子。中心元 $p_k = \mathrm{Tr}\,\hat{}L^k$, $k\ge 0$ 的像 $\pi_\lambda(p_k)$ 的取值称为幂和，其计算见 [PP]。

不难为每个特征值 $\hat{\mu}_i$ 指定一个值 $\pi_\lambda(\hat{\mu}_i)$，使之与取值 $\pi_\lambda(p_k)$ 相容，或者说，与 $\pi_\lambda(a_k)$ 的取值相容。从这个意义上说，我们讨论矩阵 L 的谱的表示。

$\hat{}$现在我们来讨论一般情形。所谓修正反射方程代数，是指代数 $\mathcal{L}(R)$，$\hat{}$其生成矩阵 L 满足与（1.1）类似的关系式，其中矩阵 P由 Hecke 对称 R取代。若矩阵 R 是通常翻转的形变（例如， R 来自量子群 $U_q(sl(N))$，或者它是 Crammer-Gervais对称），$\hat{}$那么代数 $\mathcal{L}(R)$是代数 $U(gl(N))$的形变。

注意，对于 Hecke 对称 R，修正反射方程代数 $\hat{\mathcal{L}}(R)$与反射方程代数 $\mathcal{L}(R)$同构，后者由生成元之间的纯二次关系式定义（详情见第3节）。

$\hat{\mathcal{L}}(R)$是型 $GL(m)$ 的重要性质，其表示论与 $U(gl(m))$的重要性质相似。相应的有限维表示 π_λ由整数分拆标记，其高度（非零分量的数量）不超过 m。注意，数值 m由 R 的双秩确定（见第2节）。

本文结构如下。第2节回顾 Hecke 代数及其 R-矩阵表示的一些定义和性质。第3节回顾反射方程代数中心的某些性质，以及其一些有限维表示的性质。最后一节给出本文的主要结果：我们计算量子矩阵 L 和 L 的谱元素在上述反射方程代数表示中的特征标，并展示其向 [PP]经典结果的极限过渡。此外，对于来自量子群 $U_q(sl(N))$ 的矩阵 R （在这种情况下 $m = N$），我们关于幂和 $\mathrm{Tr}_R(L^k)$ 的特征标的结果与 [JLM] 中通过不同方法得到的结果一致。

2 Hecke 代数与海克对称

本节回顾 Hecke 代数和 Hecke型辫子（称为海克对称）的一些事实，这些内容对于研究反射方程代数 $\mathcal{L}(R)$的中心及其有限维表示至关重要。

Hecke 代数 $\mathcal{H}_n(q)$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个结合含单位代数，由有限集合中的 Artin 生成元 τ_i、$1 \le i \le n-1$生成，并满足以下关系式

$$\tau_i\,\tau_{i+1}\,\tau_i = \tau_{i+1}\,\tau_i\,\tau_{i+1}, \qquad \tau_i\,\tau_j = \tau_j\,\tau_i \quad |i-j| \ge 2,$$

and

$$(q\,e - \tau_i)(q^{-1}\,e + \tau_i) = 0, \quad 1 \le i \le n-1, \qquad q \in \mathbb{C} \setminus 0.$$

这里， e 是该代数的单位元。注意，当 $q = \pm 1$ 时，我们得到对称群代数 $\mathbb{C}[S_n]$的定义关系。

在下文中，我们假设参数 q 是一般的，这意味着 $q^k \neq 1$、 $\forall k \ge 1$。对于一般的 q ，Hecke 代数 $\mathcal{H}_n(q)$ 与 $\mathbb{C}[S_n]$ 对所有 $n \ge 1$均同构。因此，Hecke 代数 $\mathcal{H}_n(q)$ 是有限维、半单的，并且同构于有限维矩阵代数的直积。作为推论，在代数 $\mathcal{H}_n(q)$ 中存在一个由“矩阵单位” $\{e^\lambda_{ij}\}_{1\le i、j\le d_\lambda}$ 构成的线性基，该基由整数 n的所有分拆 λ 参数化。这里，d_λ 是与分拆 λ对应的标准杨表的数量。注意，这些矩阵单位的乘法表如下：

$$e^\lambda_{ki}\,e^\mu_{rp} = \delta^{\lambda\mu}\delta_{ir}\,e^\lambda_{kp}. \tag{2.1}$$

这些元素 $e^\lambda_i := e^\lambda_{ii}$, $\lambda \vdash n$, $1 \le i \le d_\lambda$, 是定义单位元分解的本原正交幂等元 e:

$$e = \sum_{\lambda\vdash n}\sum_{i=1}^{d_\lambda} e^\lambda_i. \tag{2.2}$$

所有这些幂等元的显式构造见于 [OP]（另请参阅其中的参考文献）。

$\mathcal{H}_n(q)$的一个极大交换子代数由所谓的 尤西斯-墨菲元 $\{j_k\}_{1\le k\le n}$生成，它们由以下关系式定义：

$$j_1 = e, \qquad j_k = \tau_{k-1}\, j_{k-1}\tau_{k-1}, \quad 2 \le k \le n. \tag{2.3}$$

设 V是一个有限维复向量空间，维数为 $_{\mathbb{C}}V = N$。编织算子 是一个算子$R\colon V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$，满足辫子关系：

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}. \tag{2.4}$$

这里 $R_{12} = R \otimes \mathrm{Id}_V$, $R_{23} = \mathrm{Id}_V \otimes R$。

以下我们固定空间 V中的一个基 $\{x_i\}_{1\le i\le N}$，并将空间 $V^{\otimes p}$、$p \ge 1$中的算子与其在相应张量基 $\{x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_p}\}$下的矩阵视为相同。

下面我们使用以下方式将 $N^2 \times N^2$矩阵 R嵌入 $N^p \times N^p$矩阵空间：

$$R_{i\,i+1} = I^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes I^{\otimes(p-i-1)}, \qquad 1 \le i \le p-1, \tag{2.5}$$

I 是单位矩阵 $N \times N$。在下文中，我们不固定整数 p，只假设它足够大，以使所有矩阵公式都有意义。此外，我们将使用简写记号 R_i 表示 R_{ii+1}。容易看出，所有副本 R_i都满足辫子关系 (2.4)：

$$R_iR_{i+1}R_i = R_{i+1}R_iR_{i+1}, \quad \forall\, i \ge 1. \tag{2.6}$$

满足 Hecke 条件的编织算子 R

$$(q\, I^{\otimes 2} - R)(q^{-1}I^{\otimes 2} + R) = 0, \qquad q \in \mathbb{C} \setminus 0, \quad q \ne \pm 1 \tag{2.7}$$

称为***Hecke*** 对称。若 $q = \pm 1$，相应的编织算子 R 称为对合对称。

任意 Hecke 对称 R 都定义了 Hecke 代数的一个 R-矩阵表示 $\rho_R\colon \mathcal{H}_n(q) \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$。该表示在 Artin 生成元上的映射如下：

$$\rho_R(\tau_k) \mapsto R_k := I^{\otimes(k-1)} \otimes R \otimes I^{\otimes(n-k-1)}, \quad 1 \le k \le n-1. \tag{2.8}$$

R-矩阵表示中尤西斯-墨菲元的像由以下矩阵给出：

$$J_k = \rho_R(j_k) = R_{k-1}\ldots R_2R_1^2R_2\ldots R_{k-1}. \tag{2.9}$$

下文也将矩阵 J_k 称为尤西斯-墨菲元。

对任意对称 R，都可以自然地关联到空间 V 的 R-对称代数和 R-反对称代数（定义见 [G、GPS1] ）。若 R 的R-反对称代数是有限维的，则称对称为偶。此时， R-反对称代数的希尔伯特-庞加莱级数是次数为 m的多项式。这种情况下，称对称 R 的双秩为 $(m|0)$（详见 [GPS1] ）。

此外，我们假设任意对称 R 都是斜可逆的。这意味着存在一个算子 $\Psi\colon\ V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$，使得

$$\mathrm{Tr}_{(2)}(R_{12}\Psi_{23}) = P_{13} = \mathrm{Tr}_{(2)}(\Psi_{12}R_{23}).$$

