arXiv:2601.11372v1 [cs.GT] 16 Jan 2026

最小化 EFx 分配的成本

Eva Deltl

克劳斯塔尔工业大学，德国

摘要

在控制成本（如运输或存储成本）的同时确保公平性，是资源分配中的一项重要挑战；然而，大多数研究都聚焦于不考虑公平性的成本最小化，或不明确考虑成本的公平性。我们提出并正式定义了 minCost-EFx 分配问题，其目标是计算一个成本最低且至多任意一件物品无嫉妒（EFx）的分配。我们研究了该问题的算法复杂性，并证明即使只有两个代理人，该问题也是 NP 困难的。另一方面，我们证明，针对物品数量，该问题具有多项式核，这表明问题难以处理的一个核心来源在于物品数量。在此基础上，我们找到了若干可处理的受参数限制情形，包括估值有界且代理人数量为常数的情况，以及在受限成本模型下物品类型数量有限的情况。最后，我们转向成本近似，并证明对于任意 $\rho > 1$，除非 $P = NP$，否则该问题无法在多项式时间内实现 ρ 近似；同时，我们还找到了受限成本模型，其中成本因代理人而异、且独立于实际收到的物品，在这些模型下可以获得更好的近似保证。

1 引言

分配资源很少不需要成本。在许多情境中，将一件物品分配给一位代理人会产生运输、存储或协调成本，而且有些分配可能根本不可行。例如，在灾害救援中，必须公平地分配食品、水和医疗用品，同时尽量降低运输成本。任务调度也会面临类似约束：既要均衡工作负载，又不能延长完成时间；一些机构则需要在预算紧张的情况下分配员工或资金，同时维持其正当性得到认可。

因此，在标准的无成本模型中满足强公平保证的分配，一旦将成本考虑在内，就可能不再占优，甚至变得不可行。这促使我们研究成本函数下的公平分配。

我们引入一种模型，旨在寻找满足任意单件物品下的无嫉妒性（*EFx*）的成本最小化分配。在标准的无嫉妒性定义中，没有代理人会认为另一位代理人的分配优于自己的分配。EFx [Caragiannis 等人，2019b]放宽了这一要求：如果一位代理人嫉妒另一位代理人，那么从被嫉妒的物品束中移除任意一件物品后，嫉妒便会消失。通过研究成本函数下的 EFx，我们刻画了公平性必须与物流或预算约束并存的情形。

1.1 相关工作

对于不可分物品，通常无法实现精确的无嫉妒，因此人们提出了其他公平性概念。Budish [2011]提出了至多一件物品无嫉妒（*EF1*）：如果从另一位代理人的物品束中移除一件物品即可消除任何嫉妒，则满足该条件。EF1 分配保证存在，且可在多项式时间内计算[Lipton 等人，2004]。Caragiannis 等人 [2019b] 提出了更强的准则至多任意一件物品无嫉妒

物品无嫉妒（*EFx*），要求无论移除哪一件物品，嫉妒都会消失。一般情况下，EFx 分配是否存在尚无定论，不过已证明在某些特殊情形下存在，例如有三位代理人时 [Chaudhury 等，2024年，Akrami 等人， 2023] 或者排序相同的情形 [Plaut 和 Roughgarden， 2020]。2020年，Plaut 和 Roughgarden [2020] 提出了一种算法：当所有代理人的估值函数相同时，该算法可计算出一个 EFx 分配$v(\cdot)$，其中对 $v(\cdot)$的唯一假设是其单调。在估值可加且排序相同的情况下，也就是每位代理人都根据各物品的个体估值按相同顺序为物品排序时，该算法可在$\mathcal{O}(mn^3)$时间内返回一个 EFx 分配。其他公平性放宽标准还包括至多一件物品的比例公平（*PROP1*）以及最大最小份额（*MMS*）保证 [Budish，2011，Caragiannis 等，2019c]。

效率是这一背景下的重要考量，其中包括纳什社会福利（NSW）等概念。纳什社会福利旨在最大化代理人效用的乘积 [Kaneko and Nakamura，1979], ，在公平性与效率之间实现平衡。加权纳什社会福利也已得到研究 [Feng and Li，2024], ，将优先级或隐性成本纳入目标函数。另一个关键概念是帕累托最优，它确保无法在不同时损害另一名代理人利益的情况下，通过重新分配改善某一名代理人的状况。

高效且无嫉妒资源分配的复杂性过去已有研究[Bliem 等，2016, de Keijzer 等， 2009]。Aziz 等人 [2023] 研究了在各种公平性概念下，同时实现福利最大化与公平的分配的存在性和计算复杂性，包括 EF1 和 EFx。进一步的研究结果刻画了受限情形下的 EFx [Goldberg 等，2023, Morozov 等人， 2024], ，表明 EFx 分配的数量可能显著少于预期，从而缩小了算法搜索空间。研究人员还提出了近似方法，尤其针对 MMS 分配 [Amanatidis 等，2017, Garg and Taki, 2021] 以及纳什社会福利最大化；后者能够提供 EF1 和 MMS 保证 [Caragiannis 等，2019c]。

已有多项研究探讨了与 EFx 相关的近似概念，包括将物品捐赠给慈善机构 [Chaudhury 等人， 2024], 有时是为了实现近似纳什福利[Caragiannis 等人，2019年a], ，或通过设计能够保证近似 EFx 的算法 [Plaut 和 Roughgarden，2020年，Amanatidis 等人， 2024]。

另一条互补的研究路线则明确分析公平性与效率之间的权衡。Bei 等人 [2021] 提出了不可分物品的 公平价格 概念，用于量化施加公平约束所造成的效率损失（例如福利）。

我们的问题也类似于装箱问题中的经典挑战 [Levin， 2024] 以及作业调度中的经典挑战 [Koutecký 和 Zink， 2020], 这些问题已在近似算法和计算复杂性领域得到广泛研究。在装箱问题中，必须将大小各异的物品放入数量有限的箱子中，同时不得超过容量，这与我们在 EFx 约束下将物品分配给代理人的任务相似。在作业调度中，任务被分配给资源（例如处理器），以优化诸如最小化完成时间等标准，这体现了效率与公平之间的相同权衡；公平性感知调度也得到了研究 [Niu 等人，2023年，Bilò 等人， 2016]。

除了这些理论联系之外，公平性与成本考量相结合也已在应用优化中得到研究。在物流领域，Rey 等人 [2018]将无嫉妒纳入食物救援与配送，将公平分配与车辆路径成本结合起来。在设施选址领域，Filippi 等人 [2021] 提出了一个双目标模型，在确保公平获取的同时最小化基础设施成本。

1.2 我们的贡献

为了解决传统公平分配方法的局限性，我们将成本函数引入 EFx 的概念，从而将多种因素纳入考量，包括多样化需求、地理因素和资源可用性。因此，我们正式定义

	一般成本	受限成本
-	弱NP困难，甚至对于 $n = 2$	
By n	$W[1]$-困难；如果 $v_{\max} \leq \text{poly}(m)$，则属于 XP	
By m	多项式核	
By β	–	XP

表 1：最小成本 EFx 分配结果概览。这里， n 是代理人的数量，m是物品的数量，而 β 是物品类型的数量。

如下优化问题：

问题 1 ： 最小成本-EFx 分配
输入：一组物品 $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$，一组代理人 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$，一个估值函数$v : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{N}$ 以及每位代理人对应的代理人特定成本函数 $c_i : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{N}$ $a_i \in A$。**求解**：一个 EFx 分配 $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)$，使总成本函数 $c(\mathcal{X}) = \sum_{a_i \in A} c_i(X_i)$ 最小。

鉴于 EFx 分配是否存在尚不确定，问题定义仅限于所有代理人共享同一估值函数 v的情形。在这一假设下，Plaut 和 Roughgarden [2020]证明了 EFx 分配必然存在。

本研究将注意力限于可加估值函数，这类函数将一组物品的价值定义为其中各物品价值之和。我们的目标是找出能够更高效地进行计算的情形。

接下来，我们概述计算复杂性和算法结果。首先，我们证明一般问题的复杂度主要由物品数量决定。在此基础上，我们证明最小成本 EFx 分配存在一个大小为 m 多项式级的问题核（推论 2）。为深入理解该问题的结构，我们先提出若干关键观察，然后证明当代理人数量不少于两个时，该问题是 NP 困难的（定理 1、定理 10），并且关于代理人数量是 n $W[1]$-困难的，即使输入中的所有数字都以一元编码（推论 4）。

受这些计算复杂性结果的启发，我们接着研究参数受限变体。具体而言，我们证明，当估值关于物品数量多项式有界且代理人数量为常数时，该问题可以在多项式时间内求解（定理 5）。与此同时，我们证明一般问题不存在针对任意 $\rho > 1$ 的多项式时间 ρ-近似算法（定理 8）。

这促成了对一种结构化成本模型的分析，其中代理人的成本函数完全依赖于估值。在这一设置下，我们分析物品类型数量有界的实例，并设计出一个 $\mathcal{O}(n^2 \cdot m^{3\beta})$ 算法（定理 11），其中 β 表示物品类型的数量。我们进一步开始研究这一变体的近似算法，并证明其不可近似性界为 $4\,3$ （定理 13）。有关我们的复杂性结果概览，请参见表 1。

许多标记为 $\star$ 的细节可以在附录中找到。

2 预备知识

我们用 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 表示代理人 集合，用 $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$ 表示物品集合。每个代理人 $a_i \in A$都有一个成本函数 $c_i : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{N}$，以及一个估值函数 $v_i : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{N}$，它们定义在 M 中的物品集合上；对于单个物品 $g \in M$，我们将 $v_i(x)$ 简写为

$v_i(\{x\})$。如果估值函数 v 满足 $v(S) = \sum_{x \in S} v(x)$ 对所有 $S \subseteq M$ 都成立，则称其为可加的 。如果对于所有代理人 $a_i, a_j \in A$，$v_i = v_j$ 都成立，则称代理人具有相同的估值函数 。

一个分配 $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)$表示将一组不可分物品划分为 n个子集，这些子集也称为物品束。

公平性。 给定一个分配$\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)$，如果代理人 a_i 嫉妒 代理人a_j，则称前者$v_i(X_i) < v_i(X_j)$。

EFx （任意单件物品下的无嫉妒性）保证通过从另一代理人的物品束中移除任意一件物品，即可消除嫉妒。形式化地说，对于分配为X_i 和 X_j的任意两个代理人 a_i 和a_j，对于所有物品 $x \in X_j$:

$$v_i(X_i) \geq v_i(X_j \setminus \{x\})$$

如果对于某个$x \in X_j$，代理人 a_i 强烈嫉妒 代理人a_j，即 $v_i(X_i) < v_i(X_j \setminus \{x\})$，则称前者强烈嫉妒后者。如果一个分配$\mathcal{X}$ 在 EFx 意义下是可行的，则不存在任何代理人强烈嫉妒另一代理人。

参数化复杂性。 我们采用 Cygan 等人 [2015], 、Fellows 等人 [2009], 、Niedermeier [2006] 以及 Flum 和 Grohe [2004]所述的参数化复杂性和算法学中的基本记号。

参数化问题是一个子集 $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$，其中 Σ 是一个有限字母表。若存在一种算法，能够对每个给定的实例 (x, k) 判定其是否属于 $(x, k) \in L$（yes-实例）或 $(x, k) \notin L$（no-实例），且运行时间为 $f(k) \cdot |x|^{\mathcal{O}(1)}$，其中 f是仅依赖于参数 k的某个可计算函数，则称该问题是固定参数可解 （FPT）。这类问题称为 FPT。*XP* 类 包含可在时间 $|x|^{f(k)}$ 内求解的参数化问题，其中对每个实例 (x, k)，f 是一个可计算函数。对于参数 k，如果一个问题即使在 k 固定为常数值时仍然是 NP 困难的，则称其为参数化 *NP* 难 。

我们还考虑核化这一概念。对于带参数 k的问题 L，核化 是指将每个实例 I 转换为一个规模更小的新实例 I'，并带有新参数 k'，使得 I' 的规模和 k' 的值均由某个函数 $g(k)$界定。原实例 I 是是实例，当且仅当约简后的实例 I' 是是实例。如果函数 $g(k)$关于 k是多项式，则称问题 L 具有多项式核。

