arXiv:2601.11489v1 [math.AT] 16 Jan 2026

拟幺内内 Kan 空间

Trygve Poppe Oldervoll

摘要

我们证明，满足以下条件的半单纯空间可作为∞-范畴的有效模型：i）在同伦意义下具有内角填充子；ii）以弱意义拥有单位元。单位元的存在可以通过各种拟幺性条件来表达，我们比较了文献中提出的三种此类条件的自然推广。这项工作受到 Floer 同伦论应用的启发。

目录

1 引言 12 **单纯集合与空间 4**3 **半 Kan 空间 10**4 **标记内 Kan 空间 15**5 **切片与函子范畴 26**6 **拟幺性条件的比较 33**

参考文献 **44**

1 引言

本文研究将单位编码为性质而非结构的 ∞-范畴模型。为说明这一点，我们来看两种广为人知的 ∞-范畴模型：拟范畴和 Segal 空间。这两种模型都基于单纯对象（集合或空间），其中一个 n-胞腔对应于一串 n 可复合态射。复合结构由面映射编码，而单位结构由退化映射编码。特别地，退化映射 $s_0 : X_0 \to X_1$ 为每个对象编码了一个单位的选取。此外，函子（单纯映射） $F : X \to Y$ 必须尊重这一选取。为减弱单位的刚性，我们考虑半单纯对象。满足拟范畴条件或 Segal 条件类似条件的半单纯对象

可视为表示 ∞-半范畴，即具有复合但不一定具有单位的高阶范畴。为了恢复-范畴理论，我们施加拟幺性条件，以保证单位的存在。事实证明，单位相对于复合的行为保证了：如果单位存在，那么它们就是唯一的。拟幺性已在拟范畴的背景下得到研究 [Hen20] [Ste18] [Tan18], ，也在（高阶）Segal 空间的背景下得到研究[Har15] [Hau21]。此外，在拟范畴模型中， [AB24] 还采用了拟幺性的一个充分条件。本文旨在将拟范畴的拟幺性理论扩展到允许内角在同伦意义下填充的半单纯空间。我们将证明，这为 ∞-范畴理论提供了一个可行的模型，并说明这一背景下不同的拟幺性条件之间的关系。

需要说明的是，我们选择在 ∞-范畴的半单纯空间中开展工作。这意味着我们的理论依赖于一个 ∞-范畴的底层模型。这并无大碍，因为 ∞-范畴的基础理论在其他模型中已经发展得相当成熟，例如 [Lur09]的拟范畴框架。本文的论证和结果以与模型无关的方式呈现。我们认为，我们的结果与 [Maz25], 的观点相契合；作者在那里推测，可以在单纯空间的 ∞-范畴上构造 Joyal 模型结构。本文的主要构造应当被理解为 [Hen20]意义上的∞-范畴上的标记的半单纯空间的弱模型结构；主定理表明，这确实给出了 Cat_∞。由于弱模型 ∞-范畴的理论尚待发展，我们不会用这些术语来陈述结果。不过，我们的许多结果和论证都受到（弱）模型理论的启发。我们也期待本文的方法能够验证 [Maz25]提出的这一推测。

我们研究拟幺半单纯空间的动机源于 Floer 同伦论，在那里，构造 ∞-范畴时会出现这类对象，流范畴便是其中一例。流范畴应被视为流形在“环”中模配边自由生成的相干链复形。它具体体现为一个取值于某个带角流形幺半范畴的富集范畴。在 [AB24], 中，作者构造了一个半单纯集合 Flow ，其 0-单形是流范畴。这里构造面映射相对容易，因为只涉及取全子范畴，和/或限制到流形边界的某些部分。构造 Flow 退化映射则依赖更复杂的几何构造，因此难以为单纯集合构造完整的相干性。证明 Flow 是拟幺的则更容易。

现在我们介绍拟幺性的三种不同条件，并陈述主要的比较结果。我们用 $ss\mathcal{S} = \mathrm{Fun}(\Delta_s^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 表示 ∞半单纯空间的-范畴。推广 [Ste18], 的结果，我们称具有内角填充子的半单纯空间为拟幺的，若其每个顶点都存在一个幂等等价（见定义6.7）。推广 [Tan18], 的结果，我们称映射 $F : X \to Y$ 为拟幺的，若其保留幂等等价。随后，我们用 $\mathcal{IK}_{qu} \subset ss\mathcal{S}$ 表示由拟幺内 Kan 空间及其间的拟幺映射张成的子范畴。

令 $ss\mathcal{S}_+$ 表示 ∞-范畴，其对象为带标记半单纯空间（参见定义 2.2）。我们称带标记半单纯空间 X 为标记内 *Kan*

空间（见定义4.5），如果

1. X 具有内角填充子。

2. 标记边在 X 中是等价（见定义6.3）。3. 标记边的集合满足 2-出-6 性质。

我们将由这类对象张成的全子范畴记作 $\mathcal{IK}_+ \subset ss\mathcal{S}_+$。满足这些条件的带标记半单纯集，恰好是 [Hen20]中所讨论的拟单位对象。特别地，它们是 $ssSet_+$上的弱 Joyal–Lurie 模型结构中的纤维对象。拟幺性的这一概念与 [Har15]中研究的概念密切相关。

给定一个半单纯空间 X，我们可以通过将 X 中所有等价标记出来，在 X 上指定标记。这就定义了一个带标记半单纯空间 $X^\natural$。注意，这一构造并不确定一个函子，因为半单纯映射不必保留等价。

定理 1.1。半单纯空间 X 是拟幺内内 *Kan* 空间，当且仅当 $X^\natural$ 是标记内 *Kan* 空间。拟幺内内 *Kan* 空间之间的映射 $F : X \to Y$ 是拟幺的，当且仅当它可以提升为带标记半单纯空间之间的映射 $F^\natural : X^\natural \to Y^\natural$。

定理 1.2 可以等价地表述为，我们有逆等价

$$U : \mathcal{IK}_+ \leftrightarrows \mathcal{IK}_{qu} : (-)^\natural$$

其中 U 是遗忘函子 $ss\mathcal{S}_+ \to ss\mathcal{S}$的限制。

我们还考察拟幺性的一个充分条件。在 [AB24]中证明了，若半单纯集合 X 存在角填充子，且存在映射 $s_0, s_n : X_n \to X_{n+1}$ 满足预期的单纯恒等式，则 X 可提升为单纯集合。我们将这一条件推广到半单纯空间：若存在映射 X，则称半单纯空间具有外退化，若存在映射 $s_0 s_n : X_n \to X_{n+1}$ 满足单纯恒等式（相差适当的相干同伦）（见定义 6.27）。

