arXiv:2601.11431v1 [math.QA] 16 Jan 2026

A型中1-超传递量子子群的分类

CAIN EDIE-MICHELL 和 JACQUES KATUMBA

ABSTRACT. 我们为 `étale 代数对象 $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 定义了超传递性的概念。此定义直接类比于子因子的超传递性概念，用于衡量在 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 内部的 $A$-模范畴中，首次出现"新内容"的深度。我们的主要定理给出了所有 $N,\ k \in \mathbb{N}$对应的 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 中全部1-超传递 `Étale 代数对象的分类。我们的分类涵盖了 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 中所有已知的非 pointed `étale 代数无限族，并包含这些范畴中已知的非 pointed `étale 代数对象，除其中16个之外。剩余16个已知例子的超传递性介于2和4之间。

1. INTRODUCTION

一类重要的张量范畴是仿射李代数 $\mathfrak{g}$ 的可积层-k 表示范畴，其中 $\mathfrak{g}$ 是单李代数，k 是正整数级 [BK01]。这些范畴通常记作 $\mathcal{C}(\mathfrak{g},\ k)$。近年来，人们重新开始研究这些范畴中的 `Étale 代数对象。这主要得益于 Gannon [Gan23]和 Schopieray [Sch18]的工作。尤其是，Gannon 最近的研究表明，对于固定的单李代数 $\mathfrak{g}$，存在一个有效的层上界 $k$，使得范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{g},\ k)$中可能存在非 pointed（即例外的） `Étale 代数对象。由此，Gannon 得以完整分类秩严格小于 7 的所有 $\mathfrak{g}$ 的范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{g},\ k)$中的 `Étale 代数对象。这完全解决了所有例外单李代数的分类问题（除类型为 E_7 和 E_8的李代数外；借助 Gannon 的技术，进一步增强计算能力后也将解决这两类问题）。

要进一步推进经典李代数的 `étale 代数的分类，就必须通过获得独立于李代数秩的限制条件，改进 Gannon 的结果。本文初步尝试以与秩无关的方式研究 `étale 代数。本文将研究范围限定于类型 A，不过我们预计，这些技术也能推广到类型 B、C和 D，并得出相应结果。为此，我们对 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$中的 `étale 代数定义如下超传递性。这直接类比了子因子的超传递性概念（见 [GJ07，定义 4.1.1] 和 [Jon12，定义 3.2.1]）；而子因子的超传递性本身则是群作用传递性概念的推广。

定义 1.1 节设 $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 是一个 `Étale 代数对象。我们称 A 是 n-超传递的，若

$$\dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)}(\Box^{\otimes n}) = \dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)_A}(\mathcal{F}_A(\Box^{\otimes n}))$$

and

$$\dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)}(\Box^{\otimes n+1}) < \dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)_A}(\mathcal{F}_A(\Box^{\otimes n+1})).$$

等价地，A 是 n-超传递的，当且仅当

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)}(A \to \Box^{\otimes n} \otimes \Box^{\otimes -n}) = 1 \quad \text{and} \quad \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)}(A \to \Box^{\otimes n+1} \otimes \Box^{\otimes -(n+1)}) > 1.$$

我们可以大致将超传递性视为一种度量，用来衡量相对于自由模函子和向量表示，"新事物"在范畴$\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)_A$中相对于 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$出现的位置。更准确地说，若 A是 n-超传递的，则$\in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$的融合图与 $A \otimes _ \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)_A$的融合图在深度 n之前一致。请注意，从定义中并不明显能看出 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$中的每个 `étale 代数都是 $n$-超传递的，其中某个 $n \in \mathbb{N}$存在。根据定义可立即得出，一个 `étale 代数具有超传递性，当且仅当它在 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$的 0 分次分量中有非平凡支撑。根据分次张量范畴中代数对象的理论 [Nik25]，，这意味着每个非 pointed `Étale 代数对象都是 n-超传递的，其中某个 $n \in \mathbb{N}$存在。

截至撰写本文时，范畴$\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$中已知的非 pointed `Étale 代数对象包括三个无限族，以及少数几个（截至目前）孤立例子。这些 `étale 代数大多源自共形嵌入理论。我们在第 2.3 小节概述了这种对应关系。关于这些 `étale 代数的综述，请参阅 [EMG25] 。采用本文的记号（已在第 2.3 小节中回顾），这些已知例子具有如下超传递性。我们不列入层级-秩对偶 [Xu07, OS14]（因为这种构造保持超传递性）和代数扩张（因为这种构造通常会降低超传递性，而在这些特殊情况下则保持超传递性）[1]

n	具有 n-超传递性的 étale 代数 A
1	$A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}} \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ N)$
	$A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}} \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ N+2)$
2	$A_{\mathfrak{so}_5} \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_2,\ 10)$
	$A_{\mathfrak{e}_6} \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_3,\ 9)$
	$A_{\mathfrak{so}_{20}} \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_4,\ 8)$
	$A_{\mathfrak{sp}_{20}} \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_6,\ 6)$
3	$A_{\mathfrak{e}_7} \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_3,\ 21)$
	$A_{\text{Shellekens}} \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_7,\ 7)$
4	$A_{\mathfrak{g}_2} \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_2,\ 28)$

虽然我们已知的范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 中的 `Étale 代数对象列表几乎肯定并不完整，但根据上表提出猜想还是非常诱人的。下面是第一作者与 Noah Snyder 提出的一个猜想的略微修正版。

猜想 1.2. 考虑集合 $\mathcal{A}$，其中包含范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$ 中所有非 pointed 的 `étale 代数对象，N 和 k 均取遍。则

i) 超传递性严格大于 1 的 $A \in \mathcal{A}$ 只有有限多个；ii) 如果 $A \in \mathcal{A}$ 是 1-超传递的，那么 A 就是来自共形嵌入的 `étale 代数之一

$$\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N, N-2) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{sl}_{N(N-1)/2}, 1)$$
$$\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N, N) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{so}_{N^2-1}, 1)$$
$$\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N, N+2) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}, 1),$$

或者是这些嵌入之一的简单流扩张（见 [DLM96]）。

注意，对此猜想给出构造性证明，将解决范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$ 中所有 `étale 代数的分类。一个稍弱的猜想（它仿照了关于子因子超传递性的类似猜想）如下。

猜想 1.3. 存在 $K \in \mathbb{N}$，使得范畴$\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$ 中所有非 pointed 的 `étale 代数对象的超传递性都小于或等于 K。

基于上表，甚至可以提出这样的猜想： $K = 4$ 是超传递性的普适上界。

本文的主要结果是证明猜想 1.2 的第 ii) 部分。为尽可能简洁地陈述我们的主要定理，我们回顾来自 [DMNO13，第 3 节6] 的双射，该双射针对一个固定的 `étale 代数 $A \in \mathcal{C}$

$$\{B \in \mathcal{C}_A^0 : B \text{ is an ètale algebra}\} \cong \{B \in \mathcal{C} : A \subseteq B \text{ is an extension of ètale algebras}\}.$$

该双射在正向上的映射由遗忘函子给出。

定义 1.4。我们将上述双射下对应于 $\mathcal{C}_A^0$ 中指向代数对象的 `étale 代数扩张 A 称为简单流扩张。

我们的主要定理如下。

[1]我们还排除了例 $A_{\mathfrak{so}_{70}} \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_8,\ 10)$，因为我们无法在文献中找到这一共形嵌入的分支规则。值得注意的是，该例的秩和层恰好对应于我们的主要定理中奇异的缺失情形。

定理 1.5. 设 $N, k \geq 2$ 满足 $(N,k) \notin \{(8,10),(10,8)\}$，并设 $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$ 是一个1-超传递*Étale* 代数对象。那么以下情况之一成立：

(i) $k = N-2$ 和 A 是 $A_{\mathfrak{sl}_{N(N-1)/2}}$的简单流扩张，或 *(ii)* $k = N$ 和 A 是 $A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}$的简单流扩张，或 *(iii)* $k = N+2$ 和 A 是 $A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}$的简单流扩张。

我们的主要定理的证明分三种情况完成。它们分别是定理 4.9、定理 5.5 和定理 5.6。

注 1.6。 我们指出，上述定理的证明依赖于 N、 $k \geq 7$的界。不过，鉴于 Gannon [Gan23], 已知 `etale 代数在 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N$、 $k)$中的明确分类（适用于 $N \leq 7$或 $k \leq 7$），我们可以将结果扩展到 N、 $k \geq 2$的一般情形。Gannon 的这些结果还排除了若干特殊的$(N$、 $k)$对，而我们的方法无法处理这些情形（即引理 3.6）。借助额外的计算能力，Gannon 的方法还可以解决主要定理中缺失的 (8、10) 和 (10、8) 情形。

我们注意到，上述定理中出现的简单流扩张已得到充分理解和分类。

注 1.7. 我们回顾 [KO02, 定理 5.2]，有

$$\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)^0_{A_{\mathfrak{g}}} \cong \mathcal{C}(\mathfrak{g}, 1).$$

对于 $\mathcal{C}(\mathfrak{so}_{N^2-1},1)$，该范畴仅有平凡的 `étale 代数（当 $N \neq \pm 1 \pmod 8$ 时）；而当 $N \equiv \pm 1 \pmod 8$ 时，这些范畴有三个 pointed `étale 代数，且它们全都是 pointed。利用遗忘函子 $\mathcal{C}(\mathfrak{so}_{N^2-1}, 1) \to \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N)$ 的显式分支规则 [KW88, 注 4.2.2]，我们看到 $A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}$ 的两个非平凡扩张的底层对象均为

$$A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}} \oplus \left(2^{\frac{N-3}{2}}\right) \cdot V_{[N-1,N-2,\cdots,1]}.$$

对于范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_{N(N\pm1)/2}, 1)$， `étale 代数由因子 $m \mid N(N\pm1)/2$ 分类：若 $N(N\pm1)/2$ 为奇数，则满足 $m^2 \mid N(N\pm1)/2$；若 $N(N\pm1)/2$ 为偶数，则满足 $2m^2 \mid N(N\pm1)/2$。相应 `étale 代数扩张的对象结构的显式形式，可利用 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_{N(N\pm1)/2}, 1) \to \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N\pm2)$ 的分支规则，根据 [LL95] 确定。

现在我们概述定理 1.5 的证明以及本文的结构。

在第 2 节中，我们回顾范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 的相关事实，尤其关注与 N 无关的简单对象“$GL(N)$”标记集。我们还回顾范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 的 Kazhdan-Wenzl 表示，这将是后续证明中的关键要素。我们回顾编织张量范畴中 Étale 代数对象的基础知识，以及在编织张量范畴内部构造模对象的张量范畴及其性质。最后，我们讨论由共形嵌入理论产生的范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 中的 Étale 代数对象，并回顾三个无限族对应的模范畴的表示。

在第 3 节中，我们得到关于 1-超传递代数对象 A 结构的初步结果。虽然我们不可能仅凭本节中的论证完全确定 A 的对象结构，但能够确定 A 与 $\otimes^3 \otimes \otimes^{-3}$ 的交集。这里的关键障碍在于利用以下事实： $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 中 Étale 代数的简单直和项具有平凡扭结。这一事实有力地限制了 A 中可能出现的简单直和项。接着，我们运用各种伴随论证，进一步限制 A 中允许出现的直和项的重数。我们证明，若 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 具有 1- 超传递 Étale 代数对象 A，则必有 $k \in \{N-2, N, N+2\}$。此外，在这三种情形中，我们都确定了 $\mathcal{F}_A(\ ) \in \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)_A$ 在深度三以内的融合图（可能性只有有限种）。 □

在第 4 节中，我们聚焦于 $k = N$ 的情形。在此我们得到 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,N)_A}(\mathcal{F}_A(\ )^{\otimes 3})$ 的一个基。这个基使我们能够计算范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N)_A$ 中非平凡的三股关系。这些计算的一个关键要素是 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,N)_A}(\mathcal{F}_A(\ )^{\otimes 2})$ 上的 卷积乘积 。这是这些空间上的一种结合代数结构 □

我们可以通过编织理论的考量明确确定其结构常数。利用范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N)^{A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}}$ 已知的表示，以及我们计算出的三股关系，我们可以明确构造一个函子，将这一已知表示映入范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N)_A$。由一般理论可知，$A$ 是 `的一个 $A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}$étale 代数扩张。

在第5节中，我们对 $k = N \pm 2$ 的其余情形重复进行分析。对于这两种情形中的每一种，直到深度 3，我们都有两个可能的融合图。对于其中一个融合图，我们采用与第 4 节类似的方案。然而，在这种情况下，我们在三股关系中得到了矛盾，从而证明其不存在。对于剩下的融合图，我们可以使用一个简单的编织理论论证，证明融合图在深度2处存在一个可逆对象。这使我们能够构造一个从范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)^{A_{\mathfrak{sl}_{N(N\pm1)/2}}}$ 到 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ N \pm 2)_A$ 的函子。与之前一样，这意味着 A 是 $A_{\mathfrak{sl}_{N(N\pm1)/2}}$ 的一个 `etale 代数扩张。

致谢。 CE 谨向 Dmitri Nikshych 和 Dave Penneys 致谢，感谢他们提供了有帮助的参考资料。JK 特别感谢他们的家人对其学术之旅的支持，并特别感谢其母亲一直以来给予的最大支持。CE 得到了美国国家科学基金会数学科学部资助项目 2400089 的支持。

2. Preliminaries

关于张量范畴的基础知识，请参阅 [EGNO15]；关于编织张量范畴中的 Étale 代数对象的基础知识，请参阅 [KO02, DMNO13]。

2.1. 范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$。 本文研究的一个关键对象是模张量范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$。这些范畴是 $\mathfrak{sl}_N$ 的可积层-k 表示的范畴，其中 $k \in \mathbb{N}$[BK01]。该范畴上的张量积是保级融合 [KL93]。等价地，有$\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$ 与 $\mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{sl}_N))$ 编织等价，其中 $q = e^{2\pi i_2{}^{1}{}_{(N+k)}}$ [Fin96]。

$\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$ 的简单对象通常用某些最高权来标记，或等价地，用某些杨图来标记。更准确地说，我们有

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)) \cong \{V_\lambda : \lambda \text{ is a Young diagram with } \lambda_1 \le k \text{ and } \ell(\lambda) < N\}.$$

虽然这种标记方式便于计算张量幂，但不太适合计算对偶对象。我们有 $(V_\lambda)^* \cong V_{\lambda^*}$，其中

$$\lambda^* = (\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_{N-1}, \lambda_1 - \lambda_{N-2}, \cdots, \lambda_1 - \lambda_2).$$

本文中，我们改用由杨图对构成的“$GL(N)$ 风格”标记集。对于固定的 N，这一重新标记由映射给出

$$(\lambda, \mu) \mapsto (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_1 - \mu_{N-1}, \lambda_3 + \mu_1 - \mu_{N-2}, \cdots, \lambda_{N-1} + \mu_1 - \mu_2).$$

请注意，这个新的标记集并非单射。即 $([1], [1^{N-1}]) = ([2], \emptyset)$。不过，如果限制在满足 $\ell(\lambda) + \ell(\mu) < N$ 的 (λ, μ) 上，它就是单射。这种重新标记的好处是，对偶对象的表现很规整。显然，我们的重新标记满足 $(V_{\lambda,\mu})^* \cong V_{\mu,\lambda}$。当 $\mu = \emptyset$ 时，我们有 $V_{\lambda,\emptyset} = V_\lambda$。在此设定下，我们用 λ 作为 $(\lambda, \emptyset)$ 的简写。

$\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$ 中简单对象的扭结可用其最高权和 Killing 型来计算。用标准基 $\{\epsilon_i$ 表示时：对于 $\mathfrak{sl}_N$ 的权空间 $1 \le i < N\}$，我们有 V_λ 的最高权为 $\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \epsilon_i$。在我们的基上，Killing 型（归一化为正根的长度为 $\sqrt{2}$）为

$$\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \begin{cases} \frac{N-1}{N} & \text{if } i = j \\ -\frac{1}{N} & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

于是，V_λ 的扭结由 $q^{\langle \lambda,\ \lambda+2\rho \rangle}$ 给出，其中 $q = e^{2\pi i_2{}^{1}{}_{(N+k)}}$，而 ρ 是特定的根 $\sum_{i=1}^{N-1} (N-i)\epsilon_i$。这些扭结计算起来很繁琐，但实际操作中计算方法很直接[2]。

[2]看起来，$(\lambda,\ \mu)$ 的扭结通式为 $q^{\frac{(|\lambda|+|\mu|)N^2+(c_\lambda+c_\mu)N-(|\lambda|-|\mu|)^2}{N}}$ 其中 $c_\lambda := \sum_i \lambda_i(\lambda_i - 2i + 1)$。本文不会使用或证明这个公式。