下文还将使用 $N \times N$矩阵 $B = \|B_i^j\|$ 和$C = \|C_i^j\|$, 其定义如下：

$$B_i^j = \sum_{a=1}^{N} \Psi_{ai}^{aj}, \qquad C_i^j = \sum_{a=1}^{N} \Psi_{ia}^{ja}, \tag{2.10}$$

其中， $\|\Psi_{ij}^{ks}\|$ 是算子 Ψ 在空间 $V^{\otimes 2}$的张量基下的矩阵。

定义 1 设 M 是一个 $N \times N$ 矩阵，其元素取自任意复向量空间 U。其R-迹定义为映射 $\mathrm{Mat}_N(U) \to U$，由以下规则给出：

$$\mathrm{Tr}_R\, M := \mathrm{Tr}\,(C \cdot M). \tag{2.11}$$

下面我们采用多重迹的简便记号：

$$\langle M_{12\ldots k}\rangle_{1\ldots k} := \mathrm{Tr}_{R(12\ldots k)} M_{12\ldots k} = \mathrm{Tr}_{(12\ldots k)}(C_1 C_2 \ldots C_k M_{12\ldots k})$$

其中 $M_{12\ldots k} \in$ 矩阵$_N(U)^{\otimes k}$是任意 $N^k \times N^k$矩阵，而 $C_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes C \otimes I^{\otimes(k-i)}$。$R$-迹具有有用的循环性质。也就是说，对于矩阵 Q 中的任意多项式R_1、.....、R_{k-1} 以及任意矩阵 $M_{12\ldots k}$，有如下恒等式成立：

$$\langle M_{12\ldots k}\, Q(R_1, \ldots, R_{k-1})\rangle_{1\ldots k} = \langle Q(R_1, \ldots, R_{k-1})\, M_{12\ldots k}\rangle_{1\ldots k}.$$

这一循环性质是以下关系的直接推论：

$$R_i C_i C_{i+1} = C_i C_{i+1} R_i, \quad \forall\, i \geq 1.$$

3 反射方程代数及其基本性质

现在，我们定义与斜可逆 Hecke 对称 R 相关的反射方程（RE）代数。根据定义，对应于给定对称 R 的反射方程代数 $\mathcal{L}(R)$，是由元素 l_i^j，$1 \leq i,\ j \leq N$ 有限生成的含幺结合代数，并满足以下二次置换关系：

$$R\,(L \otimes I) R\,(L \otimes I) - (L \otimes I) R\,(L \otimes I) R = 0, \qquad L = \|l_i^j\|. \tag{3.1}$$

注意，生成矩阵 $L = \sum_{i,\ j=1}^{N} E_i^j \otimes l_i^j$ 实际上是代数 $\mathrm{End}(\mathbb{C}^N) \otimes \mathcal{L}(R)$ 的一个元素，其中 E_i^j 是矩阵单位 —— 它们构成 $\mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$ 的一组线性基。

引入一个新的生成矩阵 $\hat{L}$：

$$L = I e_{\mathcal{L}} - (q - q^{-1})\hat{L}, \tag{3.2}$$

其中 $e_{\mathcal{L}}$ 是代数 $\mathcal{L}(R)$ 的单位元。由式 (3.1) 及 Hecke ˆ 条件 (2.7)，可得矩阵 L 满足以下二次线性关系：

$$R\,(\hat{L} \otimes I) R\,(\hat{L} \otimes I) - (\hat{L} \otimes I) R\,(\hat{L} \otimes I) R = R\,(\hat{L} \otimes I) - (\hat{L} \otimes I) R, \tag{3.3}$$

它与 (1.1) 类似，但将 P 替换为 R。相应的代数称为修正的ˆ ˆ 反射方程代数，记作 $\mathcal{L}(R)$。显然，当 $q \neq \pm 1$ 时，代数 $\mathcal{L}(R)$ 和 $\mathcal{L}(R)$ 彼此同构。

注 2 注意，对于来自量子群 $U_q(sl(N))$ 的 R-矩阵（Drinfeld-Jimbo R-矩阵），定义关系式 (3.3) 在 $q \to 0$ 处的极限变为关系式 (1.1)，而相应的修正反射方程代数 $\mathcal{L}(R)$ 趋于 $U(gl(N))$。

此外，我们定义矩阵 L“平移”到更高位置[1]的副本：

$$L_{\underline{1}} = L_{\overline{1}} = L \otimes I^{\otimes(p-1)}, \qquad L_{\overline{k}} = R_{k-1} L_{\overline{k-1}} R_{k-1}^{-1}, \qquad L_{\underline{k}} = R_{k-1}^{-1} L_{\underline{k-1}} R_{k-1}, \qquad k \geq 2.$$

[1]正如我们上面注意到的，p的值并未指定为一个具体数值。

此外，我们为上述余乘子的乘积引入一种简洁的记法:

$$L_{\overline{k\to r}} = L_{\overline{k}} L_{\overline{k+1}} \dots L_{\overline{r-1}} L_{\overline{r}}, \qquad L_{\underline{r\to k}} = L_{\underline{r}} L_{\underline{r-1}} \dots L_{\underline{k+1}} L_{\underline{k}}, \quad k < r.$$

现在，按照 [IP] ，我们定义映射 $ch:\ \mathcal{H}_n(q) \to \mathcal{L}(R)\ \ \forall n \geq 1$:

$$\forall\, z \in \mathcal{H}_n(q): \quad z \mapsto ch(z) = \langle \rho_R(z)\, L_{\overline{1\to n}} \rangle_{1\dots n}. \tag{3.4}$$

正如 [IP], 中所证明的，对所有 $n \geq 1$ 而言，这类像构成的集合是 $\mathcal{L}(R)$ 的中心的一个结合子代数。我们称之为特征子代数。

若在 (3.4) 中取 $z = e_i^{\lambda}$，相应的中心元 $s_\lambda(L) = ch(e_i^{\lambda})$ 与数 i 无关，称为舒尔多项式 [GPS2]。若取 $z = \tau_{n-1}...\tau_1$ 或 $z = \tau_{n-1}^{-1} \dots \tau_1^{-1}$，则分别得到第一类幂和 $p_n(L)$ 或第二类幂和 $t_n(L)$。根据定义 (3.4)，这些中心元可写为:

$$p_n(L) \ = \ \langle R_{n-1} \dots R_1 L_{\overline{1\to n}} \rangle_{1\dots n} = \langle R_{n-1} \dots R_1 L_{\underline{n\to 1}} \rangle_{1\dots n}, \tag{3.5}$$

$$t_n(L) \ = \ \langle R_{n-1}^{-1} \dots R_1^{-1} L_{\overline{1\to n}} \rangle_{1\dots n} = \langle R_{n-1}^{-1} \dots R_1^{-1} L_{\underline{n\to 1}} \rangle_{1\dots n}. \tag{3.6}$$

这些公式中的最后几个等式成立，是因为反射方程代数 $\mathcal{L}(R)$ 的生成矩阵满足以下恒等式（见 [IP]）:

$$L_{\overline{1\to k}} = L_{\underline{k\to 1}}, \qquad \forall\, k \geq 2.$$

现在，我们假设所讨论的所有对称性 R均为双秩 $(m|0)$ 的偶对称性（见[GPS1]）。因此，代数 $\mathcal{L}(R)$ 的生成矩阵满足如下版本的凯莱-哈密顿恒等式（见 [GPS3]）:

$$L^m + \sum_{k=1}^{m} (-q)^k a_k(L)\, L^{m-k} = 0, \tag{3.7}$$

其中， $a_k(L)$ 是 k 阶初等对称多项式，即与分拆 $\lambda = (1,\ 1,\ \dots\dots,\ 1) = (1^k)$ 对应的舒尔多项式。