近似。 我们采用 Vazirani [2001]andWilliamson andShmoys [2011] 对近似算法研究所述的基本概念。

3 一般成本函数

我们首先证明，即使只有两个代理人，最小成本 EFx 分配也是弱NP困难的。这促使我们对该问题进行参数化研究，并证明最小成本 EFx 分配关于物品数量 m存在多项式核。具体而言，我们证明每个实例都能在多项式时间内约化为一个涉及至多 m^3 个代理人的等价实例。此外，当估值有界且代理人数量为常数时，我们可以得到一个多项式时间算法。

3.1 NP 困难性

许多证 明基于关于 EFx 分配的一项基本观察 :

观察 1. 在每一个 EFx 分配 $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ 中，如果代理人具有相同的估值函数，那么分配给不同代理人的任意两个物品束之间的估值差都不超过价值最高的物品的价值。

观察 2 (⋆). 在每一个有 n 个代理人的 EFx 分配中，每个物品束的价值都至少为

$$\frac{v(M) - \sum_{t=1}^{n-1} v(x_{(t)})}{n},$$

其中 $x_{(1)}$、$x_{(2)}$、.....、$x_{(m)}$ 是 M 中按估值递减顺序排列的物品。

这一条件为每位代理人的物品束价值设定了一个最小阈值。通过构造这样的实例：只有在价值几乎均等分配时才能达到该阈值，我们可以利用经典数论问题（如划分问题（问题 2）和装箱问题（问题 5））的困难性归约。这得出了我们的第一个困难性结果。

定理 1 (⋆)。 即使只有两个代理人，最小成本 *EFx* 分配也是弱 *NP* 困难的。

在下面的证明中，我们给出一个从弱 NP 困难问题划分问题 [（Garey 和 Johnson， 1979]）出发的多项式时间多对一归约。

问题2：划分
输入：一个由 m 个正整数构成的多重集 $S = \{s_1, ..., s_m\}$，且满足 $\sum_{s\in S} s = 2 \cdot T$。**问题**：能否将 S 划分为 S_1， S_2，使得每个子集的元素之和都等于 T?

证明（定理 *1*）。令 $I = S$为一个划分问题实例，其中 $\sum_{s\in S} s = 2 \cdot T$且 $|S| = m$。我们通过以下方式，在多项式时间内构造一个最小成本 EFx 分配实例 $I' := (\{a_1, a_2\}\ M, v, c)$。

构造： 对于每个整数 $s_i \in S$，我们向 M 添加一个物品 x_i，其估值为 $v(x_i) = s_i$。此外，我们添加一个物品 $\{x_{\min}\}$，其估值为 $v(x_{\min}) = 0$。成本函数如下：

$$\begin{aligned} c_1(x_i) &= 0 && \forall x_i \in M \\ c_2(x_i) &= x_i && \forall x_i \in M \setminus x_{\min} \\ c_2(x_{\min}) &= T + 1 \end{aligned}$$

至此，构造完成。完整证明请参见附录。 □

这种计算复杂性源于可以操纵成本来强制实现特定的分配，使得该问题极难求解或高效近似（见定理 8）。在这些计算复杂性结果之后，我们现在分析最小成本 EFx 分配的参数化复杂性。

3.2 参数化复杂性

定理 2. 给定一个包含 n 个代理人和 m 个物品的实例 $I = (A, M, v, c)$，可以在 $O(m \cdot n^{2m})$ 时间内计算出最小成本 *EFx* 分配的解。

证明. 将 m 个物品分配给 n 个代理人，最多有 n^m 种可能的分配。通过验证每个代理人对其物品束的估值是否至少与移除其中价值最低的物品后的任意其他物品束相同，可以在 $\mathcal{O}(m \cdot n^2)$ 时间内检查分配是否满足 EFx 可行性。随后即可返回成本最低的分配。因此，可以在$\mathcal{O}(m \cdot n^{2m})$ 时间内求解最小成本 EFx 分配。 □

由定理 2 可推知

推论 1. 当物品数量 m 为常数时，最小成本 EFx 分配可在多项式时间内求解。

现在我们分析 $n \geq m$ 的情形。

观察 3。 如果 $n \geq m$ 且某件物品受到至少 m 个代理人正向评价，那么在每个 EFx 分配中，该物品都必须单独分配。

定理 3。 如果 $n \geq m$ 且每件物品都受到至少 m 个代理人正向评价，那么 *minCost- EFx Allocation* 可在多项式时间内求解。

证明。 根据观察 3，EFx 约束强制产生唯一的可行划分，其中每件物品都分配给不同的代理人。为使成本最小，我们将每件物品 x_i 限制分配给其m 个成本最低的代理人 A_i，其中 $|A_i| \leq m$。设一个最优分配 $\mathcal{X}$ 将 x_i 分配给某个代理人 $b \notin A_i$。由于 $\mathcal{X}$ 中至多有 m 个物品束非空，至少有一个 $a \in A_i$ 未获得任何物品。由于 $c_a(x_i) \leq c_b(x_i)$，将 x_i 分配给 a 而不是 b，可以得到另一个成本不更高的可行分配；如果 $c_a(x_i) < c_b(x_i)$，则该分配的成本还会严格更低。因此，我们可以将注意力限制在 A_i中的代理人上。

现在我们构造一个二分图 $G = (U, V, E)$，其中 U 是物品集合，V 是代理人集合；若满足 $a \in A_i$，则边 $(x_i, a) \in E$ 的权重为 $c_a(x_i)$。没有关联边的代理人可以删除。可行分配恰好对应于 G 中大小为 m的最小成本匹配。由于每件物品至多贡献 m 条边，$|E| \leq m^2$ 且 $|U| + |V| = \mathcal{O}(m^2)$。

二分图中的最小成本匹配可以归约为一个最小成本流实例 [Ahuja 等人，1993]。利用最新的最小成本流近线性时间算法，该问题可以在时间 $m^{1+o(1)}$ [Chen 等人，2025], 内求解，其中 m 表示边数。因此，当 $n \geq m$时，该问题可在多项式时间内求解。

□

接下来我们考虑一般情况。

归约 1。 如果某件物品受到超过 m 名代理人的正估值，则只保留成本最低的 m名代理人。

归约 2。 对于每一对物品，若至少对其中一件物品有正估值的代理人集合大小小于 m，则保留所有这些代理人（记为 $m' < m$），并额外保留对这对物品而言成本最低的 m 位代理人。

应用归约 1 和归约 2，可得以下结论。

引理 4。 每个 *minCost-EFx* 分配实例 (A, M, v, c) 都能在多项式时间内归约为一个等价实例 (A', M, v, c)，且该实例至多包含 m^3 位代理人。

证明。 设$\mathcal{X}$ 是原始实例的一个成本最优 EFx 分配。假设某个非空物品束 X' 被分配给代理人 $b \notin A'$。

情形 *1*。 假设 b 在未分配任何物品时不会强烈嫉妒任何物品束。那么，存在一位代理人 $a \in A'$，他因物品 X'而在归约中被保留，且一定分到了一个空物品束。将 X' 重新分配给 a 后，仍得到一个可行分配，因为没有代理人强烈嫉妒 b，且总成本不会增加。

情形 *2.* 反之，假设如果不分配任何物品束，b 就会强烈嫉妒某个物品束。那么存在一个大小至少为二的集合 X^*，其中的物品都受到 b 重视。根据归约 1 和归约 2，对于每一对物品 x, $y \in X^*$，我们保留了重视它们的成本最低的 m 个代理人。由于 $b \notin A'$，所有这些 m 个位置都由其他代理人占据。因此，在 X^* 的物品中，我们至少保留了 m 个不同的代理人。根据鸽巢原理，这些被保留的代理人中至少有一人在 $\mathcal{X}$ 中分配到空物品束。于是该代理人会嫉妒 b的分配 X'，这与 EFx 可行性矛盾。

因此，我们可以将注意力限制在 A'中的代理人。

最后，大小界由构造直接得出。每个单独的物品至多贡献m 个保留的代理人，而 $\binom{m}{2}$ 个配对中的每一对至多贡献 m 个额外代理人。因此$|A'| = O(m^3)$，且该归约可在多项式时间内计算。

□

请注意，只要代理人的估值具有可加性，即使彼此不同，该归约仍然成立。此外，应用 Frank 和 Tardos [1987] 权重缩减两次，可得到一个权重有界为 $poly(m)$的等价实例（完整证明见附录），因此核大小关于物品数量为多项式级。

推论 2 ($\star$)。 minCost-EFx 分配问题存在一个规模关于 m 为多项式的核。

接下来，我们证明，当物品估值有界时，对于固定数量的代理人，minCost-EFx 分配问题可以在多项式时间内求解。这一发现与离婚财产分割或遗产纠纷等现实场景尤为相关，因为这类场景中的代理人数量通常较少。此外，这也补充了我们稍后关于该问题相对于代理人数量的$W[1]$-困难性结果（见推论 4）。

定理 5。 *minCost-EFx* 分配问题可以在 $O(n(m+1)\cdot(v(M)+1)^n)$ 时间内求解。

首先，我们构造一个动态规划表 D'，它将作为主算法的预言机。

定义 1。 具有 $m=|M|$ 和 $n=|A|$ 的实例 $I:=(A,M,v,c)$ 的次级动态规划表 是一个布尔表 D'，其表项为

$$D'[i,\mathbf{y}]\in\{\top,\bot\}$$

其中 $i\in\{0\ldots,m\}$ 且 $\mathbf{y}\in\{0,\ldots,v(M)\}^n$，其中 $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$。我们对该表作如下解释。表中的一个条目 $D'[i,\mathbf{y}]$ 为真，当且仅当存在对前 i 个物品（按估值升序 排列）的分配 $(X_1,\ldots,X_n)$，使得对于所有 $a_j\in A$，代理人束 $v(X_j)$ 的价值至少为 y_j。

引理 6 ($\star$). 给定 *minCost-EFx* 分配的一个实例 $I=(A,M,v,c)$，其 I 的次级动态规划表 D' 可在 $O(n(m+1)\cdot(v(M)+1)^n)$时间内计算得出。

现在，我们可以定义算法所需的主动态规划表。

定义 2。 对于一个实例 $I:=(A,M,v,c)$，其中 $m=|M|$ 且 $n=|A|$，主动态规划表 D 是一个整数表，其条目为

$$D[i,\mathbf{y}]\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\},$$

其中 $i\in\{0,\ldots,m\}$ 以及 $\mathbf{y}\in\{0,\ldots,v(M)\}^n$。我们将 $D[i,\mathbf{y}]$ 解释为：对前 i 个物品（按价值降序 排列）进行部分分配所需的最小总成本，其对应的价值向量为$\mathbf{y}$，且该分配可以通过剩余的 $m-i$ 个物品扩展为 EFx 分配。

引理 7. 给定最小成本 *EFx* 分配的一个实例 $I=(A,M,v,c)$，可以在 $O(n(m+1)\cdot(v(M)+1)^n)$ 时间内计算动态规划表 D。

证明。 我们将说明如何填充动态规划表并高效地计算表项。

构造： 首先，我们按如下方式初始化动态规划表：

$$D[i,\mathbf{y}]=\begin{cases}0, & \text{if } \mathbf{y}=(0,\ldots,0) \text{ and } i=0\\ \infty, & \text{otherwise}\end{cases}$$

我们按估值降序排列物品。对于 $i>0$，我们按如下方式计算所有条目 $D[i,\cdot]$，假设所有条目 $D[i-1,\cdot]$ 均已计算完毕。对于每个代理人 $a_j\in A$和满足 $D[i-1,\mathbf{y}]\neq\infty$的价值向量$\mathbf{y}$，考虑满足 $y'_j=y_j+v(x_i)$ 的价值向量 $\mathbf{y}'$，并且

$y'_{j'} = y_{j'}$对于所有 $j' \neq j$。令$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$为一个价值向量，对所有 $j' \in [n]$均满足 $z_{j'} = \max(y_j - y_{j'}, 0)$。如果 $D'[m-i, \mathbf{z}] = \top$，那么

$$D[i, \mathbf{y}'] = \min\{D[i, \mathbf{y}'],\, D[i-1, \mathbf{y}] + c_j(x_i)\}.$$

如果这些条件不成立，也就是说，无法通过部分分配 $\mathbf{y}'$实现 EFx 分配，那么我们不会更新 $D[i, \mathbf{y}']$。

运行时间： 该表有 $(m+1) \cdot (v(M)+1)^n$ 个表项，每个表项的处理时间为 n。D' 只需构建一次，因此总运行时间为 $\mathcal{O}(n(m+1) \cdot (v(M)+1)^n)$。