例子 **例 2.1**。考虑 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 中标记为（□ □）的对象。对应的权为

$$(2,1,1,\cdots,1).$$

于是我们有

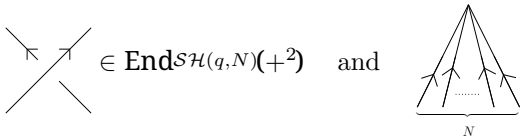
$$\begin{aligned}
&\langle (2,1,1,\cdots,1),(2N,2N-3,2N-5,\cdots,3)\rangle \\
&= \frac{N-1}{N}(4N+\sum_{i=2}^{N-1}(2N-(2i-1))) - \frac{4}{N}\sum_{i=2}^{N-1}(2N-(2i-1)) - \frac{1}{N}\sum_{j=2}^{N-1}\sum_{i=2,i\neq j}^{N-1} 2N-(2j-1) \\
&= (N^2+N-2)-4(N-2)-(N^2-5N+6) \\
&= 2N.
\end{aligned}$$

因此 $\theta_{(\ \square\square}=q^{2N}$。本文中所有其他对象的扭结公式也以类似方式计算。为使论文篇幅适中，我们不列出这些计算。

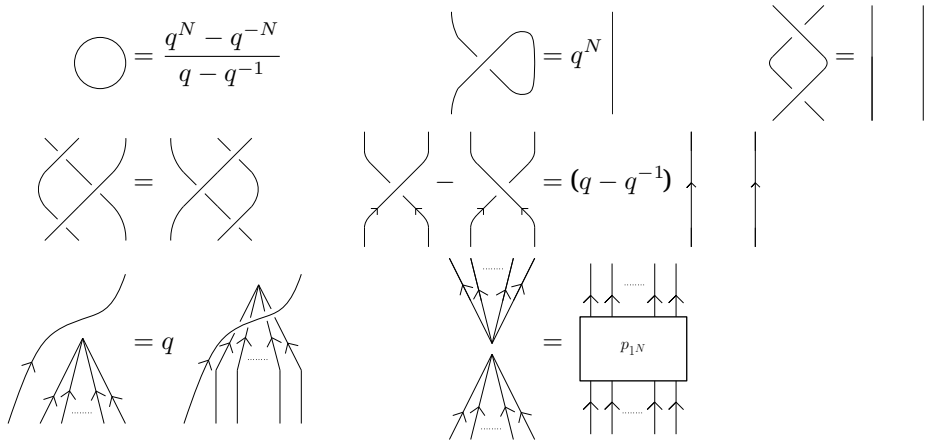
$\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 的融合规则通常较为复杂（参见 [AP95] 和 [Saw06，推论 8]）。需要时，我们会给出简单对象之间相关的融合规则。通过注意到，对于满足 $\lambda_1+\mu_1<k$ 的杨图 λ 和 μ，$V_\lambda\otimes V_\mu$ 的张量积分解与 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{sl}_N)$ 中的经典情形一致，即可计算这些规则。本文需要计算的最大张量积涉及含 3 个方格的杨图，因此在假设 $k\geq 7$ 的情况下，这些经典分解已足够。

就本文而言，理解 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 是某个良好的生成元与关系范畴的柯西完备化将很有帮助。Kazhdan 和 Wenzl 给出了 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$ 的这一表述（我们也请读者参阅 [CEM23，第 2.4] 节，了解这些结果的图形解释）。

定义 2.2 ([KW93])**.** 设 $q\in\mathbb{C}-\{0\}$ 和 $N\in\mathbb{N}_{\geq 2}$。我们将 $\mathcal{SH}(q,N)$ 定义为一个枢轴 $\mathbb{C}$-线性幺半 †-范畴，其对象是 $\{+,-\}$ 中的字符串，态射由以下元素生成：



† 结构由图形垂直翻转的共轭线性延拓给出，而关系由下式给出：



这里采用如下约定：涉及无定向线的关系对所有可能的定向均成立。最后一个关系中的 p_{1^N} 表示 $+^N$ 盒空间中投影到第 N 个反对称化子上的唯一极小中心幂等元（关于以辫子表示的显式公式，参见 [Pag13，定理 6]）。

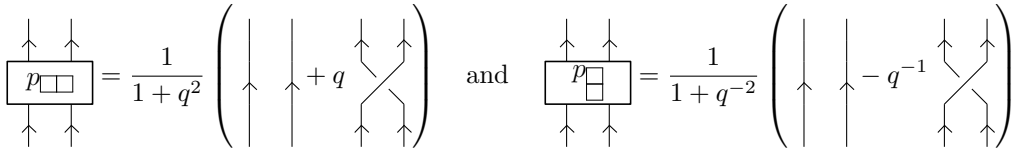
于是得到以下结果，这也归功于 Kazhdan 和 Wenzl。

命题 2.3 ([KW93])**.** 设 $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。则

$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{SH}(q,N)}) \simeq \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$$

其中 $q = e^{2\pi i \frac{1}{2(N+k)}}$。在此等价关系下，对象 $+$和 $-$分别映射为 （ $\emptyset$）和□（$\emptyset$, ）。 □

这里，Ab 表示柯西完备化（见 [EMS25，第 2 节。2]），即加性完备化和幂等完备化，而上横线表示半单化（见 [EO22]）。我们不要求对上述等价关系的细节有太多了解。不过，我们需要投影到 $\mathrm{End}^{\mathcal{SH}(q,N)}(+^2)$ 上以及从 $\mathrm{End}^{\mathcal{SH}(q,N)}(+^2)$ 中投影的显式公式。这些公式为



**`2.2. 由 Étale 代数构造的张量范畴。** 给定 `一个编织张量范畴$\mathcal{C}$中的 A Étale 代数对象 A，可以将 $\mathcal{C}$ 内部左 A-模的范畴赋予张量范畴的结构 [KO02，定理 15]。这一关联的张量范畴将成为我们在本文中分类 ` Étale 代数对象的关键工具。

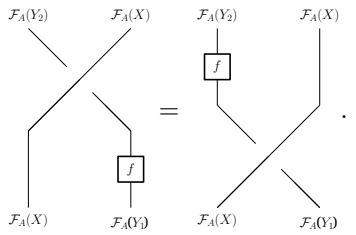
我们将 $\mathcal{C}_A$ 记作这一张量范畴。众所周知，若 $\mathcal{C}$ 是一个编织融合范畴，则$\mathcal{C}_A$ 是一个融合范畴，即它是半单的 [DMNO13，第 2 节4]，并且具有简单单位对象。进一步地，若 $\mathcal{C}$ 是酉的，则 $\mathcal{C}_A$ 也是酉的 [CGGH23]。

自由模函子 $\mathcal{F}_A\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 由 $X \mapsto A \otimes X$ 定义，可以利用 $\mathcal{C}$上的正编织赋予幺半函子的结构。在 $\mathcal{C}$ 为酉的情况下，函子 $\mathcal{F}_A$ 是一个 †-函子。此外，若 $\theta_A = \mathrm{id}_A$ ，则 $\mathcal{C}_A$ 是刚性的 [KO02，定理 115] ，并且是枢轴的 [KO02，定理 117], ，而 $\mathcal{F}_A$ 是一个枢轴函子（利用 [KO02]中的显式枢轴结构即可直接看出）。我们还有遗忘函子 $\mathrm{For}\colon\ \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ ，它仅仅遗忘模结构映射。贯穿本文反复使用的一项技术将是这些函子之间的伴随 [KO02，定理 16]。也就是说，对于$X \in \mathcal{C}$ 和 $M \in \mathcal{C}_A$ ，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \to \mathrm{For}(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\mathcal{F}_A(X) \to M).$$

一般而言，在自由模函子作用下， $\mathcal{C}$ 中编织的像不再是 $\mathcal{C}_A$中的编织。这是因为其像一般不再对两个位置都自然。不过，编织的像对“下方”位置仍然自然。

引理 2.4. [EMS25，引理 2.4] 设 $\mathcal{C}$ 是一个编织张量范畴， A 是一个 *Étale* 代数对象。设 $\mathcal{C}_A$ 是 $\mathcal{C}$ 内部的 A-模所构成的张量范畴。那么对于任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\mathcal{F}_A(Y_1) \to \mathcal{F}_A(Y_2))$ ，我们有



这尤其蕴含了关于 $\mathcal{C}_A$ 的融合环的以下著名交换性结果。

引理 2.5. 对于任意 $X \in \mathcal{C}$ 和 $M \in \mathcal{C}_A$ ，我们有

$$\mathcal{F}_A(X) \otimes M \cong M \otimes \mathcal{F}_A(X).$$

本文中我们将只讨论 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$。由于该范畴是半单的，自由模函子 $\mathcal{F}_A\colon\ \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k) \to \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)_A$是忠实的。稍微滥用一下记号，我们将认定

$\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)$与其在 $\mathcal{F}_A$ 下于 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)_A$中的像相同。特别地， $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)_A$ 中的自由模将用（成对的）杨图来标记，而由 $\emptyset$）和（$\emptyset$,）在 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)_A$中生成的平面代数子范畴将包含子范畴 $\mathcal{SH}(q,N)$，其中取适当的 q值。

`2.3. **来自共形嵌入的 étale 代数**。 étale 代数的一个重要来源是共形嵌入理论。这些嵌入是 Wess-Zumino-Witten 顶点算子代数 [FZ92] 的包含

$$\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N,k)\subseteq\mathcal{V}(\mathfrak{g},1)$$

使得 $\mathcal{V}(\mathfrak{g},1)$ 分解为有限个不可约 $\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N,k)$-表示的直和。由[Xu98、KO02、HKL15] 可知，这样的共形嵌入会在 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)$ 中产生一个 étale 代数 `。

定义 2.6。 对于如下形式的共形包含

$$\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N,k)\subseteq\mathcal{V}(\mathfrak{g},1)$$

我们将记 作 $A_{\mathfrak{g}}$，表示在上述对应关系下相应的 `etale 代数在 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)$ 中的形式。

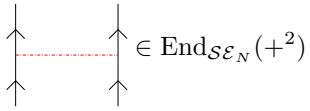
本文将关注以下三类共形嵌入：

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N,N-2)&\subseteq\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_{N(N-1)/2},1)\\ \mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N,N)&\subseteq\mathcal{V}(\mathfrak{so}_{N^2-1},1)\\ \mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N,N+2)&\subseteq\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2},1).\end{aligned}$$

这些共形嵌入所对应的 `étale 代数是1-超传递的，因此我们预计它们会出现在我们的分类结果中。就本文而言，我们不需要了解有关该共形嵌入结构的太多信息，但我们将需要以下关于 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,k)$中 A-模范畴的表示。

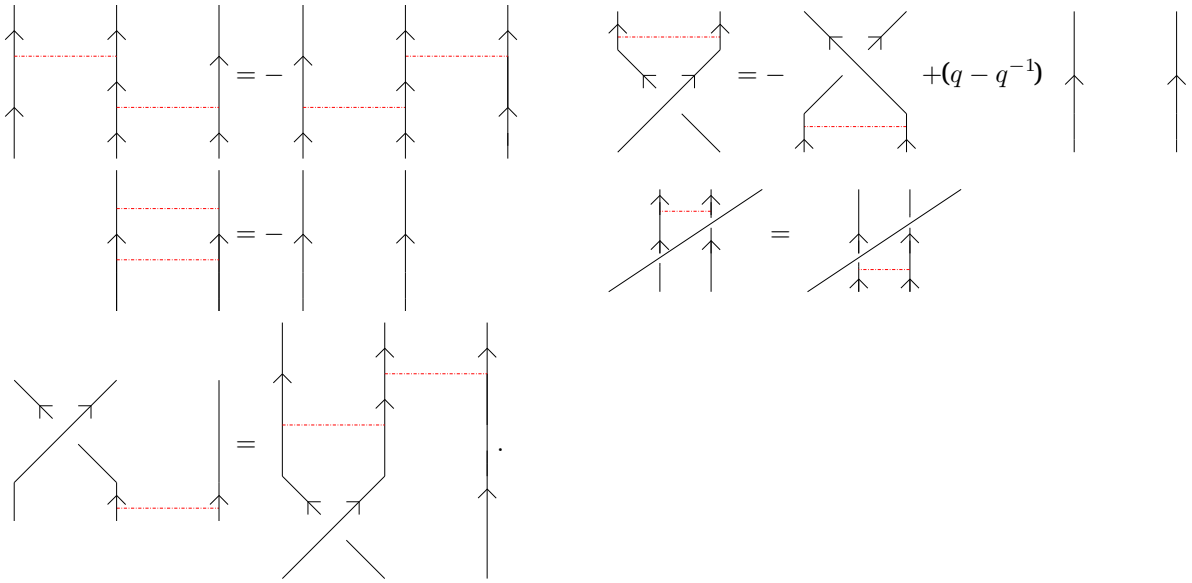
对于共形嵌入 $\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N,N)\subseteq\mathcal{V}(\mathfrak{so}_{N^2-1},1)$，相应的$A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}$-模范畴是 [EMS25]中重点研究的主要示例。该论文的一个主要结果是给出了以下关于这一 $A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}$-模范畴的表示。注意，这是 [EMS25，注5.3]中所描述的另一种表示。这种替代表示将更适合我们在本文中发展出的、用于分类1-超传递 `étale 代数对象的技术。

定义 2.7. [EMS25] 令 $N\in\mathbb{N}_{\geq 2}$。我们将 $\mathcal{SE}_N$定义为 $\mathcal{SH}(q,\ N)$ 的扩张，其中 $q=e^{2\pi i\frac{1}{4N}}$由以下生成元添加而成

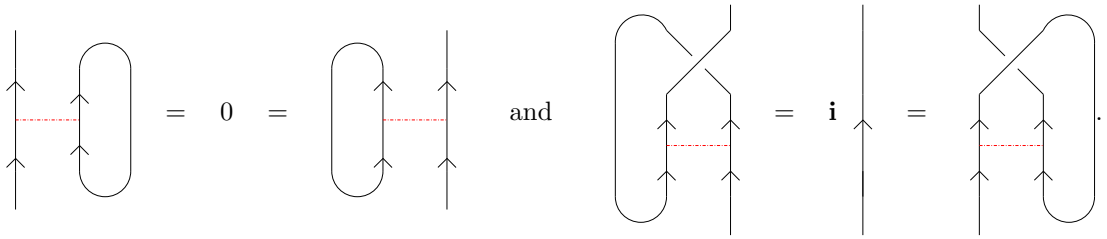


$\in \mathrm{End}_{\mathcal{SE}_N}(+^2)$

满足代数关系：



以及以下迹关系：



我们有， $\mathcal{SE}_N$ 的半单化的柯西完备化恢复了 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ N)$内部的 A-模范畴。

定理 2.8。 [EMS25，定理 1。5] 令 $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，并设 $q = e^{2\pi i \frac{1}{4N}}$。则存在一个幺半等价

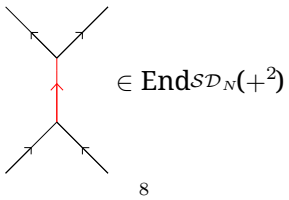
$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{SE}_N}) \simeq \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N)_{A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}}.$$

[EMS25] 中发展的技术相当普适，可以为其他共形嵌入所产生的 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ k)$中的$A$-模范畴给出表示。特别地，我们可以将这些技术应用于以下族：

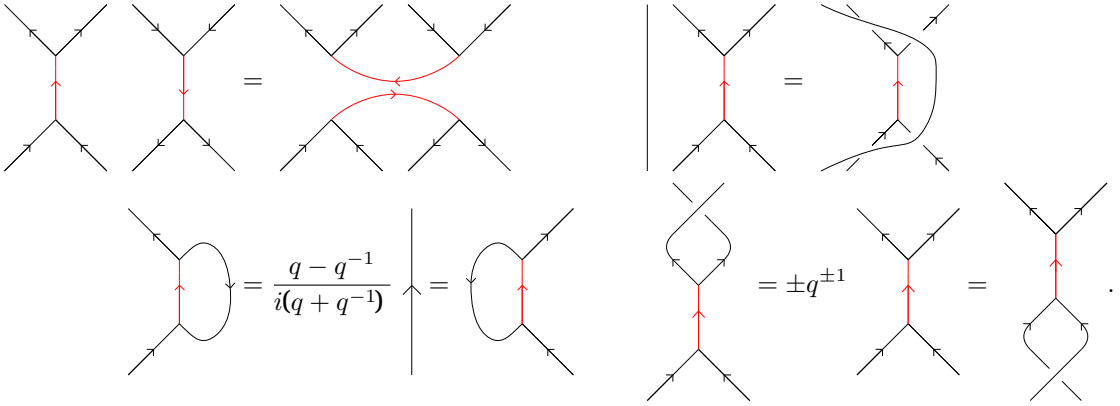
$$\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N, N-2) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{sl}_{N(N-1)/2}, 1) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N, N+2) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}, 1)$$

从而得到以下定义。

定义 2.9. 令 $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$。我们将 $\mathcal{SD}_N^{\pm}$定义为 $\mathcal{SH}(q,\ N)$ 的扩张，其中 $q = e^{2\pi i \frac{1}{2(2N\pm 2)}}$ 由额外的生成元生成