定理 1.2。若内 *Kan* 空间 X 具有始对象和终端退化映射，则对于任意顶点 x，边 $s_0 x$ 在 x处是幂等等价。特别地，X是拟幺的。

对于半单纯集合，可以利用 [Ste18] 和 [AB24] 的延拓结果，隐式地进行 inf-范畴论，并使用拟单位拟范畴。目前尚不清楚这类延拓结果能否推广到半单纯空间；换言之，$\mathcal{IK}_{qu}$ 中的每个对象是否都属于限制函子 $s\mathcal{S} \to ss\mathcal{S}$ 的像。我们不再追求这样的结果，而是证明 $\mathcal{IK}_{qu} \simeq \mathcal{IK}_+$ 本身就是进行 ∞-范畴论的合理场所。为此，我们将 $\mathcal{IK}_+$ 与 $\mathcal{CSS}_+ \subset ss\mathcal{S}_+$ 的全子范畴完备半 *Segal* 空间进行比较，后者由 [Har15] 研究。包含 $\mathcal{CSS}_+$ 有一个左伴随 $\mathcal{L}_{\mathcal{CSS}_+} : ss\mathcal{S}_+ \to \mathcal{CSS}_+$，而 [Har15] 的主定理给出了一个等价 $\mathcal{CSS}_+ \simeq \mathrm{Cat}_\infty$。

定理 1.3。 复合函子

$$\mathcal{IK}_{qu} \simeq \mathcal{IK}_{+} \to \mathcal{CSS}_{+} \simeq \mathrm{Cat}_{\infty}$$

实现了对平凡纤维化的局部化。此外，它保留：

1. 其中一个腿是纤维化的拉回。*2. Reedy* 纤维化图表的逆极限。*3.* 指数对象 X^J，其中 J 是半单纯集合。*4.* 切片对象 $X_{p/}$ 和 $X_{/p}$，其中 $p : J \to X$ 是来自半单纯集合的任意映射。

结构安排

本文的结构安排如下：

- 在第2 节中，我们为（带标记的）（半）单纯空间设定记号并介绍基本构造。
- 在第3 节中，我们给出关于半单纯空间几何实现的一些基本结果。
- 在第4节中，我们为标记半单纯空间建立了“弱模型结构”，并以此证明局部化 $\mathcal{T}$的基本性质。
- 在第5 节中，我们研究 $\mathcal{T}$ 关于指数对象和切片的性质。
- 在第6 节中，我们说明不同的拟幺性概念之间的关系，并证明定理1.3 和定理1.2。

致谢

本文的构想源于我与 Alice Hedenlund 合作开展研究期间，在此感谢她与我进行了有益的讨论。我还要感谢 Rune Haugseng 与我讨论 ∞-范畴，并阅读了本文的草稿。

2 单纯集合与空间

本文始终固定一个强不可达基数 κ。我们分别用 *Set* 和Cat 表示由 κ-小集合和范畴构成的大范畴。对于 ∞-范畴，我们采用与模型无关的观点，并假设存在（大的） ∞-范畴 $\mathcal{S} \subset \mathrm{Cat}_{\infty}$，分别由 κ-小空间和 ∞-范畴构成。具体来说，可以固定基于 κ-小单纯集合的拟范畴模型

如 [Lur09]中所述。我们将自由使用关于 ∞-范畴的标准结果，例如 Yoneda 引理和伴随函子定理。关于底层模型，我们的一个关键假设是， Cat_∞ 可以实现为 $\mathcal{S}$ 中由以下对象张成的全子范畴：完备 *Segal* 空间。这一点由 [JT07]证明。全文中，我们将把 $Set \subset \mathcal{S}$ 和 $\mathrm{Cat} \subset \mathrm{Cat}_\infty$ 视为由离散对象张成的全子范畴。

单纯形范畴 $\mathbb{\Delta}$ 的对象为 $[n] = \{0 \leq \cdots \leq n\}$（其中 $0 \leq n$），态射为保序映射。我们用 $\mathbb{\Delta}_s \subset \mathbb{\Delta}$ 表示由单射映射构成的宽子范畴。我们将（半）单纯空间和集合的范畴记为

$$s\mathcal{S} = \mathrm{Fun}(\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) \qquad ss\mathcal{S} = \mathrm{Fun}(\mathbb{\Delta}_s^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$$
$$sSet = \mathrm{Fun}(\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}, Set) \qquad ssSet = \mathrm{Fun}(\mathbb{\Delta}_s^{\mathrm{op}}, Set)\,.$$

在包含 $Set \subset \mathcal{S}$下，我们也将（半）单纯集合视为逐层离散的（半）单纯空间。

设 X 为一个（半）单纯空间。我们用 $X_n = X([n])$ 表示它在 n-单纯形处的取值。通过 Yoneda 嵌入，我们可以将 X 视为函子 $(s)s\mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$；在一个（半）单纯空间处，它取值为

$$X(K) \coloneqq \mathrm{Map}_{s\mathcal{S}}(K, X) = \lim_{\sigma\colon \Delta^n \to K} X_n\,.$$

沿包含 $\mathbb{\Delta}_s^{\mathrm{op}} \subset \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}$ 的限制诱导出一个遗忘函子

$$\mathcal{F}\colon s\mathcal{S} \to ss\mathcal{S}\,.$$

它有左右两个伴随，分别由 Kan 延拓给出，我们将它们记为 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$。 n-单纯形 $\Delta^n \in sSet$ 是 $[n]$ 在 Yoneda 嵌入 $\mathbb{\Delta} \to s\mathcal{S}$ 下的像。同样，半单纯 n-单纯形 $\Delta_s^n \in ssSet$ 是 $[n]$ 在 Yoneda 嵌入 $\mathbb{\Delta}_s \to ss\mathcal{S}$下的像。由此立即可得 $\Delta^n = \mathcal{L}(\Delta_s^n)$。若干基本单纯集合，例如 (i,n)-角 Λ_i^n 和边界 $\partial\Delta^n$，可以通过沿单射映射粘合单纯形构造。这意味着定义它们的余极限图表可提升至 $ss\mathcal{S}$，因此我们有相应的半单纯对象 $\partial\Delta_s^n$ 和 Λ_i^n，s 满足 $\mathcal{L}(\partial\Delta_s^n) = \partial\Delta^n$ 和 $\mathcal{L}(\Lambda_{i,s}^n) = \Lambda_i^n$。我们用 T 表示终端半单纯集合 $T_n = *$。它也是 $\mathcal{F}(\Delta^0)$的底层半单纯集合。