正确性： 我们对 i 进行归纳证明：$D[i, \mathbf{y}]$ 等于前 i 个物品（按价值递减顺序排列）的部分分配的最小总成本；该部分分配的价值向量为 $\mathbf{y}$，且可利用剩余的 $m-i$ 个物品扩展为 EFx 分配。

基础情形：$i = 0$。只有成本为 0 的空分配是可行的，如编码所示。

归纳步骤：假设对 $i-1$，结论成立。考虑将 x_i 分配给代理人a_j的转移。由于物品按价值递减的顺序处理，x_i 是最终物品束 X_j中价值最低的物品。此外，条件 $D'[m-i, \mathbf{z}] = \top$ 保证剩余的 $m-i$个物品可以完成分配，使得对于每个其他代理人，其物品束相对于a_j 的价值差至多为 x_i，因此 EFx 性质得以保持。因此，每次转移都会产生一个可扩展为 EFx 分配的部分分配。

反之，设 $\mathcal{X}$ 是前 i 个物品（按价值递减排序）的一种 EFx 可扩展分配。在 $\mathcal{X}$ 中，物品 x_i 被分配给某个代理人 a_j，且移除 x_i 后仍然得到前 $i-1$ 个物品的一种 EFx 可扩展分配。用相应状态 $\mathbf{z}$的条目 $D'[m-i, \mathbf{z}] = \top$ 表示用剩余物品完成 $\mathcal{X}$的可行性。因此，前 i 个物品的每一种 EFx 可扩展分配，都由某次转移表示。最后，由于 $D[i, \mathbf{y}]$ 取所有从可行状态出发的转移中的最小值，它存储了具有价值向量 $\mathbf{y}$的前 i 个物品的所有 EFx 可扩展部分分配中的最小总成本。

□

定理 *5* 的证明。按照上文所述，在 $\mathcal{O}(n(m+1) \cdot (v(M)+1)^n)$ 时间内构造 D' 和 D。最后，检查所有满足 $\sum_j y_j = v(M)$ 的条目 $D[m, \mathbf{y}]$，并返回所有此类分配中成本最小的那个。

根据引理 7，$D[m, \mathbf{y}]$ 给出了价值向量为$\mathbf{y}$的任意 EFx 分配的最小成本。对所有$\mathbf{y}$ 取最小值，恰好得到全局最优成本。由于在相同估值下，EFx 分配总是存在，因此那些 ∞ 因无法扩展为 EFx 分配而被保留的条目并无妨，因为没有任何 EFx 分配的成本会比 ∞更差，所以这些条目绝不会影响最优值。因此，该算法能够正确判定最小成本 EFx 分配问题。

当 n 为常数且物品价值以多项式形式有界时，该算法在多项式时间内运行。

□

3.3 近似困难性

定理 8. 对于任意 $\rho > 1$，除非 $P = NP$，否则最小成本 *EFx* 分配问题无法在多项式时间内实现因子为 ρ的近似。

我们通过从以下 NP 困难问题（引理 15 $\star$）进行保持间隙的归约来证明该定理：

问题 3：受[redacted]

输入：一个由 $S = \{s_1, \ldots\ldots, s_m\}$ 组成的正整数多重集，其中 m 正整数满足 $\sum_{s \in S} s = 2 \cdot T$，且每个整数 $s \in S$ 都小于 $\frac{2T}{m} + \epsilon$，其中 $\epsilon > 0$。

问题：是否存在一种将 S 划分为 S_1、S_2 的方式，使得每个子集的和都等于 T 和$|S_1| = |S_2|$?

证明（定理 8）。设 $I = S$ 是受限权重等基数划分的一个实例，其中 $\sum_{s\in S} s = 2T$ 和 $|S| = m$。我们按如下方式在多项式时间内构造一个最小成本 EFx 分配实例。

构造。对于每个整数 $s_i \in S$，我们创建一个物品 $x_i \in M$，使其 $v(x_i) = s_i$。此外，我们添加两个物品 $\{x_{m+1},\ x_{m+2}\}$，使其 $v(x_{m+1}) = v(x_{m+2}) = 0$，以及一个特殊物品 x^*，使其$v(x^*) = T$。

成本函数定义如下：

$$\begin{aligned} &c_1(x_i) = 0 && \forall x_i \in M \setminus \{x^*, x_{m+2}\}, && c_1(x^*) = c_1(x_{m+2}) = \rho, \\ &c_2(x_i) = 0 && \forall x_i \in M \setminus \{x^*, x_{m+1}\}, && c_2(x^*) = c_2(x_{m+1}) = \rho, \\ &c_3(x_i) = \rho && \forall x_i \in M \setminus \{x^*\}, && c_3(x^*) = 1. \end{aligned}$$

最后，我们设定 $k = 1$。至此，构造完成。

完备性。假设 S 是受限权重等基数划分的一个 yes-实例，即，S 可以划分为 S_1 和 S_2，满足 $\sum_{s\in S_1} s = \sum_{s\in S_2} s = T$。考虑如下定义的分配 $\mathcal{X} = (X_1,\ X_2,\ X_3)$：

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x_i : s_i \in S_1\} \cup \{x_{m+1}\}, \\ X_2 &= \{x_i : s_i \in S_2\} \cup \{x_{m+2}\}, \\ X_3 &= \{x^*\}. \end{aligned}$$

根据构造，$v(X_1) = v(X_2) = v(X_3) = T$，因此 $\mathcal{X}$ 是无嫉妒的，因而也是 EFx。其成本为

$$\mathrm{cost}(\mathcal{X}) = c_1(X_1) + c_2(X_2) + c_3(X_3) = 0 + 0 + 1 = 1.$$

因此，存在一个成本至多为 1 的 EFx 分配。

可靠性：我们有 $\sum_{x\in M} v(x) = 3T$，并且对于任意分配 $\mathcal{X} = (X_1, X_2, X_3)$，都有

$$\mathrm{cost}(\mathcal{X}) = c_1(X_1) + c_2(X_2) + c_3(X_3).$$

现在假设 S 是受限权重等基数划分的一个 no-实例。由于 S 无法被均匀划分，因此至少有一个物品束的价值严格大于T，另一个物品束的价值严格小于T。若 $v(X_3) > T$，则 a_3必须至少包含两件物品，这迫使 $c_3(X_3) \geq \rho$。若 $v(X_1) > T$，则 EFx 要求 $v(X_1) - v(\min_v X_1) \leq T$，因为另一个物品束的价值低于 T。这一条件将 x_{m+1} 排除在 X_1之外，进而迫使 $c_2(X_2) \geq \rho$ 或 $c_3(X_3) \geq \rho$成立。根据对称性，同样的推理也适用于 X_2 和 x_{m+2}。因此，每个 EFx 分配的成本都必须满足 $\mathrm{cost}(\mathcal{X}) \geq \rho$。

因此，yes 情形与 no 情形之间的比率为 $\rho/1 = \rho$。因此，除非 $P = NP$，否则 minCost-EFx Allocation 无法在多项式时间内近似到因子 ρ。 □

推论 3. 除非 $P = NP$，否则 minCost-EFx Allocation $\notin$ APX。

4 受限成本函数

基于上述结果，我们现在将注意力限制在一个简化设定上，以便更系统地分析算法复杂性。在该变体中，假定成本是与物品无关的：代理人a_j 的成本仅取决于应用于物品束 X价值的乘法因子α_j，即，

$$c_j(X) = \alpha_j \cdot v(X).$$

略微滥用记号，我们此后将成本函数的输入表示为一个向量，其中每个坐标对应于一名代理人的成本因子。

为说明这一问题，考虑一项灾害救援行动：必须将资源分配给若干受灾地区。令 M 表示可用物资， A 表示区域集合。每件物品的价值为 $v(x)$，而每个区域 a_i 都有一个成本因子 α_j，用于反映配送难度（例如距离或可达性）。目标是在实现公平结果（EFx）的同时，尽可能降低总配送成本 $\sum_{a_j \in A} \alpha_j \cdot v(X_j)$（参见附录中的例 1）。

在这一情境下，确保资源得到公平分配至关重要，不能让任何区域感到自己明显处于劣势，尤其是在灾害救援中。增加尽可能降低运输成本这一约束，则考虑到了预算有限和资源效率等实际因素。

4.1 NP 困难性

因子模型适用于这样的情形：代理人对物品的相对价值看法一致，但效率或预算各不相同。例如，将相同物资分配给两个区域可能产生相同价值，但向偏远区域配送的成本普遍更高。

此外，这一限制使得我们能够设计更高效的近似算法，在公平性保证与计算可处理性之间实现权衡。然而，尽管问题有所简化，它在计算上仍然具有挑战性。事实上，我们证明，即使在最基础的非平凡情形下，问题仍然是困难的。

定理 9 $(\star)$。 即使只有两个代理人且成本函数受限，最小成本 *EFx* 分配仍然是 *NP* 困难的。

在以下证明中，我们给出一个从下述弱 NP 困难问题出发的多项式时间多对一归约： [Garey 和 Johnson， 1979]问题：

问题 4：等差成的多重集 $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$，满足 $\sum_{s \in S} s = 2 \cdot T$。**问题**：是否存在一个划分，将 S 划分为 S_1, S_2，使得 $|S_1| = |S_2|$ 且每个子集的元素之和均为 T?

证明。 设 $I = S$ 是等基数划分的一个实例。若 m 为奇数或某个$s_i > T$，则 I 是一个平凡的 no-实例，因此我们可以将其映射到任意一个固定的、成本函数受限的 minCostFactor-EFx 分配实例。因此，假设 m 为偶数，且对所有 i都有 $s_i \leq T$。

我们按如下方式，在多项式时间内构造一个具有受限成本函数的最小成本 EFx 分配实例 I': $= (A, M, v, c)$。

构造： 定义

$$B := (m+1)(2T+1).$$

对每个 $s_i \in S$，添加一个估值为 $v(x_i) = s_i + B$ 的数值物品 x_i。此外，再加入一个满足 $v(x_{\min}) = T + 1$ 的物品 $x_{\min}$。最后，我们将成本因子设为 $\alpha_1 = 0$ 和 $\alpha_2 = 1$。至此，构造完成；显然，该过程可在多项式时间内完成。

我们证明， I 是一个 yes-实例，当且仅当存在一个成本为 $\leq \frac{m}{2} \cdot B + T$ 的 I' 解。正确性的证明同样参见附录。 □

我们使用类似的技巧来证明:

定理 10 $(\star)$。 在受限成本函数下，最小成本 *EFx* 分配是 *NP* 困难的，即使输入中的所有数字都采用一元编码。

在下面的证明中，我们将以下强 NP 困难的 [Koutecký 和 Zink 2020] 问题进行多项式时间多对一归约：

问题5：紧密装箱集 S，每个 $i \in S$对应一个大小为 $s(i)$的尺寸 $\in \mathbb{N}$，其中 $\sum_{i \in S} s(i) = nB$，另有一个正整数箱容量 B，以及一个正整数 n。

问题：是否存在一种将 I划分为互不相交的集合 $S_1, \ldots, S_n$ 的方法，使得每个 S_j 中物品的尺寸总和不超过 B？

证明。设 $I = (S, B, n)$是紧密装箱问题的一个实例，其中 $\sum_{i \in S} s(i) = nB$ 且$|S| = m$。我们按如下方式，在多项式时间内构造一个最小成本 EFx 分配实例 $I' := (A, M, v, c)$。

构造：注意，S 中的所有整数都小于或等于 B，否则该实例将显然是一个 no-实例。设 A为由 $n+1$个代理人组成的集合。对于每个物品 $i \in S$，我们向 M 中添加一个物品 x_i，其估值为 $v(x_i) = s(i)$。此外，我们还添加两个物品$\{x_{m+1}, x_{m+2}\}$，其估值为 $v(x_{m+1}) = v(x_{m+2}) = B$。最后，对于所有其他 $a_i \in A \backslash \{a_1\}$，我们设置成本因子 $\alpha_1 = 0$ 和 $\alpha_i = 1$。至此，构造完成。

正确性的证明见附录。 □

推论 4. 当以代理人数量 n为参数时，最小成本 EFx 分配是 $W[1]$-难的。

证明。 上述归约将一个参数为 k （即箱子数量）的紧密装箱实例映射为一个参数为 $n = |A| = k+1$ 的最小成本 EFx 分配实例。由于紧密装箱问题在以 k 为参数时是 $W[1]$-难的，因此这个保持参数的归约意味着，最小成本 EFx 分配在以 n 为参数时是 $W[1]$-难的。 □

