arXiv:2601.11472v1 [math.CT] 16 Jan 2026

余单子方法处理预挠理论

ELENA CAVIGLIA、ZURAB JANELIDZE 和 LUCA MESITI

Abstract. 我们提出了一种针对半正合范畴上预挠理论的余单子方法，即研究带有闭理想的范畴，其中该闭理想由零态射组成，并且包含所有核和所有余核。我们首先证明，在具有自然选定的 1-胞的半正合范畴 2-范畴上，双遗传预挠理论在二维意义下是余单子性的。随后，我们扩展所构造的伪余单子，以保证所有预挠理论都是伪余代数。但有趣的是，并非所有伪余代数都是预挠理论。更确切地说，伪余代数给出了预挠理论的一个广义概念。

Contents

1. 引言2. 短正合序列的范畴 3. 双遗传预挠理论的 1
余单子 4. 广义预挠理论的余单子 参考文献 2
8
20
26

1. Introduction

遵循 [3], a预挠理论的框架：在范畴上 $\mathcal{C}$ 由一对（$\mathcal{T}$， $\mathcal{F}$）充满且饱和的子范畴组成，并满足以下公理。记

$$\mathcal{Z} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$$

这两个类的交集，并令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{C}$ 中所有可通过 $\mathcal{Z}$中的某个对象分解的态射所构成的理想。预挠理论的定义性质由此相对于该理想来表述。首先，这两个类之间的相互作用模 $\mathcal{N}$是平凡的：

(T1) 定义域属于 $\mathcal{T}$且余定义域属于 $\mathcal{F}$ 的任何态射都属于$\mathcal{N}$；等价地，每个这样的态射都可通过 $\mathcal{Z}$中的某个对象分解。

其次，环境范畴中的每个对象都关于（$\mathcal{T}$， $\mathcal{F}$）具有典范分解：

(T2) 对每个对象 $C \in \mathcal{C}$，都存在一个序列

$$T \longrightarrow C \longrightarrow F$$

也就是说，相对于理想 $\mathcal{N}$，它是短正合的： $T \to C$ 是$C \to F$ 的核；反过来， $C \to F$ 是 $T \to C$的余核。

这里的核和余核均指由 $\mathcal{N}$ 所确定的相对意义下的核和余核。这些概念已经相当标准且发展完善；有关详情，请参阅 [3]及其中的参考文献。

2020 数学主题分类。 18E40,18C15,18N10.关键词和短语。 扭理论、预扭理论、余单子、短正合列。1

预挠理论大幅拓展了阿贝尔范畴中扭理论这一经典概念，该概念最初由 [2]引入。文献中还出现了若干中间形式的推广（例如参见 [5, 3]）。 [3] 的主要成果之一是，预挠理论在一般性与结构性之间取得了平衡：尽管其公理基础极为精简，却能够推导出许多非平凡性质，同时还涵盖了广泛而多样的实例。

本文关注一类特殊的预挠理论：其底层范畴连同理想 $\mathcal{N}$ 构成 [4]意义下的半正合范畴。因此，我们讨论的是 [5], 所研究的扭理论范围；这一范围仍相当广泛，不过未涵盖 [3]中讨论的一些奇异例子。这些扭理论可以称为半正合范畴中的预挠理论，也可以简称为预挠理论。

尽管关于预挠理论的文献十分丰富，涵盖了各种不同的预挠理论子类型、大量例子、性质和刻画，但关于预挠理论范畴及其间适当函子的研究却知之甚少。我们的合作成果 [1] 是最早探讨如何为预挠理论构造适当范畴的论文之一。在该文中，我们提出了一种单子方法，用于刻画带基点范畴中的一类特殊扭理论；有趣的是，这类扭理论与半群理论中的矩形带密切相关。更确切地说，我们证明了矩形扭理论范畴——即那些使典范函子 $\mathbb{C} \to \mathcal{T} \times \mathcal{F}$ 成为范畴等价的扭理论（$\mathbb{C}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$）——等价于带基点范畴范畴上平方 2-单子的伪代数范畴。这一部分单子性结果引出了本文的主题：采用余单子方法研究范围广泛得多的一类预挠理论。

本文中，我们证明了预挠理论的两个不同的余单子性结果。第一个结果（定理 3.9）给出了半正合范畴及保持核与余核的函子所构成的 2-范畴上的一个伪余单子，其伪余代数恰好是双遗传预挠理论。第二个结果（定理 4.6）将该伪余单子扩展为半正合范畴及保持正合序列的函子所构成的 2-范畴上的一个伪余单子。我们证明，半正合范畴上的所有预挠理论都是这个扩展伪余单子的伪余代数。但有趣的是，某些伪余代数并非通常意义上的预挠理论。事实上，这些伪余代数给出了预挠理论的一种推广，我们计划在未来的工作中进一步研究。

记号 1.1. 每当我们对 2-单子或伪余单子使用伪余代数 这一术语时，指的都是正规伪余代数。

每当 $(\mathbb{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是一个预挠理论时，我们为 $\mathbb{C}$ 的每个对象固定选择一个与之关联的短正合列。

2. The category of short exact sequences

本节的内容和许多结果都可以直接从 [4], 得出，而这些结果的许多方面也可由更一般的结果推出（其中一些包含在[4]中）。不过，为求完整起见，我们仍将对它们进行详细阐述。

我们研究范畴 $\mathbb{C}$ 中短正合列所构成的范畴 $\mathsf{Ses}(\mathbb{C})$，其中 $\mathbb{C}$ 配备了一个零态射闭理想 $\mathcal{N}$。我们给出核与余核的一个实用刻画，并提供一种显式构造。借此，我们完整刻画并研究 $\mathsf{Ses}(\mathbb{C})$ 中的短正合列。

最后，我们在 Ses(𝕔) 上展示一种预挠理论，它将在后文对应于 $\mathbb{C}$ 上的余自由双遗传预扭理论。

本节的内容将为下一节中伪余单子的构造提供基本构件。

全文中， $\mathbb{C}$ 将是一个范畴，配备有一个由零态射构成的闭理想 $\mathcal{N}$ ，且具有所有 $\mathcal{N}$-核和 $\mathcal{N}$-余核。 $\mathbb{C}$ 中的短正合列范畴定义如下。

定义 2.1. 我们将 Ses(𝕔) 定义为由以下内容给出的范畴：**Ses() 的一个对象是：** $\mathbb{C}$中的一个短正合列；**Ses ()中的一个态射从** $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ **到** $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'$ **是：** 一个由u, v, w构成的三元组态射，

它们是 $\mathbb{C}$ 中的态射，使下图交换

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ X' & \xrightarrow[f']{} & Y' & \xrightarrow[g']{} & Z' \end{array}$$

复合与恒等态射随后通过在三元组的每个分量上使用 $\mathbb{C}$ 中的复合与恒等态射来定义。

注记 2.2. 在全文所有涉及短正合列态射的图表中，Ses(𝕔) 的对象将水平书写，而态射将表示为由竖直箭头组成的三元组。

我们可以为范畴 Ses (𝕔) 配备一个由闭理想 $\mathcal{N}$ 构造而成的零态射闭理想。

定义 2.3. 闭理想 $[\mathcal{N}]$ 是 Ses (𝕔) 中由以下形式的短正合列生成的理想

$$X \overset{f}{\cong} Y \overset{g}{\cong} Z$$

其中两个态射都是 $\mathbb{C}$ 中的同构。

f g**注记 2.4.** 不难看出，给定一个短正合列 $X \cong Y \cong Z$，对象 X， Y 和 Z 都是 $\mathbb{C}$ 中的零对象。事实上，同构的所有 $\mathcal{N}$-核和 $\mathcal{N}$-余核都是零对象。反之，包含三个零对象的短正合列必为 $\bullet \cong \bullet \cong \bullet$ 的形式。

我们将刻画 Ses(𝕔) 中的核、余核和短正合列。在此之前，我们先回顾以下众所周知的事实。

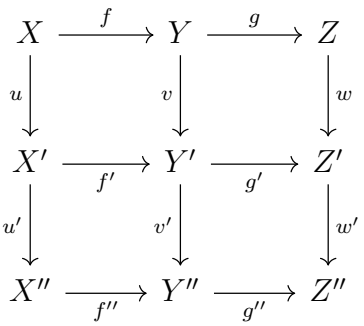
引理 2.5. 设 $\mathbb{C}$ 是一个具有零态射闭理想 $\mathcal{N}$ 的范畴。以下事实成立：

(i) 任意同构的核都是零对象；对同构的余核，对偶结论也成立；*(ii)* 零态射的核是恒等态射；对偶地，零态射的余核是恒等态射。

因此，对于任意对象 $Y \in \mathbb{C}$，我们都有以下典范短正合列：

$$K(\mathrm{id}_Y) \xrightarrow{\ker(\mathrm{id}_Y)} Y = Y \qquad and \qquad Y = Y \xrightarrow{\mathrm{coker}(\mathrm{id}_Y)} C(\mathrm{id}_Y)$$

命题 2.6. 设（u、 v、 w）和（u'、 v'、 w'）是Ses（$\mathbb{C}$）中的可复合态射，如下图表所示



态射 (u, v, w) 是 $[\mathcal{N}]$-核，当且仅当 u 是 $\mathcal{N}$-核，且 v 是 $[\mathcal{N}]$-核。对偶地，态射 (u', v', w') 是 (u, v, w) 的 $[\mathcal{N}]$-余核，当且仅当 v 是 $\mathcal{N}$-余核，且 w' 是 $[\mathcal{N}]$-核。

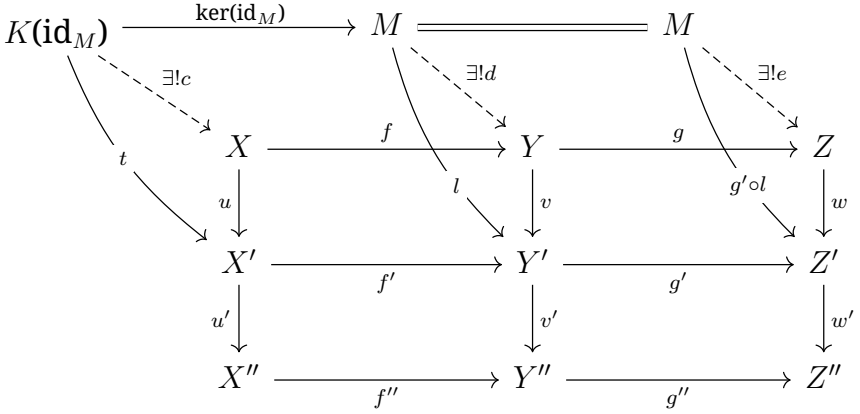
因此，态射 (u, v, w) 和 (u', v', w') 在 Ses（$\mathbb{C}$） 中构成短正合列，当且仅当 $Y \xrightarrow{v} Y' \xrightarrow{v'} Y''$ 在 $\mathbb{C}$ 中是短正合列， $u = \mathrm{ker}(u')$ 且 $w' = \mathrm{coker}(w)$ 。

证明。 我们首先证明，若 (u, v, w) $=$是$((u', v', w'))$的核，则 $u =$是u'的核，且 $v =$是v'的核。

设 $M \xrightarrow{l} Y$ 是一个态射，且其复合 $M \xrightarrow{l} Y \xrightarrow{v'}$ 是零态射。我们需要证明存在唯一的态射 $M \xrightarrow{d} Y$ 使得 $v \circ d = l$成立。为构造这样的态射 d，我们考虑短正合列

$$K(\mathrm{id}_M) \xrightarrow{\mathrm{ker}(\mathrm{id}_M)} M = M$$

并按照下图，利用 (u, v, w) 作为 (u', v', w') 的 $[\mathcal{N}]$-核的泛性质

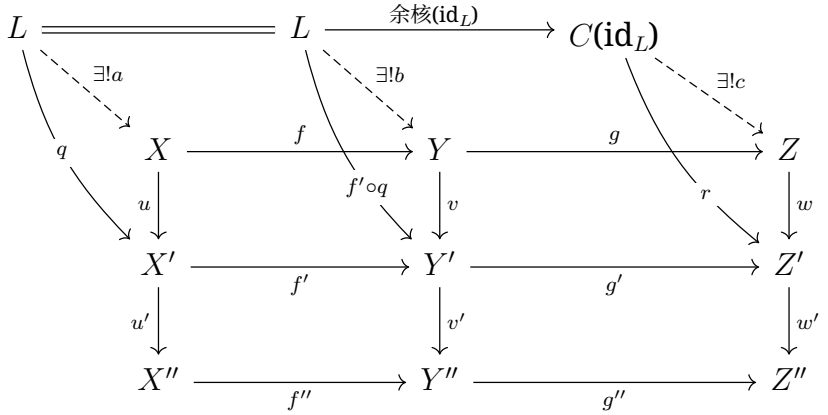


这里，态射 t 是由 f' 作为 g' 的核对零态射 $g' \circ \mathrm{ker}(\mathrm{id}_M)$ 应用泛性质所诱导的唯一态射，因此三元组 $(t,\ l,\ g' \circ l)$ 按构造是 Ses $(\mathbb{C})$ 中的一个态射。所诱导的态射 $M \xrightarrow{d} Y$ 满足 $v \circ d = l$。此外，由于 Ses (C) 中态射 $(c,\ d,\ e)$ 的唯一性，它的唯一性也随之得到。事实上，给定满足 $v \circ d' = l$ 的态射 d'，三元组 $(c',\ d',\ g \circ d')$ 是 Ses $(\mathbb{C})$ 中的另一个态射，其中 c' 是由 f' 作为 g' 的核对零态射 $g \circ d'$ 应用泛性质所诱导的，并且该三元组适合前面的图表。因此，根据 $(c,\ d,\ e)$ 的唯一性，它必为 $d = d'$。这表明 $v = \mathrm{ker}(v')$。