满足以下关系：



我们注意到，Liu 的工作 [Liu15] 中已隐含出现了上述范畴。随后，我们可以使用与 [EMS25] 中相同的技巧证明，这些范畴是相应共形嵌入范畴的表示。下面的定理证明了 Liu 在 [Liu15] 中提出的猜想。

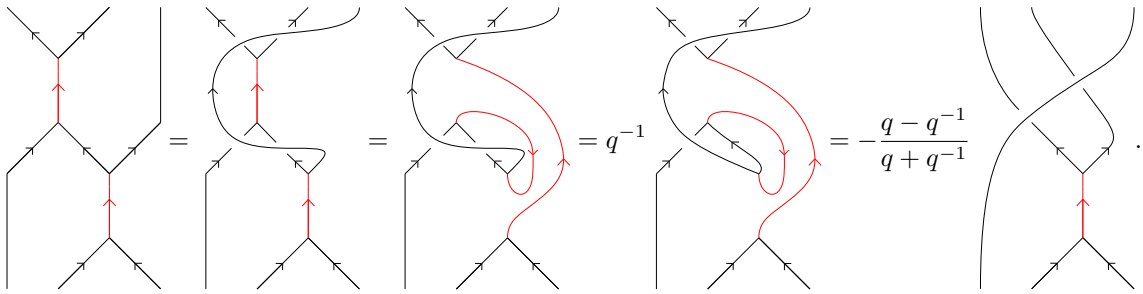
定理 2.10. 设 $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，并令 $q = e^{2\pi i / (2N \pm 2)}$，则存在幺半等价

$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{SD}_N^{\pm}}) \simeq \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N \pm 2)_{A_{\mathfrak{sl}_{N(N\pm 1)/2}}}.$$

证明。此证明与 $\mathcal{SE}_N$ 中相应范畴的证明十分相似，详见 [EMS25]。由于当前情形的细节遵循相同的思路，我们仅详述差异显著的部分。我们将讨论 $A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}$ 的情形，因为 $A_{\mathfrak{sl}_{N(N-1)/2}}$ 情形几乎完全相同。

第一步是构造一个幺半函子 $\mathcal{SD}_N^+ \to \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N+2)^{A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}}$。根据 [KO02，定理 5.2]，，我们知道 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N+2)^{A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}}$ 包含一个特异可逆局部模 g；此外，由 [LL95] 可知，它是 $\mathrm{For}(g)$ 的一个直和项。由自由模函子与遗忘函子之间的伴随可知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,N+2)^{A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}}}(g \to \ ^{\otimes 2}) = 1$。由于 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N+2)^{A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}}$ 是半单的，因此存在一个唯一的最小中心投影，其像为 g，且属于 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,N+2)^{A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}}}(\ ^{\otimes 2})$。由于 g 可逆，该投影满足 $\mathcal{SD}_N^+$ 的前三个关系。另一个伴随论证表明 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,N+2)^{A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}}}(g \to \ ) = 1$，因此 g 是自由模的一个直和项。由此可知，投影到 g 的投影是投影到 的子投影；特别是，投影到 g 可吸收辫子，代价为 q。这表明投影到 g 满足 $\mathcal{SD}_N^+$ 的最后一个定义关系。因此存在一个主导幺半函子 $\mathcal{SD}_N^+ \to \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N+2)^{A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}}$。 □□

为了证明这个函子可下降为一个从半单化出发的忠实函子，我们必须证明$\mathcal{SD}_N^+$可求值，即 $\dim \mathrm{End}_{\mathcal{SD}_N^+}(\mathbf{1}) = 1$。求值算法几乎可以原样沿用用于$\mathcal{SE}_N$ 的算法。唯一显著的区别是，现在要使用图表的局部化简（以及水平镜像）来推进归纳：



有了求值算法，我们便得到一个占优忠实幺半函子 $\mathcal{SD}_N^+ \to \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N+2)^{A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}}$。

为证明此函子是等价，我们采用与 [EMS25, Theorem 4.17] 中类似的技巧，以证明 $\mathrm{Ab}(\mathcal{SD}_N^+) \simeq \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N+2)_B$，其中 B 是 $A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}$ 中的一个 Étale 代数对象子代数。这些子代数由 [KMFPX15, Theorem 1.1]，分类，其中证明了唯一的真子代数是 pointed。与 [EMS25, Theorem 4.17] 的证明类似，当 B 对于 $N \geq 3$ 是 pointed 时，会导出矛盾。因此我们证明了 $\mathrm{Ab}(\mathcal{SD}_N^+) \simeq \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, N+2)^{A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}}$。

□

3. 初始代数结构

本节的目标是研究 $\mathfrak{sl}_N(\mathfrak{sl}_N, k)$ 中 1-超传递 Étale 代数对象的一般结构，以及这种结构对相应模范畴的影响。我们将对参数 k 加以限制，使得 1-超传递 Étale 代数对象能够存在；同时，为相应的模范畴列出有限个可能的融合图（至深度 3）。这一结构将成为后续各节结果的起点，这些结果将完整分类这些范畴中的 1- 超传递 Étale 代数对象。

本节中我们始终会用到一个关键结果：若 X 是伪幺正辫张量范畴中的 `étale 代数对象的一个简单直和项（就本文而言，即 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$），那么 $X$ 的扭结是平凡的 [Sch18]。结合第 2.1 小节中给出的 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$ 的简单对象扭结的显式公式，我们便能对哪些简单对象可以作为任意 `étale 代数的直和项施加严格限制。下述结果很容易由这些思路推出。本节中许多其他证明也只是对下方简短证明中的思路作了更复杂的应用。

注 3.1. 为方便排版，在本文余下部分中，我们将用 $\mathcal{C}$ 代替 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N, k)$。

引理 3.2. 对于任意 N、$k \in \mathbb{N}$ 以及 A，若 `是 $\mathcal{C}$ 中的一个 *étale* 代数，则仍为 $\mathcal{C}_A$ 中的简单对象。

证明。 利用自由模函子的伴随和刚性，我们计算得

$$\dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \to \square \otimes \square^*) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \to \mathbf{1} \oplus (\square, \square)).$$

(,) 的扭结为 $\square q^{2N}$，其中 $q = e^{2\pi i \frac{1}{2(N+k)}}$。对于任意 $N \geq 2$ 和 $k \geq 1$，此扭结都不可能是平凡的。因此 $(\square, \square) \notin A$，于是

$$\dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square) = 1.$$

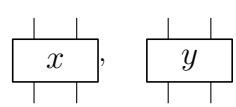
□

是简单的一个直接推论是以下融合图障碍。

引理 3.3。 对于任意 N、$k \in \mathbb{N}$，以及 $\mathcal{C}$ 中的一个 `乙醚代数 A，设 X、Y 是 $\mathcal{C}_A$ 中 $\square^{\otimes 2}$ 的简单直和项。那么

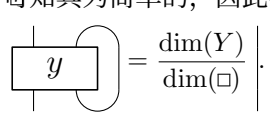
$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(X \otimes \square \to Y \otimes \square) > 0.$$

证明。 设



$\in \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square^{\otimes 2})$

是到 X 和 Y 上的极小投影。由引理 3.2 可知其为简单的，因此我们有

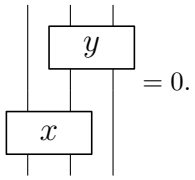


$= \dfrac{\dim(Y)}{\dim(\square)}$.

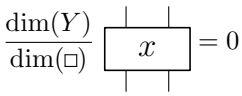
由引理 2.5 可知

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(X \otimes \square \to Y \otimes \square) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(X \otimes \square \to \square \otimes Y).$$

假设该同态空间为零维。由此可得关系式



取右偏迹可得



这意味着 $\dim(Y) = 0$。这与半单性矛盾。 □

现在我们将注意力限制在 1-超传递 étale 代数对象上，在这种情况下我们可以得出更多结论。

命题 3.4. 设 $N, k \geq 5$，并假设 $A \in \mathcal{C}$ 是 *1*-超传递的。那么以下情况之一成立：

(i) $k = N - 2$ 且 $(\square, \square) \in A$，或 *(ii)* $k = N$ 且 $(\square, \square) \in A$ 和 $(\square, \square) \in A$ 均成立，或 *(iii)* $k = N + 2$ 且 $(\square, \square) \in A$。

证明。 假设 A 是 1-超传递的，那么根据超传递性的定义，我们有

$$2 < \dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square^{\otimes 2}) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \to \square^{\otimes 2} \otimes \square^{\otimes -2}).$$

Th在 $\mathcal{C}$ 中，$\otimes 2 \otimes \otimes -2$ 的简单分解（以及各直和项的扭结）为 □ □

对象	重数	扭结
$(\emptyset, \emptyset)$	2	1
$(\square, \square)$	4	q^{2N}
$(\square\square, \square\square)$	1	q^{4N+4}
$(\square\square, \square)$	1	q^{4N}
$(\square, \square\square)$	1	q^{4N}
$(\square, \square)$	1	q^{4N-4},

其中 $q = e^{2\pi i \frac{1}{(N+k)}}$。

由于 $2 < \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \to \otimes 2 \otimes \otimes -2)$，我们必须有 $\otimes 2 \otimes \otimes -2$ 的至少一个非平凡简单直和项也是 A 的一个直和项。我们在引理 3.2 的证明中看到，对于任意参数选择，$q^{2N} \neq 1$，因此 $(\ ,\ ) \notin A$。 □ □

若 $(\square\square, \square\square) \in A$，则 $q^{4N+4} = 1$。只有当 $k = N + 2$ 时，$N, k \geq 2$ 才有解 .

若 $(\square, \square) \in A$，则 $q^{4N-4} = 1$。只有当 $k = N - 2$ 时，$N, k \geq 2$ 才有解。

若 $(\square, \square) \in A$，则 $q^{4N} = 1$。只有当 $k = N$ 时，$N, k \geq 2$ 才有解。此外，在这种情况下，我们还必须有 $(\ ,\ ) \in A$，因为 A 是自对偶的。□

我们的下一个目标是界定 1-超传递 étale 代数 A 中小型直和项的重数。在 $k = N$ 的情形下，这一点很快就能得到。

命题 3.5。 设 $N, k \geq 4$，并假设 A 是 *1*-超传递的，且 $k = N$。那么

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left((\square\square, \square) \to A\right) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left((\square, \square\square) \to A\right) = 1.$$

证明。 由于 A 是自对偶的，我们有 $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((\ ,\ ) \to A) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((\ ,\ ) \to A^*)$，记作 m。我们回顾以下融合规则

$$\begin{aligned}
\square\square \otimes \square\square^* &\cong (\emptyset,\emptyset) \oplus (\square,\square) \oplus (\square\square,\square\square)\\
\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}^* &\cong (\emptyset,\emptyset) \oplus (\square,\square) \oplus (\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix})\\
\square\square \otimes \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}^* &\cong (\square,\square) \oplus (\square\square,\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}).
\end{aligned}$$

利用这些规则以及我们对简单直和项扭结的了解，我们使用自由模函子伴随得到

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square\square) &= 1\\
\dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) &= 1\\
\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\square\square \to \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) &= m.
\end{aligned}$$

因此，m 和是 $\mathcal{C}_A$ 中同构的简单对象，故 Schur 引理给出

$$m = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\square\square \to \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) = 1.$$

□

这一思路的一个变体适用于 $k = N \pm 2$ 情形，不过现在我们需要考察深度 3 对象。这需要进行如下扭结分析。

引理 3.6. 设 $N, k \geq 7$。我们有 $\mathcal{C}$ 中简单对象的如下分解：

$$\begin{aligned}
\square\square\square \otimes \square\square\square^* &\cong (\emptyset,\emptyset) \oplus (\square,\square) \oplus (\square\square,\square\square) \oplus (\square\square\square,\square\square\square)\\
\square\square\square \otimes \begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}^* &\cong (\square,\square) \oplus (\square\square,\square\square) \oplus (\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\square\square) \oplus (\square\square\square,\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix})\\
\square\square\square \otimes \begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}^* &\cong (\square\square,\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) \oplus \left(\square\square\square,\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\right)\\
\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes \square\square\square^* &\cong (\square,\square) \oplus (\square\square,\square\square) \oplus (\square\square,\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) \oplus (\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix},\square\square\square)\\
\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}^* &\cong (\emptyset,\emptyset) \oplus 2(\square,\square) \oplus (\square\square,\square\square) \oplus (\square\square,\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) \oplus (\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\square\square) \oplus (\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) \oplus (\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix})\\
\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}^* &\cong (\square,\square) \oplus (\square\square,\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) \oplus (\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) \oplus \left(\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\right)\\
\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes \square\square\square^* &\cong (\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\square\square) \oplus \left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix},\square\square\square\right)\\
\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}^* &\cong (\square,\square) \oplus (\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\square\square) \oplus (\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) \oplus \left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}\right)\\
\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}^* &\cong (\emptyset,\emptyset) \oplus (\square,\square) \oplus (\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) \oplus \left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}$$

本节中尚未计算的简单直和项的扭结为

Object	$(\square\square\square,\square\square\square)$	$(\square\square\square,\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix})$	$\left(\square\square\square,\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\right)$	$(\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix},\square\square\square)$	$(\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix})$	$\left(\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix},\square\square\square\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\right)$
Twist	q^{6N+12}	q^{6N+6}	q^{6N}	q^{6N+6}	q^{6N}	q^{6N-6}	q^{6N}	q^{6N-6}	q^{6N-12}.

当 $k = N-2$ 和 $N \neq 10$ 时，具有平凡扭结的简单直和项仅有 $(\emptyset,\emptyset)$ 和 $(\ ,\ )$。当 $k = N$ 时，具有平凡扭结的简单直和项仅有 $(\emptyset,\emptyset)$、$(\ ,\ )$和 $(\ ,\ )$。当 $k = N+2$ 和 $N \neq 8$ 时，具有平凡扭结的简单直和项仅有 $(\emptyset,\emptyset)$ 和 $(\ ,\ )$。

证明。 直接计算。 □

通过这一扭结分析，我们现在可以确定 $k = N \pm$ 情形下的重数 2.

命题 3.7. 设 $N \in \mathbb{N}_{\geq 7} - \{10\}$，并假设 A 是 *1*-超传递的，且 $k = N-2$。那么

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) \to A) = 1.$$

证明. 定义 $m := \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((\ ,\ ) \to)$。根据命题 3.4，我们知道 $m \geq 1$。因此，接下来只需得到一个上界。

利用 $\mathcal{C}$ 中的以下简单分解：

$$(,) \otimes (,)^* \cong (\emptyset,\emptyset) \oplus 2\,(,) \oplus 2\,(,) \oplus (,) \oplus (,) \oplus (,) \oplus (,)$$
$$\oplus (,) \oplus \left(,\right) \oplus \left(,\right) \oplus \left(,\right)$$
$$(,) \otimes ^* \cong (,) \oplus (,) \oplus (,)$$

结合引理 3.6 和自由模函子伴随，我们计算得到

$$\dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}((,)) = 1 + 2m \qquad \text{and} \qquad \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}((,) \to) = m.$$

由于 $(,)$ 是简单对象，我们必须有 $(\ ,\ )$ 分解为

$$(,) \cong m \cdot \oplus \bigoplus \alpha_i \cdot X_i$$

其中 $X_i \in \mathcal{C}_A$ 是两两不同构的简单对象。此外，我们必须有

$$m^2 + \sum \alpha_i^2 = 1 + 2m.$$

由于 α_i 是非负整数，我们得到不等式

$$1 + 2m - m^2 \geq 0$$

这仅在 $m \in \{0, 1, 2\}$ 时成立。

为导出矛盾，假设 $m = 2$。再次利用引理 3.6 和自由模函子伴随，我们计算得

$$\dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}() = 1 + m = 3 \qquad \dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}() = 1 \qquad \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\to) = 0$$
$$\dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}() = 1 \qquad \dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}() = 1 + m = 3 \qquad \dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}\left(\right) = 1 + m = 3$$
$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\to) = 0 \qquad \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}\left(\to \right) = 0 \qquad \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}\left(\to \right) = m = 2.$$

这些计算仅与以下自由模的简单分解相容：

$$ \cong X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$$
$$ \cong W \oplus Z_1 \oplus Z_2$$
$$ \cong Y \oplus Z_1 \oplus Z_2.$$

Wh此处，集合 $\{X_1, X_2, X_3, W, Y, Z_1, Z_2\}$ 中的对象是 $\mathcal{C}_A$ 中两两不同构的简单对象 .