由于多项式 (3.7) 的系数 $a_k(L)$ 是中心元，因此，类似于引言中定义的量 $\hat{}\mu_i$ ，自然可以引入新的中心元 $\{\mu_i\}_{1\leq i\leq m}$ ，将其定义为下列多项式方程组的解 [GPS5]:

$$qa_1(L) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i, \qquad q^2 a_2(L) = \sum_{i<j}^{m} \mu_i\, \mu_j, \qquad \dots \qquad q^m a_m(L) = \prod_i \mu_i. \tag{3.8}$$

因此，元素 μ_i，称为量子矩阵 L 的谱值（或特征值），属于扩张代数 $\mathcal{L}(R)[\mu_1, \dots \mu_m]$。

命题 3 </style}两类幂和与初等对称多项式满足以下关于 $\forall\, n \geq 1$ 的恒等式:

$$\begin{aligned} n_q a_n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k q^{n-k} a_{n-k}\, p_k &= 0 \\ n_q a_n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k q^{k-n} a_{n-k}\, t_k &= 0 \\ p_n = t_n + (q - q^{-1}) \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}\, t_k. \end{aligned} \tag{3.9}$$

在上述恒等式中，应注意，对于双秩为 $(m|0)$ 的 Hecke 对称，初等对称多项式 $a_n(L) \equiv 0$ if $n > m$。

证明。 第一组和第二组恒等式称为量子牛顿关系，第一组的证明见 [GPS3], ，第二组恒等式的证明方法类似。我们来证明第三组恒等式。

为此，我们使用 Hecke 条件 $R = R^{-1} + \omega I^{\otimes 2}$（下文采用记号 $\omega = q - q^{-1}$），并逐步变换表达式 $p_k(L)$ 中的 R 矩阵。由此得到:

$$\begin{aligned} p_n &= \langle L_{\overline{1\to n}} R_{n-1} \dots R_1 \rangle_{1\dots n} = \langle L_{\overline{1\to n}} R_{n-1}^{-1} R_{n-2} \dots R_1 \rangle_{1\dots n} + \omega \langle L_{\overline{1\to n-1}} R_{n-2} \dots R_1 L_{\overline{n}} \rangle_{1\dots n} \\ &= \langle L_{\overline{1\to n}} R_{n-1}^{-1} R_{n-2} \dots R_1 \rangle_{1\dots n} + \omega\, p_{n-1}\, t_1 = \langle L_{\overline{1\to n}} R_{n-1}^{-1} R_{n-2}^{-1} R_{n-3} \dots R_1 \rangle_{1\dots n} \\ &+ \omega \langle L_{\overline{1\to n-2}} R_{n-3} \dots R_1 \rangle_{1\dots n-2} \langle L_{\overline{n-1}} L_{\overline{n}} R_{n-1}^{-1} \rangle_{n-1\, n} + \omega\, p_{n-1}\, t_1 \\ &= \langle L_{\overline{1\to n}} R_{n-1}^{-1} R_{n-2}^{-1} R_{n-3} \dots R_1 \rangle_{1\dots n} + \omega(\, p_{n-2}\, t_2 + p_{n-1}\, t_1) = \dots \\ &= t_n + \omega \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k} t_k. \end{aligned}$$

注意，关系系统 (3.9) 是三角形的（另外两个系统也是如此），元素 t_n 可以借助克拉默法则表示为关于 p_k、 $1 \le k \le n$ 的多项式（反之亦然）：

$$t_n = (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & \omega p_1 & 1 & \dots & 0 \\ p_3 & \omega p_2 & \omega p_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ p_n & \omega e_{n-1} & \omega p_{n-2} & \dots & \omega p_1 \end{pmatrix}.$$

这反映了有限集合 $\{a_k(L)\}_{1\le k\le m}$、 $\{p_k(L)\}_{1\le k\le m}$ 和 $\{t_k(L)\}_{1\le k\le m}$ 是特征子代数的不同生成集这一事实。 ■

谱参数化 (3.8) 得到幂和的如下参数化（见 [GPS2]）：

$$p_n(L) = p_n(\mu) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i^n\, d_i(\mu), \qquad d_i(\mu) = q^{-1} \prod_{j\neq i} \frac{\mu_i - q^{-2}\,\mu_j}{\mu_i - \mu_j}. \tag{3.10}$$

因此，用量子谱表示后，幂和 $p_n(\mu)$ (3.10) 与 Hall-Littlewood多项式 $q_n(\mu; t)$ [M], 成正比，条件是 $t = q^{-2}$:

$$q_n(\mu; t)\big|_{t=q^{-2}} = \omega p_n(\mu).$$

现在引入形式变量 x 的生成函数:

$$A(x) = 1 + \sum_{k=1}^{m} a_k x^k, \quad P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x^k, \quad T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x^k.$$

于是，命题 3 得出以下结论。

C推论 4 这些生成函数通过以下关系彼此相连 s:

$$\omega A(qx) P(-x) = A\left(\frac{x}{q}\right) - A(qx), \tag{3.11}$$

$$\omega A\left(\frac{x}{q}\right) T(-x) = A\left(\frac{x}{q}\right) - A(qx), \tag{3.12}$$

$$P(x) = T(x) + \omega P(x) T(x). \tag{3.13}$$

接下来，我们使用谱参数化 (3.8)，以求出生成函数对谱值 μ_i 的依赖关系。

命题5 将生成函数 $P(x)$ 和 $T(x)$ 用特征值μ_i表示，可得：

$$1+\omega P(x)=\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q^{-2}\mu_i x}{1-\mu_i x},\qquad 1-\omega T(x)=\prod_{i=1}^{m}\frac{1-\mu_i x}{1-q^{-2}\mu_i x}. \tag{3.14}$$

证明。 利用初等对称函数 $a_i(L)$ 的参数化形式 (3.8)，可得：

$$A(qx)=1+\sum_{k=1}^{m}x^k\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le m}\mu_{i_1}\ldots\mu_{i_k}\Big)=\prod_{i=1}^{m}(1+\mu_i x).$$

于是，公式 (3.14) 中的第一个公式直接由 (3.11) 得出：

$$1+\omega P(x)=\frac{A(-x/q)}{A(-qx)}=\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q^{-2}\mu_i x}{1-\mu_i x}.$$

公式 (3.14) 中的第二个公式由关系式 $T(x)=P(x)(1+\omega P(x))^{-1}$ 得出，而该关系式正是对 (3.13) 的改写。 ■

不难从公式 (3.14) 和 (3.10) 推导出用谱值表示的第二类幂和：

$$t_n(L)=t_n(\mu)=\sum_{i=1}^{m}(q^{-2}\mu_i)^n\widetilde{d}_i,\qquad \widetilde{d}_i=q\prod_{j\neq i}\frac{\mu_i-q^2\mu_j}{\mu_i-\mu_j}. \tag{3.15}$$

现在，我们考察代数 $\mathcal{L}(R)$ 的表示论中的一些元素。为表述必要的结果，我们引入一些便捷的矩阵记号。

首先，空间 $V^{\otimes k}$, $k\geq 1$ 的基向量集合记作

$$\{x_i\otimes x_j\otimes\ldots\otimes x_s\}\quad\Leftrightarrow\quad \mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{x}_{k-1}\mathsf{x}_k.$$

也就是说，符号 $\mathbf{x}_i$ 表示张量基中位于第 i 个位置的 $V^{\otimes k}$ 的任意一个基向量。

此外，我们采用矩阵求和规则：如果一个表达式包含矩阵空间个数相同的对象，则默认对相应的指标求和。例如，算子 $R_{12}=R\otimes \mathrm{Id}_V$ 对空间 $V^{\otimes 3}$ 的任意基向量 $x_i\otimes x_j\otimes x_k$ 的作用由下列矩阵描述：

$$\sum_{a,b=1}^{N}R_{ij}^{\,ab}\,x_a\otimes x_b\otimes x_k\quad\Leftrightarrow\quad R_{12}\,\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3.$$