为证明 $u = \ker(u')$，现在考虑一个态射 $L \xrightarrow{q} X'$，使得 $u' \circ q$ 是零态射。我们需要证明存在唯一的态射 $L \xrightarrow{a} Y$，使得 $u \circ a = q$。为诱导出这样的态射，我们考虑短正合列

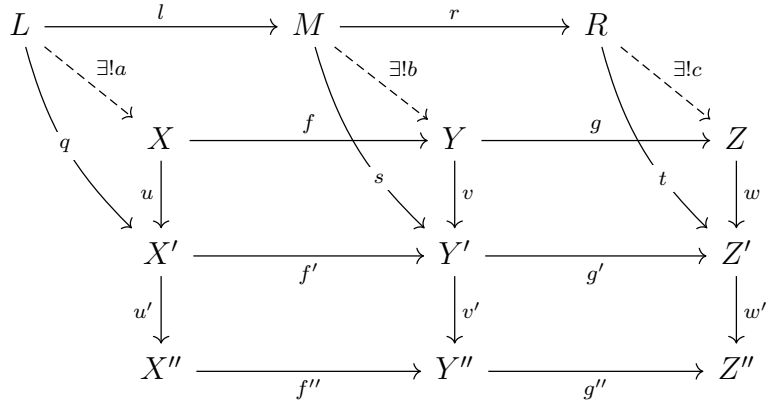
$$L = L \xrightarrow{\operatorname{coker}(\mathrm{id}_L)} C(\mathrm{id}_L)$$

并且我们将 (u, v, w) 作为 (u', v', w') 的 $[\mathcal{N}]$-核时，应用其泛性质，如下图所示



这里，态射 r 是由将零态射 $r \circ \operatorname{coker}(\mathrm{id}_M)$ 应用于 g' 作为 f'之余核的泛性质所诱导的唯一态射，因此，根据构造，三元组 $(q, f' \circ q, r)$ 是 Ses $(\mathbb{C})$ 中的一个态射。根据构造，诱导出的态射 $L \xrightarrow{a} X$ 满足$u \circ a = q$。此外，其唯一性可由 Ses (C) 中态射 (a, b, c) 的唯一性推出，这与我们在证明 $v = \ker(v')$ 时所展示的方式类似。由此完成了 $u = \ker(u')$ 的证明。

现在证明：若 $u = \ker(u')$ 且 $v = \ker(v')$ 属于 $\mathbb{C}$，则 $(u, v, w) = \ker((u', v', w'))$ 属于 Ses $(\mathbb{C})$。设 $L \xrightarrow{l} M \xrightarrow{r} R$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个短正合列，并设 (q, s, t) 是 Ses $(\mathbb{C})$ 中的一个态射，如下图所示，且复合 $(u', v', w') \circ (q, s, t)$ 属于 $[\mathcal{N}]$。我们需要证明，存在唯一的态射 (a, b, c) is Ses $(\mathbb{C})$，使其符合下图



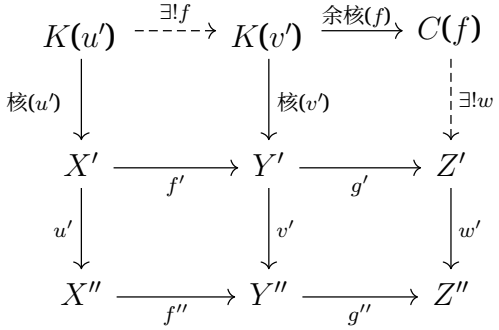
由于 $u = \ker(u')$，我们可以通过应用核的泛性质诱导出 a。类似地，我们可以通过 $v = \ker(v')$ 的泛性质诱导出 b。为了诱导出 c，我们接着利用 $r = \operatorname{coker}(l)$ 以及态射 $g \circ b \circ l = g \circ f \circ a$ 为零这一事实。三元组 (a, b, c) 的唯一性直接来自这三个态射的唯一性。因此我们得出，$(u, v, w) =$ 是$((u', v', w'))$ 的核。

余核的对偶命题可通过对该证明进行对偶化而轻易得到。

最后，将核与余核的刻画结合起来，便可立即得到短正合列的刻画。□

现在，我们给出 Ses (ℂ) 中核与余核的显式构造。

命题 2.7。 设 (u', v', w') 是 $\mathrm{Ses}(\mathbb{C})$ 中的一个态射，如下图所示。那么，(u', v', w') 的核可按下图构造



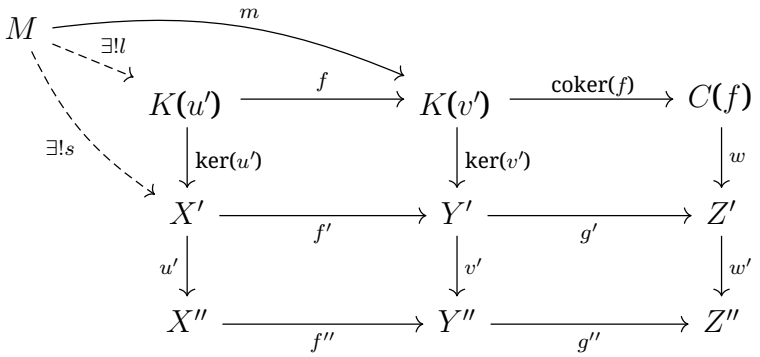
其中，f 是将零态射 $f'' \circ u' \circ$ 核(u') 应用于核(v') 的泛性质所诱导的唯一态射，而 w 是将零态射 $g' \circ$核$(v') \circ f = g' \circ f' \circ$核$(u')$应用于余核$(f)$ 的泛性质所诱导的唯一态射。

余核的对偶陈述也成立。

证明。 我们首先证明

$$K(u') \xrightarrow{f} K(v') \xrightarrow{\mathrm{coker}(f)} C(f)$$

是 $\mathbb{C}$ 中的短正合列。为此，我们需要证明 f 是 coker(f) 的核。设 $M \xrightarrow{m} K(v')$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个态射，且 coker$(f) \circ m$ 是一个零态射。我们需要证明存在唯一的态射 $L \xrightarrow{l} K(u')$ 使得 $f \circ l = m$。我们按照下图诱导出这样的态射 l：



这里，s 是将零态射 $g' \circ$ ker$(v') \circ m = w \circ$ coker$(f) \circ m$应用于 $f' =$ ker(g') 的泛性质所诱导的唯一态射。而 l 是将零态射 $u' \circ s$应用于 ker(u') 的泛性质所诱导的唯一态射。注意，$u' \circ s$是零态射，因为 $f'' \circ u' \circ s = v' \circ$ker$(v') \circ m$是零态射；而 f''会反映零态射，因为它是一个核。由等式链可得 $f \circ l = m$

$$\ker(v') \circ m = f' \circ s = f' \circ \ker(u') \circ l = \ker(v') \circ f \circ l$$

得益于 ker(v') 是一个单态射。此外，作为满足 $f \circ l = m$ 的态射 l 的唯一性，由 s 的唯一性以及作为满足 l 的态射的唯一性可得

满足 $\ker(u')\circ l = s$ 的态射。这就完成了 $\ker(\mathrm{coker}(f))$ 的证明，因此 $K(u') \xrightarrow{f} K(v')$ $\mathrm{coker}(f)$——→ $C(f)$ 是一个短正合列。根据命题 2.6，我们得出 $(\ker(u'), \ker(v')\ w)$ 是 (u', v', w') 的核。关于余核的对偶命题也可类似证明。□

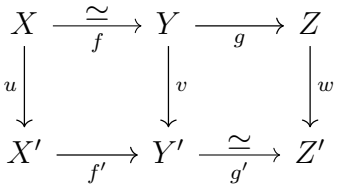
因此，我们证明了以下结果。

命题 2.8。设 $\mathbb{C}$ 是一个配备闭理想 $\mathcal{N}$（由零态射组成）的范畴，且具有所有 $\mathcal{N}$-核和 $\mathcal{N}$-余核。则范畴 $\mathrm{Ses}\,(\mathbb{C})$ 配备定义 $[\mathcal{N}]$*2.3* 中的闭理想后，具有所有 $[\mathcal{N}]$-核和 $[\mathcal{N}]$-余核。

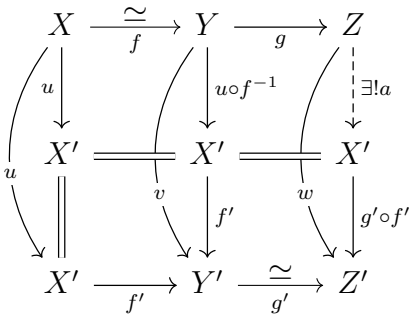
现在我们在范畴 Ses $(\mathbb{C})$ 上定义一个预挠理论。

命题 2.9。设 $\mathcal{T}$是 $\mathbb{C}$ 中形如 $\bullet \cong \bullet \to \bullet$的短正合列类，设 $\mathcal{F}$是 $\mathbb{C}$ 中形如 $\bullet \to \bullet \cong \bullet$ 的短正合列类。则 $(\mathbb{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$是 $\mathrm{Ses}(\mathbb{C})$上的预挠理论。

证明。设 $(u,\ v,\ w)$ 是 Ses $(\mathbb{C})$ 中的一个态射，如下图所示

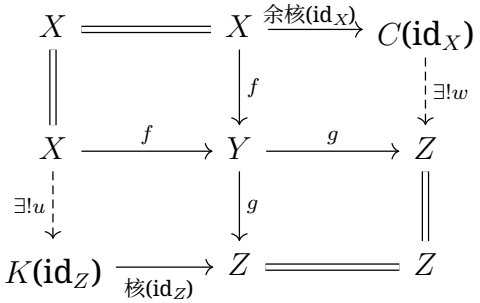


从 $\mathcal{T}$ 中的一个短正合列到 $\mathcal{F}$ 中的一个短正合列。于是 (u, v, w) 经过由 X' 的恒等态射给出的零短正合列分解。事实上，下图可交换



这里，a 是由 $g = \mathrm{coker}(f)$ 的泛性质对零态射 u 所诱导的唯一态射。注意，$w = g' \circ f' \circ a$，因为它们在与 g 复合后相等，而 g 是一个余核，因此是满态射。所以我们已经证明，态射 (u, v, w) 属于 $[\mathcal{N}]$。

现在令 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为 Ses$(\mathbb{C})$ 中的一个对象。我们可以为它关联如下短正合列



其中，态射 u 由将零态射 $g \circ f$ 应用于 $\mathsf{ker}(\mathrm{id}_Z)$ 的泛性质所诱导，而态射 w 由将零态射 $g \circ f$应用于 $\mathsf{coker}(\mathrm{id}_X)$ 的泛性质所诱导。由于 u 是零态射（因为它经过零对象 $K(\mathrm{id}_Z)$ 分解），我们有 $\mathsf{ker}(u) = \mathrm{id}_X$。上方画出的 $\mathsf{Ses}\,(C)$ 中的序列是 $\mathsf{Ses}\,(C)$ 中的短正合列，这要归功于命题 2.6 的显式刻画。事实上，中间列是一个短正合列（它实际上与起始列重合）。并且，由于 $K(\mathrm{id}_Z)$ 和 $C(\mathrm{id}_X)$ 是零对象，根据引理 2.5，左列是一个核，右列是一个余核。□