利用自由模函子是幺半函子这一点，我们得到

$$(X_1 \otimes) \oplus (X_2 \otimes) \oplus (X_3 \otimes) \cong W \oplus Y \oplus 2 \cdot Z_1 \oplus 2 \cdot Z_2.$$

在融合图上，这意味着从 3 个顶点 $\{X_1, X_2, X_3\}$ 到 4 个顶点 $\{W, Y, Z_1, Z_2\}$ 共有 6 条边。要么至少有一个 X_i 只有一条出边，要么所有 X_i 都恰有两条出边。消除自由对称性后，这意味着以下情况之一：

(1) X_1 与 Z_1 相连且不与其他对象相连，而 X_2 与 Z_1 相连；此时 $\dim \mathrm{Hom}(X_1 \otimes \to X_3 \otimes) = 0$。(2) X_1 与 W（或 Y）相连且不与其他对象相连；此时 $\dim \mathrm{Hom}(X_1 \otimes \to X_2 \otimes) = 0$。(3) X_1 与 W 和 Z_1 相连，X_2 与 Z_1 和 Z_2 相连，且 X_3 与 Z_2 和 W 相连；此时 $\dim \mathrm{Hom}(X_1 \otimes \to X_3 \otimes) = 0$。(4) X_1 与 W 和 Y 相连，X_2 与 Z_1 和 Z_2 相连，且 X_3 与 Z_1 和 Z_2 相连；此时 $\dim \mathrm{Hom}(X_1 \otimes \to X_2 \otimes) = 0$。

在所有情况下，这都与引理 3.3 矛盾，因此 $m \neq 2$。 □

基本上相同的论证（只需将所有杨图转置）可得：

命题 3.8. 设 $N \in \mathbb{N}_{\geq 7} - \{8\}$，并假设 A 是 *1*-超传递的，且 $k = N + 2$。 n

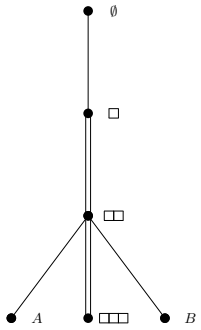
$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} ((\square, \square) \to A) = 1.$$

在深度 3 以内，我们已经理解了 1-超传递 `etale 的简单直和项结构，因此现在能够在有限种可能性范围内确定 $\mathcal{C}_A$ 截至深度 3 的融合图。

定理 3.9。 令 $N \in \mathbb{N}_{\geq 7}$，令 A 为 `中的一个 *1*-超传递 *etale* 代数，并假设 $k = N$。那么我们有以下自由模的简单分解和同构：

$$\square\square \cong \square\square\square \oplus A \oplus B$$
$$\square\square \cong \square\square$$
$$\square\square\square \cong \square\square$$

其中，{ , , , A, B} 是 $\mathcal{C}_A$中两两不同构的简单对象。此外，$\in \mathcal{C}_A$ 截至深度 *3* 的融合图为：



特别地，我们有 End 的维数$\mathcal{C}_A(\ ^{\otimes 3}) = 24$。

证明。 由命题 3.5，我们回忆

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} ((\square, \square) \to A) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} ((\square, \square) \to A) = 1.$$

与所引用命题的证明中一样，我们有

$$\dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square) = \dim \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\square \to \square) = 1.$$

这意味着在 $\mathcal{C}_A$ 中， 和是同构的简单对象，并且 $^{\otimes 2} \cong 2 \cdot$。 □

利用引理 3.6，我们得到 $\mathcal{C}_A$ 中深度 3 自由模 $\left\{ \ , \ , \ \right\}$ 之间同态空间维数的下表。

$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(X \to Y)$			
	1	1	1
	1	3	1
	1	1	1

由此可知， 和是同构的简单对象，并且分解为 $\oplus A \oplus B$，其中 { , A, B} 两两不同构。

利用自由模函子是幺半函子这一点，我们计算 $\mathcal{C}_A$ 中的融合

$$\square \otimes \square \cong \square\square \oplus \square\square \cong 2 \cdot \square\square \oplus A \oplus B.$$

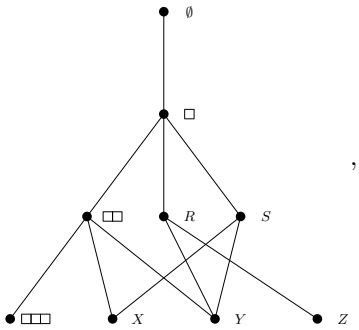
因此，直到深度 3 的融合图如定理陈述所示。 □

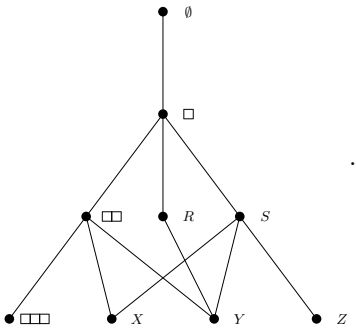
$k = N \pm 2$ 的类似定理遵循相同的证明思路。唯一的区别在于，现在我们有多个与通过自由模函子得到的自由模的分解规则相容的融合图。

定理 3.10. 设 $N \in \mathbb{N}_{\geq 7} - \{10\}$，设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 *1*-超传递 `*etale* 代数，并假设 $k = N - 2$。那么自由模有如下简单分解：

$$\square\square \cong R \oplus S$$
$$\square\square\square \cong X \oplus Y$$
$$\square\square\square \cong Y \oplus Z$$

其中 $\{\square\square, \square\square\square, R, S, X, Y, Z\}$ 是 $\mathcal{C}_A$ 中两两不同构的简单对象。此外，利用完自由对称性 $R \leftrightarrow S$ 后，$\in \mathcal{C}_A$ 的融合图直到深度 *3* 的部分为以下两种情况之一：

$i)$, 

, or $ii)$, 

.

特别地，在这两种情况下，我们都有 维数 $\text{End}_{\mathcal{C}_A}(\square^{\otimes 3}) = 15$。

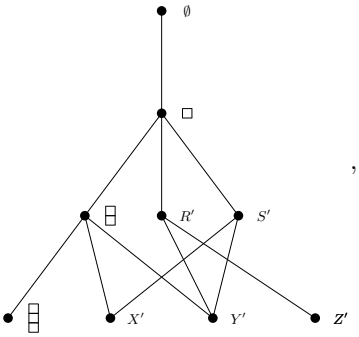
证明。 这与定理 3.9 的证明几乎完全相同。融合图有三种可能性，但其中一种与引理 3.3 不相容。□

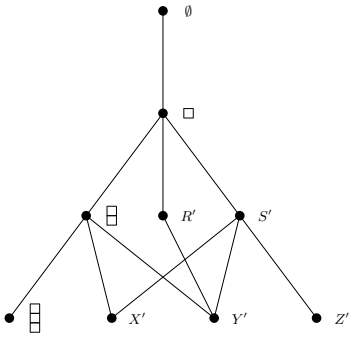
完全相同的思路也适用于剩下的情况。

定理 3.11。 设 $N \in \mathbb{N}_{\geq 7} - \{8\}$，设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 *1*-超传递 *Etale* 代数，并且假设 $k = N + 2$。那么，我们有以下自由模的简单分解：

$$\square\square \cong R' \oplus S'$$
$$\square\square\square \cong X' \oplus Y'$$
$$\square\square\square \cong Y' \oplus Z'$$

其中 $\left\{\square\square, \square\square\square, R', S', X', Y', Z'\right\}$ 是 $\mathcal{C}_A$ 中两两不同构的简单对象。此外，利用完自由对称性 $R' \leftrightarrow S'$ 后，$\in \mathcal{C}_A$ 的融合图直到深度 *3* 的部分为以下两种情况之一：

$i)$, 

, or $ii)$, 

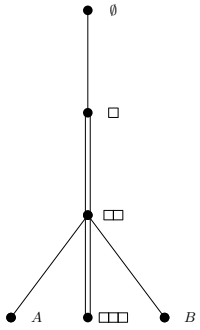
.

特别是在这两种情况下，我们都有 $\dim\text{End}_{\mathcal{C}_A}(\square^{\otimes 3}) = 15$。

证明。 与定理 3.10 几乎完全相同 □

4. The case of $k = N$

本节的主要目标是对 $k = N$ 中的 1-超传递 `étale 代数 $A \in \mathcal{C}$ 进行分类。我们回顾一下，在这种情况下，$\in \mathcal{C}_A$ 的融合图截至深度 3 为：

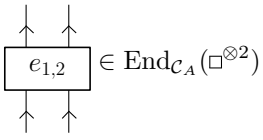


仅凭这些信息，我们就可以推导出存在一个忠实占优幺半函子

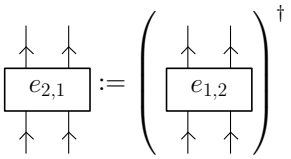
$$\overline{\mathcal{SE}_N} \to \mathcal{C}_A$$

其中， $\mathcal{SE}_N$ 是定义 2.7 中的张量范畴。有了这个函子，对 A 的分类便可采用标准方法完成。

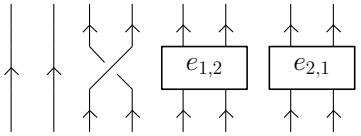
4.1. 初始关系。 由融合图和定理 3.9 可知，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 2}) \cong M_2(\mathbb{C})$，并且极小投影 $p\ , p\ \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\ ^{\otimes 2})$ $= H_2(q)$ 在 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 2})$ 中仍然是极小的，但现在彼此同构。令

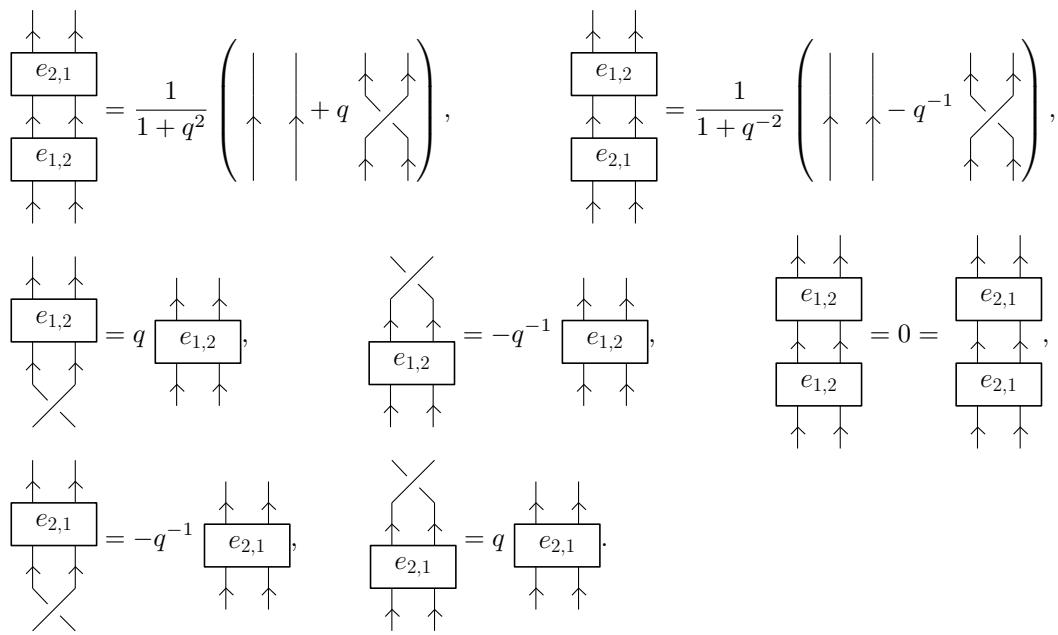


是一个酉同构 $p\ \to p$，并定义

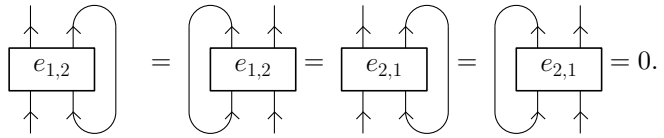


由此可得，$\{e_{1,1} := p,\ e_{2,2} := p,\ e_{1,2},\ e_{2,1}\}$ 是 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 2})$ 的一组矩阵单位。特别地将其转换为辫子基后，我们得到以下关系 $\left\{ \ ,\ ,\ , \ \right\}$。

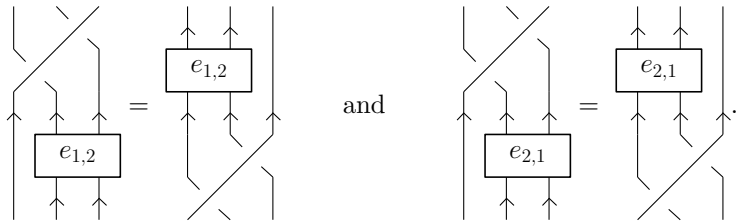




由于 $e_{1,2}$ 和 $e_{2,1}$ 是幂零的，而 $\mathcal{C}_A$ 是半单的，因此这些元素的迹为零（因为 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 2}) \cong M_2(\mathbb{C})$ 上的范畴迹等于标准矩阵迹乘以一个标量）。因此我们得到偏迹关系：



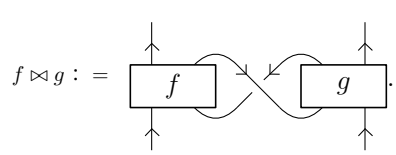
由引理 2.4，我们还得到半编织型关系



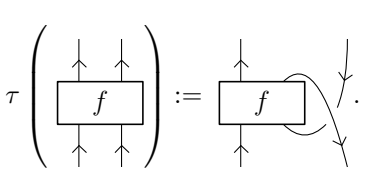
最后，在上述关系中，$U(1)$ 具有 $e_{1,2}$ 的规范自由度，因此我们可以自由地用一个模一标量重新缩放 $e_{1,2}$。

4.2. 卷积乘积。 为了确定 $\mathcal{C}_A$ 中更复杂的关系，我们将研究 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 2})$ 上的卷积乘积。定义如下。

定义 4.1。 对于 $f,\ g \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 2})$，我们通过以下方式定义 $f \bowtie g \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 2})$：

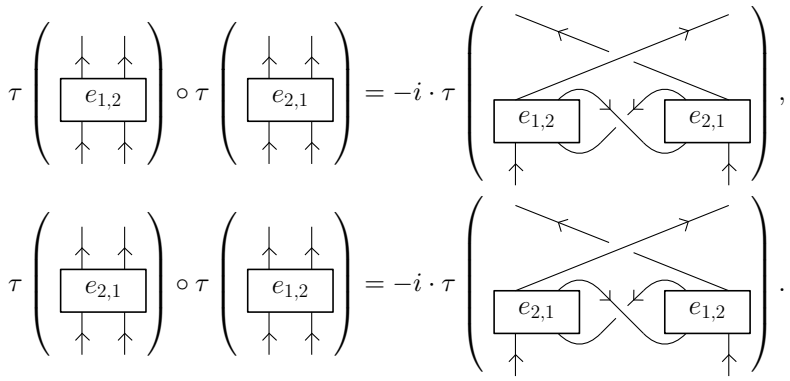


由此可知，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square^{\otimes 2})$ 在运算 $\bowtie$ 下构成一个结合代数。事实证明，卷积乘积与空间 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square \otimes \square^*)$ 上的标准复合密切相关。为使这一点更加明确，我们通过以下方式定义同构 $\tau\colon \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square^{\otimes 2}) \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square \otimes \square^*)$

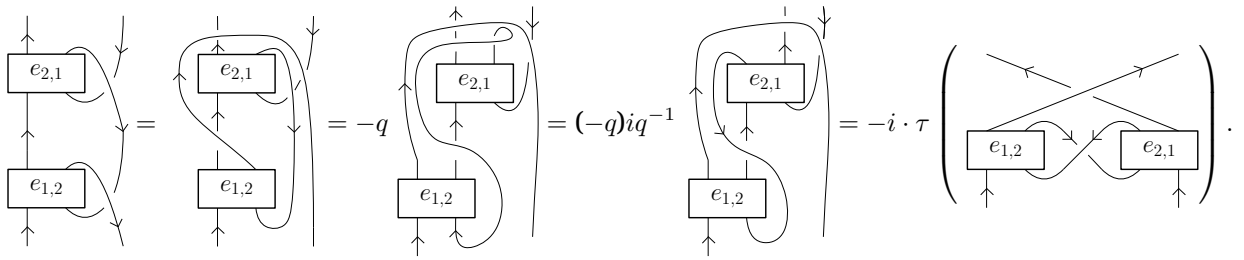


于是我们得到如下结果。

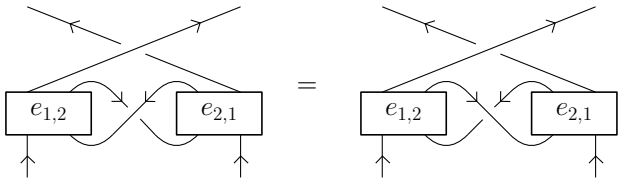
引理 4.2. 我们有



证明。 我们计算 $\tau(e_{1,2}) \circ \tau(e_{2,1})$，得到



第一个结论于是可得



这是由 Hecke 关系和偏迹关系得到的。

第二个等式的证明几乎完全相同。 □

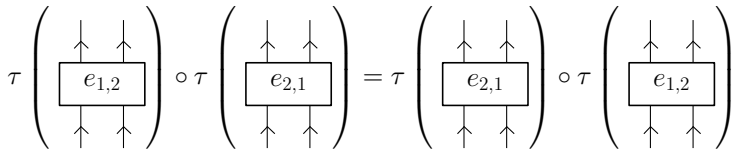
这特别意味着 $\bowtie$ 运算满足以下交换性。更一般地说，$\bowtie$ 具有交换性，这一结果实际上成立，但我们不需要这个更强的结论。