除了空间 V 外，我们还考虑其对偶空间 V^*，并固定其右对偶基$\{y^i\}_{1\leq i\leq N}$：

$$\Omega(x_i,y^j)=\delta_i^j,$$

其中 $\Omega:\ V\otimes V^*\to\mathbb{C}$ 是一个固定的非退化双线性形式。

与上文相同，我们为张量积 $V^{*\otimes k}$ 中第 i 个位置的任意基向量引入符号 y^i 。这里需要强调的是，对于对偶空间的张量积 $V^{*\otimes k}$ 中的位置，我们采用逆向编号（从右向左）：

$$\{y^i\otimes y^j\otimes\ldots\otimes y^s\}\quad\Leftrightarrow\quad \mathsf{y}^k\mathsf{y}^{k-1}\ldots\mathsf{y}^2\mathsf{y}^1.$$

根据这一约定，算子 R_{12} 对空间 $V^{*\otimes 3}$ 中任意基向量$y^i \otimes y^j \otimes y^k$ 的作用由以下矩阵描述:

$$\sum_{a,b=1}^{N} y^i \otimes y^a \otimes y^b R^{kj}_{ba} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{y}^3\mathsf{y}^2\mathsf{y}^1 R_{12}.$$

现在，我们可以阐述反射方程代数 $\mathcal{L}(R)$ 在空间 V 和 V^* 上的表示的基本结果（证明和细节参见 [GPS1、GPS4] ）。

命题6
1. 代数 $\mathcal{L}(R)$ 的生成元 l_i^j 按照以下公式在空间V 和 V^* 的基向量上的线性作用

$$L_1 R_1 \triangleright \mathsf{x}_1 = R_1^{-1}\mathsf{x}_1 \quad \Leftrightarrow \quad L_{\underline{2}} \triangleright \mathsf{x}_1 = J_2^{-1}\mathsf{x}_1, \tag{3.16}$$

$$L_2 \triangleright \mathsf{y}^1 = \mathsf{y}^1 J_2.$$

定义了 $\mathcal{L}(R)$ 的表示。这里，符号 $\triangleright$ 表示线性算子 $J_2 = R_{12}^2$的作用。

2. 在空间 $V^{\otimes k}$ 和 $V^{*\otimes k}$ 中， $\mathcal{L}(R)$ 的表示由生成元的以下线性作用定义:

$$L_{\underline{k+1}} \triangleright \mathsf{x}_1\mathsf{x}_2 \dots \mathsf{x}_k = J_{k+1}^{-1}\,\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2 \dots \mathsf{x}_k. \tag{3.17}$$

$$L_{k+1} \triangleright \mathsf{y}^k\mathsf{y}^{k-1} \dots \mathsf{y}^1 = \mathsf{y}^k\mathsf{y}^{k-1} \dots \mathsf{y}^1 J_{k+1}. \tag{3.18}$$

为了给出反射方程代数中任意单项式在 $V^{\otimes k}$ 和 $V^{*\otimes k}$ 的基向量上的作用公式，我们引入一些其他矩阵对象。
定义一个矩阵 $J_p^{\uparrow k}$，它是将 Jucys-Murphy元 j_p 平移 k 个位置后得到的 :

$$J_p^{\uparrow k} = R_{k+p-1} \dots R_{k+2} R_{k+1}^2 R_{k+2} \dots R_{k+p-1}, \qquad \forall\, p \geq 2,\ \forall\, k \geq 0.$$

容易证明，具有相同固定平移量 k 而 p 不同的矩阵 $J_p^{\uparrow k}$彼此交换。

现在，利用 $\mathcal{L}(R)$ 的单个生成元的作用 (3.17)，我们可以明确写出任意 n 阶生成元单项式的作用:

$$L_{\underline{k+n \to k+1}} \triangleright \mathsf{x}_1\mathsf{x}_2 \dots \mathsf{x}_k = \prod_{a=1}^{n} J_{k+a}^{-1} \prod_{b=2}^{n} J_b^{\uparrow k} \mathsf{x}_1\mathsf{x}_2 \dots \mathsf{x}_k. \tag{3.19}$$

R-矩阵上的辫子关系 (2.6) 可用于证明以下交换性:

$$J_{k+a}^{-1} J_b^{\uparrow k} = J_b^{\uparrow k} J_{k+a}^{-1}, \quad \forall\, a > b.$$

利用这种交换性，我们可以改写 (3.19) 右端的矩阵乘积:

$$\prod_{a=1}^{n} J_{k+a}^{-1} \prod_{b=2}^{n} J_b^{\uparrow k} = J_{k+1}^{-1} \left(J_{k+2}^{-1} J_2^{\uparrow k}\right) \left(J_{k+3}^{-1} J_3^{\uparrow k}\right) \dots \left(J_{k+n}^{-1} J_n^{\uparrow k}\right) := J_{k+1}^{-1} \prod_{a=2}^{n} \left(J_{k+a}^{-1} J_a^{\uparrow k}\right). \tag{3.20}$$

在最后一个公式中，我们应始终牢记非交换矩阵乘积中的排列顺序：指标 a从左向右递增。

为将 (3.18) 推广到高阶单项式的作用，我们定义生成矩阵的“平移”副本：

$$L_{\underline{n}}^{\uparrow k} = R_{k+n-1}^{-1} \dots R_{k+2}^{-1} R_{k+1}^{-1} L_{k+1} R_{k+1} R_{k+2} \dots R_{k+n-1}, \quad \forall\, n \geq 1,\ \forall\, k \geq 0. \tag{3.21}$$

类似地，可以定义移位副本 $L_{n}^{\uparrow k}$ 。

现在，通过对 (3.18) 多次应用进行直接计算，我们得到 (3.19) 的一个类似结果，但适用于 $V^{*\otimes k}$ 的基向量

$$L_{\underline{n\to 1}}^{\uparrow k} \triangleright \mathsf{y}^k \dots \mathsf{y}^1 = \mathsf{y}^k \dots \mathsf{y}^1 \prod_{b=2}^{n} (J_b^{-1})^{\uparrow k} \prod_{a=1}^{n} J_{k+a} = \mathsf{y}^k \dots \mathsf{y}^1 \prod_{a=2}^{n} \left((J_a^{-1})^{\uparrow k} J_{k+a} \right) J_{k+1}. \tag{3.22}$$

注意，在最后一个表达式中，非交换矩阵 $(J_a^{-1})^{\uparrow k} J_{k+a}$ 的乘积排列顺序与 (3.20) 相反：指标 a 从左到右递减 。

$k \geq 2$ 的 $\mathcal{L}(R)$-模 $V^{\otimes k}$ 和 $V^{*\otimes k}$ 是可约的，并且可以分解为直和，其中各项为不可约的（推测为 [2]） $\mathcal{L}(R)$-模。这些模是正交投影算子的像；这些投影算子由 Hecke 代数 $\mathcal{H}_k(q)$ 的本原幂等元的 R-矩阵表示得到（详情见 [GPS1] ）：

$$V^{\otimes k} = \bigoplus_{\lambda \vdash k} \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} V_i^\lambda, \quad V_i^\lambda = E_i^\lambda(R) \triangleright V^{\otimes k} = \mathrm{Im}(\rho_R(e_{ii}^\lambda)), \tag{3.23}$$

其中， e_{ii}^λ 是 Hecke 代数 $\mathcal{H}_k(q)$ 的一个本原幂等元， $E_i^\lambda(R) = \rho_R(e_{ii}^\lambda)$ 是算子 R_i、$1 \leq i \leq k-1$ 的多项式。注意，具有相同 λ 但不同 i 的空间 V_i^λ 作为 $\mathcal{L}(R)$-模是等价的。

对于 $V^{*\otimes k}$，也会发生类似的分解

$$V^{*\otimes k} = \bigoplus_{\lambda \vdash k} \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} V_i^{*\lambda}, \quad V_i^{*\lambda} = \mathrm{Im}(\rho_R(e_{ii}^\lambda)) \tag{3.24}$$