3. A COMONAD FOR BIHEREDITARY PRETORSION THEORIES

在本节中，我们迈出通过余单子方法刻画预挠理论的第一步。我们构造一个伪余单子，其伪余代数是双遗传的预挠理论。在下一节中，我们将进一步扩展这一伪余单子，以保证所有预挠理论都是伪余代数。

我们首先回顾什么是（余）遗传预挠理论。

定义 3.1。 如果一个预挠理论 $(\mathbb{C},\ \mathcal{T},\ \mathcal{F})$ 的函子 $\mathcal{T} \xrightarrow{T} \mathbb{C}$ 保持核，则称其为遗传的；如果它具有对偶性质，即$\mathcal{F} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ 保持余核，则称其为余遗传的 。如果一个预挠理论同时具有遗传性和余遗传性，则称其为双遗传的。

例 3.2. 经典挠理论（$\mathbf{Ab}$ {挠阿贝尔群}，{无挠阿贝尔群}
是遗传的，但不是余遗传的。

例 3.3. 不难证明，我们合作成果中定义的所有矩形扭理论 [1]，都是双遗传的。有趣的是，正如我们在 [1]，中所证明的，矩形扭理论可以表示为带基点范畴及保持零对象的函子的 2-范畴上的一个 2-单子的伪代数。本节将证明，它们也可以表示为一个伪余单子的伪余代数。

例 3.4. 如 [3],所示，给定一个有限预序集（$X = \{1, 2, \ldots, n\}$，$\leq$），三元组（X，T，F）满足 T，$F \subseteq X$ 是预挠理论，当且仅当

(i) $T \cup F = X$；(ii) $1 \in T$ 且 $n \in F$；(ii) 对每个 $i = 1$，……，$n - 1$，若 $i \in T$且 $i + 1 \in F$，则 $i \in F$或 $i + 1 \in T$。

很容易证明，所有这类预挠理论都是双遗传的。

命题 3.5. 我们在$\mathrm{Ses}(\mathbb{C})$ 上构造的预挠理论见命题 *2.9* ，它是双遗传的。

证明。 设 (u, v, w) 是如下图表中的 (u', v', w') 的核。

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
{\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
X' & \xrightarrow[f']{} & Y' & \xrightarrow[g']{} & Z' \\
{\scriptstyle u'}\downarrow & & {\scriptstyle v'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w'} \\
X'' & \xrightarrow[f'']{} & Y'' & \xrightarrow[g'']{} & Z''
\end{array}$$

函子 $T\colon \mathsf{Ses}(\mathbb{C}) \to \mathcal{T}_{\mathrm{Ses}(\mathbb{C})}$ 作用于此核，得到

$$\begin{array}{ccccc}
X & = & X & \xrightarrow{\mathrm{coker}(\mathrm{id}_X)} & C(\mathrm{id}_X) \\
\downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle \exists! a} \\
X' & = & X' & \xrightarrow[\mathrm{coker}(\mathrm{id}_{X'})]{} & C(\mathrm{id}_{X'}) \\
\downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle \exists! a'} \\
X'' & = & X'' & \xrightarrow[\mathrm{coker}(\mathrm{id}_{X''})]{} & C(\mathrm{id}_{X''})
\end{array}$$

其中 a 和 a' 由相关余核的泛性质所诱导。我们需要证明该图表给出了 Ses（$\mathbb{C}$）中的一个余核。但根据命题2.6，由于 $u = \ker(u')$，这确实成立。这证明该预挠理论是遗传的。证明它也是余遗传的过程是对偶的。□

因此，双遗传预挠理论构成了一类非平凡且有趣的预挠理论。

现在，我们为双遗传预挠理论构造伪余单子的基底 2-范畴。

我们将 **ClIdl** 定义为由以下内容给出的 2-范畴：
ClIdl 的一个对象是：一对（$\mathbb{C}$，$\mathcal{N}$），其中 $\mathbb{C}$ 是一个范畴，配备有一个闭理想 $\mathcal{N}$，且具有所有 $\mathcal{N}$-核和所有 $\mathcal{N}$-余核；
一个从 $(\mathbb{C}, \mathcal{N})$ 到 $(\mathbb{D}, \mathcal{M})$ 的态射是：一个函子 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，它保留所有 $\mathcal{N}$-核和 $\mathcal{N}$-余核；**一个 2-胞腔是：**函子之间的一个自然变换。

命题 3.6. ClIdl 确实是一个 *2*-范畴。
此外，ClIdl中的每个态射都会自动保留零对象和短正合列。

证明。证明很直接。 □

既然我们已经定义了基底 2-范畴 **ClIdl**，现在我们要给出预挠理论的 2-范畴，以便在本节通过余单子方法来刻画它。

在现有文献中，尚无标准的预挠理论 2-范畴。并且，范畴在配备预挠理论后，它们之间应当采用何种态射，这一点事先并不明确。本文的成果之一是阐明此类态射的选择。下面这个双遗传预挠理论的 2-范畴，将对应于我们伪余单子的伪余代数。

我们将 **BiHPTors** 定义为由以下内容给出的 2-范畴：**BiHPTors 的一个对象是：**范畴 $\mathbb{C}$ 上的一个双遗传预挠理论（$\mathbb{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F}$），该范畴关于闭理想 $\mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ 具有所有核和余核；**从 $(\mathbb{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ 到 $(\mathbb{D}, \mathcal{T}', \mathcal{F}')$ 的一个态射是：**一个函子 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，它保核、余核、挠对象和无挠对象：
一个 2-胞腔是：函子之间的一个自然变换。

命题 3.7. BiHPTors 确实是一个 *2*-范畴。此外，存在一个忘却 *2*-函子 $U\colon$ **BiHPTors** $\to$ **ClIdl**。

证明。 不难证明，**BiHPTors** 确实是一个 2-范畴。当然，每个预挠理论 $(\mathbb{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ 都有一个带闭理想的底层范畴 $(\mathbb{C}, \mathcal{T} \cap \mathcal{F})$。根据构造，**BiHPTors** 中的态射保持（相对）核与余核。□

我们已经 准备好介绍我们针对双遗传预扭理论的伪余单子 s.

构造 3.8。 将每个范畴 $\mathbb{C}$ 映射到 $\mathbb{C}$ 中短正合列范畴的赋值 $\mathbb{C} \mapsto \mathsf{Ses}(\mathbb{C})$，可以扩展为一个 2-函子

$$\begin{array}{rccc} \Omega: & \mathbf{ClIdl} & \longrightarrow & \mathbf{ClIdl} \\ & \mathbb{C} & & \mathsf{Ses}(\mathbb{C}) \\ & G \left(\Downarrow \alpha \right) H & \mapsto & G \left(\Downarrow [\alpha] \right) H \\ & \mathbb{D} & & \mathsf{Ses}(\mathbb{D}) \end{array}$$

事实上，我们在 2.8 中证明了，若 $\mathbb{C}$ 是一个配备有闭理想且具有所有（相对）核和余核的范畴，那么 $\mathsf{Ses}(\mathbb{C})$ 也具有这些性质。给定一个保持核和余核的函子 $G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，我们定义函子 $G\colon \mathsf{Ses}(\mathbb{C}) \to \mathsf{Ses}(\mathbb{D})$，将短正合列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 映射为短正合列 $G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y) \xrightarrow{G(g)} G(Z)$（依据命题 3.6）。类似地，$G\colon \mathsf{Ses}(\mathbb{C}) \to \mathsf{Ses}(\mathbb{D})$ 对态射的作用，是通过将 $G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 应用于整个图表来定义的。很容易证明，我们由此得到一个函子 $G\colon \mathsf{Ses}(\mathbb{C}) \to \mathsf{Ses}(\mathbb{D})$。此外，由于我们在命题 2.6 中证明了 $\mathsf{Ses}(\mathbb{C})$ 中核和余核的明确刻画，该函子保持核和余核。

给定 **ClIdl** 中的 2-胞腔 $\alpha\colon G \Rightarrow H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，即一个自然变换，我们通过将其在短正合列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 上的分量定义为态射，构造自然变换 $[\alpha]\colon G \Rightarrow H\colon \mathsf{Ses}(\mathbb{C}) \to \mathsf{Ses}(\mathbb{D})$

$$\begin{array}{ccccc} G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) & \xrightarrow{G(g)} & G(Z) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_X} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Z} \\ H(X) & \xrightarrow[H(f)]{} & H(Y) & \xrightarrow[H(g)]{} & H(Z) \end{array}$$

α 的自然性保证了 $[\alpha]$ 也是自然的。

最后，证明 Ω 确实是一个 2-函子是显而易见的。

定理 3.9. *2-函子*

$$\begin{array}{rccc} \Omega: & \mathbf{ClIdl} & \longrightarrow & \mathbf{ClIdl} \\ & \mathbb{C} & & \mathsf{Ses}(\mathbb{C}) \\ & G \left(\Downarrow \alpha \right) H & \mapsto & G \left(\Downarrow [\alpha] \right) H \\ & \mathbb{D} & & \mathsf{Ses}(\mathbb{D}) \end{array}$$

构造 *3.8* 扩展为伪余单子 Ω，它定义在由具备闭理想且拥有所有（相对）核与余核的范畴构成的 *2*-范畴 **ClIdl** 上。

此外，Ω的伪余代数的*2*-范畴与**BiHPTors** ——**ClIdl**上的双遗传预挠理论的*2*-范畴——*2*-同构。换言之，双遗传预挠理论在**ClIdl**上具有二维意义下的余单子性。

证明。 我们定义余单位 $\epsilon\colon \Omega \Rightarrow \mathrm{Id}$，其在 $\mathbb{C} \in \mathbf{ClIdl}$ 上的一般分量由以下函子给出

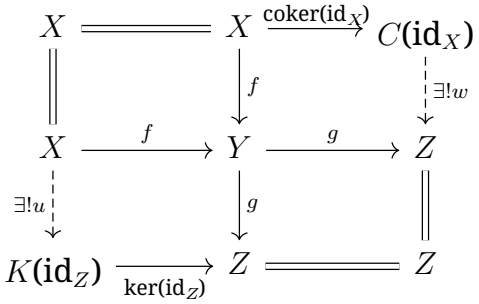
$$\begin{array}{rccc} \epsilon_{\mathbb{C}}: & \mathrm{Ses}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) & \mapsto & Y \end{array}$$

取短正合列的中间对象，并以类似方式作用于态射的 $\epsilon_{\mathbb{C}}$ 函子保核和余核，因此是 $\mathbf{ClIdl}$ 中的一个态射，这得益于我们在命题 $\mathbb{C}$ 中对 Ses 中核和余核的显式刻画（2.6）。此外，容易证明 ϵ 是一个 2-自然变换。

然后，我们定义余乘法 $\delta\colon \Omega \Rightarrow \Omega \circ \Omega$，使其在$\mathbb{C} \in \mathbf{ClIdl}$ 上的一般分量由函子给出

$$\delta_{\mathbb{C}}\colon \mathrm{Ses}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Ses}(\mathrm{Ses}(\mathbb{C}))$$

将短正合列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 中的 $\mathbb{C}$ 映射到与之关联的所选短正合列，该短正合列来自 Ses 上的预挠理论（C），我们在 2.9 中构造了该理论：

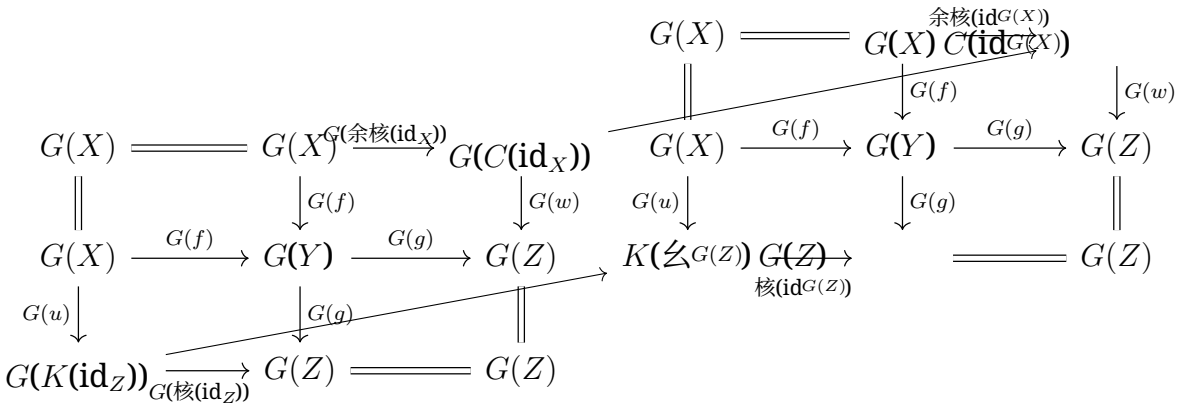


然后很容易将 $\delta_{\mathbb{C}}$ 扩展为一个函子 Ses $(\mathbb{C}) \to$ Ses (Ses $(\mathbb{C})$)。事实上，给定 Ses $(\mathbb{C})$ 中的一个态射 (u, v, w)，我们利用该态射的分量来定义 3×3 网格中央行和中央列上所需的映射。在位置 (1, 1) 和 (3, 3)，我们需要再次使用 u 和 w。在剩下的两个位置，我们利用现有余核和核的泛性质诱导出映射。这些泛性质保证了 $\delta_{\mathbb{C}}$ 是一个函子。将我们在命题 2.6 中证明的短正合列范畴内核和余核的显式刻画，分别应用于 Ses $(\mathbb{C})$ 和 Ses (Ses $(\mathbb{C})$)，可得 $\delta_{\mathbb{C}}$ 保持核和余核。因此， $\delta_{\mathbb{C}}$是 ClIdl 中的一个态射。