推论 4.3。我们有

$$e_{1,2} \bowtie e_{2,1} = e_{2,1} \bowtie e_{1,2}.$$

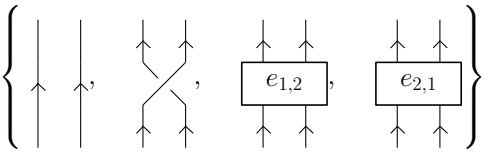
证明。 由于 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square^{\otimes 2})$ 是 4 维的，我们还可得 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square \otimes \square^*)$ 是 4 维的。我们知道 $\mathbf{1}$ 是 $\square \otimes \square^*$ 的秩一直和项。因此，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square \otimes \square^*)$ 包含一个同构于 $\mathcal{C}$ 的子代数。由此可得

$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square \otimes \square^*)$ 同构于 $\mathbb{C}^4$，因此是交换的。特别地

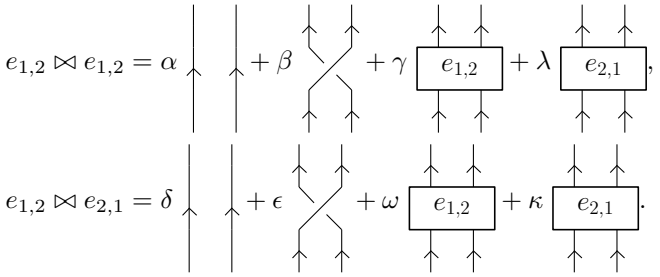


由此可得结论，这由引理 4.2 推出。 □

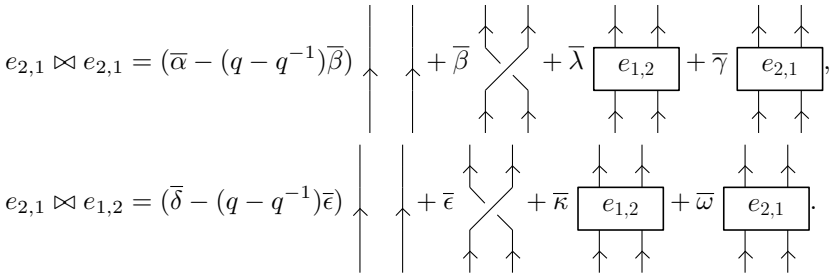
由于 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square^{\otimes 2})$ 以以下元素为基



因此，相对于这个基，我们有 $\bowtie$ 的结构常数。令 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda,\ \delta,\ \epsilon,\ \omega,\ \kappa \in \mathbb{C}$ 为结构常数：



取伴随后得到



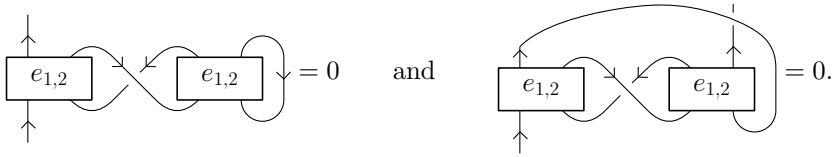
特别地，由推论 4.3 可知 $\kappa = \omega$。

我们利用 $e_{1,\ 2}$ 中的规范自由度，使得 $\lambda \geq 0$。

引理 4.4. 我们有

$$\alpha = \beta = 0, \qquad \delta = -\frac{q-q^{-1}}{(q+q^{-1})^2} \qquad \epsilon = \frac{2}{(q+q^{-1})^2} \qquad \omega = \overline{\gamma}, \quad \textit{and} \quad \lambda^2 = \frac{2}{(q+q^{-1})^2} + |\gamma|^2.$$

证明。 我们首先计算

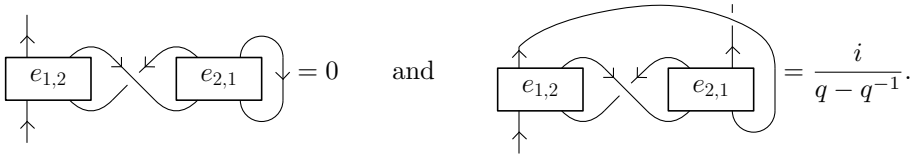


这给出了方程

$$\alpha\frac{2i}{q-q^{-1}} + \beta i = 0 \qquad \text{and} \qquad \alpha i + \beta\left(\frac{2i}{q-q^{-1}} + i(q-q^{-1})\right) = 0.$$

对于 $q \neq \pm i$，该线性方程组有唯一解 $\alpha = \beta = 0$。

以同样的方式，我们计算



由此得到方程

$$\delta\frac{2i}{q-q^{-1}}+\epsilon i=0 \qquad \text{and} \qquad \delta i+\epsilon\left(\frac{2i}{q-q^{-1}}+i(q-q^{-1})\right)=\frac{i}{q-q^{-1}}$$

其唯一解为 $\delta=-\frac{q-q^{-1}}{(q+q^{-1})^2}$ 和 $\epsilon=\frac{2}{(q+q^{-1})^2}$，若 $q\neq\pm i$。

现在我们利用 $\bowtie$的结合律来计算

$$\begin{aligned}(e_{1,2}\bowtie e_{1,2})\bowtie e_{2,1} &= \gamma\cdot e_{1,2}\bowtie e_{2,1}+\lambda\cdot e_{2,1}\bowtie e_{2,1}\\ &= \gamma(\delta\ \big|\ \big|\ +\epsilon\ \times\ +\omega e_{1,2}+\overline{\omega}e_{2,1})+\lambda(\lambda e_{1,2}+\overline{\gamma}e_{2,1})\\ &= -\gamma\frac{q-q^{-1}}{(q+q^{-1})^2}\ \cap\ +\gamma\frac{2}{(q+q^{-1})^2}\ \cup\ +(\gamma\omega+\lambda^2)e_{1,2}+(\gamma\overline{\omega}+\lambda\overline{\gamma})e_{2,1},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}e_{1,2}\bowtie(e_{1,2}\bowtie e_{2,1}) &= \delta\cdot e_{1,2}\bowtie\ \big|\ \big|\ +\epsilon\cdot e_{1,2}\bowtie\ \times\ +\omega\cdot e_{1,2}\bowtie e_{1,2}+\overline{\omega}\cdot e_{1,2}\bowtie e_{2,1}\\ &= \epsilon\cdot e_{1,2}+\omega(\gamma e_{1,2}+\lambda e_{2,1})+\overline{\omega}(\delta\ \big|\ \big|\ +\epsilon\ \cap\ +\omega e_{1,2}+\overline{\omega}e_{2,1})\\ &= \overline{\omega}\frac{q^{-1}-q}{(q+q^{-1})^2}\ \cap\ +\frac{2\cdot\overline{\omega}}{(q+q^{-1})^2}\ \cup\ +\left(\frac{2}{(q+q^{-1})^2}+\omega(\gamma+\overline{\omega})\right)e_{1,2}+(\omega\lambda+\overline{\omega}^2)e_{2,1}.\end{aligned}$$

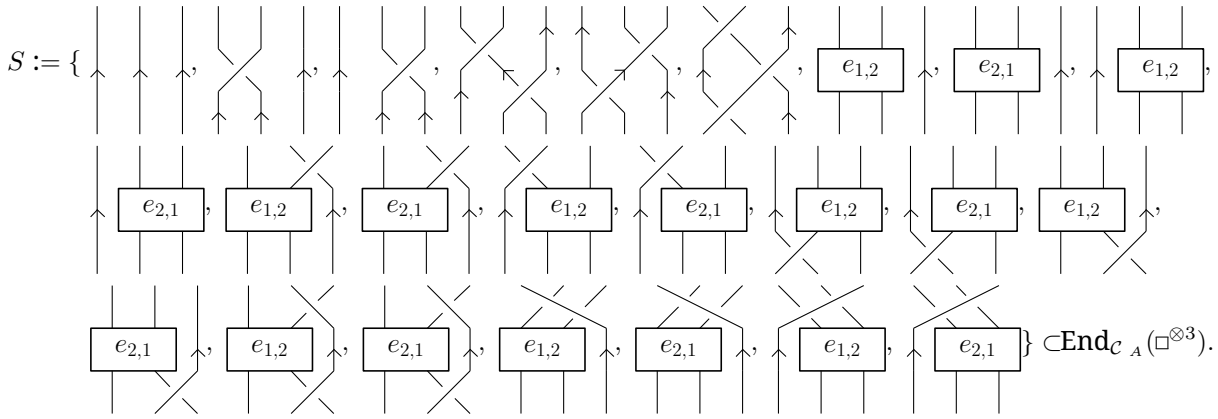
由此得到

$$\begin{aligned}\omega &= \overline{\gamma}\\ \lambda^2 &= \frac{2}{(q+q^{-1})^2}+|\gamma|^2.\end{aligned}$$

□

4.3. End( ) 的基。为了确定自由系数 γ，我们需要研究代数 End$_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 3})$。回想定理 3.9，该代数是 24 维的。我们先求出这个代数的一组基。

定义 4.5。我们定义



可以将 S 理解为 $e_{1,2}$ 和 $e_{2,1}$ 的“辫状环带推论”。有些出人意料的是，我们只需利用第 **4.1** 小节的关系，就能计算 S 中任意两个元素的内积。这使我们能够证明 S 是一组基。

引理 4.6。 我们有， S 是 $N \geq 4$ 的 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square^{\otimes 3})$ 的基。

证明。 我们计算 S 的内积矩阵如下：

$$\frac{1}{(q-q^{-1})^2}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & C \\ 0 & C^\dagger & D \end{bmatrix}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{8iq}{q^2-1} & -4i & -4i & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & -\frac{2i\left(q^4+1\right)}{q^2} \\ 4i & -\frac{8iq}{q^2-1} & \frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & -4i & -4i & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} \\ 4i & \frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & -\frac{8iq}{q^2-1} & -4i & -4i & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} \\ -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 4i & 4i & -\frac{8iq}{q^2-1} & \frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & -4i \\ -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 4i & 4i & \frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & -\frac{8iq}{q^2-1} & -4i \\ \frac{2i\left(q^4+1\right)}{q^2} & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 4i & 4i & -\frac{8iq}{q^2-1} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & 0 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & 0 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & 0 & 0 & -2i & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & 0 & 0 & -2i & 0 & -2i \\ 2i & 0 & 0 & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & -2iq & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & \frac{2i}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & \frac{2i}{q} & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 & -2iq & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 & -2iq & 0 & -2iq & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 & 0 & \frac{2i}{q} & 0 & \frac{2i}{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2i}{q} & 0 & \frac{2i}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2iq & 0 & -2iq \\ 0 & 0 & -2i & 0 & 2iq^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i & 0 & \frac{2i}{q^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & \frac{2i}{q^2}-2i & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 & 2i\left(q^2-1\right) & 0 & -2i \\ \frac{2i}{q} & 0 & -2i & 0 & \frac{2i}{q^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2iq & 0 & -2i & 0 & 2iq^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & 2i & 0 & 2i\left(q^2-1\right) & 0 & -2i & 0 \\ 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & 2i & 0 & \frac{2i}{q^2}-2i & 0 & -2i \\ -2i & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 0 & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 0 \\ 0 & -2i & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 0 & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} \\ 2i-\frac{2i}{q^2} & 0 & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & \frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 0 \\ 0 & -2i\left(q^2-1\right) & 0 & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 & \frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} \\ 2i & 0 & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 0 & \frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -\frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 0 & \frac{2i\left(q^2-1\right)}{q} & 0 & -\frac{4iq}{q^2-1} \end{bmatrix}$$

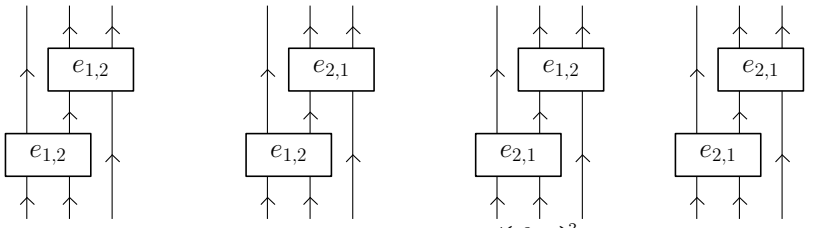
该矩阵的行列式为

$$17179869184\frac{q^{34}\left(q^2+1\right)^{18}\left(q^4+1\right)^2\left(q^4-q^2+1\right)^8}{(q-1)^{72}(q+1)^{72}}$$

因此，当 $q\notin\{0,i,-i,\zeta_8,\zeta_8^3,\zeta_8^5,\zeta_8^7,\zeta_{12},\zeta_{12}^5,\zeta_{12}^7,\zeta_{12}^{11}\}$ where $\zeta_\ell=e^{2\pi i\frac{1}{\ell}}$ 时，该矩阵是非奇异的。特别地，对于 $N\geq 4$， S 线性无关。由定理 3.9 可知，对于 $\dim\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\quad^{\otimes 3})=24$，因此 S 是一个基。□