4.2 参数化复杂性

鉴于上一节已确立的困难性，我们现在旨在探究特定参数对受限成本函数下最小成本 EFx 分配计算复杂性的影响，以确定其变得更易处理的条件。具体而言，我们研究物品类型的多样性如何影响复杂性。物品类型越少，通常越容易设计简单的分配策略，从而降低计算需求。在许多分配场景中，这种限制也很自然，因为物品往往属于少数几个定义明确的类别。回想一下，在物品估值有界的情况下，引理 7 已表明，对于有界估值，XP 成立 n。

定理 11. 对于具有受限成本函数和 β 种物品类型的实例，最小成本 *EFx* 分配可在 $O(n^2 \cdot m^{3\beta})$ 时间内求解。

我们将介绍一种简单的动态规划算法。

定义 3. 实例 $I := (A, M, v, c)$ 的动态规划表，其中有 $m = |M|$、$n = |A|$ 和 β 种不同的物品类型 $s_1, \ldots, s_\beta$，是一个整数表 D，其表项为

$$D[j, \mathbf{x}, j', \mathbf{m}'] \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

每个子集 $X \subseteq M$都可以表示为一个 β 维向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_\beta)$，其中$x_i$ 表示类型为 s_i 的物品在 X 中的数量。令 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_\beta)$ 表示完整物品集的向量表示。

条目 $D[j, \mathbf{x}, j', \mathbf{m}'] = c$的含义如下。固定代理人 a_j，使其接收由 $\mathbf{x}$ 编码的物品束。考虑由前 j' 个代理人组成的子实例（按顺序排列。

（按成本非递增顺序排列，并排除 a_j），以及由 $\mathbf{m}' \leq \mathbf{m}$ –x编码的物品多重集。其中，c 是使用物品 $\mathbf{m}'$（以及由 a_j 持有的 $\mathbf{x}$）为这些 j' 个代理人进行可行的部分 EFx 分配时的最小总成本。若不存在这样的分配，则令 $D[j,\mathbf{x}\ j',\ \mathbf{m}'] = \infty$。动态规划表 D 的索引为

- 两个 β 维整数向量 $\mathbf{x}$、$\mathbf{m}\prime \in \{0, \ldots\ldots, m\}^{\beta}$，其中 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_{\beta})$ 表示分配给指定代理人的物品束，而 $\mathbf{m}\prime = (m\prime_1, \ldots\ldots, m\prime_{\beta})$ 表示剩余物品的一个子集。两个向量的每个分量都受 $\mathbf{m}$ 的相应分量限制。
- 两个索引 j、$j\prime \in \{1, \ldots\ldots, n\}$，其中 j 表示接收物品束 $\mathbf{x}$ 的指定代理人，而 $j\prime$ 表示在对由$\mathbf{m}\prime$编码的物品进行部分分配时所考虑的代理人数（按成本非递增顺序排列）。

引理 12 $(\star)$。 给定一个实例 $I = (A, M, v, c)$， I 的动态规划表可在 $O(n^2 \cdot m^{3\beta})$ 时间内计算得到。

4.3 近似

即使对成本函数施加这一限制，我们仍然可以证明一个非平凡的下界：

定理 13。 对于任意 $\epsilon > 0$，除非 $P = NP$，受限成本函数下的最小成本 *EFx* 分配无法在多项式时间内近似到 $\frac{4}{3} - \epsilon$ 倍以内。

我们通过从受限权重等基数划分进行保持间隙的归约来证明这一点（见引理 15）。

证明（定理 *13*）。 设 $I = S$ 是受限权重等基数划分的一个实例，其中 $\sum_{s \in S} s = 2T$ 且 $|S| = m$。我们按如下方式在多项式时间内构造一个最小成本 EFx 分配实例。

构造： 对于每个整数 $s_i \in S$，我们向 M 添加一个物品 x_i，其估值为 $v(x_i) = s_i$。此外，我们添加两个物品 $\{x_{m+1}, x_{m+2}\}$，其估值为 $v(x_{m+1}) = v(x_{m+2}) = T$。
完备性： 设 $S = S_1, S_2$ 是受限权重等基数划分的一个 `yes`-实例。我们断言，$\mathcal{X} = (X_1, X_2, X_3)$ 满足

$$X_1 = \{x_{m+1}, x_{m+2}\} \quad X_2 = \bigcup_{s_i \in S_1} \{x_i\} \text{ and } X_3 = \bigcup_{s_i \in S_2} \{x_i\}$$

是一个最小成本 EFx 分配。注意，由构造可知 $v(X_1) = 2T$ 且 $v(X_2) = v(X_3) = T$，这意味着

$$\text{cost}(\mathcal{X}) = 0 \cdot v(X_1) + v(X_2) + v(X_3) = T + T = 2T$$

最后，我们需要证明$\mathcal{X}$是一个 EFx 分配。由于 $v(X_2) = v(X_3) = T$， a_2 和 a_3 彼此之间都没有嫉妒。由于 X_1 由 2 个价值相等的物品组成，

$$v(X_1) - \min_{v} X_1 = T \leq v(X_2) = v(X_3)$$

这意味着没有人强烈嫉妒 a_1。因此，存在一个成本为 $\leq 2T$的 EFx 分配。
可靠性： 令 S 为受限权重等基数划分的一个 `no`-实例。注意， $\sum_{x \in M} v(x) = 4T$，并且

$$\text{cost}(\mathcal{X}) = 0 \cdot v(X_1) + v(X_2) + v(X_3) = v(X_2) + v(X_3) = 4T - v(X_1)$$

由于 S 中的物品无法等分，我们可以推断，没有任何物品束可以同时包含 $\{x_{m+1},\ x_{m+2}\}$。根据定义，下一个最大的物品的值至多为 $\frac{2T}{m}+\epsilon'$。由观察 1 可知，这对应于两个集合之间的最大差值。因此我们可以得出 $v(X_1) \leq \frac{4T}{3}+\frac{2T}{m}+\epsilon'$，这意味着

$$\text{cost} \geq 4T - v(X_1) = 4T - \left(\frac{4T}{3}+\frac{2T}{m}+\epsilon'\right) = \frac{8T}{3} - \frac{2T}{m} - \epsilon'$$

基于这些结果，我们有

$$\frac{\frac{8T}{3} - (\frac{2T}{m}+\epsilon')}{2T} = \frac{4}{3} - (\frac{1}{2m}+\epsilon')$$

随着 m 增大，$\epsilon = \frac{1}{2m}+\epsilon'$ 会变得非常小。因此，除非 $P = NP$，否则在多项式时间内，带成本因子的 minCost-EFx 分配无法近似到$\frac{4}{3}$以内。 □

5 讨论

我们提出了 minCost-EFx 分配问题，并分析了其在一般成本函数和受限成本函数下的算法复杂度。我们的结果也为后续研究留下了几个自然的方向。

我们重点研究了两种具有代表性的成本模型，但还有许多其他模型尚未探索。例如，受广义装箱问题启发的成本结构 [Epstein 和 Levin， 2012] 或受调度启发的成本结构 [Im 等人， 2014] 可能会带来新的近似技术或困难性障碍。根据 minCost-EFx 分配的可处理性对成本模型进行系统分类，将有助于更清晰地了解这一领域的整体情况。

我们的研究聚焦于相同估值，因为目前 EFx 存在性结果仍然有限。然而，结构化情形方面的近期进展，例如代理人只有少数几种类型 [Mahara, 2023年，Ghosal 等人， 2025] 或双值实例 [Amanatidis 等人， 2021], 表明，我们的框架可以扩展到这些领域。在这类受限估值类别下分析 minCost-EFx 分配，将有助于弥合理想化的相同估值情形与更异质环境之间的差距。

我们的大多数技术只需稍作修改（本质上是将“强制”物品设为估值最高的物品），即可扩展到 EF1。探究估值不同情况下的 EF1，或最大最小份额（MMS）等其他公平性基准，或在成本最小化的同时最大化纳什社会福利，都可能揭示公平性与预算可行性之间更丰富的权衡。

最后，Morozov 等人 [2024] 的实证研究表明，EFx 分配在实践中十分稀少。这引出了一个问题：高效算法能否在真实世界数据中快速找到低成本的 EFx 分配，还是说有必要采用放宽条件的方案（例如 EF1 或近似 EFx）？ 系统的实验评估将补充我们的理论结果，并帮助我们深入了解最小成本 EFx 分配在实践中的可行性。

致谢

本研究的很大一部分是在我于柏林工业大学攻读硕士论文期间完成的[Deltl， 2025], 由 Mathias Weller（柏林工业大学）和 Ola Svensson（洛桑联邦理工学院）共同指导。我谨向我的博士生导师 Robert Bredereck 以及 Leon Kellerhals（克劳斯塔尔工业大学）致谢，感谢他们提供的宝贵反馈。本研究获得德国研究联合会（DFG）COMSOC-MPMS 项目资助（资助协议编号：465371386）。

参考文献

R. K. Ahuja、T. L. Magnanti 和 J. B. Orlin。《网络流：理论、算法与应用》。Prentice-Hall, Inc.，1993 年。ISBN 013617549X。

H. Akrami、N. Alon、B. R. Chaudhury、J. Garg、K. Mehlhorn 和 R. Mehta。EFx：一种更简单的方法，以及通过彩虹圈数实现的（近乎）最优保证。载于第*24*届*ACM*经济学与计算会议（*EC'23*）论文集，第61页。计算机协会，2023年。ISBN 9798400701047。doi：10.1145/3580507.3597799。URLhttps://doi.org/10.1145/3580507.3597799。

G. Amanatidis、E. Markakis、A. Nikzad 和 A. Saberi。计算最大最小份额分配的近似算法。*ACM*算法汇刊，13(4)，2017年12月。ISSN 1549-6325。doi：10.1145/3147173。URL https://doi.org/10.1145/3147173。

G. Amanatidis、G. Birmpas、A. Filos-Ratsikas、A. Hollender 和 A. A. Voudouris。《最大化纳什福利及其他关于 EFx 的故事》。理论计算机科学，863：69–85，2021年。ISSN 0304-3975。doi：https://doi.org/10.1016/j.tcs.2021.02.020。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397521000931。

G. Amanatidis、A. Filos-Ratsikas 和 A. Sgouritsa。《推进近似 EFx 分配的前沿》。载于第*25*届*ACM*经济学与计算会议论文集（*EC'24*），EC '24，第1268–1286页。计算机协会，2024年。ISBN 9798400707049。doi：10.1145/3670865.3673582。URL https://doi.org/10.1145/3670865.3673582。

H. Aziz、X. Huang、N. Mattei 和 E. Segal-Halevi。不可分物品的福利最大化公平分配。《欧洲运筹学杂志》，307(2):773– 784，2023年。ISSN 0377-2217。doi：https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.10.013。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221722007822。

X. Bei、X. Lu、P. Manurangsi 和 W. Suksompong。不可分物品的公平代价。计算系统理论，65(7):1069–1093，2021年3月。ISSN 1433-0490。doi：10.1007/s00224-021-10039-8。URL http://dx.doi.org/10.1007/s00224-021-10039-8。

V. Bilò、A. Fanelli、M. Flammini、G. Monaco 和 L. Moscardelli。机器调度中无嫉妒性的代价。理论计算机科学，613:65– 78，2016。ISSN 0304-3975。doi: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2015.10.046。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397515011123。

B. Bliem、R. Bredereck 和 R. Niedermeier。高效且无嫉妒资源分配的复杂性：代理人、资源或效用水平较少。载于第二十五届国际人工智能联合会议论文集（*IJCAI'16*），第 102–108 页，2016年。ISBN 9781577357704。URL http://www.ijcai.org/Abstract/16/022。E. Budish。组合分配问题：等收入下的近似竞争均衡。政治经济学杂志，119(6):1061–1103，2011年。doi: 10.1086/664613。URL https://doi.org/10.1086/664613。I. Caragiannis、N. Gravin 和 X. Huang。高纳什福利下任意单件物品的无嫉妒性：捐赠物品的益处。载于第 *20* 届 *ACM*经济学与计算会议论文集（*EC'19*），EC '19，第 527–545 页。计算机协会，2019a。ISBN 9781450367929。doi: 10.1145/3328526.3329574。URL https://doi.org/10.1145/3328526.3329574。