尽管我们无法证明 $\mathcal{L}(R)$-模 V_i^λ 和 $V_i^{*\lambda}$ 的不可约性，但我们的计算表明， $\mathcal{L}(R)[\mu_1, \dots, \mu_m]$ 的中心特征子代数中的任意元素 a，在利用公式 (3.17) 于模 V_i^λ 中表示时，都会成为标量算子：

$$a \mapsto \chi_\lambda(a)\, \mathrm{Id}_{V_i^\lambda}.$$

因子 $\chi_\lambda(a)$ 将称为元素 a 的特征。对于固定的 λ，特征不依赖于指标 i，这正如等价表示所应有的性质。

将代数 $\mathcal{L}(R)$ 表示在模 V_λ^* 中，可得到特征 $\chi_\lambda^*(a)$。

注 7 对于来自量子群 $U_q(sl(N))$ 的 Hecke 对称 R，可以使用 [RTF] 方法构造代数 $\mathcal{L}(R)$ 到 $U_q(sl(N))$ 的同态。因此，任何 $U_q(sl(N))$-模都会自动获得一个 $\mathcal{L}(R)$-模的结构。具体而言， [JLM] 中就使用了这种方法来计算幂和的特征标。

[2]对于定义量子群 $U_q(sl(N))$ 结构的 Drinfeld-Jimbo R-矩阵， $\mathcal{L}(R)$-模 V_i^λ 是不可约的。对于任意斜可逆 Hecke 对称 R， V_i^λ 的不可约性仍是一个悬而未决的问题。

4 谱值特征

本节给出我们的主要结果：我们明确写出量子矩阵在模 V_i^λ 和 $V_i^{*\lambda}$ 中中心谱值的特征标 $\chi_\lambda(\mu_i)$ 和 $\chi_\lambda^*(\mu_i)$。由于中心特征子代数中的任意元素都可以写成谱值 μ_i 的对称多项式，我们便能计算任意此类元素在每个模 V_i^λ 中的特征标。此外，我们的方法具有普适性，因为它适用于任意 Hecke 对称 R。

定理 8 式 (3.8) 中定义的中心谱值 $\{\mu_i\}_{1\le i\le m}$，在 $\mathcal{L}(R)$-模 $V_a^\lambda \subset V^{\otimes k}$ 和 $V_a^{*\lambda} \subset V^{*\otimes k}$, $\lambda \vdash k$ 中由标量算子表示：

$$\mu_i \triangleright|_{V_a^\lambda} = \chi_\lambda(\mu_i)\,\mathrm{Id}_{V_a^\lambda}, \qquad \mu_i \triangleright|_{V_a^{*\lambda}} = \chi_\lambda^*(\mu_i)\,\mathrm{Id}_{V_a^{*\lambda}}. \tag{4.1}$$

这些特征标不依赖于指标 a，完全由分拆 $\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_m \ge 0)$ 的各部分确定：

$$\chi_\lambda(\mu_i) = q^{-2(\lambda_i - i + m)}, \qquad \chi_\lambda^*(\mu_i) = q^{2(\lambda_i - i + 1)}, \quad 1 \le i \le m. \tag{4.2}$$

线性算子 $\mu_i \triangleright$ 的限制形式 (4.1)，与反射方程代数在 $V^{\otimes k}$ 和 $V^{*\otimes k}$ 上的作用以及 (3.18) 相 (3.17) 容。

为证明定理 8，我们需要一些技术性结果，下面将通过一系列引理陈述并证明这些结果。

引入关于形式变量 z 的一个辅助有理函数：

$$S(z) = \frac{z}{(1-z)^2}. \tag{4.3}$$

下面我们通过公式 (3.14)，用特征值μ_i 表示的生成函数 $P(x)$ 和 $T(x)$。为方便起见，我们对这些生成函数采用更详细的记号 $P(x;\ \mu_1、\ldots\ldots、\ \mu_m)$ 和 $T(x;\ \mu_1、\ldots\ldots、\ \mu_m)$。

引理 9 以下关系式成立：

$$P(x;\mu_1,\ldots,\mu_k q^{-2},\ldots,\mu_m) + \omega S(q^{-2}x\mu_k) = P(x;\mu_1,\ldots,\mu_m)\cdot(1-\omega^2 S(q^{-2}x\mu_k)) \tag{4.4}$$

$$T(x;\mu_1,\ldots,\mu_k q^{2},\ldots,\mu_m) - \omega S(x\mu_k) = T(x;\mu_1,\ldots,\mu_m)\cdot(1-\omega^2 S(x\mu_k)). \tag{4.5}$$

这里，μ_k是特征值集合 $\{\mu_1,\ldots.\mu_m\}$中的任意固定元素。

证明。 命题中的关系式可用类似的方法证明，因此我们只验证第二个关系式。令以下记号简化：

$$T = T(x;\mu_1,\ldots,\mu_m), \qquad T' = T(x;\mu_1,\ldots,\mu_k q^2,\ldots,\mu_m), \qquad S = S(x\mu_k) = \frac{x\mu_k}{(1-x\mu_k)^2}.$$

那么，关系式 (4.5) 等价于以下形式

$$1 - \omega T' = (1-\omega T)(1-\omega^2 S).$$

接下来，由（3.14）可直接得出：

$$1 - \omega T' = (1-\omega T)\frac{(1-q^{-2}\mu_k x)(1-q^2\mu_k x)}{(1-\mu_k x)^2}.$$

因此，只需验证关系

$$1-\omega^2 S=\frac{(1-q^{-2}\mu_k x)(1-q^2\mu_k x)}{(1-\mu_k x)^2},$$

这是定义 (4.3) 的直接推论。 ■

现在，我们将详细阐述由 (3.17) 和 (3.18) 分别定义的空间 $V^{\otimes k}$ 和 $V^{*\otimes k}$ 上的反射方程代数表示。为此，我们引入 $N^k\times N^k$ 矩阵 T_k^n 和 P_k^n:

$$q^{2m(n-1)}T_k^n=\mathrm{Tr}_{R(k+1)}(J_{k+1}^{-n})=\langle J_{k+1}^{-n}\rangle_{k+1},\qquad P_k^n=\mathrm{Tr}_{R(k+1)}(J_{k+1}^{n})=\langle J_{k+1}^{n}\rangle_{k+1}. \tag{4.6}$$

回顾一下， R-迹和上述括号记号定义于第2节。

引理 10 设 $n\geq 1$ 为一个固定整数。考虑分别在 (3.5) 和 (3.6) 中定义的第一类和第二类幂和 $p_n(L)$ 与 $t_n(L)$。

在表示 (3.17) 中，算子 $t_n\triangleright\in\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ 在 $V^{\otimes k}$ 的张量基下的矩阵为 T_k^n:

$$t_n\triangleright \mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{x}_k=T_k^n\,\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{x}_k=q^{-2m(n-1)}\langle J_{k+1}^{-n}\rangle_{k+1}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{x}_k.$$

在表示 (3.18) 中，算子 $p_n\triangleright\in\mathrm{End}(V^{*\otimes k})$ 在 $V^{*\otimes k}$ 的张量基下的矩阵为 P_k^n:

$$p_n\triangleright \mathsf{y}^k\mathsf{y}^{k-1}\ldots\mathsf{y}^1=\mathsf{y}^k\mathsf{y}^{k-1}\ldots\mathsf{y}^1P_k^n=\mathsf{y}^k\mathsf{y}^{k-1}\ldots\mathsf{y}^1\langle J_{k+1}^{n}\rangle_{k+1}.$$

证明。 为了计算空间 $V^{\otimes k}$ 的张量基中算子 $t_n\triangleright$ 的矩阵，我们使用恒等式:

$$t_nI_{1\ldots k}=\langle L_{\underline{n\to 1}}R_{n-1}^{-1}\ldots R_1^{-1}\rangle_{1\ldots n}I_{1\ldots k}=\langle L_{\underline{k+n\to k+1}}R_{k+n-1}^{-1}\ldots R_{k+1}^{-1}\rangle_{k+1\ldots k+n}.$$