有了基 S，我们现在可以计算 $\mathcal{C}_A$ 中更复杂的三股辫关系。这些关系将用卷积乘积的结构常数表示。

引理 4.7。 我们有以下关系：

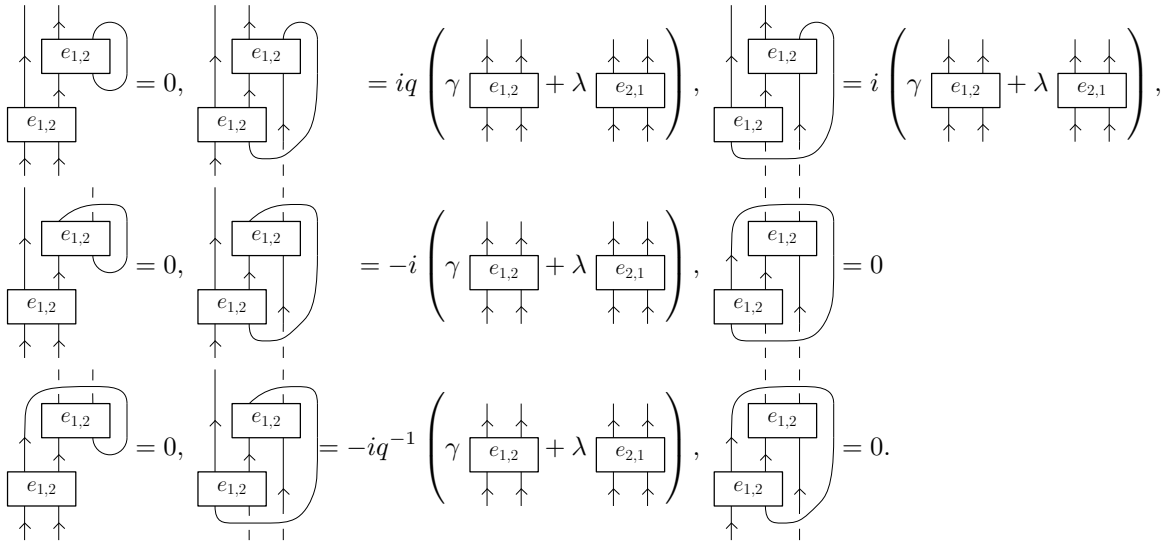


$$
\begin{bmatrix}
0 & q\left(\frac{2}{(q^2+1)^2(\,)}-\frac{1}{q^4+1}\right) & \frac{q^4(q^2-1)^2}{(q^2+1)^2(q^4+1)} & 0\\
0 & q\left(\frac{2}{q^2+1\ ^2(\,)}-\frac{1}{q^4+1}\right) & -\frac{q^3(q^2-1)^2}{(q^2+1)^2(q^4+1)} & 0\\
0 & \frac{2}{}-\frac{1}{q^4+1}\Big) & -\frac{q^3(q^2-1)^2}{(q^2+1)^2(q^4+1)} & 0\\
0 & \frac{1-q^2}{q^6+q^4+q^2+1} & \frac{q^4(q^2-1)}{q^6+q^4+q^2+1} & 0\\
0 & \frac{q^2(q^2-1)^2}{(q^2+1)^2(q^4+1)} & \frac{q^2(q^2-1)^2}{(q^2+1)^2(q^4+1)} & 0\\
0 & \frac{q-q^3}{q^6+q^4+q^2+1} & q\left(\frac{1}{q^4+1}-\frac{1}{q^2+1}\right) & 0\\
-\frac{\gamma q(q^2-1)^2}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{(q^2-1)^2\overline{\gamma}}{2(q^5-q^3+q)} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{q(q^2-1)^2\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{(q^2-1)^2\overline{\gamma}}{2(q^5-q^3+q)}\\
\frac{\gamma(q^2-1)^2}{2(q^5-q^3+q)} & 0 & -\frac{q(q^2-1)^2\gamma}{2(q^4-q^2+1)} & 0\\
0 & \frac{(q^2-1)^2\gamma}{2(q^5-q^3+q)} & 0 & -\frac{q(q^2-1)^2\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)}\\
\frac{\gamma(q^2-1)^2}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{(q^2-1)^2\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)} & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{(q^2-1)^2\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{(q^2-1)^2\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)}\\
-\frac{\gamma q^2(q^2-1)}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{\overline{\gamma}-q^2\overline{\gamma}}{2q^4-2q^2+2} & \frac{q^2(q^2-1)\gamma}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{(q^2-1)\lambda}{2q^2}\\
-\frac{1}{2}\lambda(q-1)(q+1) & -\frac{(q^2-1)\gamma}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{q^2(q^2-1)\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{(q^2-1)\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)}\\
\frac{\gamma(q^2-1)^2}{2(q^4-q^2+1)} & 0 & \frac{(q^2-1)^2\gamma}{2(q^4-q^2+1)} & 0\\
0 & \frac{(q^2-1)^2\gamma}{2(q^4-q^2+1)} & 0 & \frac{(q^2-1)^2\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)}\\
\frac{\gamma(q^2-1)}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{\overline{\gamma}-q^2\overline{\gamma}}{2q^4-2q^2+2} & \frac{q^2(q^2-1)\gamma}{2(q^4-q^2+1)} & -\frac{1}{2}\left(q^2-1\right)\lambda\\
\frac{\lambda(q^2-1)}{2q^2} & -\frac{(q^2-1)\gamma}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{q^2(q^2-1)\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)} & -\frac{q^2(q^2-1)\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)}\\
-\frac{\gamma q(q^2-1)}{2(q^4-q^2+1)} & -\frac{(q^2-1)\overline{\gamma}}{2(q^5-q^3+q)} & -\frac{q^3(q^2-1)\gamma}{2(q^4-q^2+1)} & -\frac{(q^2-1)\lambda}{2q}\\
-\frac{\lambda(q^2-1)}{2q} & -\frac{(q^2-1)\gamma}{2(q^5-q^3+q)} & -\frac{q^3(q^2-1)\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)} & -\frac{q(q^2-1)\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)}\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{\gamma q(q^2-1)}{2(q^4-q^2+1)} & -\frac{q(q^2-1)\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)} & -\frac{q(q^2-1)\gamma}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{(q^2-1)\lambda}{2q}\\
\frac{\lambda(q^2-1)}{2q} & -\frac{q(q^2-1)\gamma}{2(q^4-q^2+1)} & -\frac{q(q^2-1)\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)} & \frac{q(q^2-1)\overline{\gamma}}{2(q^4-q^2+1)}
\end{bmatrix}
$$

此处，列按基 S 的元素进行索引。

证明。 我们展示第一列的证明。其余三列遵循相同的思路。

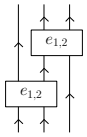
我们利用 $\mathcal{C}_A$ 第4.1和4.2小节中的关系进行如下计算。



另一方面，我们可以计算 S 中每个元素的这些部分迹。由于 S 是 End$\mathcal{C}_A(\ ^{\otimes 3})$ 的一组基，因此可以将其写成 S 中元素的线性组合。上述每个方程都会针对系数给出四个独立方程（对应 End$\mathcal{C}_A(\ ^{\otimes 2})$ 的每个基元素）。求解这 36 个方程，可得到引理陈述中的唯一解。

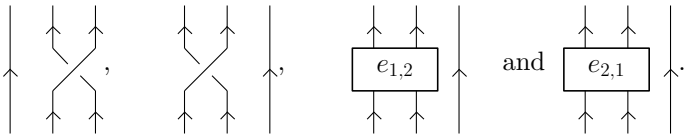


□



□

此时，写出 End$\mathcal{C}_A(\ ^{\otimes 3})$ 中各元素的显式矩阵表示会很有用 □



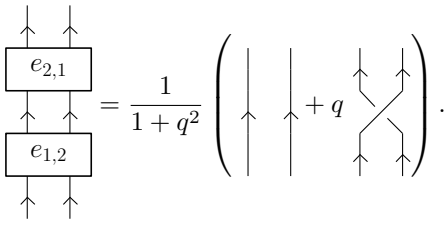
注意，通过半编织关系，这四个元素生成代数 End$\mathcal{C}_A(\ ^{\otimes 3})$ [3]。也就是说，对于这四个元素，我们给出了相对于基 S 在 End$\mathcal{C}_A(\ ^{\otimes 3})$ 上进行前复合的矩阵。这些 24 维矩阵见附录 A，也包含在随本文 arXiv 投稿附上的 Mathematica 文件中。在该 Mathematica 文件中，我们还纳入了本节后续使用矩阵表示进行的计算。注意，由于该表示是代数的正则表示，因此它是忠实的。虽然本节接下来的结果可以手工获得，但这些矩阵表示将允许我们在 End$\mathcal{C}_A(\ ^{\otimes 3})$ 中进行计算机辅助计算，其速度更快，且比人工计算更加准确。利用这一矩阵表示，我们现在可以确定卷积结构常数。 □

引理4.8. 我们有

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}i}{(q^2-q^{-2})\sqrt{q^2+q^{-2}}}, \qquad and \qquad \gamma = \frac{(q^2-1+q^{-2})\sqrt{2}i}{(q^2-q^{-2})\sqrt{q^2+q^{-2}}}.$$

[3]我们感谢 Hans Wenzl 提请我们注意这一点。

证明。 我们回顾关系



将该关系通过标准左嵌入映入 End$_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 3})$，并使用显式矩阵表示,□我们得到两个显式 24×24 矩阵相等。第 (9,13) 项给出等式

$$q\left(q^2-1\right)^2\left(q^2+1\right)\left(\gamma^2-\overline{\gamma}^2\right)=0.$$

这意味着 $\gamma^2=\gamma^2$。 $^-$

现在考察第 (7,9) 项，可得

$$q\left(q^2-1\right)\left(q^2\left(q^{10}+q^8-q^2-1\right)\overline{\gamma}^2+4\left(q^5-q^3+q\right)^2+\gamma^2(q-1)(q+1)\left(q^2-2\right)\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)\right)=0.$$

解此方程可得

$$\gamma=\pm\frac{(q^2-1+q^{-2})\sqrt{2}i}{(q^2-q^{-2})\sqrt{q^2+q^{-2}}}\in\mathbb{R}.$$

回顾方程

$$\lambda^2=\frac{2}{(q+q^{-1})^2}+|\gamma|^2$$

由引理 4.4 可得（回顾关于 λ的正规范选择）

$$\lambda=\frac{\sqrt{2}i}{(q^2-q^{-2})\sqrt{q^2+q^{-2}}}.$$

最后，我们考虑第 (14，9) 项，得到

$$\gamma\left(q^4-1\right)\left(\lambda\left(q^4-q^2+1\right)-q^2\overline{\gamma}\right)=0.$$

该方程只有在引理陈述中的解下才成立。

□

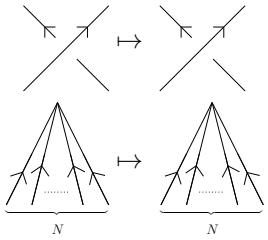
至此，我们已经明确确定了 $\mathcal{C}_A$ 中直到 3-盒空间为止的所有关系。虽然我们不会证明这一点，但这足以进行求值，因此由辫子和 2-盒矩阵单位生成的子范畴是唯一的。根据唯一性，该范畴必定是 $\mathcal{SE}_N$。相反，我们采取一种更具构造性的方法，明确构造一个从 $\mathcal{SE}_N$ 到 $\mathcal{C}_A$的函子。这种方法的一个好处是，我们可以对之前的计算进行合理性检查。

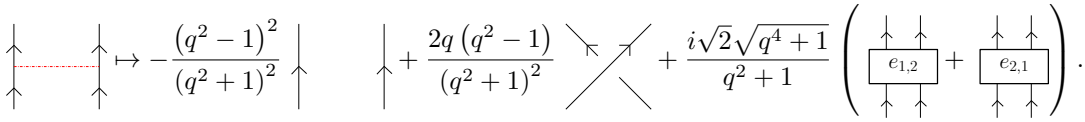
定理 4.9. 设 $A \in \mathcal{C}$ 是 *1*-超传递的，且令 $k = N$。则存在一个忠实占优幺半函子

$$\overline{\mathcal{SE}_N} \to \mathcal{C}_A$$

特别地， A 是代数 $A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}$的简单流扩张。

证明。我们定义函子 $\mathcal{F}$，它将 $+\mapsto \mathcal{F}_A(\ )$、$-\mapsto \mathcal{F}_A(\ ^*)$ 以及



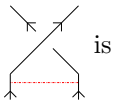


现在只需检验此函子保持 $\mathcal{SE}_N$ 的定义关系。虽然可以手动完成，但我们改用 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 3})$ 的显式矩阵表示。这样，计算机便可验证关系（交换）、（滑动）、（堆叠）和（对易）。我们在本文的 arXiv 投稿中附上了这项计算机验证。注意，（过编织）自动成立。我们只需手动检验的关系是偏迹关系。该映射像的右偏迹为



$$-\frac{(q^2-1)^2}{(q^2+1)^2}\frac{2i}{q-q^{-1}}+\frac{2q(q^2-1)}{(q^2+1)^2}i=0$$

如所需，而该映射像的右偏迹为



$$-\frac{(q^2-1)^2}{(q^2+1)^2}i+\frac{2q(q^2-1)}{(q^2+1)^2}\left(\frac{2i}{q-q^{-1}}+(q-q^{-1})i\right)=i$$

如所需。

由此可知，$\mathcal{F}$ 是一个主导幺半函子 $\mathcal{SE}_N\to\mathcal{C}_A$。由于 $\mathcal{C}_A$ 是酉的，因此 $\mathcal{F}$ 下降为忠实主导幺半函子

$$\overline{\mathcal{SE}_N}\to\mathcal{C}_A.$$

由定理 2.8 可知，$\mathrm{Ab}(\mathcal{SE}_N)\simeq\mathcal{C}_{\overline{A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}}}$。如 [EMS25 定理 4.17], 的证明所示，这意味着 $A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}$ 是 A 的一个 étale 子代数。根据 [DMNO13 第 3 节 .6]，$A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}$ 的 étale 代数扩张与 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ N)^{A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}}$ 中的 étale 代数之间存在双射。根据 [KO02 定理 5.2]，存在一个辫化等价 $\mathcal{C}(\mathfrak{sl}_N,\ N)_{A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}}\cong\mathcal{C}(\mathfrak{so}_{N^2-1},1)$。该范畴要么等价于伊辛范畴，要么是 pointed 范畴。无论哪种情况，这些范畴中的所有 étale 代数都是 pointed 的。因此，A 是 $A_{\mathfrak{so}_{N^2-1}}$ 的一个简单流扩张。□

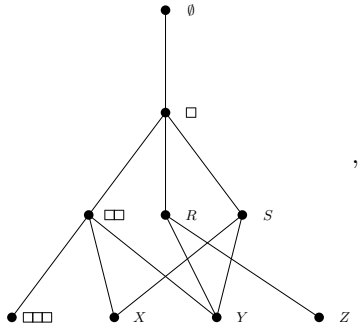
5. Classification in the case of $k=N\pm 2$

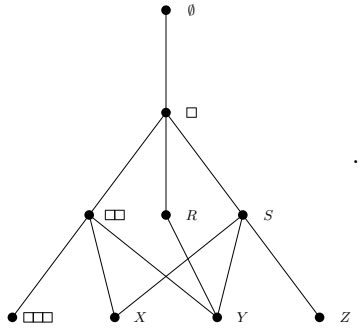
本节讨论 $k=N\pm 2$ 的情形。由于这两种情形互为层级-秩对偶，我们将详细证明 $k=N-2$ 情形，并将 $k=N+2$ 情形留给读者（只需转置所有杨图，并将投影上的辫群作用替换为 q，而非 $-q^{-1}$）。

设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 1-超传递 `etale 代数，并令 $k=N-2$。我们的目标是对 A 进行分类，方法是证明存在一个忠实的本质满函子

$$\overline{\mathcal{SD}_N^-}\to\mathcal{C}_A.$$

我们回顾 T 中　定理 3.10 表明，$\mathcal{C}_A$ 的融合图在深度 3 以内有两种情形。这些情形　　e

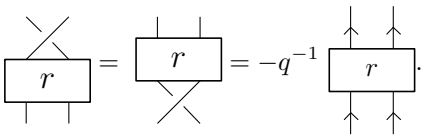
$i)$,　　 

,　　or　　$ii)$,　　 

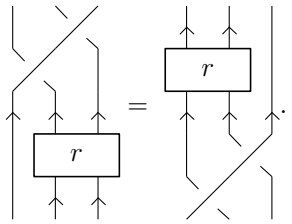
.

这两种情况我们将分别处理。对于情况 i)，我们将采用与第 4 节类似的技巧导出矛盾，从而排除这个融合图。

5.1. **初始关系**。 在分别讨论这两种情况之前，我们可以先找出一些一般性的基本关系。设r 是 End$_{\mathcal{C}_A}$($^{\otimes 2}$) 中投影到 R 上的唯一最小中心投影。由于 R 是p 的极小中心子投影，因此我们有如下关系
□



此外，由 [EMS25] 可得半编织关系

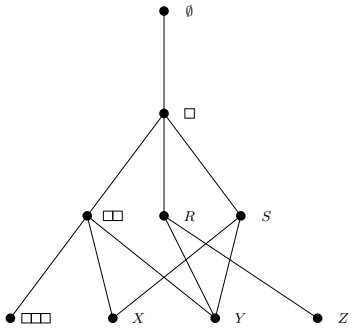


方便起见，我们回顾一下，在这种情况下 $q^N = i \cdot q$。设 d_R 表示 dim(R)，并设

$$d_{\square} := \dim(\square) = i\frac{q+q^{-1}}{q-q^{-1}}.$$

我们回顾一下，□ 在 $\mathcal{C}_A$ 中直到深度三的融合图有两种可能。要得到更多关系，我们必须详细分析每种情况。

5.2. **情形 i)**。 我们回顾一下，在这种情形下，$\mathcal{C}_A$ 的融合图截至深度三为 i　　s



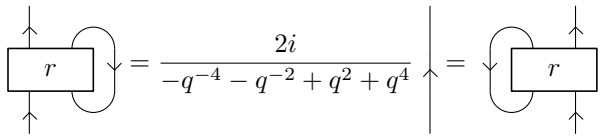
从 t　由此我们得到两个最终将导致矛盾的事实。首先是　　t

$$R \otimes \square \cong Y \oplus Z \cong \square\square.$$

特别是，这意味着

$$d_R = \frac{\dim\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\right)}{d_\square} = \frac{2}{-q^{-4}+q^{-2}+q^2-q^4},$$

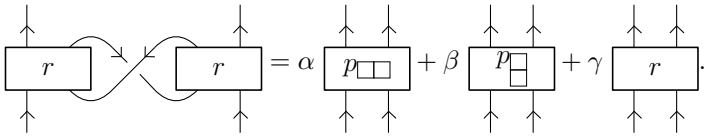
因此我们得到偏迹关系



第二个事实是

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(R\otimes\square \to \square\square\otimes\square) = 1.$$

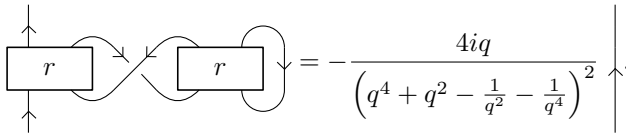
我们首先研究 r 与自身的卷积乘积。为简化计算，我们将使用基 $\left\{p_{\square\square},\ p_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}},\ r\right\}$ 作为 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(+^{\otimes 2})$ 的基。由此可知，存在标量 α、β、$\gamma\in\mathbb{C}$，使得



引理 5.1。 我们有 $\gamma\in\mathbb{R}$，并且

$$\alpha = -\frac{2q^5\left(q^4+q^2-1\right)}{\left(q^2-1\right)\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+q^2+1\right)^2}$$
$$\beta = \frac{q^2\left(q\left(q^8-q^6-2q^4+q^2-1\right)-\gamma\left(q^2+1\right)^2\left(q^6-1\right)\right)}{\left(q^2-1\right)\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+q^2+1\right)^2}.$$