此外，分量 $\delta_{\mathbb{C}}$ 可以组织成如下伪自然变换$\delta\colon \Omega \Rightarrow \Omega \circ \Omega$。给定 $\mathbf{ClIdl}$ 中的态射 $G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，我们将结构 2-胞定义为

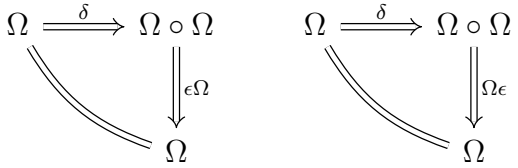
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ses}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\delta_{\mathbb{C}}} & \mathrm{Ses}(\mathrm{Ses}(\mathbb{C})) \\ {\scriptstyle G}\downarrow & \overset{\cong}{\delta_G} & \downarrow{\scriptstyle G} \\ \mathrm{Ses}(\mathbb{D}) & \xrightarrow[\delta_{\mathbb{D}}]{} & \mathrm{Ses}(\mathrm{Ses}(\mathbb{D})) \end{array}$$

在 $\mathbb{C}$ 中，其在短正合列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 上的分量为如下自然变换

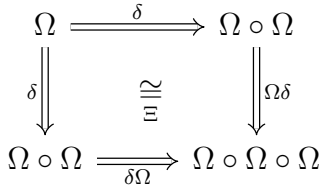


其中，我们未画出的态射都是恒等态射，而画出的同构是由 G 保持核和余核这一事实给出的。容易看出，这确实是 Ses（Ses（$\mathbb{D}$））中的一个同构。请注意，图中画出的两个同构是能够放在该位置上的唯一态射，因为核($\mathrm{id}_{G(Z)}$) 是单态射，而 G(余核(i d$_X$)) 是满态射。这保证了 δ 是一个伪自然变换。

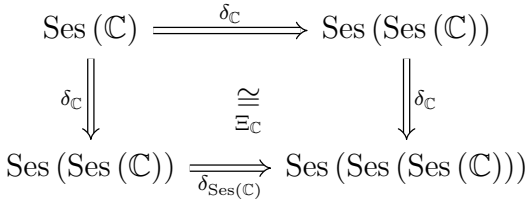
我们证明 (Ω δ, ϵ) 可扩张为 **ClIdl** 上的一个伪余单子。首先注意，以下两个伪自然变换构成的三角形是可交换的：



这是因为 $\delta_{\mathbb{C}}$ 的作用会将输入原样放置在 3×3 网格的中间行和中间列上。此外，结构 2-胞腔 δ_G 在中间行和中间列上恰好是恒等态射。接下来我们构造一个可逆修正



我们将其在 $\mathbb{C} \in$**ClIdl** 上的分量定义为自然同构



其在一个短正合列上的分量 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 由二十三个适当位置上的恒等态射以及位置上的另外四个更有趣的态射给出

(3，1，1)、(3，3，1)、(1，1，3)、(1，3，3)，其中前两个与后两个互为对偶。在位置 (3，3，1) 处，我们置入典范同构

$$C(\mathrm{id}_X) \cong C(\mathrm{id}_{C(\mathrm{id}_X)})$$

这是由以下事实给出的： $C(\mathrm{id}_X)$ 是一个零对象，且引理 2.5。而在位置 (3, 1,1) 处，我们放入典范同构

$$K(\mathrm{id}_{C(\mathrm{id}_X)}) \cong K(\mathrm{coker}(\mathrm{id}_{C(\mathrm{id}_X)}))$$

这是由上述同构诱导的。显然可以证明， Ξ 是一个定义良好的修正。

现在显然可以证明，(Ω δ， ϵ， Ξ) 是一个伪余单子。

现在我们证明，Ω 的伪余代数所成的 2-范畴与 **BiHPTors** 2-同构，且该同构覆盖 **ClIdl**。

Ω 的一个伪余代数是 $(\mathbb{C}, \mathcal{N}) \in \mathbf{ClIdl}$，它配备了一个余代数态射$\lambda$： $\mathbb{C} \to \mathsf{Ses}(\mathbb{C})$，位于 **ClIdl** 中，以及一个自然同构

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Ses}(\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & \overset{\lambda_\delta}{} & \downarrow{\scriptstyle\lambda} \\ \mathrm{Ses}(\mathbb{C}) & \xrightarrow[\delta_{\mathbb{C}}]{} & \mathrm{Ses}(\mathrm{Ses}(\mathbb{C})) \end{array}$$

使得三角图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathsf{Ses}(\mathbb{C}) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle\epsilon_{\mathbb{C}}} \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

交换且满足伪余代数公理。由上面的三角图可知，余代数映射 λ 因此为每个 $X \in \mathbb{C}$ 指定一个短正合列

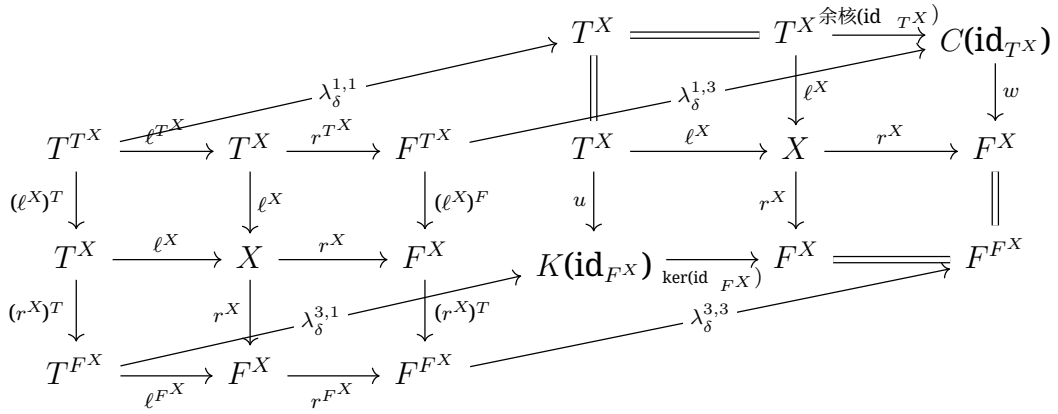
$$T^X \xrightarrow{\ell^x} X \xrightarrow{r^X} F^X$$

其中 X 位于中间；并且对 $\mathbb{C}$ 中的每个态射 $h\colon X \to Y$，都指定一个 $\mathsf{Ses}(\mathbb{C})$ 中的态射

$$\begin{array}{ccccc} T^X & \xrightarrow{\ell^X} & X & \xrightarrow{r^X} & F^X \\ {\scriptstyle h^T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h^F} \\ T^Y & \xrightarrow[\ell^Y]{} & Y & \xrightarrow[r^Y]{} & F^Y \end{array}$$

中间带有 h 。

此外，对于每个 $X \in \mathbb{C}$， λ_δ 在 Ses（Ses（$\mathbb{C}$））中给出了一个同构，表示为

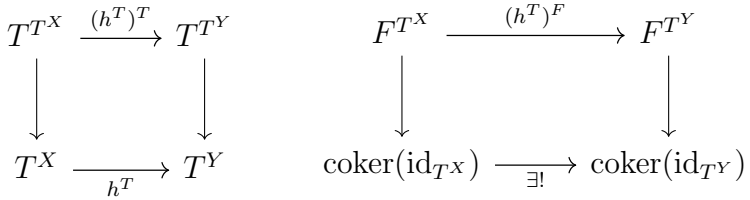


将 λ_δ 与余单位联系起来的伪余代数公理（以及其自动满足的对偶公理），恰好可转化为这样的要求：上文未画出的所有态射都是恒等态射。因此可推出

$$T^{T^X} \overset{\lambda^{1,1}_\delta}{\cong} T^X \quad \text{and} \quad F^{T^X} \text{ null object}$$

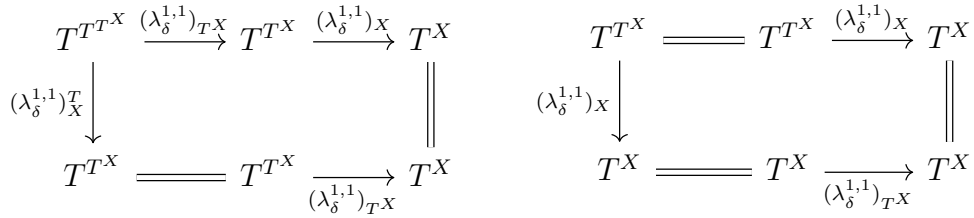
$$F^{F^X} \overset{\lambda^{3,3}_\delta}{\cong} F^X \quad \text{and} \quad T^{F^X} \text{ null object}$$

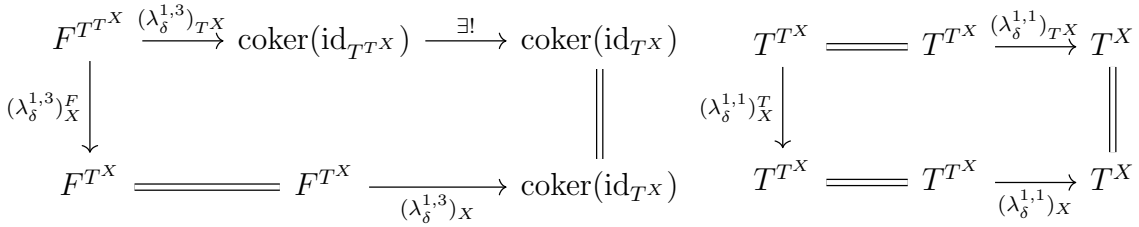
λ_δ 的自然性意味着，对于每个态射 $h\colon X \to Y$，在 $\mathbb{C}$ 中都有以下两个公理



以及它们的对偶（在 3×3 网格的中间行和中间列中，我们只有平凡的公理）。

伪余代数公理 λ_δ 还需满足的其余部分可转化为二十七个图表，其中只有以下八个及其对偶值得关注：





$$\begin{array}{ccccc}
F^{T^X} & = & F^{T^X} & \xrightarrow{(\lambda_\delta^{1,3})_X} & \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX}) \\
\| & & & & \| \\
F^{T^X} & = & F^{T^X} & \xrightarrow[(\lambda_\delta^{1,3})_X]{} & \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
T^{F^{T^X}} & \xrightarrow{(\lambda_\delta^{3,1})_X} & \ker(\mathrm{id}_{F^{TX}}) & \xrightarrow{\exists!} & \ker(\mathrm{id}_{\operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX})}) \\
\downarrow{\scriptstyle (\lambda_\delta^{1,3})_X^T} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Xi} \\
T^{\operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX})} & \xrightarrow[\delta_\lambda]{} & \ker(\nu) & \xrightarrow[\exists!]{} & \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{\operatorname{coker}(\mathrm{id}_X)})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
F^{T^X} & = & F^{T^X} & \xrightarrow{(\lambda_\delta^{1,3})_X} & \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX}) \\
\downarrow{\scriptstyle (\lambda_\delta^{1,3})_X} & & & & \| \\
\operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX}) & = & \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX}) & = & \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
F^{F^{T^X}} & \xrightarrow{(\lambda_\delta^{3,3})_{TX}} & F^{T^X} & \xrightarrow{(\lambda_\delta^{1,3})_X} & \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX}) \\
\downarrow{\scriptstyle (\lambda_\delta^{1,3})_X^F} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Xi} \\
F^{\operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX})} & \xrightarrow[\delta_\lambda]{} & \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{F^{TX}}) & \xrightarrow[\exists!]{} & \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{\operatorname{coker}(\mathrm{id}_{TX})})
\end{array}$$