注记 2.1。注意，终对象 T 不 等价于零单纯形Δ_s^0。零单纯形 Δ_s^0 集中在次数 0，这意味着不可能存在映射 $T \to \Delta_s^0$。这是使半单纯对象比其单纯对象对应物更难处理的现象之一：由于次数的原因，映射数量不足。

对于单纯空间 X，我们可以构造其几何实现，记作

$$|X| = \operatorname*{colim}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}}(X)\,.$$

对于半单纯空间 Y，我们可以通过取 $\|Y\|$ 上的余极限来构造实现 $\mathbb{\Delta}_s^{\mathrm{op}}$。根据 [Lur09] 引理6.5.37，包含 $\mathbb{\Delta}_s^{\mathrm{op}} \to \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}$ 是共尾的，因此限制诱导出一个等价

$$\|\mathcal{F}X\| \xrightarrow{\simeq} |X|\,.$$

范畴 $s\mathcal{S}$具有由笛卡尔积给出的闭幺半结构

$$(X\times Y)_n = X_n \times Y_n \qquad\qquad (X^Y)_n = \mathrm{Map}(\Delta^n \times Y, X)\,.$$

在范畴 $ss\mathcal{S}$中，笛卡尔积并非同伦意义上正确的幺半结构，正确的结构应为几何积 $\otimes$，如 [RS71]所述。该结构由在每个变量上保持余极限唯一确定，并且 $\Delta_s^n \otimes \Delta_s^m$是 $\Delta^n \times \Delta^m$中的非退化单形。这个积具有如下性质

$$\mathcal{L}(X \otimes Y) = \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(Y),$$

半单纯集合满足这一性质，这是由 [RS71], 证明的，因此由余极限保持性可知，所有 $ss\mathcal{S}$ 也满足这一性质。我们还得到内部映射对象

$$(X^Y)_n = \mathrm{Map}(\Delta^n \otimes Y, X)\,.$$

回忆一下，空间之间的映射 $f : X \to Y$ 若在π_0上是单射，并且对 X 中任意选取的基点，在所有更高阶同伦群上都是等价，则称为单态射 。这意味着，在等价意义下，f 是 Y 的某些连通分支的包含。对偶地，若 f 在 π_0上是满射，则称为满态射 。任意空间映射 $f : X \to Y$ 都有唯一的分解 $X \to \mathrm{im}(f) \to Y$，即先为满态射，再为单态射。

定义 2.2。 半单纯空间 X 的标记 是空间 $A \to X_1$的一个单态射。带标记的半单纯空间 是一个偶对 (X, A)，其中 A 是 X的一个标记。带标记半单纯空间之间的映射 $(X, A) \to (Y, B)$ 是单纯空间之间的映射 $X \to Y$，使得诱导映射 $A \to X_1 \to Y_1$ 在同伦意义下通过B 分解。

注 2.3。 我们不采用 带标记的纤维化 半单纯空间这一概念，而是像 [Har15], 那样，我们将 $A \to X_1$ 是单态射这一条件纳入定义的一部分。这仅仅意味着，每当我们对带标记单纯集合进行某种构造，而该构造会产生一个非单态射的 $f : A \to X_1$时，我们就用它唯一的像 $\mathrm{im}(f) \to X_1$来替代它。

我们用 $ss\mathcal{S}_+$ 表示带标记的半单纯空间范畴。它有一个显然的遗忘函子

$$U : ss\mathcal{S}_+ \to ss\mathcal{S}$$

它既有左伴随 $X^\flat = (X, \emptyset)$，也有右伴随 $X^\sharp = (X, X_1)$。函子 $(-)^\sharp$ 还有一个右伴随

$$\widetilde{U} : ss\mathcal{S}_+ \to ss\mathcal{S}$$

它将带标记半单纯 (X, A) 映射到 X 中完全标记单形构成的空间，即

$$\widetilde{U}(X)_n = \mathrm{Map}(\Delta_s^{n,\sharp}, X).$$

沿 $\Delta^n{}^{\flat} \to \Delta^n{}^{\sharp}$ 进行限制给出一个映射 $\widetilde{U}(X) \to U(X)$，并且我们可以将 X 恢复为这个推出

$$X \simeq U(X)^{\flat} \coprod_{\widetilde{U}(X)^{\flat}} \widetilde{U}(X)^{\sharp}. \tag{2.4}$$

根据 [Har15]，存在自然的方式来标记 $X \otimes Y$ 和 X^Y，从而在 $\otimes$ 上 $ss\mathcal{S}_+$ 赋予闭幺半结构，使得 U 提升为幺半函子。

定义 2.5。令 $\mathbb{\Delta}_a$ 表示这样的范畴，其对象为 $[n]$，其中 $n \geq -1$，约定 $[-1] = \emptyset$，态射为保序映射。增广单纯空间 的范畴是预层范畴 $s\mathcal{S}_a = \mathrm{Fun}(\mathbb{\Delta}_a, \mathcal{S})$。另外考虑宽子范畴 $\mathbb{\Delta}_{s,\ a} \subset \mathbb{\Delta}_a$，其态射为单射，以及相应的预层范畴 $ss\mathcal{S}_a = \mathrm{Fun}(\mathbb{\Delta}_a, \mathcal{S})$，即增广半单纯空间的范畴。