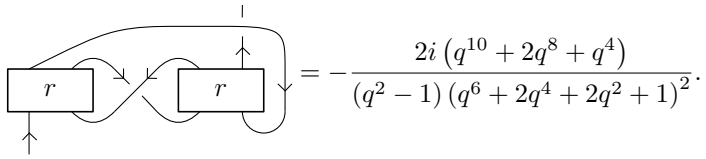
证明。 我们计算



因此

$$-\frac{4iq}{\left(q^4+q^2-\frac{1}{q^2}-\frac{1}{q^4}\right)^2} = \alpha\frac{\dim(\square\square)}{d_\square} + \beta\frac{\dim\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\right)}{d_\square} + \gamma\frac{2i}{-q^{-4}-q^{-2}+q^2+q^4}$$
$$= \frac{i\left(2\gamma q^4+\left(q^4+q^2+1\right)\left(\alpha+\alpha q^4+2\beta q^2\right)\right)}{q^8+q^6-q^2-1}.$$

我们还计算了

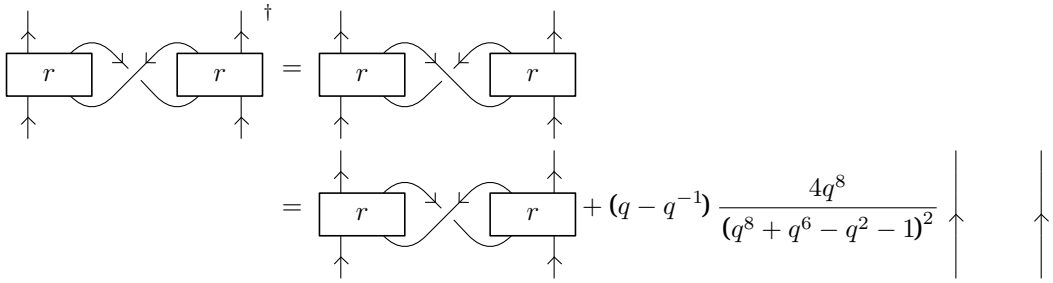


Thus

$$-\frac{2i\left(q^{10}+2q^8+q^4\right)}{\left(q^2-1\right)\left(q^6+2q^4+2q^2+1\right)^2} = \alpha q\frac{\dim(\square\square)}{d_\square} - \beta q^{-1}\frac{\dim\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\right)}{d_\square} - \gamma q^{-1}\frac{2i}{-q^{-4}-q^{-2}+q^2+q^4}$$
$$= \frac{i\left(\left(q^5+q^3+q\right)\left(\alpha-2\beta+\alpha q^4\right)-2\gamma q^3\right)}{q^8+q^6-q^2-1}.$$

求解这个线性方程组可得 α 和 β 的解，正如引理中所述。

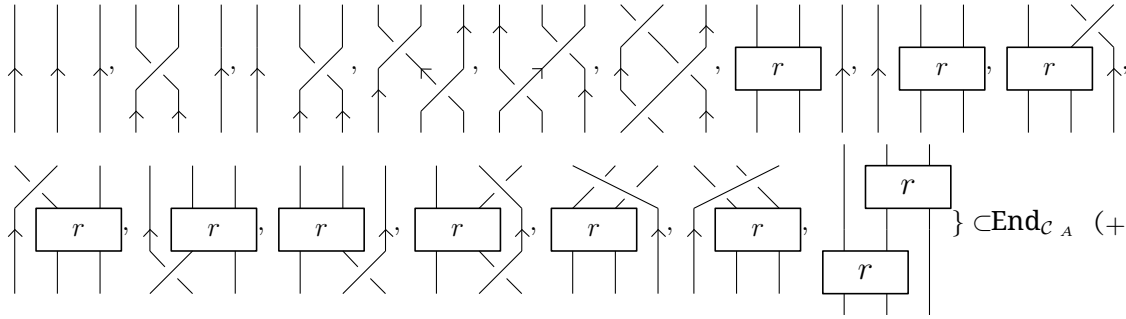
取伴随后得到



这意味着 $\gamma = \gamma_{\circ}$ $\square$

与 $k = N$ 情形一样，我们将研究 End$\mathcal{C}_A(\ ^{\otimes 3})$，以确定 γ。根据定理 5.5，该空间是 15 维的。

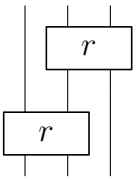
定义 5.2。我们定义

$S :=$ {  } $\subset \mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(+^{\otimes 3})$。

注意，这个集合张成了 End$\mathcal{C}_A(\ ^{\otimes 3})$的一个超集，因此这些元素之间必定存在线性关系。利用已知关系，我们可以计算 S 中任意两个元素的内积。这一计算得到一个定义在 $\mathbb{C}(q, \gamma)$ 上的 16×16 矩阵，规模太大，无法在此列出。该矩阵及后续计算可在本文 arXiv 投稿所附的 Mathematica 文件中找到。由这个内积矩阵可得如下结果。

引理 5.3。我们有，S 的前 *15* 个元素构成 $N \geq 5$ 上的 End$\mathcal{C}_A(\ ^{\otimes 3})$ 的一组基。此外，对于 $N \geq 5$，我们有 γ 是其中之一

$$\gamma_{\pm} := i\frac{\pm q^3 + 2iq - 2iq^{-1} \pm q^{-3}}{q^4 + q^2 - q^{-2} - q^{-4}}.$$

对于 γ 的这两个解，我们有元素  可以相对于.....的基写成

S 的前 *15* 个元素为

$$\frac{1}{q^3+2q+2q^{-1}+q^{-3}}\begin{bmatrix}\frac{(1+i)q^3\left(iq^4+q^2-1\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ \frac{(1+i)\left(-iq^6-q^4+q^2\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ \frac{(1+i)\left(-iq^6-q^4+q^2\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ \frac{(1+i)\left(q^3+iq^5\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ \frac{(1+i)q\left(iq^4+q^2-1\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ \frac{(1-i)q^2\left(q^2-i\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ \frac{(1-i)q^4+(1+i)}{2q}\\ \frac{(1-i)q^4+(1+i)}{2q}\\ -\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(q^4+i\right)}{q^2}\\ i\\ -\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(q^4+i\right)}{q^2}\\ i\\ -iq\\ \frac{1}{q}-q\\ -\frac{i}{q}\end{bmatrix} \quad and \quad \frac{1}{q^3+2q+2q^{-1}+q^{-3}}\begin{bmatrix}-\frac{(1+i)q^3\left(q^4+iq^2-i\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ \frac{(1+i)q^2\left(q^4+iq^2-i\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ \frac{(1+i)q^2\left(q^4+iq^2-i\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ -\frac{(1+i)q^3\left(q^2+i\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ -\frac{(1+i)q\left(q^4+iq^2-i\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ \frac{(1+i)q^2\left(q^2+i\right)}{q^6+2q^4+2q^2+1}\\ \frac{(1+i)q^4+(1-i)}{2q}\\ \frac{(1+i)q^4+(1-i)}{2q}\\ -\frac{(1+i)q^4+(1-i)}{2q^2}\\ -i\\ -\frac{(1+i)q^4+(1-i)}{2q^2}\\ -i\\ iq\\ \frac{1}{q}-q\\ \frac{i}{q}\end{bmatrix}$$

分别对应解 γ_+ 和 γ_- 。

证明。我们 c 计算 S 中前 15 个元素的内积矩阵的行列式 as

$$\frac{262144iq^{28}\left(q^2+1\right)^{13}\left(q^4+1\right)^{14}\left(q^4-q^2+1\right)^6}{(q-1)^{45}(q+1)^{45}\left(q^2-q+1\right)^{18}\left(q^2+q+1\right)^{18}}.$$

该行列式仅当 $N \leq 4$ 时为零，因此可知，对于 $N \geq 5$， S 中前 15 个元素线性无关。由于我们知道 dim $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 3}) = 15$ ，故它们构成一组基。 □

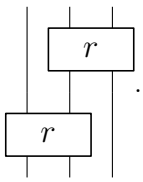
我们计算 S 中所有元素的内积矩阵的行列式，得到$524288q^{32}\left(q^2+1\right)^{12}\left(q^4+1\right)^{15}\left(q^4-q^2+1\right)^5\left(q^{14}+4q^{10}-6q^8+4q^6+q^2+\gamma^2\left(q^8+q^6-q^2-1\right)^2+4\gamma\left(q^{10}-q^6-q^4+1\right)q^3\right)$

$$\frac{}{(q^2-1)^{48}(q^4+q^2+1)^{22}}.$$

由于我们知道 dim $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(+^{\otimes 3}) = 15$ ，该矩阵必为奇异矩阵；若假设 $N \geq 5$ ，则必有

$$q^{14}+4q^{10}-6q^8+4q^6+q^2+\gamma^2\left(q^8+q^6-q^2-1\right)^2+4\gamma\left(q^{10}-q^6-q^4+1\right)q^3=0.$$

该方程有两个解，如引理陈述所示。对于这两个解中的每一个，我们接着计算内积矩阵的零空间，从而得到涉及该元素的关系



□

我们将 现在我们将看到，上述引理中得到的关系与

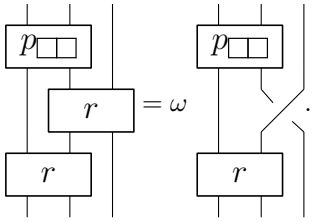
$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(R \otimes \square \to \square\square \otimes \square) = 1.$$

定理 5.4. 设 $A \in \mathcal{C}$ 是一个 *1*-超传递的 *Étale* 代数对象，设 $N \geq 5$，并设 $k = N - 2$。那么 $\in \mathcal{C}_A$ 在深度 *3* 以内的融合图不是图 *(i)*。

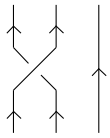
证明。 假设 $\in \mathcal{C}_A$ 的深度 3 融合图为图 (i)，那么我们得到引理 5.3 中所述的一个关系。此外，我们有

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(R \otimes \square \to \square\square \otimes \square) = 1.$$

这意味着存在一个标量 $\omega \in \mathbb{C}$，使得



为了简化该方程两边的计算，我们计算出相对于我们的基，通过辫子作用于 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\ ^{\otimes 3})$ 的顶层复合为



□

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & q-\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & q-\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q-\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 1-q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q+q^{-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -q+q^{-1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q-\frac{1}{q} & q-\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q-\frac{1}{q} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q}
\end{pmatrix}$$

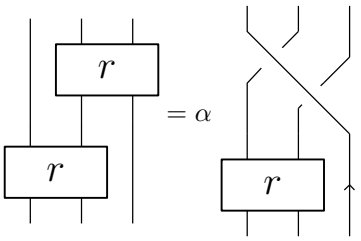
利用与 $\gamma = \gamma_+$ 对应的引理 5.3 中的关系，我们得到等式

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(1+i)q^5}{(q^2+1)^3(q^4+q^2+1)^2} \\ \frac{(1+i)q^6}{(q^2+1)^3(q^4+q^2+1)^2} \\ -\frac{(1+i)q^4}{(q^2+1)^3(q^4+q^2+1)^2} \\ -\frac{(1+i)q^5}{(q^2+1)^3(q^4+q^2+1)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)q^2(q^2-1)\left(q^4+(1+i)q^2-1\right)} - \\ \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(q^6+q^2\right)}{(q^2+1)^2(q^4+q^2+1)} \\ -\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)q^3\left(q^4+(1+i)q^2-1\right)}{(q^2+1)^2(q^4+q^2+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(q^5+q\right)} \\ \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(q^5+q\right)}{(q^2+1)^2(q^4+q^2+1)} \\ 0 \\ -\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(q^6+q^2\right)}{(q^2+1)\left(q^4+q^2+1\right)} \\ -\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)q^2\left(q^4+(1+i)q^2-1\right)}{(q^2+1)^2(q^4+q^2+1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\omega}{1+q^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q\left(q^2-1\right) \\ 0 \\ q^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

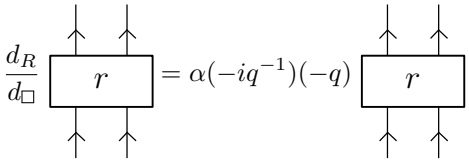
这给出 $q = 0$，因此我们得到了矛盾。对于对应于 $\gamma = \gamma_-$ 的关系，也会出现类似的矛盾。

□

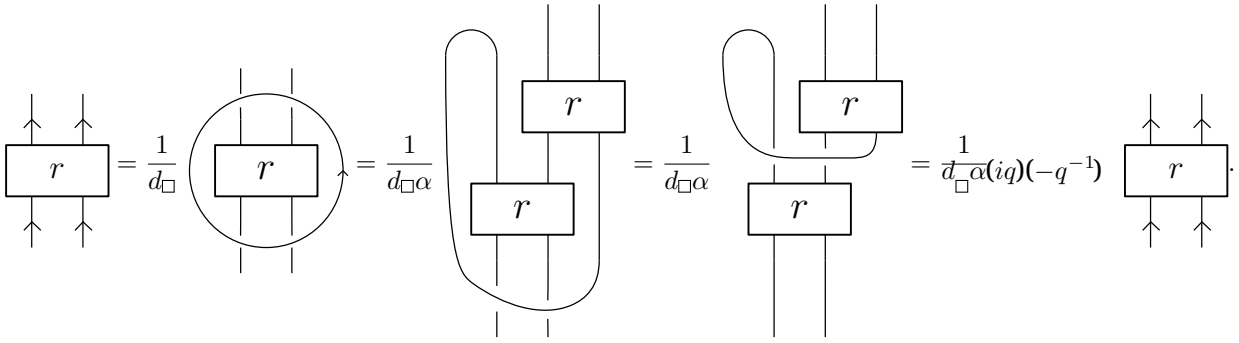
5.3. **情况 ii)**。由融合图以及引理 2.5 可知，在这种情况下，$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(R \otimes R \to R \otimes R) = 1$。结合半编织关系，这意味着存在如下形式的关系



对于某个 $\alpha \in \mathbb{C}$。取右偏迹，得到



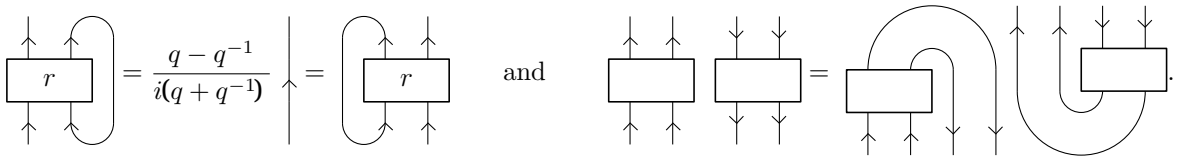
于是 $\alpha = -\frac{id_R}{d_{\square}}$ 另一方面，利用半编织关系（两次），我们计算得



$$= \frac{1}{d_{\square}} \qquad = \frac{1}{d_{\square}\alpha} \qquad = \frac{1}{d_{\square}\alpha} \qquad = \frac{1}{d_{\square}\alpha}(iq)(-q^{-1})$$

这表明 $\alpha = -\frac{i}{d_{\square}}$，因此 $d_R = 1$。特别地，这说明 R 是一个可逆对象。

因此我们得到以下关系：



$$= \frac{q-q^{-1}}{i(q+q^{-1})} \qquad =$$

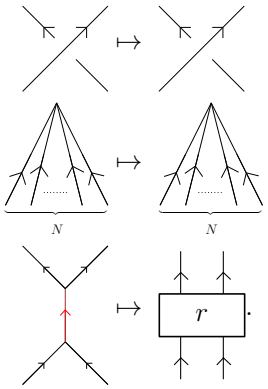
利用这些关系 $\mathcal{C}_A$，我们可以证明以下定理。

定理 5.5。设 $A \in \mathcal{C}$ 是 *1*-超传递的，且设 $k = N-2$。则存在一个忠实占优幺半函子

$$\overline{\mathcal{SD}_N^-} \to \mathcal{C}_A$$

特别地，A 是$A_{\mathfrak{sl}_{N(N-1)/2}}$的简单流扩张。

证明。我们定义函子 $\mathcal{F}$，它将 $+ \mapsto \mathcal{F}_A(\ )$、$- \mapsto \mathcal{F}_A(\ ^*)$ 和 □



由上述讨论可知，该函子保持 $\mathcal{SD}_N^-$ 的定义关系，因此是幺半的。由于 $\mathcal{C}_A$ 是酉的，该函子可下降为定理陈述中的忠实占优幺半函子。现在，要证明 A 是 $A_{\mathfrak{sl}_{N(N-1)/2}}$ 的简单流扩张，基本上只需逐字照搬定理 4.9 证明的最后一段。□

如本节开头所述，$k = N+2$ 的情形几乎完全相同。本文 arXiv 投稿附有此情形下集合 S 的 16×16 内积矩阵，以及针对情形 i) 推导出类似矛盾的过程。对于情形 ii)，论证基本上完全相同。由此得到以下定理。