I. Caragiannis、D. Kurokawa、H. Moulin、A. D. Procaccia、N. Shah 和 J. Wang。最大纳什福利的非理性公平性。*ACM*经济与计算汇刊，7(3)，2019b年9月。ISSN 2167-8375。doi: 10.1145/3355902。URLhttps://doi.org/10.1145/3355902。

I. Caragiannis、D. Kurokawa、H. Moulin、A. D. Procaccia、N. Shah 和 J. Wang。最大纳什福利的不合理公平性。*ACM*经济与计算汇刊 *(TEAC)*，7(3):1–32，2019年c。B. R. Chaudhury、J. Garg 和 K. Mehlhorn。三个代理人存在 EFx。*ACM*学报，71(1)，2024年2月。ISSN 0004-5411。doi: 10.1145/3616009。URLhttps://doi.org/10.1145/3616009。

L. Chen、R. Kyng、Y. P. Liu、R. Peng、M. P. Gutenberg 和 S. Sachdeva。近线性时间内的最大流和最小成本流。*ACM*学报，72(3):19:1–19:103，2025年。doi: 10.1145/3728631。URL https://doi.org/10.1145/3728631。

M. Cygan, F. V. Fomin, L. Kowalik, D. Lokshtanov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk 和 S. Saurabh。《style id='1'>参数化算法。Springer，2015 年。URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-21275-3。B. de Keijzer、S. Bouveret、T. Klos 和 Y. Zhang。关于可加偏好下不可分物品公平分配中效率与无嫉妒的复杂性。第 98–110 页，2009 年 10 月。ISBN 978-3-642-04427-4。doi: 10.1007/978-3-642-04428-1_9。E. Deltl。公平分配的优化。硕士论文，柏林工业大学，2025 年。L. Epstein 和 A. Levin。具有一般成本结构的装箱问题。《style id='5'>数学规划，132(1–2):355–391，2012 年 4 月。ISSN 0025-5610。doi: 10.1007/s10107-010-0403-5。URL https://doi.org/10.1007/s10107-010-0403-5。M. R. Fellows、D. Hermelin、F. Rosamond 和 S. Vialette。多区间图问题的参数化复杂性。《style id='8'>理论计算机科学，410(1): 53–61，2009 年。ISSN 0304-3975。doi: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2008.09.065。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397508007329。Y. Feng 和 S. Li。关于使用可加估值近似加权纳什社会福利的一则说明。载于《style id='11'>第 51 届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP'24），第 297 卷《style id='13'>莱布尼茨国际信息学会议论文集（LIPIcs），第 63:1–63:9 页。Schloss Dagstuhl – 莱布尼茨信息学中心，2024 年。ISBN 978-3-95977-322-5。doi: 10.4230/LIPIcs.ICALP.2024.63。URL https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.ICALP.2024.63。C. Filippi、G. Guastaroba 和 M. Speranza。兼顾成本与公平性目标的单源容量约束设施选址问题。《style id='16'>欧洲运筹学杂志，289(3): 959–974，2021 年。ISSN 0377-2217。doi: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.07.045。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221719306241。J. Flum 和 M. Grohe。计数问题的参数化复杂性。《 style id='19'>SIAM 计算杂志，33(4):892–922，2004 年。doi: 10.1137/S0097539703427203。URL https://doi.org/10.1137/S0097539703427203。A. Frank 和 É. Tardos。同时丢番图逼近在组合优化中的应用。《style id='22'>组合数学，7(1):49–65，1987 年。

M. R. Garey 和 D. S. Johnson。《style id='1'>计算机与难解性：NP 完全性理论指南。W. H. Freeman，1979 年。ISBN 0-7167-1044-7。

J. Garg 和 S. Taki。《最大最小份额的改进近似算法》。人工智能，300:103547，2021年。ISSN 0004-3702。doi: https://doi.org/10.1016/j.artint.2021.103547。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0004370221000989。

P. Ghosal、V. P. HV、P. Nimbhorkar 和 N. Varma。《三种（及更多）类型代理人的（几乎完整）EFX》，2025年。URL https://arxiv.org/abs/2301.10632。

P. W. Goldberg、K. Hogh 和 A. Hollender。《两个代理人情形下 EFX 难解性的边界》。载于第 *16* 届国际算法博弈论研讨会（*SAGT'23*），第 14238 卷，第 290–307 页。施普林格国际出版公司，2023 年 1 月。ISBN 978-3-031-43253-8。doi: 10.1007/978-3-031-43254-5_17。URLhttps://infoscience.epfl.ch/handle/20.500.14299/205481。

R. L. Graham、D. E. Knuth 和 O. Patashnik。《具体数学：计算机科学基础》。Addison-Wesley，1981。doi：https://doi.org/10.1063/1.4822863。

S. Im、B. Moseley 和 K. Pruhs。具有一般成本函数的在线调度。《*SIAM* 计算杂志》，43(1):126–143，2014年。doi: 10.1137/120902288。URL https://doi.org/10.1137/120902288。M. Kaneko 和 K. Nakamura。纳什社会福利函数。《计量经济学》，47(2):423–435，1979 年。ISSN 00129682，14680262。URL http://www.jstor.org/stable/1914191。M. Koutecký 和 J. Zink。相关机器和无关机器上少数类型作业调度的复杂度。载于第*31*届国际算法与计算研讨会（*ISAAC'20*），第181卷，*Leibniz* 国际信息学论文集（*LIPIcs*），第18:1–18:17页。Schloss Dagstuhl – Leibniz 信息学中心，2020年。ISBN 978-3-95977-173-3。doi: 10.4230/LIPIcs.ISAAC.2020.18。URL https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.ISAAC.2020.18。A. Levin。近乎精确的装箱覆盖问题。《算法学》，86(6):2041–2066，2024年3月。ISSN 0178-4617。doi: 10.1007/s00453-024-01224-5。URL https://doi.org/10.1007/s00453-024-01224-5。R. J. Lipton、E. Markakis、E. Mossel 和 A. Saberi。关于不可分物品的近似公平分配。载于第五届 *ACM* 电子商务会议论文集（*EC'04*），第125–131页。计算机协会，2004年。ISBN 1581137710。doi: 10.1145/988772.988792。URL https://doi.org/10.1145/988772.988792。R. Mahara。两个可加估值下 EFx 的存在性。《离散应用数学》，340: 115–122，2023年。ISSN 0166-218X。doi: https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.06.035。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X2300255X。N. Morozov、A. Ignatiev 和 Y. Dementiev。关于高重数 EFx 分配的几个故事（学生摘要）。*AAAI* 人工智能会议论文集（*AAAI'24*），38(21):23587–23589，2024年3月。doi: 10.1609/aaai.v38i21.30484。URL https://ojs.aaai.org/index.php/AAAI/article/view/30484。R. Niedermeier。《固定参数算法导论》。牛津大学出版社，2006年。doi: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566076.001.0001。

A. Niu、A. Totschnig 和 A. Vetta。公平算法设计：公平且有效的机器调度。载于第*16*届国际算法博弈论研讨会论文集（*SAGT '23*），第239–256页。Springer-Verlag，2023年。ISBN 978-3-031-43253-8。doi: 10.1007/978-3-031-43254-5_14。URL https://doi.org/10.1007/978-3-031-43254-5_14。B. Plaut 和 T. Roughgarden。一般估值下的近似无嫉妒。《*SIAM* 离散数学杂志》，34(2):1039–1068，2020年。doi: 10.1137/19M124397X。URLhttps://doi.org/10.1137/19M124397X。D. Rey、K. Almi'ani 和 D. J. Nair。用于食品救援取送物流中寻找无嫉妒分配的精确算法和启发式算法。《运输研究*E*辑：物流与交通运输评论》，112:19–46，2018。ISSN 1366-5545。doi: https://doi.org/10.1016/j.tre.2018.02.001。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1366554517307792。V. V. Vazirani。近似算法，第1卷。Springer，2001年。doi: https://doi.org/10.1007/978-3-662-04565-7。D. P. Williamson 和 D. B. Shmoys。近似算法的设计。剑桥大学出版社，2011。doi: https://doi.org/10.1017/CBO9780511921735。

A 附录

A.1 观察 2 的证明

要满足 EFx 条件，必须对所有代理人对 $a_i,\ a_j \in A$ 均有：

$$v(X_i) - \min_{x \in X_i} v(x) \leq v(X_j).$$

设 $v(M) = \sum_{x \in M} v(x)$，并设 $x_{(1)},\ x_{(2)}$、.....、$x_{(m)}$ 是 M 中按估值递减顺序排列的物品。由于对于每个 $i \neq j$，我们将 $\min_{x \in X_i} v(x)$ 记为 X_i 中某件物品的价值，且各物品束互不相交，因此对 $(n-1)$ 个代理人的求和至多为价值最高的 $(n-1)$ 件物品的价值总和。因此，对所有 $a_i \in A$ 的不等式求和，并令 $v(X_j) = \min^{a_j \in A} v(X_j)$，可得：

$$\begin{aligned} n \cdot \min_{a_j \in A} v(X_j) &\geq v(M) - \sum_{a_i \in A \setminus \{a_j\}} \min_{x \in X_i} v(x) \\ &\geq v(M) - \sum_{t=1}^{n-1} v(x_{(t)}). \end{aligned}$$

因此，

$$\min_j v(X_j) \geq \frac{v(M) - \sum_{t=1}^{n-1} v(x_{(t)})}{n}.$$

因此，$\sum_{t=1}^{n-1} v(x_{(t)})$ 分配中的每个物品束的价值都至少为 $v(M) - \sum^{n}$ 证明完成。

□

A.2 定理 1 的证明

正确性： 我们声称，I 是一个 yes-实例，当且仅当 I' 的最小成本为 $\leq T$。($\Rightarrow$) 设 S_1, S_2 是 I 的一个解。我们声称，$\mathcal{X} = (X_1, X_2)$满足

$$X_1 = \bigcup_{s_i \in S_1} \{x_i\} \cup \{x_{\min}\} \text{ and } X_2 = \bigcup_{s_i \in S_2} \{x_i\}$$

是 I'的一个成本为 T的解。注意，根据构造，$v(X_1) = v(X_2) = T$。这意味着

$$\begin{aligned} \text{cost}(X) &= c_1(X_1) + c_2(X_2) \\ &= 0 + v(X_2) \\ &= T \leq cost(X) \end{aligned}$$

最后，我们需要证明$\mathcal{X}$是一个 EFx 分配。由于 $v(X_1) = v(X_2) = T$，a_1 和 a_2 彼此都不嫉妒。因此$\mathcal{X}$是 EFx，且成本为 $\leq T$。

($\Leftarrow$) 设$\mathcal{X} = (X_1, X_2)$是 I'的一个解。注意，由于 $c_2(x_{\min}) = T + 1 > T$，物品 $x_{\min}$必须分配给物品束 X_1。由于$\mathcal{X}$是 I'的一个解，因此有 $T \geq c_2(X_2) \geq v(X_2)$；又由于 $\sum_{x \in M} v(x) = 2 \cdot T$，这意味着

$$v(X_1) = 2 \cdot T - v(X_2) \geq T.$$

由于$\mathcal{X}$是一个 EFx 分配，$v(X_1) - \min_{x \in X_1} v(x) \leq v(X_2)$。由于 $x_{\min} \in X_1$和 $v(x_{\min}) = 0$，我们有 $\min_{x \in X_1} v(x) = 0$，因此 $v(X_1) \leq v(X_2)$。结合 $v(X_1) + v(X_2) = 2T$，可得 $v(X_1) = v(X_2) = T$。由于 $v(x_{\min}) = 0$，它不会影响总和。因此，我们现在可以如下定义 S_1, S_2：

$$S_1 = \bigcup_{x_i \in X_1 \setminus \{x_{\min}\}} s_i \quad \text{and} \quad S_2 = \bigcup_{x_i \in X_2} s_i.$$

我们知道 $\sum S_1+\sum S_2=\sum S=2\cdot T$，且根据定义 $\sum S_1=v(X_1)=T=v(X_2)=\sum S_2$。由此可得 $\sum S_1=\sum S_2$，这意味着 I 是 Partition 的一个 yes-实例。

因此，即使只有 2 个代理人，k-成本-EFx 分配也是弱 NP 困难的。

A.3 推论 2 的证明

我们将说明如何在不改变可行性或最优性的前提下，界定估值和成本的编码长度。

定理 14 (Frank 和 Tardos [1987])。令 $w\in\mathbb{Z}^m$ 和 $K\in\mathbb{N}$。存在一个强多项式算法，输出 $w'\in\mathbb{Z}^m$，使得 $\|w'\|_\infty\le poly(m,\log K)$，且对于所有$x\in\mathbb{Z}^m$，都有 $\|x\|_1\le K$，

$$\operatorname{sign}\langle w,x\rangle \;=\; \operatorname{sign}\langle w',x\rangle.$$

W我们将定理 14 应用于共同估值向量和各代理人的成本向量 .