考虑到这个恒等式、作用（3.19）和变换（3.20），我们得到:

$$\begin{aligned}t_n\triangleright \mathsf{x}_1\ldots\mathsf{x}_k&=\langle L_{\underline{k+n\to k+1}}\triangleright \mathsf{x}_1\ldots\mathsf{x}_kR_{k+n-1}^{-1}\ldots R_{k+1}^{-1}\rangle_{k+1\ldots k+n}\\&=\langle J_{k+1}^{-1}\prod_{a=2}^{n}\left(J_{k+a}^{-1}J_a^{\uparrow k}\right)R_{k+n-1}^{-1}\ldots R_{k+1}^{-1}\rangle_{k+n\ldots k+1}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{x}_k:=\Omega(R)\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{x}_k.\end{aligned}$$

线性算子 $t_n\triangleright$ 的矩阵 $\Omega(R)$ 在最后一行写成一个 R-迹的倍数。我们需要证明 $\Omega(R)=T_k^n$。为此，我们显式计算除第 $(k+1)$ 个位置处的 R-迹以外的所有 R-迹。

请注 意，根据 Jucys-Murphy矩阵的定义，我们可以简化它们的乘积 ts 如下:

$$J_{k+a}^{-1}J_a^{\uparrow k}=R_{k+a-1}^{-1}\ldots R_{k+1}^{-1}J_{k+1}^{-1}R_{k+1}\ldots R_{k+a-1}. \tag{4.7}$$

首先，我们可以在第（$k+n$）个空间中计算 R-迹。将（4.7）应用于矩阵$J_{k+n}^{-1}J_n^{\uparrow k}$，得到:

$$\begin{aligned}\Omega(R)&:=\langle J_{k+1}^{-1}\prod_{a=2}^{n}\left(J_{k+a}^{-1}J_a^{\uparrow k}\right)R_{k+n-1}^{-1}\ldots R_{k+1}^{-1}\rangle_{k+n\ldots k+1}\\&=\langle J_{k+1}^{-1}\prod_{a=2}^{n-1}\left(J_{k+a}^{-1}J_a^{\uparrow k}\right)R_{k+n-1}^{-1}\ldots R_{k+1}^{-1}J_{k+1}^{-1}\rangle_{k+n\ldots k+1}\\&=q^{-2m}\langle J_{k+1}^{-1}\prod_{a=2}^{n-1}\left(J_{k+a}^{-1}J_a^{\uparrow k}\right)R_{k+n-2}^{-1}\ldots R_{k+1}^{-1}J_{k+1}^{-1}\rangle_{k+n-1\ldots k+1}.\end{aligned}$$

在上述变换链的第三行中，我们使用一般公式在第（$k+n$）个空间中计算 R-迹：

$$\langle X(R)_{1\dots p}R^{-1}_{p\,p+1}Y(R)_{1\dots p}\rangle_{p+1} = q^{-2m}X(R)_{1\dots p}Y(R)_{1\dots p} \tag{4.8}$$

对于任意矩阵 $X(R)$ 和 $Y(R)$，只要它们不包含属于第 $(p+1)$ 个空间的指标，该式便成立。

现在，我们将 (4.7) 应用于下一个矩阵 $J^{-1}_{k+n-1}J^{\uparrow k}_{n-1}$，矩阵链 $R^{-1}_{k+n-2}\dots R^{-1}_{k+1}$ 得以约化，因而可以利用一般公式 (4.8) 计算第 $(k+n-1)$ 个 R-迹，从而得到中间结果：

$$\Omega(R) = q^{-4m}\langle J^{-1}_{k+1}\prod_{a=2}^{n-2}\left(J^{-1}_{k+a}J^{\uparrow k}_{a}\right)R^{-1}_{k+n-3}\dots R^{-1}_{k+1}J^{-2}_{k+1}\rangle_{k+n-2\dots k+1}.$$

逐步重复这一过程，我们计算所有 R-迹，唯独不计算第 $(k+1)$ 个，最终得到所需结果：

$$\Omega(R) = q^{-2m(n-1)}\langle J^{-n}_{k+1}\rangle_{k+1} = T^n_k.$$

为计算线性算子 $p_n\triangleright$的矩阵，我们使用恒等式：

$$p_n(L)I_{1\dots k} = \langle R_{k+1}R_{k+2}\dots R_{k+n-1}L^{\uparrow k}_{\underline{n\to 1}}\rangle_{k+n\dots k+1}.$$

考虑到这一恒等式和作用 (3.22)，我们得到：

$$\begin{aligned} p_n\triangleright \mathsf{y}^k\dots\mathsf{y}^1 &= \langle R_{k+1}\dots R_{k+n-1}L^{\uparrow k}_{\underline{n\to 1}}\triangleright \mathsf{y}^k\dots\mathsf{y}^1\rangle_{k+1\dots k+n} \\ &= \mathsf{y}^k\dots\mathsf{y}^1\langle R_{k+1}\dots R_{k+n-1}\prod_{a=2}^{n}\left((J^{-1}_a)^{\uparrow k}J_{k+a}\right)J_{k+1}\rangle_{k+n\dots k+1} := \mathsf{y}^k\dots\mathsf{y}^1\tilde{\Omega}(R). \end{aligned}$$

˜现在，我们按照上文计算矩阵 $\Omega(R)$ 的相同方法，计算矩阵 $\Omega(R)$ 中的 R-迹。唯一的区别是，我们使用以下公式的类似形式，而非一般公式 (4.8)：

$$\langle X(R)_{1\dots p}R_{p\,p+1}Y(R)_{1\dots p}\rangle_{p+1} = X(R)_{1\dots p}Y(R)_{1\dots p}$$

其中不包含乘数 q^{-2m}。

由此可得

$$\tilde{\Omega}(R) = \langle J^n_{k+1}\rangle_{k+1} = P^n_k$$

从而完成了该引理的证明。 ■

最后一个辅助技术结果涉及具有不同 k 值的矩阵 P^n_k 和 T^n_k 之间的关系式。

引理 11 以下恒等式成立：

$$P^n_k = P^n_{k-1} + \omega n J^n_k + \omega^2\sum_{s=1}^{n-1}sP^{n-s}_kJ^s_k, \tag{4.9}$$

$$T^n_k = T^n_{k-1} - \omega n(q^{2m}J_k)^{-n} + \omega^2\sum_{s=1}^{n-1}sT^{n-s}_k(q^{2m}J_k)^{-s}. \tag{4.10}$$

证明。 考虑矩阵等式:

$$R_k J_{k+1} = R_k^2 J_k R_k = J_k R_k + \omega J_{k+1},$$

其中应用了 Hecke 条件 $R_k^2 = I^{\otimes 2} + \omega\, R_k$。

以这个等式作为 n 中的归纳基础，不难证明矩阵恒等式:

$$R_k J_{k+1}^n = J_k^n R_k + \omega \sum_{s=1}^{n} J_{k+1}^s J_k^{n-s}. \tag{4.11}$$

我们应用恒等式 (4.11) 来变换矩阵幂 J_{k+1}^n:

$$\begin{aligned} J_{k+1}^n &= R_k J_k (R_k J_{k+1}^{n-1}) = R_k J_k^n R_k + \omega \sum_{s=1}^{n-1} R_k J_{k+1}^s J_k^{n-s} \\ &= R_k J_k^n R_k + \omega \sum_{s=1}^{n-1} J_k^s R_k J_k^{n-s} + \omega^2 \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{s} J_k^{n-r} J_{k+1}^r \\ &= R_k J_k^n R_k + \omega \sum_{s=1}^{n-1} J_k^s R_k J_k^{n-s} + \omega^2 \sum_{s=1}^{n-1} s J_k^s J_{k+1}^{n-s}. \end{aligned}$$

在上述变换的最后一行中，我们使用 Hecke 条件的如下形式 $R_k = R_k^{-1} + \omega I^{\otimes 2}$，以便重写第一项:

$$R_k J_k^n R_k = R_k J_k^n R_k^{-1} + \omega R_k J_k^n$$

然后，在第 $(k+1)$ 个空间中应用 R-迹，我们得到 (4.9)。在此过程中，对于第一项，我们使用 R-迹的一个重要性质:

$$\langle R_k X(R)_{1\dots k} R_k^{-1} \rangle\rangle_{k+1} = \langle X(R)_{1\dots k} \rangle_k$$