这里， ν是将 $\mathbf{coker}(\mathbf{id}_{F^{TX}}) \circ r^{TX}$应用于 $\mathbf{coker}(\mathbf{id}_{F^{TX}})$的泛性质所诱导的唯一态射。

我们证明，每个 Ω 的伪余代数 $(\mathbb{C},\ \mathcal{N},\ \lambda,\ \lambda_\delta)$ 都会导出一个双遗传预挠理论。我们将扭对象类和无挠对象类定义为

$$\mathcal{T} = \lambda^{-1}(\mathcal{T}_{\mathbf{Ses}(\mathbb{C})}) \quad \text{and} \quad \mathcal{F} = \lambda^{-1}(\mathcal{F}_{\mathbf{Ses}(\mathbb{C})})$$

其中 $\mathcal{T}_{\mathbf{Ses}(\mathbb{C})}$ 和 $\mathcal{F}_{\mathbf{Ses}(\mathbb{C})}$ 分别是 $\mathbf{Ses}$（$\mathbb{C}$）上由命题 2.9 构造的预挠理论的挠类和无扭类。由于 $\mathcal{T}_{\mathbf{Ses}(\mathbb{C})}$ 和 $\mathcal{F}_{\mathbf{Ses}(\mathbb{C})}$ 是 $\mathbf{Ses}$（$\mathbb{C}$）的充满且饱和的子范畴，我们得到 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的充满且饱和的子范畴。容易证明 $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \mathcal{N}$。

此外，每个对象 $X \in \mathbb{C}$都有一个相应的短正合列 $T^X \xrightarrow{\ell^X} X \xrightarrow{r^X} F^X$，其中 X 位于中间，由 $\lambda(X)$ 给出。我们有 $T^X \in \mathcal{T}$，因为

$$\lambda(T^X) = (T^{T^X} \xrightarrow{\ell^{T^X}} T^X \xrightarrow{r^{T^X}} F^{T^X})$$

由于自然同构 λ_δ，它具有 $\bullet \cong \bullet \to \bullet$的形式。对偶地， $F^X \in \mathcal{F}$。还需证明，在 $\mathbb{C}$ 中从 $A \in \mathcal{T}$ 到 $B \in \mathcal{F}$ 的每个态射 h 都是零态射。 λ 将 h 映射为

$$\begin{array}{ccccc}
T^A & \cong & A & \xrightarrow{r^A} & F^A \\
\downarrow{\scriptstyle h^T} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h^F} \\
T^B & \xrightarrow[\ell^B]{} & B & \cong & F^B
\end{array}$$

由于 T^B 是零对象，根据伪余代数公理，我们可以推得 h 是零态射。因此我们得出结论：$(\mathbb{C},\ \mathcal{T},\ \mathcal{F})$ 是一个预挠理论。

我们证明它是一个遗传前扭理论。因此，考虑 $K(g)$ $\ker(\xrightarrow{g} X \xrightarrow{g} Y)$ 中的核。我们需要证明所诱导的挠部分

$$T^{K(g)} \xrightarrow{\ker(g)^T} T^X \xrightarrow{g^T} T^Y$$

再次是 $\mathbb{C}$ 中的一个核。由于 λ 是 ClIdl 中的态射，它保持核。因此，$(\ker(g)^T, \ker(g), \ker(g)^F)$ 是 Ses $(\mathbb{C})$ 中 (g^T, g, g^F) 的核。利用命题 2.6，我们得到 $\ker(g)^T$ 是 $\mathbb{C}$ 中 g^T 的核，从而得出结论。对偶地，$(\mathbb{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ 也是余遗传的。

现在我们证明，每个双遗传预挠理论（$\mathbb{C}$，$\mathcal{T}$，$\mathcal{F}$）都会导出一个 Ω 的伪余代数。当然，$(\mathbb{C}, \mathcal{T} \cap \mathcal{F}) \in$ ClIdl。接着我们定义

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{Ses}(\mathbb{C}) \\ & X & & T^X \xrightarrow{\ell^X} X \xrightarrow{r^X} F^X \\ & \downarrow h & \mapsto & {\scriptstyle h^T}\downarrow \quad\quad \downarrow{\scriptstyle h} \quad\quad \downarrow{\scriptstyle h^F} \\ & Y & & T^Y \xrightarrow[\ell^Y]{} Y \xrightarrow[r^Y]{} F^Y \end{array}$$

将每个 X 映射到由预挠理论给出的相应短正合列，并将每个 $h\colon X \to Y$ 映射到三元组 (h^T, h, h^F)，其中 h^T 是 h 的挠部分，而 h^F 是 h 的无挠部分（由相关核与余核的泛性质诱导）。当然，根据泛性质中的唯一性部分，λ 是一个函子。此外，得益于命题 2.6 以及 $(\mathbb{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是遗传的这一事实，λ 保持核。对偶地，λ 也保持余核。因此，λ 是 ClIdl 中的一个态射。根据构造，$\epsilon_{\mathbb{C}} \circ \lambda = \mathrm{Id}$。

我们定义 λ_δ，使其在 $X \in \mathbb{C}$ 上的分量在所有需要的位置均为恒等态射，并由以下两个态射及其对偶构成。在位置 (1,1)，我们放入典范同构 $T^{T^X} \cong T^X$，它由如下事实给出：$T^X \in \mathcal{T}$。在位置 $(1,3)$，我们放入典范同构 $F^{T^X} \cong C(\mathrm{id}_{T^X})$，它由如下事实得到：$T^X = = T^X \to C(\mathrm{id}_{T^X})$ 是另一个以 T^X 为中间项的短正合列；除所选的短正合列外，该短正合列左侧有一个挠对象，右侧有一个无挠对象（事实上是一个零对象）。不难看出，这给出了一个自然同构 λ_δ。注意，由于 ℓ^X 是单态射，$\ell^{T^X} = (\ell^X)^T$。于是也有 $\ell^{T^{T^X}} = (\ell^{T^X})^T$。现在不难证明 $(\mathbb{C}, \mathcal{T} \cap \mathcal{F}, \lambda, \lambda_\delta)$ 是 Ω 的一个伪余单子。

从 $(\mathbb{C}, \mathcal{N}, \lambda\colon \mathbb{C} \to \mathrm{Ses}(\mathbb{C}) \ \lambda_\delta)$ 到 $(\mathbb{D}, \mathcal{N}', \mu\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Ses}(\mathbb{D}) \ \mu_\delta)$ 的正规伪 Ω-余代数之间的伪态射是一对 (G, G)，其中 $G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是一个保持核与余核的函子，而 G 是一个同构自然变换

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad G \quad} & \mathbb{D} \\ {\scriptstyle \lambda}\downarrow & \cong & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \mathrm{Ses}(\mathbb{C}) & \xrightarrow[G]{} & \mathrm{Ses}(\mathbb{D})\,. \end{array}$$

因此，G 在 $X \in \mathbb{C}$ 上的分量是 Ses $(\mathbb{D})$ 中的一个同构

$$\begin{array}{ccccc} T^{G(X)} & \xrightarrow{\ell^{G(X)}} & G(X) & \xrightarrow{r^{G(X)}} & F^{G(X)} \\ {\scriptstyle \overline{G}^1_X}\downarrow & & {\scriptstyle \overline{G}^2_X}\downarrow & & {\scriptstyle \overline{G}^3_X}\downarrow \\ G(T^X) & \xrightarrow[G(\ell^X)]{} & G(X) & \xrightarrow[G(r^X)]{} & G(F^X) \end{array}$$

将关于与余乘法相容性的公理写成分量形式后，它是 Ses (Ses $(\mathbb{D})$) 中态射之间的一个等式，因此由 $\mathbb{D}$ 中的 9 个交换图组成。与短正合列中间对象相对应的图，

在矩阵表示法中位于 2,2 位置，是平凡的。其余八个中，有四个分别是另外四个的对偶。例如，与 3,2 位置对应的图是与 1,2 位置对应的图的对偶。因此，我们只明确写出与 1,1、1,2、2,1 和 1,3 位置对应的图。它们是以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} T^{G(X)} & \xrightarrow{(\mu_\delta^{1,1})^{-1}_{G(X)}} & T^{T^{G(X)}} & \xrightarrow{(\overline{G}^1_X)^T} & T^{G(T^X)} \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^1_X} & & & & \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^1_{T^X}} \\ G(T^X) & = & G(T^X) & \xrightarrow[G((\lambda_\delta^{1,1})^{-1}_X)]{} & G(T^{T^X}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} T^{G(X)} & \xrightarrow{(\mu_\delta^{1,2})^{-1}_{G(X)}} & T^{G(X)} & \xrightarrow{\overline{G}^1_X} & G(T^X) \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^1_X} & & & & \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^2_{T^X}} \\ G(T^X) & = & G(T^X) & \xrightarrow[G((\lambda_\delta^{1,2})^{-1}_X)]{} & G(T^X) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} T^{G(X)} & \xrightarrow{(\mu_\delta^{2,1})^{-1}_{G(X)}} & T^{G(X)} & \xrightarrow{(\overline{G}^2_X)^T} & T^{G(X)} \\ \downarrow{\scriptstyle \exists!} & & & & \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^1_X} \\ G(T^X) & = & G(T^X) & \xrightarrow[G((\lambda_\delta^{2,1})^{-1}_X)]{} & G(T^X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{T^{G(X)}}) & \xrightarrow{(\mu_\delta^{1,3})^{-1}_{G(X)}} & F^{T^{G(X)}} & \xrightarrow{(\overline{G}^1_X)^F} & F^{G(T^X)} \\ \downarrow{\scriptstyle \exists!} & & & & \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^3_{T^X}} \\ \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{G(T^X)}) & \xrightarrow[\delta^{1,3}_G]{} & G(\operatorname{coker}(\mathrm{id}_{T^X})) & \xrightarrow[G((\lambda_\delta^{1,3})^{-1}_X)]{} & G(F^{T^X}) \end{array}$$

正规伪 Ω-余代数的伪态射在分量 X 上的另一条公理给出了条件 $G^2_X = \mathrm{id}_{G(X)}$。现在我们证明，函子 $G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 诱导出预挠理论之间的函子 $G\colon (\mathbb{C},\ \mathcal{T},\ \mathcal{F}) \to (\mathbb{D},\ \mathcal{T}',\ \mathcal{F}')$。我们已经知道 G 保持核和余核，因此只需证明它保持扭类和无扭转类。令 $A \in \mathcal{T}$，并考虑预挠理论态射 G_A:

$$\begin{array}{ccccc} T^{G(A)} & \xrightarrow{\ell^{G(A)}} & G(A) & \xrightarrow{r^{G(A)}} & F^{G(A)} \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^1_A} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^3_A} \\ G(T^A) & \xrightarrow[G(\ell^A)]{\simeq} & G(A) & \xrightarrow[G(r^A)]{} & G(F^A) \end{array}$$

这给出了 $G(A)$ 与 $T^{G(A)} \in \mathcal{T}'$ 之间的同构。由于 $\mathcal{T}'$ 是 $\mathbb{D}$ 的满子范畴，我们得出 $G(A) \in \mathcal{T}'$。类似地，给定 $B \in \mathcal{F}$，有 $G(B) \in \mathcal{F}'$。因此， G 是预挠理论之间的函子。

现在我们证明，预挠理论 $G\colon (\mathbb{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \to (\mathbb{D}, \mathcal{T}', \mathcal{F}')$ 之间的每个函子（其中 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 均存在所有核与余核）都有一个相应的正规伪 Ω- 余代数伪态射

$$(G, \overline{G})\colon (\mathbb{C}, \mathcal{N}, \lambda\colon \mathbb{C} \to \mathrm{Ses}(\mathbb{C}), \lambda_\delta) \to (\mathbb{D}, \mathcal{N}', \mu\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Ses}(\mathbb{D}), \mu_\delta).$$

G 是一个函子，根据假设，它保持核与余核。现在我们构造自然变换 G。给定 $X \in \mathbb{C}$，G 在 X 上的分量是 $\mathrm{Ses}(\mathbb{D})$中的一个同构，其形式为

$$\begin{array}{ccccc} T^{G(X)} & \xrightarrow{\ell^{G(X)}} & G(X) & \xrightarrow{r^{G(X)}} & F^{G(X)} \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^1_X} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^3_X} \\ G(T^X) & \xrightarrow[G(\ell^X)]{} & G(X) & \xrightarrow[G(r^X)]{} & G(F^X) \end{array}$$