沿包含 $\mathbb{\Delta}_{(s)} \to \mathbb{\Delta}_{(s),\ a}$ 进行右 Kan 延拓确定了全忠实函子

$$s\mathcal{S} \to s\mathcal{S}_a, \quad ss\mathcal{S} \to ss\mathcal{S}_a$$

其像由满足 $X([-1]) \simeq *$ 的对象 X 张成。

增广单纯范畴 $\mathbb{\Delta}_a$ 具有由有序集合的 连接 给出的幺半结构，$[n] \star [m] = [n + m + 1]$，其单位为 $[-1]$。由于两个单射映射的连接仍然是单射映射，这将 $\mathbb{\Delta}_{s,a}$ 上的结构限制为幺半结构。通过 Day 卷积，这在 $s\mathcal{S}_a$ 上诱导出一个幺半结构；该结构由其分别保持每个变量中的余极限以及 $-1 \leq n$、m 的性质唯一确定。Day 卷积可以明确计算为

$$(J \star K)_n \simeq \coprod_{i+j=n-1} J_i \times K_j. \tag{2.6}$$

特别地，我们注意到，如果 $J_{-1} \simeq K_{-1} \simeq *$，则 $(J \star K)_{-1} \simeq *$，因此 $\star$ 限制为 $s\mathcal{S}$ 上的幺半结构。

类似地，我们在 $ss\mathcal{S}_a$ 上得到一个 Day 卷积幺半结构，该结构限制为 $ss\mathcal{S}$ 上的幺半结构，也由公式（2.6）给出。由于包含映射 $,_a \to \mathbb{\Delta}_a$ 是幺半的，沿此函子的左 Kan 延拓获得了一个自然的幺半结构，该结构限制为 $\mathcal{L} : ss\mathcal{S} \to s\mathcal{S}$ 上的幺半结构。特别地，我们有自然等价

$$\mathcal{L}(J \star K) \simeq \mathcal{L}(J) \star \mathcal{L}(K).$$

若 (J, A) 和 (K, B) 是带标记（半）单纯空间，则通过映射可在 $J \star K$ 上得到一个标记

$$A \amalg B \to J_1 \amalg K_1 \amalg J_0 \times K_0 = (J \star K)_1.$$

如 [Lur09], 中一样，我们也考虑以下适用于半单纯空间的另一种连接 其公式为

$$J \diamond K = J \coprod_{(J\times K\times \Delta^{\{0\}})} (J\times K\times \Delta^1) \coprod_{(J\times K\times \Delta^{\{1\}})} K\,.$$

两种连接的概念引出了两种切片的概念。函子

$$J \star - \colon s\mathcal{S} \to s\mathcal{S}_{J/} \tag{2.7}$$

保持余极限，因此具有一个右伴随。我们将该右伴随在映射 $p : J \to X$ 处的取值记为 $X_{p/}$，称为在 p下的切片。明确地说， $X_{p/}$ 由以下公式给出

$$(X_{p/})_n = \mathrm{Map}(J \star \Delta^n, X) \times_{\mathrm{Map}(J,X)} \{p\}\,.$$

将（标记）半单纯空间的连接替换 （2.7）后，我们得到（标记）半单纯空间中关于映射 $p : J \to X$ 的在其下的切片概念。

另一种切片类似地定义为以下函子的右伴随

$$J \diamond - \colon s\mathcal{S} \to s\mathcal{S}_{J/}\,,$$

我们将映射 $p : J \to X$处的取值记为 $X^{p/}$ 。

研究这两种不同切片概念是有充分理由的。切片 $X_{/p}$ 从单纯观点来看更为自然，因为 $\Delta^{n-1}_s \star \Delta^{m-1}_s = \Delta^{n+m-1}_s$，例如当 $J = \Delta^0$时，

$$(X_{/p})_n = X_{n+1} \times_{X_0} \{p\}\,.$$

要明确描述 $X^{p/}$ 的单形，就需要描述 X^{Δ^1}的单形，这涉及将圆柱体 $\Delta^n \times \Delta^1$分解。切片 $X_{p/}$ 还有一个很大的优点：它对半单纯空间也有定义；而 $X^{p/}$ 在这里则更难理解，因为用于定义 $J \diamond K$ 的映射并非半单纯映射。或许可以通过引入一些因子 $T^\sharp$来解决这个问题，但这会让切片 $X^{p/}$ 的明确描述变得更加复杂。

另一方面，切片 $X^{p/}$从范畴论的角度来看才是正确的切片。下面的引理表明， $W^{p/}$ 才是在完备 Segal 空间 W中对余极限进行内部推理时所需的正确切片。（例如，它与 [Ras18] 和 [MW21]中使用的切片一致。）

引理 2.8. 设 W 是一个单纯空间， $x \in W_0$ 是一个顶点。则下图是一个拉回。

$$\begin{array}{ccc} W^{x/} & \longrightarrow & W^{\Delta^1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ev_0} \\ \{x\} & \longrightarrow & W \end{array}$$

设 J 是一个单纯空间，$p\colon J \to W$ 是一个映射。我们用 $\tilde{p}$ 表示由 p 确定的 X^J 中的点。则下图是一个拉回。

$$\begin{array}{ccc} W^{p/} & \longrightarrow & (W^J)^{\tilde{p}/} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & W^J \end{array}$$

证明。 利用连接和指数对象的泛性质，我们得到

$$\begin{aligned} W^{p/}(K) &\simeq \{p\} \times_{W(J)} W(J \diamond K) \\ &\simeq \{p\} \times_{W(J)} W(J) \times_{W(J\times K)} W(J \times K \times \Delta^1) \times_{W(J\times K)} W(K) \\ &\simeq \{p\} \times_{W^J(K)} W^{J\times\Delta^1}(K) \times_{W^J(K)} W(K). \end{aligned}$$

这些等价在 K 中是自然的，因此我们得到

$$W^{p/} = \Delta^0 \times_{W^J} W^{J\times\Delta^1} \times_{W^J} W.$$

这给出了 $J = \Delta^0$ 的情形；通过粘贴论证，该结果对任意 J 都成立。

□

注 2.9。 特别地，如果 W 是完备 Segal 空间，那么 $W^{x/}$ 在点 $y\colon \Delta^0 \to W$ 处的纤维由 $W^{\Delta^1} \to W \times W$ 在 (x,y) 处的纤维给出，因此，按定义，其零空间就是映射空间 $\mathrm{Map}_W(x,y)$。