估值。由于估值相同且具有可加性，因此存在一个向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^m$，使得对于每个物品束 $S\subseteq M$，都有 $v(S)=\langle\mathbf{v}\ \chi_S\rangle$，其中 $\chi_S\in\{0,1\}^m$是 S的特征向量。EFx 可行性只涉及以下形式的比较

$$\langle\mathbf{v},\chi_{X_i}\rangle\ \ge\ \langle\mathbf{v},\chi_{X_j}-\mathbf{e}_g\rangle\quad\text{for } a_i,a_j\in A,\ g\in X_j,$$

以及（显然）空物品束上的非负性。右侧的每个向量都是一个 ℓ_1-范数至多为 m 的整数向量。对每个 $\mathbf{v}$ 应用定理 14，并令 $K:=m$，得到$\mathbf{v}'$。于是，对于所有 $S,T\subseteq M$，满足 $|S|,|T|\le m$ 的情形，以及所有 $g\in T$，

$$\operatorname{sign}\left(\langle\mathbf{v},\chi_S\rangle-\langle\mathbf{v},\chi_T-\mathbf{e}_g\rangle\right)\ =\ \operatorname{sign}\left(\langle\mathbf{v}',\chi_S\rangle-\langle\mathbf{v}',\chi_T-\mathbf{e}_g\rangle\right),$$

因此，每个 EFx 不等式都对每位代理人保持成立。于是，若一个分配在$\{\mathbf{v}\}$ 下是 EFx，当且仅当它在$\{\mathbf{v}'\}$下是 EFx。

成本。每位代理人 a_i 都有一个可加成本向量$\mathbf{c}_i\in\mathbb{Z}^m$，而一个分配$X$ 的总成本为 $\sum_{a_i\in A}\langle\mathbf{c}_i,\chi_{X_i}\rangle$。最小成本 EFx 分配的判定变体中的可行性条件形式为 $\sum_{a_i\in A}\langle\mathbf{c}_i,\chi_{X_i}\rangle\le k$，可将其编码为

$$\Big\langle(\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_{|A|},-k),\ (\chi_{X_1},\dots,\chi_{X_{|A|}},1)\Big\rangle\le 0.$$

其 ℓ_1-范数至多为 $m\cdot|A|+1$。对每个 $(\mathbf{c}_i,-k_i)$ 应用定理 14，并令 $K:=m+1$（考虑总和时，则对它们的拼接应用定理 14），得到压缩向量 $(\mathbf{c}'_i,-k'_i)$；可行性得以保持。

如果我们比较两个可行分配 X，Y，则必须保持其符号不变。

$$\sum_{a_i\in A}\langle\mathbf{c}_i,\chi_{X_i}\rangle-\sum_{a_i\in A}\langle\mathbf{c}_i,\chi_{Y_i}\rangle=\sum_{a_i\in A}\langle\mathbf{c}_i,\chi_{X_i}-\chi_{Y_i}\rangle$$

由于 $\|\chi_{X_i}-\chi_{Y_i}\|_1\le 2m$ 对每个 a_i都成立，因此对每个 $\mathbf{c}_i$ 应用定理 14，并结合$K:=2m$，得到 $\mathbf{c}'_i$，从而确保

$$\operatorname{sign}\langle\mathbf{c}_i,\chi_{X_i}-\chi_{Y_i}\rangle=\operatorname{sign}\langle\mathbf{c}'_i,\chi_{X_i}-\chi_{Y_i}\rangle,$$

因此，总成本比较结果保持不变。

因此，将$\mathbf{v},\{\mathbf{c}_i\}$ k替换为$\mathbf{v}',\{\mathbf{c}'_i\}$ k'，可得到一个等价实例，其数值均以 $poly(m)$为界，且不影响 EFx 或可行性。因此，核大小关于物品数量是多项式级的。

A.4 引理 6 的证明

我们将说明如何填充该表并高效计算其中的条目。

构造：我们首先按如下方式初始化表：

$$D'[i,\mathbf{y}] = \begin{cases} \top, & \text{if } \mathbf{y} = (0,\ldots,0) \text{ and } i = 0 \\ \bot, & \text{otherwise} \end{cases}$$

我们按物品价值递增的顺序排列物品。对于 $i > 0$，我们按如下方式计算所有条目 $D'[i,\cdot]$，假设所有条目 $D'[i-1,\cdot]$ 均已计算完毕。我们从最大的条目开始，若存在一个满足以下条件之一的 $D'[i-1,\mathbf{y}']$，则将 $D'[i,\mathbf{y}]$ 设为 `true`：(1) $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$；或 (2) 对某个 $j \in [n]$，$y'_j = y_j - v(x_i)$，而对于所有其他 $j' \neq j$，$y'_{j'} = y_{j'}$。这意味着，我们将向量的一个分量减去物品 x_i 的价值，从而调整其值。

如果将 $D'[i,\mathbf{y}]$ 设为 `true`，那么对于所有满足 $\mathbf{z} \leq \mathbf{y}$ 的 $\mathbf{z}$，也将 $D'[i,\mathbf{z}] = \top$ 设为相应值。这里，$\mathbf{z} \leq \mathbf{y}$ 表示 $\mathbf{z}$ 中的每个条目 z_j 都满足 $\mathbf{y}$ 中对应条目的 $z_j \leq y_j$。向量 $\mathbf{y}$ 中的每个条目 y_j 表示考虑截至 i 的物品时分配给 a_j 的总和。由于 $z_j \leq y_j$，当存在一种截至物品 x_i 的分配，且 a_j 的值至少为 z_j 时，$D'[i,\mathbf{z}]$ 就设为 `true`。

运行时间：在每一行中，我们计算 $(v(M)+1)^n$ 个条目中的最大值。因此，可以在 $\mathcal{O}((v(M)+1)^n)$ 时间内检查是否存在一个 $D'[i-1,\mathbf{y}']$ 集合，使其总和为 `true`。由于我们对 M中的每个物品都执行此操作，因此可以在 $\mathcal{O}((m+1)\cdot(v(M)+1)^n)$ 内填完整个表。

正确性：我们断言，每个条目 $D'[i,\mathbf{y}]$ 被设为 `true`，当且仅当存在一个分配 $(X_1, \ldots\ldots, X_n)$，使得代理人束 $v(X_j)$ 的值在考虑编号不超过 i 的物品时，对所有 $j \in [n]$ 的总和至少为 y_j。我们通过归纳法证明这一断言。

首先注意，对于 $i = 0$，所有条目都是正确的，因为在分配任何物品之前，每个物品束的值都为 0。因此，只有 $D'[0,\mathbf{0}]$ 的值可以实现。现在假设存在一个物品 $x_i \in M$，使得 $D'[i,\mathbf{y}]$ 被设为 `true`，当且仅当存在一个分配 $(X_1, \ldots\ldots, X_n)$，使得在考虑所有编号不超过 x_i 的物品时，物品束 X_j 的值对所有 $j \in [n]$ 的总和为 y_j。我们希望证明，在纳入物品 x_{i+1} 后，这一结论仍然成立。

($\Rightarrow$) 若将 $D'[i+1,\mathbf{y}]$ 设为 `true`，则有两种可能。

- $D[i,\mathbf{y}]$ 被设为 `true`，这意味着存在一个分配 X，将前 $i+1$ 个物品分配给各方，使得对于所有 $j \in [n]$，X_j 的价值总和至少为 y_j。不包含 x_{i+1} 时，该结论仍然成立，因此存在一个分配 $(X_1, \ldots, X_n)$，使得对于所有 $j \in [n]$，考虑截至 i 个物品时物品束 X_j 的价值总和为 y_j。

- 存在一个 $\mathbf{y}'$，使得 $D[i,\mathbf{y}']$ 为 `true`，其中对于某个 $j \in [n]$，有 $y'_j = y_j - v(x_{i+1})$，并且对于所有其他 $j' \neq j$，有 $y_{j'} = y_{j'}$。在这种情况下，由于存在一个分配 X，将前 i 个物品分配给各方，使得对于所有 $j' \in [n]$，$X_{j'}$ 的价值总和至少为 $y'_{j'}$，因此我们可以通过将 x_{i+1} 纳入 X_j来达到总和 $\mathbf{y}$。

在这两种情况下，都存在一个分配（X_1、……、X_n），使得对于所有 $j \in [n]$，物品束 X_j 在考虑截至 x_{i+1} 的物品时的价值总和为 y_j。

($\Leftarrow$) 我们假设存在前 $i+1$ 个物品的一个分配 $(X_1, \ldots, X_n)$，使得对所有 $j \in [n]$，X_j 的价值之和为 y_j。设 X_l 为包含物品 x_{i+1}的集合。根据我们对动态规划表的构造，若存在这样的分配，则 $D'[i,\mathbf{y}']$（其中对所有$j \neq l$ 有 $y'_j = y_j$，且 $y'_l = y_l - v(x_{i+1})$）将被标记为 `true`。由于存在某个$\mathbf{y}'$，使得 $D'[i,\mathbf{y}']$ 为真且 $y_l = y'_l + v(x_{i+1})$，我们的算法会找到该条目，并将 $D'[i+1,\mathbf{y}]$ 设为 `true`。

我们已经证明，若对某个 $i \in \{0, \ldots, m\}$， $D'[i, \mathbf{y}]$ 为真，则存在直到物品 i 的一个分配，其价值向量为$\mathbf{y}$，并且该性质可推广到 $D'[i+1, \mathbf{y}]$。

$\therefore$ 根据归纳原理，该命题对所有 $x_i \in M$ 均成立。 □

A.5 引理 15 的证明

引理 15。 受限权重等基数划分是 *NP* 困难的 .

在以下证明中，我们将从弱 NP 困难的 [Garey 和 Johnson 的 1979]问题“等基数划分”（问题 4）进行多项式时间多对一归约。

问题 6：等
输入：由 $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ 个 m 正整数组成的多重集，且满足 $\sum_{s \in S} s = 2 \cdot T$。**问题**：是否存在一种将 S 划分为 S_1, S_2 的方法，使得每个子集的元素之和均为 T，并且 $|S_1| = |S_2|$?

证明（引理 *15*）。设 $I = S$ 是等基数划分的一个实例，其中$\sum_{s \in S} s = 2 \cdot T$ 且 $|S| = m$。我们按如下方式在多项式时间内构造受限权重等基数划分的一个实例 $I' := S'$。

构造：对于每个整数 $s_i \in S$，我们向 S' 中添加一个整数 s'_i，使得 $s'_i = s_i + mT$。注意， S' 中元素的总和为

$$\sum_{s' \in S'} s' = \sum_{s \in S} (s + mT) = \sum_{s \in S} s + \sum_{s \in S} mT = 2T + m^2 T = (m^2 + 2)T = 2T'$$

这满足受限权重等基数划分输入所需的条件。令 $\epsilon = T$。选择 ϵ 可确保它相对于 S' 中的整数足够小。每个整数 $s'_i \in S'$ 都小于 $\frac{2T'}{m} + \epsilon$，因为

$$s'_i = s_i + mT \leq (m+1)T \leq \frac{m^2 T}{m} + T \leq \frac{2T'}{m} + T = \frac{2T'}{m} + \epsilon$$

至此，构造完成。

正确性：我们声称， I 是一个 yes-实例，当且仅当 I' 是一个 yes-实例 e.

（$\Rightarrow$）设 S_1， S_2 是 I 的一个解。我们声称 $S' = S'_1$， S'_2 是 I' 的一个解，其中 $S'_i = \bigcup_{s \in S_i} s'$。注意，由于 $|S_1| = |S_2|$， $|S'_1| = |S'_2|$，并且根据构造，我们有

$$\sum S'_1 = \sum S_1 + \frac{m^2 T}{2} = \sum S_2 + \frac{m^2 T}{2} = \sum S'_2$$

这意味着 $\sum S'_1 = \sum S'_2$。因此， S' 是 I'的一个解。

(⇐) 设 S'_1, S'_2 是 I'的一个解。我们声称， $S = S_1, S_2$ 是 I 的一个解，其中 $S_i = \bigcup_{s \in S'_i} s'$。注意，由于 $|S'_1| = |S'_2|$， $|S_1| = |S_2|$，根据构造可知

$$\sum S_1 = \sum S'_1 - \frac{m^2 T}{2} = \sum S'_2 - \frac{m^2 T}{2} = \sum S_2$$

由此 ， $\sum S_1 = \sum S_2$，这意味着 I是等基数划分的一个 yes 实例 .