由于 G 保持扭转类，我们有 $G(T^X) \in \mathcal{T}'$。这意味着复合

$$G(T^X) \xrightarrow{G(\ell^X)} G(X) \xrightarrow{r^{G(X)}} F^{G(X)}$$

为零，因为它是从 $\mathcal{T}'$ 的一个对象到 $\mathcal{F}'$ 的一个对象的态射。因此，存在唯一的态射 $G(T^X) \xrightarrow{\xi} T^{G}{}_{(X)}$，使得 $\ell^{G(X)} \circ \xi = G(\ell^X)$。我们证明这样的 ξ 是一个同构。由于 G 保核，我们有 $G(\ell^X)$ 是 $G(r^X)$ 的核，因此

$$G(T^X) \xrightarrow{G(\ell^X)} G(X) \xrightarrow{G(r^X)} G(F^X)$$

是一个短正合列。此外，$G(r^X) \circ \ell^{G(X)}$ 为零，因为 $G(F^X) \in \mathcal{F}'$。因此，存在唯一的态射 $\xi' \colon T^{G}{}_{(X)} \to G(T^X)$，使得 $G(\ell^X) \circ \xi' = \ell^{G(X)}$。由于 $G(\ell^X)$ 是一个单态射，我们有 $\xi' \circ \xi = \mathrm{id}_{T^{G(X)}}$。又由于 $\ell^{G(X)}$ 是一个单态射，我们有 $\xi \circ \xi' = \mathrm{id}_{G(T^X)}$。因此，$\xi$ 是一个同构，我们定义 $G^1_X := \xi$。随后，我们对偶地定义同构 G^3_X。根据构造，三元组 $(G^1_X, \mathrm{id}_{G(X)}, G^3_X)$ 是 $\mathbf{Ses}(\mathbb{D})$ 中的一个态射。

我们现在证明 G 是自然的。设 $h \colon X \to Y$ 是 $\mathbb{C}$中的一个态射。h 的自然性方块是$\mathbf{Ses}(\mathbb{D})$中以下两个复合态射的相等：

$$\begin{array}{ccccc}
T^{G(X)} & \xrightarrow{\ell^{G(X)}} & G(X) & \xrightarrow{r^{G(X)}} & F^{G(X)} \\
\downarrow{\scriptstyle \overline{G}^1_X} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^3_X} \\
G(T^X) & \xrightarrow[G(\ell^X)]{} & G(X) & \xrightarrow[G(r^X)]{} & G(F^X) \\
\downarrow{\scriptstyle G(h^T)} & & \downarrow{\scriptstyle G(h)} & & \downarrow{\scriptstyle G(h^F)} \\
G(T^Y) & \xrightarrow[G(\ell^Y)]{} & G(Y) & \xrightarrow[G(r^Y)]{} & G(F^Y)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
T^{G(X)} & \xrightarrow{\ell^{G(X)}} & G(X) & \xrightarrow{r^{G(X)}} & F^{G(X)} \\
\downarrow{\scriptstyle G(h)^T} & & \downarrow{\scriptstyle G(h)} & & \downarrow{\scriptstyle G(h)^F} \\
T^{G(Y)} & \xrightarrow[\ell^{G(Y)}]{} & G(Y) & \xrightarrow[r^{G(Y)}]{} & F^{G(Y)} \\
\downarrow{\scriptstyle \overline{G}^1_Y} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^3_Y} \\
G(T^Y) & \xrightarrow[G(\ell^Y)]{} & G(Y) & \xrightarrow[G(r^Y)]{} & G(F^Y)
\end{array}$$

由于 $G(\ell^Y)$是单态射，这两个复合的第一分量相等。此外，第二分量平凡地相等，而第三分量相等是因为 $r^{G(X)}$ 是满态射。因此 G 是自然的。于是容易看出所需公理均成立。因此(G,G)是正规伪Ω-余代数的伪态射。 —

伪余代数的伪态射之间的2-胞腔

$$(G, \overline{G}), (H, \overline{H}) \colon (\mathbb{C}, \mathcal{N}, \lambda \colon \mathbb{C} \to \mathbf{Ses}(\mathbb{C}), \lambda_\delta) \to (\mathbb{D}, \mathcal{N}', \mu \colon \mathbb{D} \to \mathbf{Ses}(\mathbb{D}), \mu_\delta)$$

是一个自然变换 $\alpha : G \Rightarrow H$，使得对每个 $X \in \mathbb{C}$，复合在 $\mathbf{Ses}(\mathbb{D})$ 中满足以下等式

$$\begin{array}{ccccc}
T^{G(X)} & \xrightarrow{\ell^{G(X)}} & G(X) & \xrightarrow{r^{G(X)}} & F^{G(X)} \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha^T_X} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_X} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^F_X} \\
T^{H(X)} & \xrightarrow[\ell^{H(X)}]{} & H(X) & \xrightarrow[r^{H(X)}]{} & F^{H(X)} \\
\downarrow{\scriptstyle \overline{H}^1_X} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \overline{H}^3_X} \\
H(T^X) & \xrightarrow[H(\ell^X)]{} & H(X) & \xrightarrow[H(r^X)]{} & H(F^X)
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccc}
T^{G(X)} & \xrightarrow{\ell^{G(X)}} & G(X) & \xrightarrow{r^{G(X)}} & F^{G(X)} \\
\downarrow{\scriptstyle \overline{G}^1_X} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \overline{G}^3_X} \\
G(T^X) & \xrightarrow[G(\ell^X)]{} & G(X) & \xrightarrow[G(r^X)]{} & G(F^X) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_{T^X}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_X} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{F^X}} \\
H(T^X) & \xrightarrow[H(\ell^X)]{} & H(X) & \xrightarrow[H(r^X)]{} & H(F^X)
\end{array}$$

显然，余代数伪态射之间的每个 2-胞腔都会导出预挠理论态射之间的一个 2-胞腔，而该 2-胞腔就是底层的自然变换。反过来，双遗传扭理论态射之间的每个自然变换 α: $G \Rightarrow H$ 都满足作为伪余代数伪态射之间 2-胞腔所需的公理，因为对每个 $X \in \mathbb{C}$, $H(\ell^X)$ 都是单态射，而 $r^{G(X)}$ 是满态射。

因此，我们构造了两个赋值

$$\begin{array}{rccc}
\Theta: & \textbf{Ps-}\Omega\textbf{-CoAlg} & \longrightarrow & \textbf{BiHPTors} \\
& (\mathbb{C}, \mathcal{N}, \lambda\colon \mathbb{C} \to \mathrm{Ses}(\mathbb{C}), \lambda_\delta) & & (\mathbb{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \\
& {\scriptstyle (G,\overline{G})}\left(\Longrightarrow^{\alpha}\right){\scriptstyle (H,\overline{H})} & \mapsto & G\left(\Longrightarrow^{[\alpha]}\right)H \\
& (\mathbb{D}, \mathcal{N}', \mu\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Ses}(\mathbb{D}), \mu_\delta) & & (\mathbb{D}, \mathcal{T}', \mathcal{F}')
\end{array}$$

and

$$\begin{array}{rccc}
\Gamma\colon & \textbf{BiHPTors} & \longrightarrow & \textbf{Ps-}\Omega\textbf{-余代数} \\
& (\mathbb{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F}) & & (\mathbb{C}, \mathcal{N}, \lambda\colon \mathbb{C} \to \mathrm{Ses}(\mathbb{C}), \lambda_\delta) \\
& G\left(\Longrightarrow^{[\alpha]}\right)H & \mapsto & {\scriptstyle (G,\overline{G})}\left(\Longrightarrow^{\alpha}\right){\scriptstyle (H,\overline{H})} \\
& (\mathbb{D}, \mathcal{T}', \mathcal{F}') & & (\mathbb{D}, \mathcal{N}', \mu\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Ses}(\mathbb{D}), \mu_\delta)
\end{array}$$

Θ 根据构造显然是一个 2-函子，并且很容易证明 Γ 也是一个 2-函子。此外，复合 $\Theta \circ \Gamma$ 是恒等函子。事实上，使短正合列 $T^A \xrightarrow{\ell^A} A \xrightarrow{r^A} F^A$ 属于 $\mathcal{T}_{\mathrm{Ses}(\mathbb{C})}$ 的对象 $A \in \mathbb{C}$，恰好就是 $\mathcal{T}$ 的对象。因此，$\mathcal{T} = \lambda^{-1}(\mathcal{T}_{\mathrm{Ses}(\mathbb{C})})$。对偶地，$\mathcal{F} = \lambda^{-1}(\mathcal{F}_{\mathrm{Ses}(\mathbb{C})})$。并且很容易看出，$\Theta \circ \Gamma$ 在态射和 2-胞腔上是恒等的。接下来很容易证明，复合 $\Gamma \circ \Theta$ 也是恒等函子。注意，为每个对象选取与之相关联的短正合列，便能唯一确定态射的扭部分和无扭部分。此外，由伪余代数公理可知，在每个分量 $X \in \mathbb{C}$上，λ_δ由 ℓ^{TX}和 r^{FX}唯一确定。最后，$\Gamma \circ \Theta$ 在态射上是恒等的这一事实，源于与 G相关联的 G 至多只有一个，因为 $G(\ell^X)$是单态射，而 $r^{G(X)}$ 是满态射。

—

因此我们得出结论：Ω 的伪余代数所成的 2-范畴，与**BiHPTors** 双遗传预挠理论在**ClIdl**上的 2-范畴 2-同构。请注意，尽管 Ω 是一个伪余单子，伪 Ω-余代数仍构成一个 2-范畴，这要归功于 Ω 是一个 2-函子这一事实，并且对于给定的 G，至多只有═个 G。□

注 3.10. 我们在 $\mathbb{C}$ 上构造的 Ses 预挠理论2.9，因此是 $\mathbb{C} \in$**ClIdl** 上的余自由双遗传预挠理论。

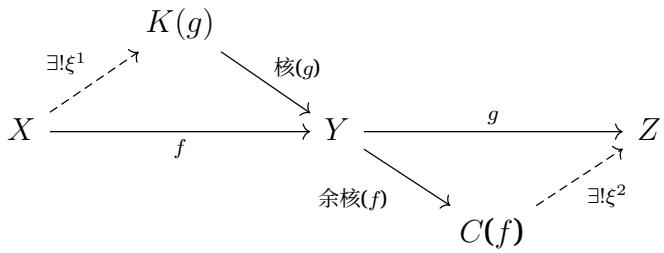
注 3.11。 λ: $\mathbb{C} \to$Ses $(\mathbb{C})$ 保持核与余核这一事实，意味着 Ω 的伪余代数是具有额外性质（即双遗传的）的预挠理论，而非所有预挠理论。注意，由于**ClIdl**的构造，λ 必须保持核与余核。我们以这种方式定义了**ClIdl**，以确保**ClIdl** 中的态射 G: $\mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 会导出函子 Ses $(\mathbb{C}) \to$Ses (D)，并且该函子保持短正合列。有趣的是，这实际上是唯一依赖于**ClIdl** 中的态射保持核与余核这一选择之处。这一观察为我们在下一节介绍的伪余单子 Ω 的扩展铺平了道路。

4. A comonad for generalized pretorsion theories

在本节中，我们扩展定理 3.9中构造的伪余单子 $(\Omega\ \delta,\ \epsilon)$。我们在由配备闭理想的范畴构成的一个 2-范畴上得到了另一个伪余单子。借此，我们实现了目标：所有预挠理论都是该伪余单子的余代数。但有趣的是，伪余代数对应于预挠理论的一种推广。

R备注 3.11 启发我们以如下方式扩展 2-范畴**ClIdl**：

定义 4.1. 设 $\mathbb{C}$ 是一个范畴，配备了一个具有所有相对核和余核的闭理想。$\mathbb{C}$中的一个正合序列是由可复合态射$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 构成的零序列，使得考虑其诱导图表



我们有

$$K(g) \xrightarrow{\ker(g)} Y \xrightarrow{\operatorname{coker}(f)} C(f)$$

是一个短正合列，称为原序列的**短正合序列替换**，ξ^1 将零态射余反射，而 ξ^2 将零态射反射。

备注 4.2. 给定一个范畴 $\mathbb{C}$，它配备了一个拥有所有核与余核的闭理想。对于 $\mathbb{C}$ 中的每个正合序列，我们选定其短正合序列替换。对于本身就是短正合列的正合序列，我们选择将原序列本身作为替换。

为了更好地理解上述定义，回顾一下反射零态射的以下已知刻画。

命题 4.3. 设 $\xi\colon\ W \to Z$ 是范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个态射，该范畴配备了一个拥有所有核与余核的闭理想。那么，ξ 反射零态射，当且仅当 ξ 的核 $K(\xi)$ 是一个零对象。