最后，我们考虑增广半单纯空间的**自由切片**。对于 $J \in ss\mathcal{S}_a$，函子

$$J \star -\colon ss\mathcal{S}_a \to ss\mathcal{S}_a$$

保持余极限，并将其右伴随在对象 X 处的值记作 $X_{J/}$。按定义，它具有

$$\mathrm{Map}(K, X_{J/}) \simeq \mathrm{Map}(J \star K, X).$$

与普通切片一样，$X_{J/}$ 在变量 X 上是协变函子性的并保持极限，而在变量 J 上是反变函子性的，并将余极限映射为极限。由于 $[-1]$ 是 $\mathbb{\Delta}_a$ 中的始对象，在 $[-1]$ 处的求值是左伴随，其伴随函子将空间 S 映射为在 S 处取值为 S 的常值增广半单纯空间。对于一个对象 $X \in ss\mathcal{S}_a$ 和一个点 $x \in X_{-1}$，我们通过拉回定义 X_x

$$\begin{array}{ccc} X_x & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{*} & \xrightarrow{\underline{x}} & \underline{X_{-1}} \end{array}$$

其中右侧的垂直映射是该伴随的单位。通过在 $[-1]$ 处计算这个拉回，我们看到 X_x 是一个半单纯空间。X_x 的这一构造关于 $ss\mathcal{S}_a$ 中的带基点对象是自然的。根据定义，我们有以下引理。

引理 2.10. 对于半单纯空间 J 和 X，有 $(X_{J/})_{-1} = \mathrm{Map}(J,X)$。利用这一识别，我们有自然等价

$$(X_{J/})_p \simeq X_{p/}\,.$$

切片 $X_{/J}$ 有一个对称定义，它满足显然的性质。

3 半 Kan 空间

在转向 ∞-范畴之前，我们先说明满足 Kan 条件的半单纯空间如何为 $\mathcal{S}$ 提供一个合理的模型。我们先回顾 ∞-范畴中提升性质的基础知识。

定义 3.1. 设 $j\colon J \to K$ 和 $f\colon X \to Y$ 是 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射。我们称 j 相对于 f 具有**左提升性质**，或者等价地，称 f 相对于 j 具有**右提升性质**，如果对于如下任意实线图表，都存在一个虚线箭头使图表交换。

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle j}\downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle f} \\ J & \longrightarrow & Y \end{array} \tag{3.2}$$

等价地，这意味着空间映射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(J,X) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(K,X) \times_{\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(K,Y)} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(J,Y) \tag{3.3}$$

是满态射。如果（3.2）中的提升在同伦意义下唯一（即映射（3.3）是一个等价），我们称 j 与 f **左正交**。

定义 3.4. 设 S 是 ∞-范畴 $\mathcal{C}$中的一族态射。若态射 f 属于 $\mathcal{C}$，且 f 对 S中的每个 $j\colon K \to J$ 都具有右提升性质，则称 f 为 S-**纤维化**。若 $\mathcal{C}$ 有终对象 T，则称对象为 S-**纤维对象**，如果唯一映射 $X \to T$ 是一个 S-纤维化。

注记 3.5. S-纤维化的态射族在（超限）复合、拉回和收缩下封闭。与 S正交的映射族也具有同样性质；此外，它在 $\mathrm{Ar}(\mathcal{C})$中的极限下封闭。

定义 3.6. 对于 ∞-范畴 $\mathcal{C}$中的一族态射 S，若每个 S-纤维化 $f\colon X \to Y$ 都对 j具有右提升性质，则称态射 $j\colon J \to K$ 为 S-**余纤维化**。我们用 S-cof 表示 S-余纤维化组成的类。若 $\mathcal{C}$ 有始对象 $\emptyset$，则称 $\mathcal{C}$ 中的对象 J 为 S-**余纤维对象**，如果唯一态射 $\emptyset \to X$ 是一个 S-余纤维化。

注记 3.7。S-余纤维化在（超限）复合、推出和收缩下封闭，因此构成一个弱饱和类。根据定义，每个

中的态射 S 都是一个 S-余纤维化。对于 S 满足小对象论证的类（见 [Maz25]），S-余纤维化类实际上是包含 S的最小弱饱和类。本文考察的所有提升性质都具有这一性质。

在本节中，我们将说明，Kan–Quillen 模型结构在 $sSet$ 上的通常提升性质如何推广，从而使 $ss\mathcal{S}$ 成为空间理论的一个合理模型。

定义 3.8. 考虑 $ss\mathcal{S}$中的以下态射族:

1. $J_{KQ} = \left\{\Lambda^n_{s,i} \to \Delta^n, 0 \le i \le n\right\}$.
2. $I_{KQ} = \left\{\partial\Delta^n_s \to \Delta^n_s, 0 \le n\right\}$.

我们将 J_{KQ}-纤维化称为*Kan* 纤维化，将 J_{KQ}-余纤维化称为无害，并将 I_{KQ}-纤维化称为平凡 Kan 纤维化。

注记 3.9. 由于边界包含在推出和收缩下生成半单纯集合之间所有逐层单射，I_{KQ}-余纤维化包含所有半单纯集合之间的逐层单射。特别地，$J_{KQ} \subset I_{KQ}$-余纤维化，因此每个平凡 Kan 纤维化也必定是 Kan 纤维化。

注记 3.10. 由于带有一个单射边的推出在包含 $Set \to \mathcal{S}$下保持不变，任何源逐层离散的 I_{KQ}-余纤维化，其目标也必定逐层离散。特别地，余纤维对象（即 $\emptyset \to J$为余纤维化的对象）恰好是半单纯集合。

定义 3.11. 我们称半单纯空间 X 为半 *Kan* 空间，如果映射 $X \to T$ 是平凡 Kan 纤维化。

现在我们回顾 [Lur18] 中关于半单纯对象的几何实现的一些结果。

引理 3.12 ([Lur18] 引理 A.5.3.7)。 半 *Kan* 空间之间的平凡 *Kan* 纤维化会在几何实现上诱导一个等价。

引理 3.13 ([Lur18] 引理 A.5.4.3)。 对于任意半单纯空间 X，存在一个半单纯集合 X 和一个平凡 *Kan* 纤维化 $X \to X$。

引理 3.14. 若半单纯空间的一个拉回方块中

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \longrightarrow & W \end{array}$$