对任意不含第 $(k+1)$ 个空间的指标的矩阵 $X(R)$ 均成立。

恒等式 (4.10) 可用相同的方法证明：变换矩阵幂 J_{k+1}^{-n}，并在计算最后于 $(k+1)$-th 空间中取 R-迹。 ■

定理 8 的证明。

我们将证明，线性算子 $t_n\triangleright$ 和 $p_n\triangleright$ 在 $\mathcal{L}(R)$-模 V_a^λ 和 $V_a^{*\lambda}$ 上的限制所对应的特征值 $\chi_\lambda(t_n)$ 和 $\chi_\lambda^*(p_n)$ 分别如下:

$$t_n \triangleright\big|_{V_a^\lambda} = \chi_\lambda(t_n) \mathrm{Id}_{V_a^\lambda}, \qquad \chi_\lambda(t_n) = t_n(\mu_1, \dots, \mu_m)\big|_{\mu_i = q^{-2(\lambda_i - i + m)}}, \tag{4.12}$$

$$p_n \triangleright\big|_{V_a^{*\lambda}} = \chi_\lambda^*(p_n) \mathrm{Id}_{V_a^\lambda}, \qquad \chi_\lambda^*(p_n) = p_n(\mu_1, \dots, \mu_m)\big|_{\mu_i = q^{2(\lambda_i - i + 1)}}. \tag{4.13}$$

这里，多项式 $p_n(\mu)$ 和 $t_n(\mu)$ 定义于 (3.10) 和 (3.15) 中。

注意，幂和的谱参数化 (3.10) 和 (3.15) 与参数化 (3.8) 一一对应。这是因为集合 $\{a_k(L)\}_{1\le k\le m}$ 和 $\{p_k(L)\}_{1\le k\le m}$ 是特征子代数的生成集，因此，幂和的取值可在不计顺序的情况下确定 μ_i 的取值。所以，如果关系式 (4.12) 和 (4.13) 确实成立，那么便可得出结论：上述谱值特征满足定义系统 (3.8)。

我们将对参数 $k = \sum_i \lambda_i$ 进行双重归纳来证明 (4.12) 和 (4.13)：该参数用于参数化表示空间的张量幂；对于每个 k，我们通过参数 n 实现内部归纳，该参数用于参数化幂和 $p_n(L)$ 和 $t_n(L)$ 的阶数。

根据引理 10 以及定义 (3.23)、(3.24)，算子矩阵 $t_n\triangleright$ 和 $p_n\triangleright$在 $\mathcal{L}(R)$-不变子空间 V_a^λ 和 $V_a^{*\lambda}$ 上的限制分别为 $T_k^n E_a^\lambda(R)$ 和 $P_k^n E_a^\lambda(R)$。这里， $E_a^\lambda(R) = \rho_R(e_{aa}^\lambda)$ 是一个幂等元，对应于图 $\lambda \vdash k$ （对于 Hecke 代数的幂等元及其在 R-矩阵表示中的矩阵像，我们使用相同的术语）。

因此，作为归纳步骤，我们假设 P_{k-1}^n or T_{k-1}^n 与对应于删去编号为 k 的方格后的杨表的幂等元的矩阵乘积，以及 $P_k^l E_a^\lambda(R)$ 或 $T_k^l E_a^\lambda(R)$ 与 $l < n$ 的矩阵乘积，具有必要的形式 (4.12) 或 (4.13)。

在与幂等元 E_a^λ 对应的标准杨表中，最大数 k 被放在某一行末尾的方格中。设 i_0 为该行的编号。那么对应方格的内容为 $c(k) = \lambda_{i_0} - i_0$，因此 $J_k E_a^\lambda = q^{2(\lambda_{i_0}-i_0)} E_a^\lambda$ （详见 [OP] ）。

利用这一考虑以及引理 11，我们得到

$$T_k^n E_a^\lambda = T_{k-1}^n E_a^\lambda - \omega n (q^{-2(\lambda_{i_0}-i_0+m)})^n E_a^\lambda + \omega^2 \sum_{s=1}^{n-1} s (q^{-2(\lambda_{i_0}-i_0+m)})^s T_k^{n-s} E_a^\lambda \tag{4.14}$$

and

$$P_k^n E_a^\lambda = P_{k-1}^n E_a^\lambda + \omega n (q^{2(\lambda_{i_0}-i_0)})^n E_a^\lambda + \omega^2 \sum_{s=1}^{n-1} s (q^{2(\lambda_{i_0}-i_0)})^i P_k^{n-s} E_a^\lambda. \tag{4.15}$$

接下来，生成函数的关系式 (4.4)、(4.5) 导出幂和的以下恒等式：

$$t_n(\mu_1, \ldots, \mu_m) = t_n(\mu_1, \ldots, q^2\mu_{i_0}, \ldots, \mu_m) - \omega n \mu_{i_0}^n + \omega^2 \sum_{s=1}^{n-1} s \mu_{i_0}^s t_{n-s}(\mu_1, \ldots, \mu_m), \tag{4.16}$$

and

$$\begin{aligned} p_n(\mu_1, \ldots, \mu_m) &= p_n(\mu_1, \ldots, q^{-2}\mu_{i_0}, \ldots, \mu_m) \\ &+ \omega n (q^{-2}\mu_{i_0})^n + \omega^2 \sum_{s=1}^{n-1} s (q^{-2}\mu_{i_0})^s p_{n-s}(\mu_1, \ldots, \mu_m). \end{aligned} \tag{4.17}$$

现在比较公式 (4.14) 和 (4.16)。首先，我们指出，(4.14) 的右端等于 $E_a^\lambda(R)$ 乘以一个标量因子。根据定义，这个因子是一个特征$\chi_\lambda(t_n)$，因为在 (4.14) 的左端，我们有将矩阵 $t_n\triangleright$ 限制在 V_a^λ上的结果。事实上，根据归纳假设，矩阵 $T_k^{n-s} E_a^\lambda$ 的形式为 $\chi_\lambda(t_{n-s})$，第一项 $T_{k-1}^n E_a^\lambda(R)$ 也如此。唯一微妙之处在于， $T_{k-1}^n E_a^\lambda(R)$ 的乘积包含了一个与删去编号为 k的方格后所得表相对应的特征；而这又等价于将 μ_{i_0} 变为 $q^2\mu_{i_0}$。另一方面，将代数恒等式 (4.16) 中的中心元在模 V_a^λ中表示后，我们得到它们的特征之间同样的关系。因此，我们得出结论，公式 (4.12) 确实成立。

对于多项式 p_n ，考虑过程相同，唯一的变化是 μ 对应于编号为 k的已消去方格：应以 $q^{-2}\mu_{i_0}$ 替代 μ_{i_0}。

因此，归纳步骤得证，接下来只需检查构成归纳基础的几个特殊情形。

如果 $n = 1$ 我们得到关系式（参见 [GPS1]）

$$T_k^1 E_a^\lambda = \langle J_{k+1}^{-1} \rangle_{k+1} E_a^\lambda = \frac{1}{q} \sum_{s=1}^{m} q^{-2(\lambda_s - s + m)} E_a^\lambda.$$

此外，我们使用公式 $P_k^1 = \langle J_{k+1}\rangle_{k+1} = \frac{m_q}{q^m} + \omega \sum_{i=1}^{k} J_i$。乘以幂等元 $E_a^\lambda(R)$ 后，我们得到：

$$\begin{aligned} P_k^1 E_a^\lambda(R) &= \Big(\frac{m_q}{q^m} + \omega \sum_{i=1}^{k} q^{2c(i)}\Big) E_a^\lambda(R) = \Big(\frac{m_q}{q^m} + \omega \sum_{i=1}^{m} q^{2(1-i)} \sum_{j=0}^{\lambda_i - 1} q^{2j}\Big) E_a^\lambda(R) \\ &= \Big(\frac{m_q}{q^m} - \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{m} q^{2(1-i)} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{m} q^{2(\lambda_i - i + 1)}\Big) E_a^\lambda(R) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{m} q^{2(\lambda_i - i + 1)} E_a^\lambda(R). \end{aligned}$$