定理 5.6. 设 $A \in \mathcal{C}$ 是 *1*-超传递的，且 $k = N + 2$。则存在一个忠实占优幺半函子

$$\overline{\mathcal{SD}_N^+} \to \mathcal{C}_A$$

特别地， A 是 $A_{\mathfrak{sl}_{N(N+1)/2}}$的简单流扩张。

References

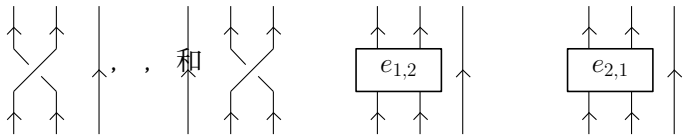
[AP95] Henning Haahr Andersen 和 Jan Paradowski。源自半单李代数的融合范畴。*Comm. Math. Phys.* 169 3 563 588, 1995 , ( ): –。[

BK01] Bojko Bakalov 和 Alexander Kirillov, Jr. *Lectures on tensor categories and modular functors*, *University Lecture Series*第 21 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001 年。[CEM23] Daniel Copeland 和 Cain Edie-Michell。Rep($U_q(\mathfrak{sl}_N)$) 模范畴的胞系统，2023 年。[CGGH23] Sebastiano Carpi、Tiziano Gaudio、Luca Giorgetti 和 Robin Hillier。 C^*-张量范畴中的单倍代数与 Schellekens 列表。 *Comm. Math. Phys.*，402(1):169–212，2023 年。[DLM96] Chongying Dong、Haisheng Li 和 Geoffrey Mason。顶点算子代数的单流与扩张。*Comm. Math. Phys.*，180(3):671–707，1996 年。[DMNO13] Alexei Davydov、Michael M¨uger、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。非退化编织融合范畴的 Witt 群。 *J. Reine Angew. Math.*，677:135–177，2013 年。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。*Tensor categories* 205 *Mathematical* , *Surveys and Monographs* 2015 *University Lecture Series*第 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州， [2022] 。[EMG25] Cain Edie-Michell 和 Terry Gannon。 $\mathfrak{sl}_N$ *II*的 A 型量子子群：分类，2025 年。[EMS25] Cain Edie-Michell 和 Noah Snyder。共形嵌入的插值范畴，2025 年。[EO22] Pavel Etingof 和 Victor Ostrik。关于张量范畴的半单化。载于 *Representation theory and algebraic geometry—a conference celebrating the birthdays of Sasha Beilinson and Victor Ginzburg* , Trends Math.，第 3–35 页。Birkh¨auser/Springer，沙姆， [2022] ©2022。[Fin96] Micheal Finkelberg。融合范畴的一个等价。 *Geom. Funct. Anal.*，6(2):249–267，1996 年。[FZ92] Igor B. Frenkel 和 Yongchang Zhu。与仿射代数和 Virasoro 代数表示相关的顶点算子代数。 *Duke Math. J.*，66(1):123–168，1992 年。[Gan23] Terry Gannon。仿射李代数顶点算子代数的异类量子子群与扩张——第一部分，2023 年。arXiv:2301.07287。[GJ07] Pinhas Grossman 和 Vaughan F. R. Jones。没有额外结构的中间子因子。*J. Amer. Math. Soc.* 20 1 219 265, 2007 , ( ): –。[

HKL15] Yi-Zhi Huang、Alexander Kirillov, Jr. 和 James Lepowsky。编织张量范畴与顶点算子代数的扩张。 *Comm. Math. Phys.*，337(3):1143–1159，2015 年。[Jon12] Vaughan F. R. Jones。平面代数中的二次缠结。 *Duke Math. J.*，161(12):2257–2295，2012 年。[KL93] D. Kazhdan 和 G. Lusztig。源自仿射李代数的张量结构。I、II。 *J. Amer. Math. Soc.*，6(4):905–947，949–1011，1993 年。[KMFPX15] Victor G. Kac、Pierluigi M¨oseneder Frajria、Paolo Papi 和 Feng Xu。共形嵌入与简单流扩张。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，2015(14):5229–5288，2015 年。[KO02] Alexander Kirillov, Jr. 和 Viktor Ostrik。 q类 McKay 对应以及 $\mathfrak{sl}_2$ 共形场论的 ADE 分类。 *Adv. Math.*，171(2):183–227，2002 年。[KW88] Victor G. Kac 和 Minoru Wakimoto。仿射代数表示论中的模不变性与共形不变性约束。 *Adv. in Math.*，70(2):156–236，1988 年。[KW93] David Kazhdan 和 Hans Wenzl。重构幺半范畴。载于 *I. M. Gelfand Seminar*，*Adv. Soviet Math.*第 16 卷，第 111–136 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993 年。[Liu15] Zhengwei Liu。Yang-Baxter 关系平面代数，2015 年。arXiv:1507.06030。[LL95] F. Levstein 和 J. I. Liberati。共形嵌入的分支规则。 *Comm. Math. Phys.*，173(1):1–16，1995 年。[Nik25] Dmitri Nikshych。私人通信，2025 年。[OS14] Victor Ostrik 和 Michael Sun。通过张量范畴实现能级-秩对偶。 *Comm. Math. Phys.*，326(1):49–61，2014 年。[Pag13] Pablo Gonzalez Pagotto。Hecke 代数的图解演算，2013 年。https://alistairsavage.ca/pubs/Pagotto- Hecke-graphical-calculus.pdf。[Saw06] Stephen F. Sawin。单位根处的量子群与模性。 *J. Knot Theory Ramifications*，15(10):1245–1277，2006 年。[Sch18] Andrew Schopieray。秩二例外量子子群的能级界。 *Internat. J. Math.*，29 5( ):1850034，33，2018 年。[Xu98] Feng Xu。共形嵌入产生的新编织端同态。 *Comm. Math. Phys.*，192(2):349–403，1998 年。[Xu07] Feng Xu。局部网的镜像扩张。 *Comm. Math. Phys.*，270(3):835–847，2007 年。

Appendix A. Matrix Representations

设 $k = N$，且 $A \in \mathcal{C}$ 是一个 1-超传递的 `étale 代数对象。在本附录中，我们列出这四个元素对应的矩阵



通过关于定义 4.5 中的基 S 在 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_A}(\square^{\otimes 3})$ 上进行前复合来作用。对于这两个辫元素，相应的矩阵分别为（其中我们记 $z = q - q^{-1}$）：

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -qz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q}
\end{bmatrix}$$

我们以分块形式给出的矩阵为$e_{1,\ 2}$

$$\begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{q^2+1} & 0 & \frac{2}{\left(q^2+1\right)^2} - \frac{1}{q^4+1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{q^2+1} & 0 & \frac{2q}{\left(q^2+1\right)^2} - \frac{q}{q^4+1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2q}{\left(q^2+1\right)^2} - \frac{q}{q^4+1} & 0 & \frac{1}{q^2+1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-q^2}{q^6+q^4+q^2+1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q^2\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & \frac{q}{q^2+1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q-q^3}{q^6+q^4+q^2+1} & 0 & 0 & 0 \\
1 & -\frac{1}{q} & 0 & 1-q^2 & 0 & q-\frac{1}{q} & 0 & 0 & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-2\right)\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma-\gamma q^2}{2q^4-2q^2+2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{1}{q^2}-1\right) \\
0 & 0 & 1 & q-\frac{1}{q} & -\frac{1}{q} & \frac{1}{q^2}-1 & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda\ (q-1)\ \ (q+1) & \frac{\gamma-\gamma q^2}{2q^4-2q^2+2} & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(q^2-1\right)^2}{2q} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q^2} & \frac{\gamma-\gamma q^2}{2q^4-2q^2+2} & 0 & 0 & \frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q} & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(q^2-1\right)^2}{2q^2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{\gamma-\gamma q^2}{2q^4-2q^2+2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q} & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda\left(q^2-1\right)
\end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix}
q\left(\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2}-\frac{1}{q^4+1}\right) & 0 & -\frac{\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^5+q\right)} & 0 & \frac{q\left(q^2-1\right)}{q^6+q^4+q^2+1} \\
\frac{q^2\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & \frac{1}{q^4+1}-\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2} & 0 & \frac{1}{q^2+1}-\frac{1}{q^4+1} \\
\frac{1-q^2}{q^6+q^4+q^2+1} & 0 & \frac{1}{q^4+1}-\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2} & 0 & \frac{2}{\left(q^2+1\right)^2}-\frac{1}{q^4+1} \\
-\frac{\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^5+q\right)} & 0 & \frac{q^2-1}{q^7+q^5+q^3+q} & 0 & q\left(\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2}-\frac{1}{q^4+1}\right) \\
\frac{q-q^3}{q^6+q^4+q^2+1} & 0 & q\left(\frac{1}{q^4+1}-\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2}\right) & 0 & q\left(\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2}-\frac{1}{q^4+1}\right) \\
\frac{1}{q^4+1}-\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2} & 0 & \frac{q^2-1}{q^6+q^4+q^2+1} & 0 & \frac{q^2\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} \\
-\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2q^2} & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & 0 & \frac{\gamma-\gamma q^2}{2q^4-2q^2+2} & -\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} \\
\frac{\gamma-\gamma q^2}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & \frac{1}{2}\lambda\left(q^2-1\right) & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q} & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & -\frac{1}{2}\lambda(q-1)q(q+1) & \frac{\gamma q^3\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
-\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
-\frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{1}{2}\lambda q\left(q^2-1\right) & \frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 \\
-\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q^3} & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
-\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & \frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q^2} & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & -\frac{1}{2}\lambda\left(q^2-1\right) & \frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\gamma-\gamma q^2}{2q^4-2q^2+2} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 \\
-\frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{1}{q^2}-1\right) & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)}
\end{bmatrix}$$

$$
C := \begin{bmatrix}
0 & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & \frac{1}{q^2}-\frac{2}{q^2+1} & 0 & \frac{1-q^2}{q^6+q^4+q^2+1} \\
0 & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & \frac{1-q^2}{q^3+q} & 0 & \frac{q-q^3}{q^6+q^4+q^2+1} \\
0 & \frac{q\left(q^2-1\right)}{q^6+q^4+q^2+1} & 0 & \frac{1-q^2}{q^3+q} & 0 & -\frac{\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^5+q\right)} \\
0 & \frac{2}{\left(q^2+1\right)^2}-\frac{1}{q^4+1} & 0 & \frac{1}{q^2+1} & 0 & \frac{1}{q^4+1}-\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2} \\
0 & \frac{1}{q^2+1}-\frac{1}{q^4+1} & 0 & \frac{2}{q^2+1}-1 & 0 & \frac{1}{q^4+1}-\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2} \\
0 & q\left(\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2}-\frac{1}{q^4+1}\right) & 0 & \frac{q}{q^2+1} & 0 & q\left(\frac{1}{q^4+1}-\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2}\right) \\
\frac{\gamma q\left(q^2-2\right)\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2q} & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^7-q^5+q^3\right)} \\
\frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q} & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q} & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
-\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{\gamma-\gamma q^2}{2q^4-2q^2+2} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{1}{2}\lambda\left(q^2-1\right)^2 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda\left(q^2-1\right) & -\frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} \\
\frac{1}{2}\lambda\left(q^2-1\right) & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda\left(q^2-1\right) & \frac{\gamma-\gamma q^2}{2q^4-2q^2+2} \\
\frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & 0 \\
-\frac{1}{2}\lambda\left(q^2-1\right) & \frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} \\
0 & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
\frac{\lambda\left(q^2-1\right)^2}{2q} & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & \frac{\lambda\left(q^2-1\right)}{2q} & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
-\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 \\
-\frac{1}{2}\lambda(q-1)q(q+1) & \frac{\gamma q^3\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^5-q^3+q\right)}
\end{bmatrix}
$$

类似地，我们给出分块形式下 $e_{2,\ 1}$ 的矩阵

$$
\begin{bmatrix} D & E & F \end{bmatrix}
$$

其中

$$D := \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\frac{1}{q^2}+1} & 0 & \frac{q^4\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{q}{q^2+1} & 0 & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & 0 & 0 & \frac{q^2\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & \frac{1}{\frac{1}{q^2}+1} & 0 & \frac{q^4\left(q^2-1\right)}{q^6+q^4+q^2+1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q^4\left(q^2-1\right)}{q^6+q^4+q^2+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{q^5\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q^2\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & -\frac{q}{q^2+1} & 0 & q\left(\frac{1}{q^4+1}-\frac{1}{q^2+1}\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q\left(\frac{1}{q^4+1}-\frac{1}{q^2+1}\right) & 0 & 0 & 0 & -\frac{q^4\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & q & 0 & 1-\frac{1}{q^2} & 0 & q-\frac{1}{q} & 0 & 0 & -\frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & -\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2q^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma q^4\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{q^4\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & q-\frac{1}{q} & q & q^2-1 & 0 & 0 & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma q^3\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{1}{2}\left(q^2-1\right)\lambda & 0 & 0 & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma q^3\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q} & 0 & 0 & -\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q} & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)}
\end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix}
0 & \frac{q^5\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & q\left(\frac{1}{q^2+1}-\frac{1}{q^4+1}\right) & 0 \\
0 & -\frac{q^4\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & \frac{1}{q^4+1}-\frac{1}{q^2+1} & 0 \\
0 & -\frac{q^4\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & \frac{q^4\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 \\
0 & \frac{q^5\left(q^2-1\right)}{q^6+q^4+q^2+1} & 0 & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 \\
0 & \frac{q^3\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 \\
0 & \frac{1}{q^2+1}+\frac{q^2}{q^4+1}-1 & 0 & \frac{q^2\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\left(q^2-1\right)^2\left(2q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} \\
\frac{1}{2}\left(q^2-1\right)\lambda & -\frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & -\frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^2} \\
\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q^4\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\left(q^2-1\right)^2\lambda}{2q^3} & \frac{\gamma q^3\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q} & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^3} \\
0 & \frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
-\frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q} & \frac{\gamma q\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & \frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^3} \\
-\frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & \frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q} & \frac{\gamma q^3\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{1}{2}q\left(q^2-1\right)\lambda & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 \\
-\frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & -\frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
-\frac{\left(q^2-1\right)^2\lambda}{2q^2} & -\frac{\gamma q^4\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{1}{2}\left(q^2-1\right)\lambda & \frac{\gamma-\gamma q^2}{2q^4-2q^2+2} & \frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^2} \\
0 & -\frac{q^4\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
-\frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^2} & -\frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{1}{2}\left(q^2-1\right)\lambda & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 \\
\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)}
\end{bmatrix}$$

$$F := \begin{bmatrix}
-\frac{q^2\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & q^2+\frac{2}{q^2+1}-2 & 0 & \frac{q^4\left(q^2-1\right)}{q^6+q^4+q^2+1} & 0 \\
q\left(\frac{2}{\left(q^2+1\right)^2}-\frac{1}{q^4+1}\right) & 0 & q\left(\frac{2}{q^2+1}-1\right) & 0 & q\left(\frac{1}{q^4+1}-\frac{1}{q^2+1}\right) & 0 \\
q\left(\frac{1}{q^2+1}-\frac{1}{q^4+1}\right) & 0 & q\left(\frac{2}{q^2+1}-1\right) & 0 & \frac{q^5\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 \\
\frac{q^4\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & \frac{1}{\frac{1}{q^2}+1} & 0 & -\frac{q^4\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 \\
\frac{1}{q^4+1}-\frac{1}{q^2+1} & 0 & 1-\frac{2}{q^2+1} & 0 & -\frac{q^4\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 \\
-\frac{q^3\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 & -\frac{q}{q^2+1} & 0 & \frac{q^3\left(q^2-1\right)^2}{\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2q^3} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\left(2q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^7-q^5+q^3\right)} & 0 & 0 & \frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} \\
\frac{\gamma q^3\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q} & 0 & 0 & -\frac{\gamma q^3\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q} \\
\frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & \frac{q^5\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^3\overline{\gamma}}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & 0 & 0 & -\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q^2\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^6-q^4+q^2\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\lambda}{2q^4} & 0 & 0 & \frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^2} \\
\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
-\frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^2} \\
-\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & -\frac{q^4\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\gamma-\gamma q^2}{2q^4-2q^2+2} & \frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^2} & 0 & 0 & -\frac{\gamma q^2\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 \\
\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{q^2\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
-\frac{\gamma\left(q^2-1\right)^3}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)^2\lambda}{2q^3} & 0 & 0 & -\frac{\gamma q\left(q^2-1\right)}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q} \\
-\frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & 0 & \frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & -\frac{q^3\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & \frac{\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & 0 & 0 & \frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} \\
\frac{\gamma\left(q^2-1\right)}{2\left(q^5-q^3+q\right)} & -\frac{\left(q^2-1\right)\lambda}{2q^3} & 0 & 0 & \frac{\gamma q\left(q^2-1\right)^2}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 \\
-\frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & \frac{q\left(q^2-1\right)\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)} & 0 & 0 & 0 & \frac{q\left(q^2-1\right)^2\overline{\gamma}}{2\left(q^4-q^2+1\right)}
\end{bmatrix}$$