由此可知，受限权重等基数划分是 NP 困难的。 □

在 EFx 的语境下，我们可以通过对每个子集中的物品进行排序（图 1），将一种分配 X 表示为堆划分。

定义 4。 (堆栈) 堆栈 是按照物品价值非递增顺序排列的物品集合。形式上，它是一个有序集合 $S \subseteq M$，满足对于所有 $i \in \{1, \ldots\ldots, |S|-1\}$， $v(x_i) \geq v(x_{i+1})$，其中 $v(x)$ 表示物品 x 的价值。

我们将 $minStack$ 定义为给定 EFx 分配中任意堆栈的最小值，并将$maxStack$ 定义为任意堆栈的最大值。注意， v(maxStack) $- v(^{x_{|\text{maxStack}|}}) \leq v$(minStack)。这意味着，在不违反 EFx 条件的前提下，仍可添加价值较低物品的堆栈总价值上限为 minStack，如图 2 所示。按照物品价值将其排列在堆栈中，有助于我们更清晰地展示和分析 EFx 性质，因为这样可以轻松找出价值最小的物品，而它总是在最顶部。

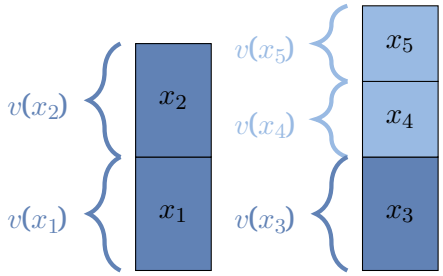


图 1：使用堆栈表示 EFx 分配

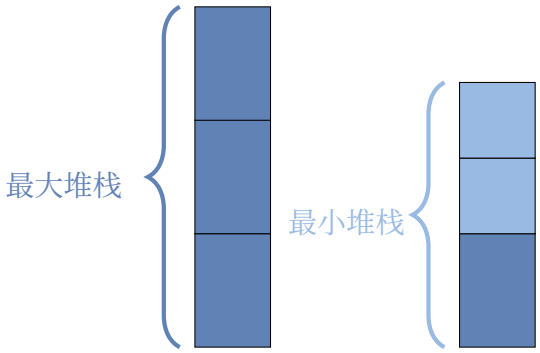


图 2：最大和最小可堆叠值的表示

例 1。 设想一项灾害救援行动，其中需要在多个受灾地区之间分配各种资源，例如食品、水、医疗用品和避难所物资。$M = \{x_1, \ldots, x_m\}$ 表示资源集合， $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 表示受灾区域或社区集合， v 表示估值函数，用于表示每种资源的价值，而 $(c_i)_{a_i \in A}$ 表示成本函数，其中包括将资源从中央仓库运输到各区域的成本。目标是在确保各区域之间公平性（实现 EFx 分配）的同时，最大限度地降低总体运输成本。

假设有四个区域 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 以及两种类型的资源——大型护理包： $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, x_8 和小型护理包： x_9, x_{10}, x_{11}，两者均包含必需品，其估值分别为 v（大型） $= 15$ 和 v（小型） $= 10$。

在这种情况下，成本函数 $(c_i)_{a_i \in A}$ 可能会受到中央仓库到各区域距离的影响。例如，距离仓库较远的区域可能会产生更高的运输成本。如图3所示，一种可能的 EFx 分配可以为四个区域提供类似的物品，以确保整体公平性。

然而，在此类情况下，资金资源有限，且运输成本会随着货物重量的增加而上升。因此，减少运往较远区域的货物量会更有利。

为了实现更高效的分配，我们可以为 $a_i \in A$ 定义成本函数 $c_i(X) = \alpha_i \cdot v(X)$，其中每个因子 α 都表示某个区域的连通性。此处的“连通性”是指一个区域在网络中的连接程度；因子越低，表示连通性越高（成本越低），因子越高，则表示连通性越低（成本越高）。加入这一约束可以降低运输成本、改进分配过程，并得到一个 EFx 分配（此处令 $c(X) = 0 \cdot v(X_1) + 1 \cdot v(X_2) + 1 \cdot v(X_3) + 2 \cdot v(X_4)$）。

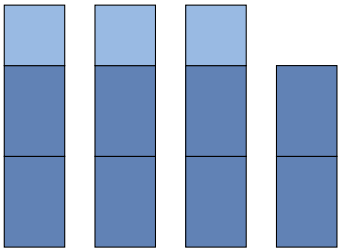


图3：对物品束价值取平均的 EFx 分配

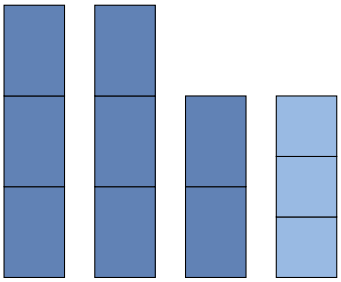


图4：使成本函数最小化的 EFx 分配

A.6 定理 9 的证明

($\Rightarrow$) 设 (S_1, S_2) 是 I 的一个解。考虑该分配

$$X_1 = \{x_i \mid s_i \in S_1\} \cup \{x_{\min}\}, \qquad X_2 = \{x_i \mid s_i \in S_2\}.$$

于是 $v(X_1) = \frac{m}{2}B + 2T + 1$, $v(X_2) = \frac{m}{2}B + T$，因此 $\mathsf{cost}(X) = v(X_2) \leq \frac{m}{2} \cdot B + T$。由于 $\min_v X_1 = x_{\min}$,

$$v(X_1) - v(\min_v X_1) = \tfrac{m}{2}B + 2T + 1 - (T+1) = \tfrac{m}{2}B + T = v(X_2),$$

因此， a_2 不会强烈嫉妒 a_1 （并且 a_1 显然不会嫉妒 a_2）。因此， X 是 EFx，也是 I' 的有效解。

（$\Leftarrow$）令 $\mathcal{X} = (X_1, X_2)$ 为 I' 的一个解。注意到

$$v(M) = mB + 3T + 1, \qquad v(X_2) = cost(\mathcal{X}) \leq \tfrac{m}{2}B + T, \tag{1}$$

so

$$v(X_1) = v(M) - v(X_2) \geq \tfrac{m}{2}B + 2T + 1. \tag{2}$$

令 t_j 表示 X_j 中数字物品的数量（因此 $t_1 + t_2 = m$），令 $S_j = \sum_{x_i \in X_j} s_i$ 表示它们对应价值的总和（因此 $S_1 + S_2 = 2T$）。令 $r \in \{0, 1\}$ 表示 $x_{\min} \in X_1 (r = 1)$ 或 $x_{\min} \in X_2$ ($r = 0$)。于是

$$v(X_1) = t_1 B + S_1 + r(T+1), \quad v(X_2) = t_2 B + S_2 + (1-r)(T+1). \tag{3}$$

根据 B 的选取，不等式 (2) 和 (3) 可推出 $t_1 = t_2 = \frac{m}{2}$，否则一个代理人显然会嫉妒另一个代理人。因此 $|S_1| = |S_2|$。结合 $t_2 = \frac{m}{2}$ 以及不等式 (1) 和 (2)，可得

$$S_2 + (1-r)(T+1) \leq T \quad \Rightarrow \quad S_2 \leq T - (T+1) + r(T+1) = r(T+1) - 1.$$

由于所有 $s_i \geq 0$，我们有 $S_2 \geq 0$，因此 $r = 1$，这意味着 $x_{\min} \in X_1$ 和 $S_2 \leq T$。

现在，为了使 $\mathcal{X}$ 成为有效的 EFx 分配

$$v(X_2) \geq v(X_1) - v(g) \quad \text{for all } g \in X_1.$$

由于 $\min_{x \in X_1} v(x) = T + 1$，这就变为

$$t_1 B + S_1 \leq t_2 B + S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \leq S_2.$$

结合 $S_1 + S_2 = 2T$ 和 $S_2 \leq T$，这就必然推出 $S_1 = S_2 = T$。

因此，(S_1, S_2) 是 S 的一个等基数划分，所以 I 是一个 `yes`-实例。 □

A.7 定理 10 的证明

正确性：我们声称，I 是一个 yes-实例，当且仅当 I' 存在一个成本为 $\leq nB$ 的解。($\Rightarrow$) 设 $S=(S_1, \ldots, S_n)$ 是 I 的一个解。我们声称，$\mathcal{X}=(X_1, \ldots, X_{n+1})$ 满足

$$X_1 = \{x_{m+1}, x_{m+2}\} \text{ and } X_i = \bigcup_{s_j \in S_{i-1}} \{x_j\} \text{ for all } i \in \{2, \ldots, n+1\}$$

是成本为 nB 的解。注意，根据构造，$v(X_1) = 2B$，且 $v(X_i) \leq B$，对所有 $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ 均成立。此外，由于 $v(M \setminus X_1) = nB$，根据鸽巢原理 [（Graham 等人，1981]），我们可以推得，对所有 $i \in \{2, \ldots, n+1\}$，$v(X_i) = B$。这意味着

$$\text{cost}(A) = 0 \cdot v(X_1) + \sum_{i=2}^{n+1} v(X_i) = n \cdot B$$

最后，我们需要证明 A 是 EFx 分配。由于对所有 $i, j \in \{2, \ldots, n+1\}$，$v(X_i) = v(X_j) = B$，代理人 a_i 和 a_j 互不嫉妒。此外，由于 X_1 由两个价值相等的物品组成，$v(X_1) - \min_v X_1 = B$，没有代理人会强烈嫉妒 a_1。因此，$\mathcal{X}$ 是 EFx，且成本为 $\leq nB$。

($\Leftarrow$) 令 $\mathcal{X}=(X_1, \ldots, X_{n+1})$ 为 I' 的一个成本为 $\leq nB$ 的解。注意：

$$v(M) = (n+2) \cdot B \text{ and } nB \geq 0 \cdot v(X_1) + \sum_{i=2}^{n+1} v(X_i)$$

这意味着：

$$nB \geq \sum_{i=2}^{n+1} v(X_i)$$

由于 $v(M) = \sum_{i=1}^{n+1} v(X_i) = (n+2) \cdot B$，因此得到：

$$\begin{aligned} (n+2) \cdot B &= v(X_1) + \sum_{i=2}^{n+1} v(X_i) \\ (n+2) \cdot B &\leq v(X_1) + nB \\ 2B &\leq v(X_1) \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{X}$ 是一个 EFx 分配，我们有：

$$v(X_1) - \min_v X_1 \leq v(X_i) \quad \forall i \in \{2, \ldots, n+1\}.$$

根据构造，M 中任意物品的最大估值为 B。因此，我们可以写为：

$$v(X_1) - \min_v X_1 \geq v(X_1) - B = 2B - B = B.$$

这意味着，对于所有 $i \in \{2, \ldots, n+1\}$，$v(X_i) \geq B$。鉴于 $A \setminus \{a_1\}$ 中分配给代理人的物品总估值满足 $\sum_{i=2}^{n+1} v(X_i) \leq n \cdot B$，因此可以得出，对于所有 $i \in \{2, \ldots, n+1\}$，$v(X_i) = B$。因此，X_1 中的最小物品必须具有价值 B，这意味着 $v(X_1) - \min_v X_1 = B$。由此可推知，X_1 由两个物品组成：x_{m+1} 和 x_{m+2}。如果物品集合 S 的最大值等于 B，则可以将对应的物品与一个额外物品交换。

最后，我们需要证明 $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$ 是 I 的一个解，其中：

$$S_i = \bigcup_{x_j \in X_{i+1}} s_j \quad \text{for all } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

假设 $\sum S_i > B$ 对某个 $i \in [n]$ 成立。鉴于 $\sum_{i=2}^{n+1} v(X_i) = n \cdot B$，该不等式意味着存在某个 S_j，使得 $\sum S_j < B$。这与以下事实矛盾：$\sum S_j = v(X_{j+1}) \geq B$，因为代理人 a_{j+1} 并未强烈嫉妒代理人 a_1，且我们有 $v(X_1) - \min_v X_1 = B$。因此，我们得出结论，对于所有 i，$\sum S_i = B$ 均成立，这意味着 I 是紧密装箱问题的一个 yes-实例。 □