因此，我们得到了关于 t_1 和 p_1的结论，即参数 n （幂和的阶数）的内部归纳基础已建立。

现在来检查外部归纳基础，即 $k = 0$，而 n 是任意的。在这种情况下，T_0^n很容易计算：

$$T_0^n = q^{-2m(n-1)} \langle J_1^n \rangle_1 = q^{m(1-2n)} m_q.$$

由于 $k = 0$，因此 $\lambda = 0$，特征值的特征标为 $\chi_0(\mu_i) = q^{-2(m-i)}$。为简洁起见，省略记号 χ_0，可见 $\mu_{i+1} = q^2 \mu_i, \quad 1 \le i \le m$。因此，式 (3.15) 中的 $\tilde{}$ $\tilde{}$重数 d_i 除 d_1 外均为零，由此得到与上述相同的 T_0^n结果：

$$\tilde{d}_1 = q \prod_{i=2}^{m} \frac{q^{2(1-m)} - q^{2(i+1-m)}}{q^{2(1-m)} - q^{2(i-m)}} = q^m m_q \quad \Rightarrow \quad T_0^n = (q^{-2}\mu_1)^n \tilde{d}_1 = q^{m(1-2n)} m_q.$$

至于 P_0^n，归纳基础的验证也很直接。对于 $k = 0$ 和任意的 n，谱值的特征标为 $\chi_0^*(\mu_i) = q^{2(1-i)}$；因此，根据类似的性质 $\mu_{i+1} = q^{-2}\mu_i$，式 (3.10) 中所有重数 d_i 除 d_1 外均为零，由此得到 P_0^n：

$$P_0^n = (\mu_1)^n d_1 = q^{-1} \prod_{i=2}^{m} \frac{1 - q^{-2i}}{1 - q^{-2(i-1)}} = q^{-m} m_q = \langle J_1^n \rangle_1.$$

这就完成了归纳基础的验证以及定理 8. ■

作为定理 8 的一个应用示例，我们给出特征标 $\chi_\lambda(p_n)$ 和 $\chi_\lambda^*(p_n)$。

推论 12 将定理 8 的结果应用于谱参数化 (3.10)，即可得到幂和在生成元 (3.17) 和 (3.18) 的作用下表示为 $V_a^\lambda$and $V_a^{*\lambda}$ 的特征标：

$$\chi_\lambda(p_n) = q^{-m(2n+1)} \sum_{i=1}^{m} q^{-2n\ell_i} \prod_{j \ne i} \frac{(\ell_i - \ell_j - 1)_q}{(\ell_i - \ell_j)_q}, \tag{4.18}$$

$$\chi_\lambda^*(p_n) = q^{2n-m} \sum_{i=1}^{m} q^{2n\ell_i} \prod_{j \ne i} \frac{(\ell_i - \ell_j + 1)_q}{(\ell_i - \ell_j)_q}, \tag{4.19}$$

其中 $\ell_i = \lambda_i - i$ and 一个 q-数定义为 $n_q = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ $\forall n \in \mathbb{Z}$。注意，在[JLM]中，关系式 (4.18) 是针对 $U_q(gl(N))$ 情形（在这种情形下 $m = N$）通过不同方法得到的。

总之，我们从公式中提取出 [PP] 中得到的经典结果。首先，ˆ ˆ 我们必须通过生成元的平移 (3.2)，转到相应修正反射方程代数 L of 的生成矩阵 $\mathcal{L}(R)$ ˆ。矩阵 L 也满足一种形式的 Cayley–Hamilton 恒等式。

由 (1.2) 和 (3.2) 可直接得到。设 $\hat{}\mu_i$ 为矩阵 L 的特征多项式的特征值。它们与矩阵 L 的特征值之间满足以下公式

$$\mu_i = 1 - \omega\hat{\mu}_i.$$

由此关系，我们可以计算出数量 $\chi_\lambda(\hat{}\mu_i)$。具体来说，我们有

$$\chi_\lambda(\hat{\mu}_i) = \frac{1 - q^{-2\,(\lambda_i+m-i)}}{q - q^{-1}} = q^{-(\lambda_i+m-i)}(\lambda_i + m - i)_q, \quad 1 \le i \le m.$$

重数 $d_i(\hat{}\mu)$ 如下：

$$d_i(\hat{\mu}) = q^{-1}\prod_{j\neq 1}\frac{\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j - q^{-1}}{\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j}.$$

若 $R \to P$ as $q \to 1$，则通过取极限 $q \to 1$，我们得到生成代数 $U(gl(N))$ 的矩阵 L 的数量 $\chi_\lambda(\hat{}\mu_k)$ 和 $\hat{}d_i(\chi_\lambda(\hat{}\mu))$（在此情形下为 $m = N$）：

$$\chi_\lambda(\hat{\mu}_i) = \lambda_i - i + N, \quad d_i(\hat{\mu}) = \prod_{j\neq i}\frac{(\lambda_i - \lambda_j + j - i - 1)}{(\lambda_i - \lambda_j + j - i)}, \quad 1 \le i \le N.$$

$\hat{}$ 因此，对于 $\mathrm{Tr}L^n = \sum_i \hat{}\mu_i^n d_i(\hat{}\mu)$，我们恢复了 [PP] 的结果（不过，在所引用的论文中，并未使用矩阵 L 的特征值这一概念）。

参考文献

[G] Gurevich D.，量子杨-巴克斯特方程的代数方面，《列宁格勒数学杂志》2 (1991)，第 801–828 页。[GPS1] Gurevich D.、Pyatov P.、Saponov P.，$GL(m|n)$ 型（修正）反射方程代数的表示论，《圣彼得堡数学杂志》20，第 2 期（2009），第 213–253 页。[GPS2] Gurevich D.、Pyatov P.、Saponov P.，$GL(m|n)$ 型量子矩阵代数的凯莱-哈密顿定理，《圣彼得堡数学杂志》17，第 1 期（2006），第 119–135 页。[GPS3] Gurevich D.、Pyatov P.、Saponov P.，反射方程代数上的海克对称与特征关系，《数学物理快报》41 (1997)，第 255–264 页。[GPS4] Gurevich D.、Pyatov P.、Saponov P.，量子代数上的编织微分算子，《几何与物理杂志》61，第 8 期（2011），第 1485–1501 页。[GPS5] Gurevich D.I.、Pyatov P.N.、Saponov P.A.，$GL(m|n)$ 型量子矩阵代数：特征子代数的结构与谱参数化，《理论与数学物理》147，第 1 期（2006），第 460–485 页。[IOP] Isaev A.、Ogievetsky O.、Pyatov P.，满足凯莱-哈密顿-牛顿恒等式的量子矩阵代数，《物理学杂志A：数学与一般》32，第 9 期（1999），L115。[IP] Isaev A.、Pyatov P.，量子群余切丛的谱扩张，《数学物理通讯》288 (2009)，第 1137–1179 页。[JLM] Jing N.、Liu M.、Molev A.，量子盖尔范德不变量的特征值，《数学物理杂志》65 (2024)，061703。

[OP] Ogievetsky O.、Pyatov P.，《海克代数讲义》，载于《对称性与可积系统》，杜布纳出版社，2000，预印本 CPT-2000/P.4076。[M] Macdonald I.G.，《对称函数与霍尔多项式》。牛津：克拉伦登出版社，1979。[PP] Perelomov A.、Popov V.，经典群的卡西米尔算子，《苏联科学院通报》174 (1967)，第 287–290 页。[RTF] Reshetikhin N.、Takhtadzhyan L.、Faddeev L.，李群与李代数的量子化，英文译本见：《列宁格勒数学杂志》1(1990)，第 193–225 页。