此外，请回想，在带有闭理想的范畴中，每个核都会自动反映零态射；余核的情形对偶地成立。

现在，我们可以扩展上一节中考虑的基底 2-范畴 **ClIdl**。

我们将 $\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$ 定义为如下 2-范畴：

$\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$ 的一个对象是： ClIdl的一个对象，即一对 $(\mathbb{C},\ \mathcal{N})$，其中范畴 $\mathbb{C}$配备了一个闭理想 $\mathcal{N}$，并且具有所有 $\mathcal{N}$-核和所有 $\mathcal{N}$-余核；

从$(\mathbb{C},\ \mathcal{N})$到$(\mathbb{D},\ \mathcal{M})$的态射是： 一个函子 $F\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，它保持所有正合序列；

一个 2-胞腔是： 函子之间的一个自然变换。

命题 4.4。 ClIdl中的每个态射都会自动保持零对象、反映零态射的态射以及余反射零态射的态射。

此外，**ClIdl** 中的每个态射都是$\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$中的态射。

证明。 设 G 是$\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$ 中的一个态射，且 Z 是一个零对象。我们有 $Z = = Z = = Z$ 是一个短正合列，因此 $G(Z) = = G(Z) = = G(Z)$是一个正合序列。由于 $K(\mathrm{id}_{G(Z)})$和 $C(\mathrm{id}_{G(Z)})$都是零对象，因此我们也得到 $G(Z)$是一个零对象。

现在考虑一个态射 $h\colon X \to Y$ 在 $\mathbb{C}$ 中，它余反射零态射。由命题 4.3， $K(h)$ 是一个零对象，因此 $\ker(h)$ 的余核是 X的恒等态射。这意味着

$$K(h) \xrightarrow{\ker(h)} X \xrightarrow{h} Y$$

是一个正合序列。事实上，它的短正合替代为 $K(h) \xrightarrow{\ker(h)} X = = X$，并且$h$ 根据假设余反射零态射。于是 G保持此类正合序列的正合性。由于 $G(K(h))$是一个零对象，根据我们上面证明的结论，$G(\ker(h))$的余核是恒等态射。因此，根据正合序列的定义，我们得出 $G(h)$必定余反射零态射。对偶地， G 保持余反射零态射的态射。

现在假设 $G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是 $\mathbf{ClIdl}$ 中的一个态射，并考虑 $\mathbb{C}$中的一个正合序列$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$。将 ξ^1 和 ξ^2 分别称为由 $X \to \ker(g)$ 和 $\mathrm{coker}(f) \to Z$诱导的态射。于是 G将短正合替代

$$K(g) \xrightarrow{\ker(g)} Y \xrightarrow{\mathrm{coker}(f)} C(f)$$

将该正合序列变为短正合列。由于 G 保核和余核，我们得到

$$K(G(g)) \xrightarrow{\ker(G(g))} G(Y) \xrightarrow{\mathrm{coker}(G(f))} C(G(f))$$

是一个短正合列。最后，考虑诱导的 $\xi'^1\colon G(X) \to K(G(g))$ 以及$\xi'^2\colon C(G(f)) \to G(Z)$。由于 $G(\mathrm{coker}(f))$ 是一个余核，因而是满态射，我们有： ξ'^2与典范同构 $G(C(f)) \cong C(G(f))$ 的复合与 $G(\xi^2)$ 重合。由于 ξ^2 具有零核，且 G 保核和零对象，我们推得 $G(\xi^2)$具有零核。但于是 ξ'^2 也具有零核。对偶地，对于 ξ'^1亦然。□

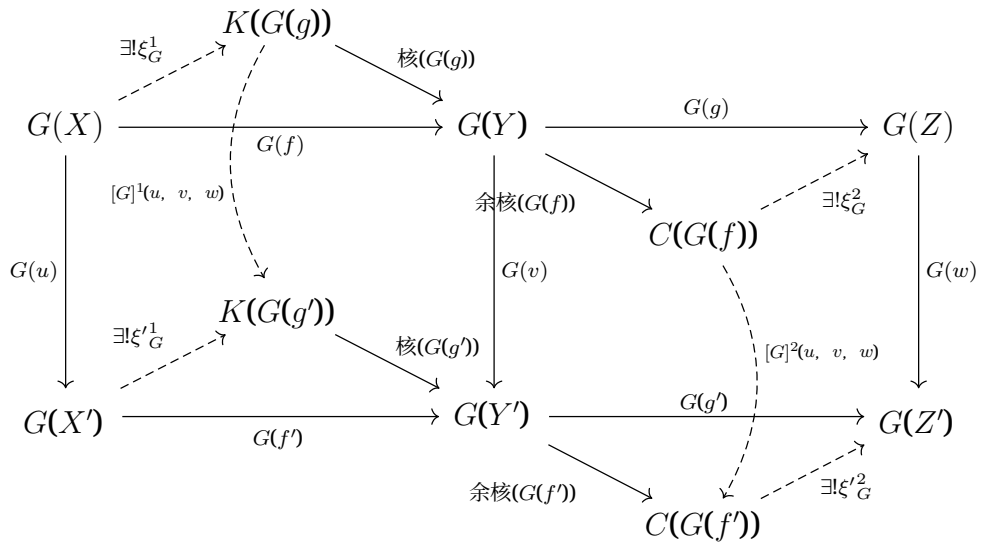
现在，我们将伪余单子 Ω 扩展到更大的基底 $\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$。

构造 4.5。 2-函子 Ω 扩展为一个伪函子

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\mathrm{ex}}: \quad \mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}} & \longrightarrow & \mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}} \\ \mathbb{C} & & \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}) \\ G\left(\Downarrow \alpha\right) H & \mapsto & [G]\left(\Downarrow [\alpha]\right)[H] \\ \mathbb{D} & & \mathrm{Ses}\,(\mathbb{D}) \end{array}$$

在对象上，Ω^{ex} 的作用与Ω相同。给定一个保持正合序列的函子 $G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，我们定义函子 $[G]\colon \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}) \to \mathrm{Ses}\,(\mathbb{D})$，它将短正合列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 映射为正合序列 $G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y) \xrightarrow{G(g)} G(Z)$ 的短正合序列替换。于是，给定 $\mathrm{Ses}\,(\mathbb{C})$ 中从 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 到 $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'$ 的态射 (u, v, w)，我们将 $[G](u, v, w)$ 定义为如下态射

$([G]^1(u,v,w)\ G(v)\ [G]^2(u,v,w))$，定义如下：



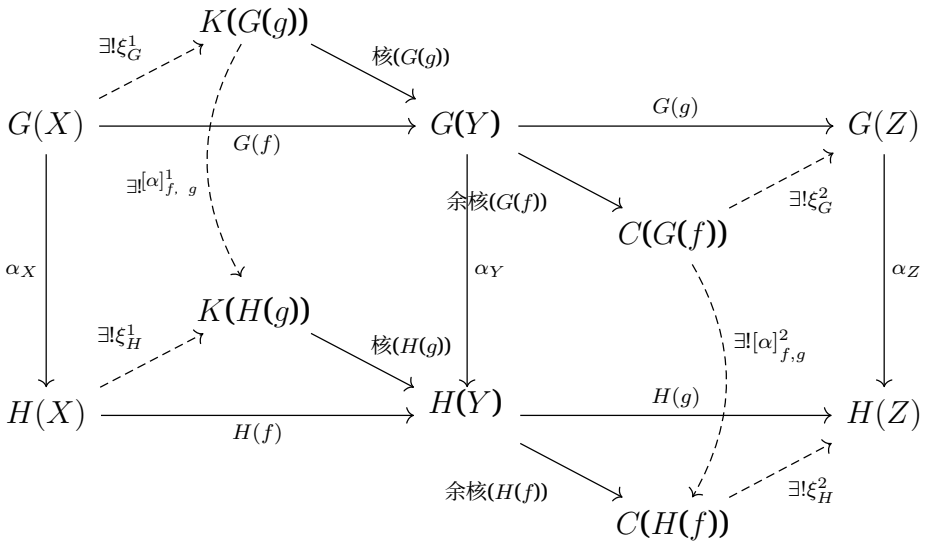
态射 $[G]^1(u,v,w)$ 是从零态射 $G(g')\circ G(v)\circ\ker(G(g)) = G(w)\circ G(g)\circ\ker(G(g))$ 出发，由 $K(G(g'))$ 的泛性质诱导出的唯一态射。对偶地，$[G]^2(u,v,w)$ 也如此。证明 $[G]$ 是一个函子是显而易见的。事实上，这是因为 $[G]^1(u,v,w)$ 和 $[G]^2(u,v,w)$ 是能够填入相应方块的唯一态射，因为 $\ker(G(g'))$ 是单态射，而 $\mathrm{coker}(G(f))$ 是满态射。

注意，当 G 实际上是 **ClIdl** 中的一个态射，因此保持短正合列时，$[G]$ 就与构造 $G\colon \mathrm{Ses}(C) \to \mathrm{Ses}(\mathbb{D})$ 中定义的函子 3.8 相一致。这也得益于我们在注记 4.2 中所作的选择。

现在我们证明，对于每个保持正合序列的函子 G，$[G]$ 也保持正合序列，因此它是$\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$中的一个态射。容易证明，$\mathbf{Ses}(\mathbb{C})$ 中的态射构成的零序列 $(u',\ v',\ w')\circ(u,\ v,\ w)$ 是正合序列，当且仅当中间列中的序列 $v'\circ v$ 是正合序列，且 $K(u') \xrightarrow{\ker(u')} X' \to K(\rho)$ 是一个核；对偶情形也成立。其中，ρ 是唯一适当诱导的态射 $C(v) \to C(w)$。由此容易证明，$[G]$ 保持正合序列。

最后，给定 2-胞腔 $\alpha\colon G \Rightarrow H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ in $\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$，即一个自然变换，我们通过将其在短正合列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 上的分量定义为态射 $([\alpha]^1_{f,g}, \alpha_Y, [\alpha]^2_{f,g})$，构造自然变换 $[\alpha]\colon [G] \Rightarrow [H]\colon \mathbf{Ses}(\mathbb{C}) \to \mathbf{Ses}(\mathbb{D})$

如下给出：

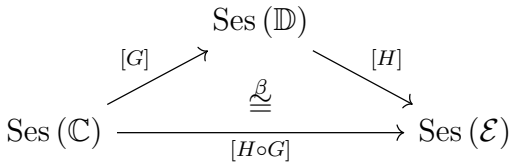


态射$[\alpha]^1_{f,\ g}$是由核$K(H(g))$的泛性质从零态射诱导出的唯一态射

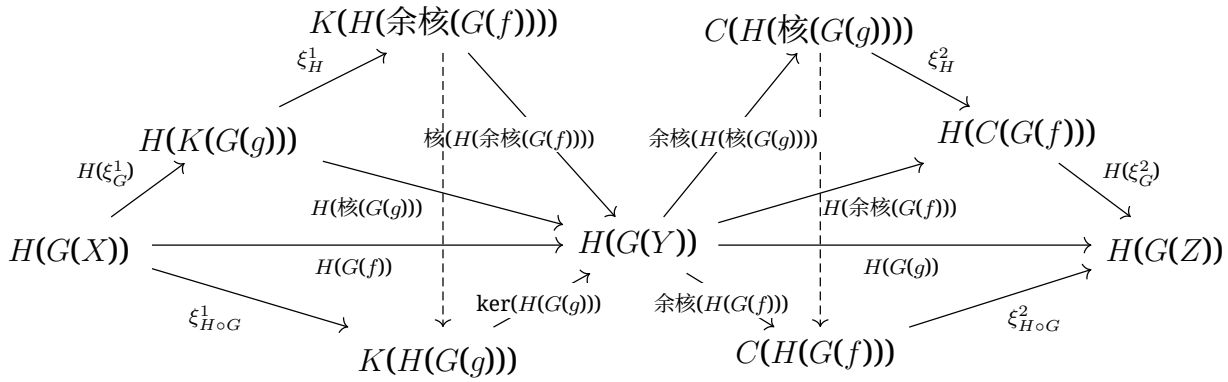
$$H(g)\circ\alpha_Y\circ\ker(G(g))=\alpha_Z\circ G(g)\circ\ker(G(g)).$$

对偶地，对于$[\alpha]^2_{f,\ g}$。证明 $[\alpha]$ 是一个自然变换是显而易见的。事实上，这是因为$[\alpha]^1_{f,\ g}$和$[\alpha]^2_{f,\ g}$是能填入相应交换方块的唯一态射，因为核$(H(g))$是单态射，而余核$(G(f))$是满态射。