有 Y、Z 和 W 是半 *Kan* 空间，且 p 是 *Kan* 纤维化，那么经过几何实现后，该方块仍然是一个拉回方块。

证明。 应用 [Lur18]引理 A.5.4.1 于超完备 ∞-拓扑斯 $\mathcal{S}$。 □

如果存在一个函子 $\mathcal{I}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}$ 是一个全序序数，并且 $\mathcal{I}$ 中的每个非恒等态射都映射为 $\mathcal{A}$ 中的非恒等态射，则称范畴 $\mathcal{I}$ 是逆的。

定义 3.15. 设 $\mathcal{I}$ 是一个逆范畴，$\mathcal{C}$ 是一个具有极限的 ∞-范畴，且 $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 是一个图表。对于一个 $i \in \mathcal{I}$，i 处的匹配态射是诱导映射

$$F(i) \to M_F(i) \coloneqq \lim\left((\mathcal{I}_{i/})^{\triangleright} \to \mathcal{I} \xrightarrow{F} \mathcal{C}\right),$$

其中 $(\mathcal{I}_{i/})^{\triangleright} \subset \mathcal{I}_{i/}$ 是由非始对象张成的全子范畴。

定义 3.16. 设 $\mathcal{I}$ 是一个逆范畴，$\mathcal{C}$ 是一个具有极限的 ∞-范畴，且 S 是 $\mathcal{C}$中的一类态射。若函子范畴中从 $\mathcal{I}$ 到 $\mathcal{C}$ 的函子之间的自然变换 $\eta : F \to G$对于每个 $i \in \mathcal{I}$，其映射

$$F(i) \to M_F(i) \times_{M_G(i)} G(i)$$

是一个 S-纤维化。若图表 $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 是 *S-Reedy* 纤维，则从终对象处的常值函子 T 到它的唯一自然变换是一个 S-Reedy 纤维化。

引理 3.17. 设 $\mathcal{I}$是一个逆范畴，$\mathcal{C}$ 是一个具有极限的 ∞-范畴，且S 是 $\mathcal{C}$中的一类态射。若 $F \to G$ 是 $\mathcal{C}$中 $\mathcal{I}$ 个图表之间的一个 *S-Reedy* 纤维化，则诱导映射 $\lim(F) \to \lim(G)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 S- 纤维化。

证明。 令 $J \to K$ 为 S中的任意映射。根据伴随，提升问题

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \lim(F) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ K & \longrightarrow & \lim(K) \end{array}$$

在 $\mathcal{C}$ 中等价于提升问题

$$\begin{array}{ccc} \underline{J} & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{K} & \longrightarrow & G \end{array} \tag{3.18}$$

在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$中。选取一个映射 $\mathcal{I}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}$是一个全序序数。这就在 $\mathcal{I}$ 的对象上赋予了一个全序，我们可以对其进行归纳。对于一个对象 $i \in \mathcal{I}$，记 $\mathcal{I}_{<i} \subset \mathcal{I}$ 为由严格小于i 的对象张成的全子范畴。归纳假设我们已经将其限制到范畴 3.18后，构造出了（ $\mathcal{I}_{<i}$）中的提升。注意，由于$\mathcal{I}$ 中的非恒等态射会使序关系递增，用于定义匹配态射的函子 $(\mathcal{I}_{i/})^{\triangleright} \to \mathcal{I}$

经由 $\mathcal{I}_{<i}$ 分解。因此，借助伴随， $\mathcal{I}_{<i}$ 上的提升给出一个提升

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & M_F(i) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ K & \longrightarrow & M_G(i). \end{array}$$

要将提升扩展到 i 上，根据伴随关系，只需解决以下提升问题

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & F(i) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ K & \longrightarrow & M_F(i) \times_{M_G(i)} G(i) \end{array}$$

在 $\mathcal{C}$ 中。由于 $F \to G$ 是一个 S-Reedy 纤维化，因此我们可以解决该问题。由归纳法可知，我们便能将提升扩展到所有 $\mathcal{I}$ 上。 □

引理 3.19。 设 $\mathcal{I}$ 是一个逆范畴，且 $F : \mathcal{I} \to ss\mathcal{S}$ 是一个 J_{KQ}-*Reedy* 纤维图表。那么自然映射

$$\| \lim(F) \| \to \lim \|F\|$$

是一个等价。

证明。 沿用 $\mathcal{I}_{<i}$ 引理 3.17证明中的记号，注意到范畴$\mathcal{I}_{<i}$ 本身是一个逆范畴。假设归纳地，我们已经构造出一个I_{KQ}-Reedy 纤维化

$$\overline{F}_{<i} \to F_{<i}$$

其目标是 F 在 $\mathcal{I}_{<i}$上的限制，且其源取值于半单纯集合。为了将这个自然变换扩展到 i 上，我们使用引理 3.13选取一个半单纯集合 $F(i)$，使其具有一个平凡 Kan 纤维化

$$\overline{F}(i) \to F(i) \times_{M_F(i)} M_{\overline{F}(i)}.$$

通过归纳法，这会产生一个 I_{KQ}-reedy 纤维化 $F \overline{\to} F$，其中 F 的取值为半单纯集合。每个自然变换 $F \to F \to T$ 都是 J_{KQ}- Reedy 纤维化，因此 F 是 J_{KQ}-Reedy 纤维的。现在假设在归纳过程中我们已经构造了一个函子

$$F'_{<i} : \mathcal{I}_{<i} \to sSet$$

以及自然等价 $\mathcal{F} \circ F'_{<i} \simeq F_{<i}$。 于是，根据 Reedy 纤维性，映射

$$\overline{F}(i) \to M_{\overline{F}}(i) \simeq \mathcal{F}(M_{F'}(i))$$

是一个 Kan 纤维化，因此根据 [Ste18], 我们可以在 $F(i)$ 上选取与此$\overline{F}$映射相容的单纯形结构。由归纳法可得图表 $F' : \mathcal{I} \to sSet$以及等价 $\mathcal{F} \circ F' \simeq F$。由于 $\mathcal{I}$ 是一个逆范畴， $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, sSet)$ 上的 Reedy 模型结构与单射模型结构依照 [BR 13]相同。特别地，这意味着 F' 的严格极限在 Kan–Quillen 模型结构中也是一个同伦极限，因此该极限在局部化 $sSet \to \pi_0\mathcal{S}$ 到空间的同伦范畴时得以保留。此局部化经由几何实现函子 ∞-范畴 $\mathcal{S}$ 进行分解，并且由于同伦范畴能够检测等价，比较映射

$$|\lim F'| \xrightarrow{\simeq} \lim |F'|$$

是 $\mathcal{S}$ 中的一个等价。由于遗忘函子 $\mathcal{F}$ 保持极限和实现的同伦类型，我们同样得到

$$\|\lim \overline{F}\| \xrightarrow{\simeq} \lim \|\overline{F}\|.$$

现在我们将引理 3.17应用于 J_{KQ}-Reedy 纤维化 $F \to F,^{\overline{\ }}$ 并使用引理3.12，从而得出下方方形中的竖直映射是等价。

$$\begin{array}{ccc} \|\lim \overline{F}\| & \xrightarrow{\simeq} & \lim \|\overline{F}\| \\ \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ \|\lim F\| & \longrightarrow & \lim \|F\| \end{array}$$