A.8 引理 12 的证明

证明。 我们首先定义可行向量，这将有助于构造动态规划表。

定义 5。 若向量 $\mathbf{m}' \in \{0, \ldots, m\}^{\beta}$ 在给定最小阈值 $bound$ 的情况下满足以下条件，则称其满足约束：

$$\sum_{i \in [\beta]} m'_i \cdot s_i - \min_{\substack{i' \in [\beta] \\ m'_{i'} > 0}} s_{i'} \leq bound,$$

$$\sum_{i \in [\beta]} m'_i \cdot s_i \geq bound.$$

此处，$bound$ 表示一个集合必须达到的最小值，同时也是该集合在排除其最小物品后，为满足 EFx 约束所允许的最大总和。

我们的算法思路是猜测每个集合必须达到的最小值，然后找出满足该最小阈值的最小成本 EFx 分配。可行分配的数量有 m^{β} 之多。为了防止对某个特定集合产生严重嫉妒，所有其他集合的价值都必须至少等于该最小值，如图 5 所示。此外，由于这代表下界，在不包含最小物品的情况下，其他集合的价值都不能超过该最小值。由于该集合不一定需要具有最低价值，我们计算将该集合分配给代理人的所有可能分配的价值，这些分配共有 n 种可能。

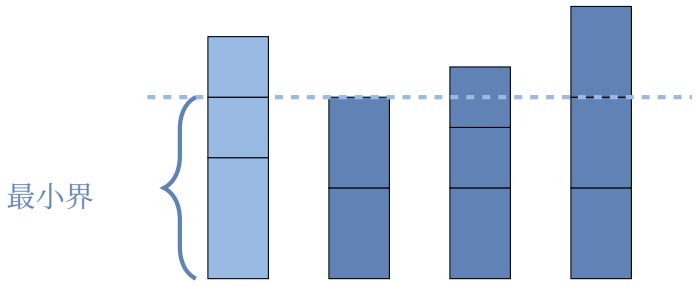


图 5：示例说明可行 EFx 分配中每个集合必须达到的最小阈值

现在，我们可以概述如何填充表并计算其中的各项。

构造： 对于 X 的每个可能价值向量（记为 $\mathbf{x}$），以及每个满足 $a_j \in A$ 的成本因子 α_j，计算以下内容：

$$bound_{\mathbf{x}} = \sum_{i \in [\beta]} x_i \cdot s_i$$

$$\text{cost}(j, \mathbf{x}) = \alpha_j \cdot \sum_{i \in [\beta]} x_i \cdot s_i$$

将剩余代理人 $A \setminus \{a_j\}$ 按成本因子降序排列，并 $j' \in [n-1]$ 按此顺序为其编索引。首先初始化表 D，将所有条目设为

∞。然后，将所有 $D[j, \mathbf{x}\,0, \mathbf{0}] = \mathsf{cost}(j,\mathbf{x})$。对于每个 $j' \in [n-1]$ 以及每个 $0 \leq \mathbf{m}' \leq \mathbf{m} - \mathbf{x}$，如果$D[j, \mathbf{x}\ j'-1, \mathbf{m}' - \mathbf{z}] \neq \infty,$，则在满足以下条件时更新 $D[j,\mathbf{x}\ j', \mathbf{m}']$

$$D[j, \mathbf{x}, j', \mathbf{m}'] > D[j, \mathbf{x}, j'-1, \mathbf{m}' - \mathbf{z}] + \mathrm{cost}(j, \mathbf{x}),$$

且向量 $\mathbf{z}$ 满足指定的约束（给定 $bound_{\mathbf{x}}$）。

换言之，对于每个 $j' \in [n-1]$，构造满足给定约束的 $X_{j'}$的可行配置集合 $C_{j'}$。然后，对于每个满足 $D[j,\mathbf{x}\ j'-1, \mathbf{m}'] \neq \infty$ 的 $\mathbf{m}'$，仅保留产生最小总成本的配置。

最后，返回对所有 $a_j \in A$ 和 $\mathbf{x} \in [m]^\beta$， $D[j, \mathbf{x}\ n-1, \mathbf{m} - \mathbf{x}]$ 的最小值。

运行时间： 该算法会考虑单个集合的所有可能分配，共有 $n \cdot\ m^\beta$ 种分配。对于每种分配，算法都会计算相应的 EFx 界。在每次迭代中，算法会处理每个可能的配置 $\mathbf{m}' \leq \mathbf{m}\ -\mathbf{x}$，其数量至多为 m^β。对于每个配置$\mathbf{m}'$，算法会尝试添加集合 $C_{j'}$中的每个元素，该集合也包含至多 m^β 个可行配置。因此，算法总共执行 $(n \cdot\ m^\beta) \cdot (n \cdot\ m^\beta \cdot\ m^\beta) = n^2 \cdot\ m^{3\beta}$ 步，运行时间为 $\mathcal{O}(n^2 \cdot m^{3\beta})$。

正确性： 令 $\pi\colon\ [n-1] \to A \setminus \{a_j\}$ 表示除a_j 外所有代理人按成本因子递减排列的排列顺序。我们声称， $D[j, \mathbf{x}\ i,\ \mathbf{m}'] = c$成立，当且仅当存在一个 EFx 可行分配 $\mathcal{X} = (X_{\pi(1)},\ \ldots\ldots,\ X_{\pi(i)},\ X_j)$，使得 X_j对应于价值向量 $\mathbf{x}$ 且 $cost(\mathcal{X}) = c$。我们对 i 使用归纳法证明这一断言。

起初，对于 $i = 0$， D 的所有条目都显然有效，因为只考虑代理人 a_j，因此不存在两两比较，也不会产生强嫉妒。

现在假设，对于某个代理人 $a_i \in A$， $D[j, \mathbf{x}\ i,\ \mathbf{m}']$ 被设为 c，当且仅当存在一个分配 $(X_{\pi(1)},\ \ldots\ldots,\ X_{\pi(i)},\ X_j)$，其中 $(X_{\pi(1)},\ \ldots\ldots,\ X_{\pi(i)})$ 是由向量 $\mathbf{m}'$ 表示的物品集合的一个划分，且物品束 X_j 可由 $\mathbf{x}$表示；该分配满足 EFx 可行性，且成本最小 c。我们要证明，这对于 $i+1$也成立。

($\Rightarrow$) 假设 $D[j,\mathbf{x}\ i+1,\ \mathbf{y}]$ 被设为 c'。根据归纳假设，这意味着存在一个表项 $D[j,\mathbf{x}\ i,\ \mathbf{y}']$，其被设为 $c' - \sum_{z_j \in \mathbf{z}} \alpha_{i+1} \cdot z_j \cdot v(x_j)$，其中 $y_k = y'_k + z_k$对所有 $k \in [\beta]$均成立，且 $\mathbf{z}$是一个满足约束的向量，并且 $y_k \leq m_k - x_k$。

已知存在一个 EFx 可行分配 $\mathcal{X} = (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(i)}, X_j)$，使得物品束 X_j 的价值由 $\mathbf{x}$ 表示，且截至目前所考虑的每种类型的物品总和对所有 $k \in [\beta]$均为 y'_k，我们可以构造一个分配 $\mathcal{X}'$，其中物品束 X'_{i+1}的价值由向量 $\mathbf{z}$表示，而对所有其他 $i' \in \{1, \ldots, i\}$， $X'_{i'} = X_{i'}$。由于 $\mathbf{z}$ 满足约束，因此这一分配不会造成强嫉妒。根据构造，

$$\sum_{i \in [\beta]} z_i \cdot s_i = v(X'_{i+1}) \geq bound_{\mathbf{x}}$$

and

$$\sum_{i \in [\beta]} z_i \cdot s_i - \min_{\substack{i' \in [\beta] \\ z_{i'} > 0}} s_{i'} = v(X'_{i+1}) - \min_v X'_{i+1} \leq bound_{\mathbf{x}},$$

这确保分配仍满足 EFx。此外，由于其他所有物品束均保持不变，$\mathcal{X}'$ 仍满足 EFx 可行性。

最后，如果当前分配的成本尚未初始化，或新成本低于先前设定的成本，我们就更新当前分配的成本。代理人按成本因子从高到低排序，因此，使成本最小化可确保当前分配是可选方案中效率最高、成本最低的方案。因此，我们得出结论：存在一个有效分配$\mathcal{X} = (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(i)}, X_j)$，其中物品束 X_j 的价值可以表示为 $\mathbf{x}$，且 $\mathcal{X}$ 的成本最小。

(⇐) 设 $\mathbf{X} = (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(i+1)}, X_j)$ 是成本 c'最小的 EFx 分配，其中 $X_{\pi(i+1)}$ 的价值由向量 $\mathbf{z}$ 表示，而 X_j 的价值由向量 $\mathbf{x}$ 表示。那么，存在一个满足 EFx 可行性的分配 $\mathbf{X} = (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(i)}, X_j)$。令 $\mathbf{y}'$ 为此分配中所分配物品的价值向量。根据归纳假设，$D[j, \mathbf{x}\ i, \mathbf{y}']$ 存储了此配置下可实现的最小成本，即 $c = D[j, \mathbf{x}\ i, \mathbf{y}']$。对于每个满足 EFx 约束的可行扩展向量 $\mathbf{z}$，所得分配会将 $\mathbf{y}'$ 扩展为新的价值向量 $\mathbf{y} = \mathbf{y}' + \mathbf{z}$，并相应更新成本。由于考虑了所有可行的 $\mathbf{z}$，$D[j, \mathbf{x}\ i+1, \mathbf{y}]$ 存储了所有有效扩展中的最小可实现成本，从而保持归纳不变量成立，并完成归纳步骤。

我们已经证明，若对于某个 $i \in [n-1]$，$D[j, \mathbf{x}\ i, \mathbf{y}]$ 是有限的，那么就存在一种分配，将 M 中的一个物品子集分配给按成本因子递减排序后的前 i 个代理人，使得总价值向量为 $\mathbf{y}$，该分配满足 EFx 可行性，且 $D[j, \mathbf{x}\ i, \mathbf{y}]$ 表示此配置下可实现的最小成本。此外，通过更新步骤，这一性质会延续至$D[j, \mathbf{x}\ i+1, \mathbf{y}]$，从而同时保持 EFx 可行性和成本最小性。

$\therefore$ 根据归纳原理，该结论对所有 $i \in [m]$ 均成立。 □

根据引理 12，我们可以如下证明定理 11：

证明（定理 *11*）。设 $I = (A, M, v, c)$ 是一个关于成本因子和相同估值函数 v 的最小成本 EFx 分配实例，其中物品集合为 $M = \{x_1, \ldots\ldots, x_m\}$。我们首先按照成本因子递减的顺序对代理人排序，使得$c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$。然后，我们在 $\mathcal{O}(n^2 \cdot m^{3\beta})$ 时间内构造表 D。对于所有满足 $D[j, \mathbf{x}\ n-1, \mathbf{m} - \mathbf{x}]$ 的 $a_j \in A$ 和$\mathbf{x} \in m^\beta$，我们返回成本最小的条目。

正确性： 设 $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ 是一个满足 EFx 条件的物品分配。每个代理人的分配都可以用类型向量 $\mathbf{x}_i$ 描述，该向量表示其物品集合中不同类型物品的数量。考虑集合 X_j，它由向量 $\mathbf{x}$ 表示；移除其中最小的物品后，该集合在所有代理人中价值最高。这个集合 X_j 为我们设定了一个基准，即每个集合为维持公平性必须达到的最低可接受价值。由于动态规划表项 $D[j, \mathbf{x}\ n-1, \mathbf{m} - \mathbf{x}]$ 的定义是`true`：若其余 $n-1$ 个代理人存在符合给定向量配置 $\mathbf{x}$ 至 a_j以及整个物品集合 $\mathbf{m}$的有效 EFx 分配，则该表项取相应值；因此，我们的算法会将此值设为 `true`。由于代理人按成本因子递减排序，最小化分配的总成本也意味着在不违反 EFx 条件的前提下，尽可能降低成本最高的集合的价值。这确保动态规划表项$D[j, \mathbf{x}\ n-1, \mathbf{m} - \mathbf{x}]$ 在每一步都反映有效 EFx 分配可能达到的最低成本。因此，如果存在总成本小于或等于给定阈值的 EFx 分配，算法就会返回 `true`。

□