接下来，证明 Ω^{ex} 是一个（正规）伪函子是显而易见的。由于我们在注记 4.2 中作出的选择，它保持恒等态射这一点很容易证明。接下来考虑 $\mathbb{C}\xrightarrow{G}\mathbb{D}\xrightarrow{H}\mathcal{E}$ 在 $\mathbf{Clldl}^{\mathrm{ex}}$ 中。我们构造一个自然同构



给定 $\mathbb{C}$ 中的一个短正合列 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$，考虑图表



我们将 $\beta_{f,g}$ of β 的分量定义为上方图表中的虚线态射，这些态射由相关核与余核的泛性质所诱导。这是因为 $H(G(g))\circ\ker(H(\mathrm{coker}(G(f))))$ 是一个零态射，并且

对偶事实。 β 的各个分量都是同构，这是因为我们也可以在上面的图表中导出虚线态射的逆态射。这在很大程度上依赖于以下事实： ξ_G^2 以及因此的 $H(\xi_G^2)$ 反映零态射，以及对偶事实。直接证明 β 是一个自然同构，并且 Ω^{ex} 是一个伪函子。

定理 4.6. 伪函子

$$\Omega^{\mathrm{ex}}: \quad \mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}} \longrightarrow \mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & & \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}) \\ G\left(\overset{\alpha}{\Rightarrow}\right)H & \mapsto & [G]\left(\overset{[\alpha]}{\Rightarrow}\right)[H] \\ \mathbb{D} & & \mathrm{Ses}\,(\mathbb{D}) \end{array}$$

构造 *4.5*扩展为一个伪余单子Ω^{ex} 于 *2*-范畴$\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$ 之上；该范畴由配备闭理想且拥有所有（相对）核与余核的范畴，以及保持正合序列的函子构成。

此外，所有预挠理论（定义在半正合范畴上）都是Ω^{ex}的伪余代数。

证明。我们定义余单位 $\epsilon^{\mathrm{ex}}\colon \Omega^{\mathrm{ex}} \Rightarrow \mathrm{Id}$，使其在 $\mathbb{C} \in \mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$ 上的一般分量由定理 3.9 中的同一函子 $\epsilon_{\mathbb{C}}$ 给出。由于 $\epsilon_{\mathbb{C}}$ 是 ClIdl 中的态射，它也是 $\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$ 中的态射。此外，很容易看出，这个 ϵ^{ex} 对 ϵ 的扩张仍然是 2-自然的。类似地，我们接着定义余乘法 δ^{ex} ，使其在 $\mathbb{C} \in \mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$ 上的一般分量由定理 4.6 中的同一函子 $\delta_{\mathbb{C}}$ 给出。由于 $\delta_{\mathbb{C}}$ 是 ClIdl 中的态射，它也是 $\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$ 中的态射。此外，不难证明，这个 δ^{ex} 对 δ 的扩张仍然是伪自然的。

由于分量 $\delta_{\mathbb{C}}$ 的 δ 保核且保余核，因而保短正合列，所以 $[\delta_{\mathbb{C}}]$ 可直接作用 $\delta_{\mathbb{C}}$ ，无需计算替换。因此，扩展 Ξ^{ex} 的可逆修正 Ξ （定理3.9 ）可以具有与 Ξ相同的分量。随后即可直接证明 Ξ^{ex} 确实是一个修正，并且 $(\Omega^{\mathrm{ex}}, \delta^{\mathrm{ex}}, \epsilon^{\mathrm{ex}}, \Xi^{\mathrm{ex}})$ 是一个伪余单子。

Ω^{ex} 的伪余代数是 $(\mathbb{C}, \mathcal{N}) \in \mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$，配备一个余代数态射$\lambda\colon \mathbb{C} \to \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C})$，其中属于 $\mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$，以及一个自然同构

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & \overset{\lambda_\delta}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle[\lambda]} \\ \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}) & \xrightarrow[\delta_{\mathbb{C}}]{} & \mathrm{Ses}\,(\mathrm{Ses}\,(\mathbb{C})) \end{array}$$

使得三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle\epsilon_{\mathbb{C}}} \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

该图交换，且满足伪余代数公理。由上方的三角关系可知，余代数映射 λ 因此为每个 $X \in \mathbb{C}$ 赋予一个短正合列

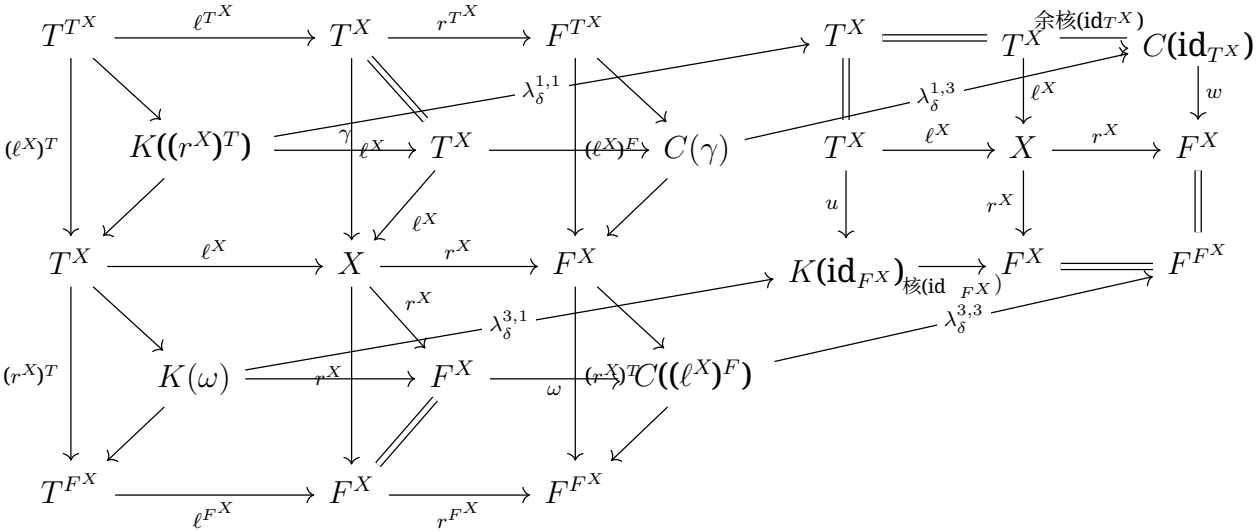
$$T^X \xrightarrow{\ell^x} X \xrightarrow{r^X} F^X$$

其中 X 位于中间；并为 $\mathbb{C}$ 中的每个态射 $h\colon X \to Y$ 赋予 Ses $(\mathbb{C})$中的一个态射

$$\begin{array}{ccccc} T^X & \xrightarrow{\ell^X} & X & \xrightarrow{r^X} & F^X \\ {\scriptstyle h^T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h^F} \\ T^Y & \xrightarrow[\ell^Y]{} & Y & \xrightarrow[r^Y]{} & F^Y \end{array}$$

中间的 h 。

此外，对于每个 $X \in \mathbb{C}$， λ_δ 给出了一个从 Ses 到 Ses $(\mathbb{C})$ 的同构，其定义为



现在我们证明，所有预挠理论（$\mathbb{C}$，$\mathcal{T}$，$\mathcal{F}$）都为 Ω 产生伪余代数$^{\mathrm{ex}}$。当然，（$\mathbb{C}$，$\mathcal{T}\cap\mathcal{F}$）$\in \mathbf{ClIdl}^{\mathrm{ex}}$。我们将余代数态射定义为定理3.9中的同一个函子

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}) \\ & X & & T^X \xrightarrow{\ell^X} X \xrightarrow{r^X} F^X \\ & \downarrow h & \mapsto & {\scriptstyle h^T}\downarrow \quad\quad \downarrow{\scriptstyle h} \quad\quad \downarrow{\scriptstyle h^F} \\ & Y & & T^Y \xrightarrow[\ell^Y]{} Y \xrightarrow[r^Y]{} F^Y \end{array}$$

使用所选的短正合列，以及由预挠理论给出的态射的扭部分和无挠部分。利用我们在构造 λ 4.5 中给出的 Ses（$\mathbb{C}$）中正合序列的刻画，不难证明 λ 保持正合序列。接着，只需对我们在定理 λ_δ 3.9 中构造的自然同构 $\mathbb{C}$进行简单修改，即可得到 $\Omega\mathcal{T}\cap\mathcal{F}$ 的伪余代数（λ， λ_δ，$^{\mathrm{ex}}$）。□

注 4.7。 Ω^{ex} 的伪余代数对应于预挠理论的一种推广。事实上，给定一个伪余代数，其余代数映射

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}) \\ & X & & T^X \xrightarrow{\ell^X} X \xrightarrow{r^X} F^X \\ & \downarrow h & \mapsto & {\scriptstyle h^T}\downarrow \quad\quad \downarrow{\scriptstyle h} \quad\quad \downarrow{\scriptstyle h^F} \\ & Y & & T^Y \xrightarrow[\ell^Y]{} Y \xrightarrow[r^Y]{} F^Y \end{array}$$

使得对于每个 $X \in \mathbb{C}$，$(\ell^X)^F$ null 且 $(r^X)^T$ null。直观地说，这意味着我们不一定为每个对象 $X \in \mathbb{C}$ 都关联一个涉及

一个挠对象和一个无扭对象的短正合列。相反，我们为 X 关联一个涉及一个扭态射和一个无扭态射的短正合列。我们计划在未来的工作中进一步研究这些广义预挠理论。

下面，我们描述一个性质，该性质刻画了 Ω^{ex} 的伪余代数中的预挠理论。

命题4.8。 预挠理论恰好是满足以下条件的Ω^{ex} 伪余代数：余代数映射 $\lambda\colon\ \mathbb{C} \to \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C})$ 保持其像中的短正合列。

证明。如果 λ 保持其像中的短正合列，那么复合 $\mathbb{C} \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}) \xrightarrow{[\lambda]} \mathrm{Ses}\,(\mathrm{Ses}(\mathbb{C}))$ 与定理 3.9 中定义的 $\mathbb{C} \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Ses}\,(\mathrm{Ses}\,(\mathbb{C}))$ 相同，这归功于我们在备注 4.2 中所作的选择（另见构造 4.5）。因此，自然同构 λ_δ 保证了

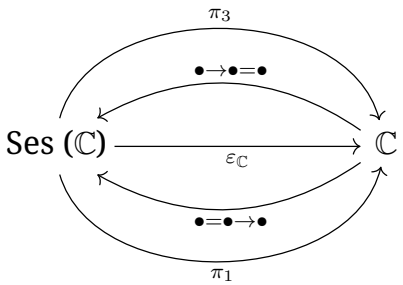
$$T^{T^X} \overset{\lambda_\delta^{1,1}}{\cong} T^X \quad \text{and} \quad F^{T^X} \text{ null object}$$

$$F^{F^X} \overset{\lambda_\delta^{3,3}}{\cong} F^X \quad \text{and} \quad T^{F^X} \text{ null object}$$

由此我们得到一个预挠理论。

利用 λ 的像中的短正合列左侧具有挠对象、右侧具有无挠对象，可以直接证明其逆命题。□

注4.9. 我们观察到，在此设定下，我们有如下五元伴随函子组：



经过一些工作，可以用仅涉及这些伴随的方程，在Ω^{ex} 的伪余代数中刻画预挠理论。

在未来的工作中，我们计划进一步分析可配备与上图类似的五个伴随的图表的一般余单子的性质。

References

[1] E. Caviglia、Z. Janelidze 和 L. Mesiti. 矩形扭理论。预印本，*arXiv:2504.01057*，2025 年。[2] S. E. Dickson. 阿贝尔范畴中的挠理论。美国数学会汇刊，121(1):223–235，1966 年。[3] A. Facchini、C. Finocchiaro 和 M. Gran. 一般范畴中的预挠理论。纯粹与应用代数杂志，225(2):106503，2021 年。[4] M. Grandis. 强非阿贝尔环境中的同调代数。World Scientific Publishing Co.，新加坡，2013 年。[5] M. Grandis 和 G. Janelidze. 从扭理论到闭包算子和分解系统。应用中的范畴与一般代数结构，12(1):89–121，2020 年。

(Elena Caviglia) Department of Mathematical Sciences, Stellenbosch University, South Africa. National Institute for Theoretical and Computational Sciences (NITheCS),Stellenbosch, South Africa.
电子邮件地址: elena.caviglia@outlook.com

(Zurab Janelidze) Department of Mathematical Sciences, Stellenbosch University, South Africa. National Institute for Theoretical and Computational Sciences (NITheCS),Stellenbosch, South Africa.
电子邮件地址: zurab@sun.ac.za

(Luca Mesiti) Department of Mathematical Sciences, Stellenbosch University, Sout h Africa.
电子邮件地址: luca.mesiti@outlook.com