根据等价的三取二性质，该方形中的最后一个映射也必然是等价。

□

引理 3.20。 如果 X 是一个半 *Kan* 空间，且 J 是一个半单纯集合，则任意 $J \to X$ 都沿着伴随单位 $u : J \to \mathcal{F}\mathcal{L}(J)$ 延拓。

证明。 取一个平凡纤维化 $X \to X,^{\overline{\ }}$只需证明对于 X 一个 Kan 半单纯集合，结论成立。根据 [RS71]， X 提升为一个单纯集合 X'。由伴随关系，提升问题

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathcal{F}(X') \\ {\scriptstyle u}\downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{L}\mathcal{F}(J) & & \end{array}$$

等价于

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(J) & \longrightarrow & X'. \\ {\scriptstyle \mathcal{L}(u)}\downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{L}\mathcal{F}\mathcal{L}(J) & & \end{array} \tag{3.21}$$

根据之字形恒等式， $\mathcal{L}(J)$ 处的余单位给出了垂直映射的一个收缩，因此总能解出提升问题（3.21）。 □

4 标记内 Kan 空间

本节将在带标记的半单纯空间范畴上建立“弱模型结构”，并证明它呈现了 Cat_∞。其定义依赖于余纤维化类和拟纤维化类，下面将对它们进行定义。

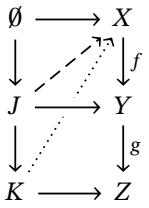
定义 4.1。 生成标记余纤维化 是由以下I_{JL} 个 $ss\mathcal{S}_+$ 中的映射组成的集合：

1. $\partial\Delta_s^{n,\flat} \to \Delta_s^{n,\flat}$, $n \geq 0$.
2. $\Delta_s^{1,\flat} \to \Delta_s^{1,\sharp}$.

我们称 I_{JL}-纤维化 为标记平凡纤维化，并称 I_{JL}-余纤维化 为标记余纤维化。

引理 4.2。 若 f 和 g 是 $ss\mathcal{S}_+$ 中可复合的态射，且 f 和 $g\circ f$ 是平凡纤维化，则 g 也是平凡纤维化。

证明。 设 $J \to K$ 是半单纯集合之间的标记余纤维化，且 $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} X$ 是可复合态射，并且 f 和 $g\circ f$ 是平凡纤维化。考虑以下图表，其中水平态射是任意的。



虚线提升存在，因为 f 是平凡纤维化，而 $\emptyset \to J$ 是标记余纤维化。点线提升存在，因为 $J \to K$ 是标记余纤维化，而 $g\circ f$ 是平凡纤维化。沿着 f 推进点线提升即可解出所需的提升问题，从而表明 g 是平凡纤维化。 □

注记 4.3. 由于 I_{JL} 中的映射都是逐级单射，因此， I_{JL} 中的任意推出、撤回或复合映射也都是逐级单射。因此，根据注记3.7，每个标记余纤维化都是逐级单射。反过来，利用推出分解（2.4）并通过附加胞腔，标记半单纯集合之间的任意逐级单射映射都是标记余纤维化。至于 I_{KQ}，余纤维对象恰好是标记半单纯集合。

定义 4.4. 标记角包含 $(\Lambda_{i,s}^n, A) \to (\Delta_s^n, B)$ 称为可容许的，当且仅当 $A = B \cap (\Lambda_{i,s}^n)_1$，并且满足以下条件之一

1. $A = \emptyset$和 $0 < i < n$,
2. B 由边 $\{0,1\}$ 和 $i = 0$ 组成,

3. 或者 B 由边 $\{n-1,n\}$ 和 $i=n$ 组成。

定义 4.5。 令 J_{JL} 表示由以下态射组成的带标记半单纯集合态射族:

1. 可容许角包含。
2. $S_{2/6}:(\Delta^3_s,\{\{0,2\},\{1,3\}\})\to\Delta^{3,\sharp}_s$.

我们称 J_{JL}-纤维化为标记内纤维化，称 J_{JL}-余纤维化为带标记内角无奇异态射。

注记 4.6。 我们不需要纳入映射 $S^i_{2/3}:(\Delta^2,A)_s\to\Delta^{2,\ \sharp}_s$，$i=0,\ 1,\ 2$，它们出现在 [Har15], 中，因为三取二性质最终会被证明严格强于二取三性质。特别是，三取二性质将保证边是标记边当且仅当它们是等价（见命题6.21）。

定义 4.7 （[Har15]）。 我们称带标记半单纯空间 W 是一个完备半 *Segal* 空间，如果 $W\to T^\sharp$ 与 J_{JL}正交。我们用 $ss\mathcal{S}_+$ 表示由完备半 Segal 空间张成的 $\mathcal{CSS}_+$全子范畴。

设 W 是完备半 Segal 空间。与未标记内角包含正交，确保 W 满足 Segal 条件

$$W_n\simeq W_1\times_{W_0}W_1\times_{W_0}\dots\times_{W_0}W_1\,.$$

如 [Har15], 所示，与带标记角正交意味着 W 中的所有标记边相对于 W 上的半范畴结构都是可逆的（这里的可逆是指 [Har15] 1.4.1 中的含义，不要与定义 6.3 中的等价混淆）；而与 $S_{2/6}$ 正交则意味着所有可逆边都是标记边。根据 [Har15], , 所有包含 $\Delta^0_s\to\Delta^{n,\ \sharp}_s$ 都是带标记内角无奇异，与它们正交意味着 $W(\Delta^{\bullet,\sharp}_s)$ 是取值为 W_0 的常值半单纯空间。由于标记边恰好就是可逆边，这与 Segal 空间的完备性条件类似。

由于子范畴 $\mathcal{CSS}_+$ 被定义为关于一类态射的局部对象，包含 $\mathcal{CSS}_+\to ss\mathcal{S}_+$ 具有左伴随，我们将其记为 $\mathcal{L}_{\mathcal{CSS}_+}$。

定义 4.8. 如果一个标记半单纯空间之间的映射在 $\mathcal{L}_{\mathcal{CSS}_+}$ 下的像是一个等价，则称其为 $\mathcal{CSS}_+$-等价 。

注记 4.9。 由于 $\mathcal{L}_{\mathcal{CSS}_+}$ 保持余极限， $\mathcal{CSS}_+$-等价构成的集合对所有余极限封闭。由于 $\mathcal{CSS}_+$ 中的等价满足三取二性质， $\mathcal{CSS}_+$-等价也满足该性质。这使得 $\mathcal{CSS}_+$-等价类是强饱和的。通过小对象论证（例如参见 [Maz25] 3.6），$\mathcal{CSS}_+$-等价类实际上是包含 J_{JL} 的最小强饱和类。

如 [Har15], let

$$\mathcal{F}_+ : s\mathcal{S} \to ss\mathcal{S}_+ \tag{4.10}$$

记带标记遗忘函子，它将一个单纯集合映射为半单纯集合 $\mathcal{F}(X)$，其标记由（$s_0 : X_0 \to X_1$的像）确定。 [Har15] 的主定理 $\mathcal{F}_+$ 及其右伴随 $\mathcal{R}_+$ 给出一个范畴等价

$$\mathcal{L}_{\mathcal{CSS}_+} \circ \mathcal{F}_+ : \mathcal{CSS} \leftrightarrows \mathcal{CSS}_+ : \mathcal{R}_+ , \tag{4.11}$$

其中， $\mathcal{CSS}$ 表示完备 Segal 空间的全子范畴，它又等价于 Cat_∞。

现在我们为带标记双半单纯空间建立 Joyal–Tierney 微积分，并用它给出受限局部化的显式公式

$$\mathcal{L}_{\mathcal{CSS}_+} : \mathcal{IK}_+ \to \mathcal{CSS}_+ . \tag{4.12}$$

这里使用的技巧是对 [JT07] 中所用技巧的推广。定义带标记双半单纯空间的范畴

$$bss\mathcal{S}_+ = \mathrm{Fun}(\mathbb{\Delta}_s^{\mathrm{op}}, ss\mathcal{S}_+) .$$

Yoneda 嵌入的反向 $\mathbb{\Delta} \to ss\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}$的自由完备化，因此限制确定了一个等价

$$\mathrm{Fun}^R(ss\mathcal{S}^{\mathrm{op}}, ss\mathcal{S}_+) \xrightarrow{\sim} bss\mathcal{S}_+, \tag{4.13}$$

其中， $\mathrm{Fun}^R(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 表示极限保持函子（右伴随）的全子范畴。右 Kan 延拓给出（4.13）的逆，并将它们复合得到一个函子

$$bss\mathcal{S}_+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}^R(ss\mathcal{S}^{\mathrm{op}}, ss\mathcal{S}_+) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(ss\mathcal{S}^{\mathrm{op}}, ss\mathcal{S}_+). \tag{4.14}$$

对于对象 $Z \in bss\mathcal{S}_+$，记

$$Z/- : ss\mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to ss\mathcal{S}_+$$

为 Z 在 (4.14) 下的取值。根据构造，每个 $Z/-$都有一个左伴随，我们记作

$$-\backslash Z : ss\mathcal{S}_+ \to ss\mathcal{S}^{\mathrm{op}}$$

表示这个左伴随的对偶。 $Z/-$和 $-\backslash Z$ 都会将余极限映射为极限。

注记 4.15。 对于固定的 $X \in ss\mathcal{S}_+$，术语 $X\backslash Z$ 对 Z 是协变自然的。作为函子 $bss\mathcal{S}_+ \to ss\mathcal{S}$，它可以描述为复合函子

$$X\backslash - : bss\mathcal{S}_+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}^R(ss\mathcal{S}^{\mathrm{op}}, ss\mathcal{S}_+) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(ss\mathcal{S}^{\mathrm{op}}, ss\mathcal{S}_+) \xrightarrow{ev_X} ss\mathcal{S}_+ . \tag{4.16}$$

每个连通分支都保持极限，因此，通过相容地选取函子（4.16）的左伴随，可以构造出一个双函子

$$-\square-: ss\mathcal{S}_+ \times ss\mathcal{S} \to bss\mathcal{S}$$

保持每个变量中的余极限，并由函子 $X\backslash-$ 是 $X\square-$ 的右伴随且 $-/Y$ 是 $-\square Y$ 的右伴随唯一确定。

注 4.17。 基本上根据定义，对于 $Z \in bss\mathcal{S}_+$，带标记半单纯空间 Z/Δ_s^m 是 Z 在 $[m] \in \mathbb{\Delta}_s^{\mathrm{op}}$ 处的取值。利用定义 $-\backslash Z$ 的伴随关系，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}_{ss\mathcal{S}}(\Delta_s^m, J\backslash Z) &\simeq \mathrm{Map}_{ss\mathcal{S}_+}(J, Z/\Delta_s^m)\\ &\simeq \mathrm{Map}_{ss\mathcal{S}_+}(J, Z([m]))\,.\end{aligned}$$

这意味着，双函子 $\square$ 可以通过分别保持每个变量中的余极限而被唯一刻画，

$$\mathrm{Map}(\Delta_s^{n,\flat}\square\Delta_s^m, Z) \simeq Z([m])([n])$$

并且 $\mathrm{Map}(\Delta_s^{1,\sharp}\square\Delta^m, Z)$ 是 $Z([m])([1])$ 中标记边的子空间。

定义 4.18。 我们称带标记双半单纯空间的映射 $Z \to W$ 为垂直纤维化，如果对于任意映射 $j: J \to K \in I_{JL}$，诱导映射

$$K\backslash Z \to K\backslash W \times_{J\backslash W} J\backslash Z \tag{4.19}$$

是半单纯空间的 Kan 纤维化。如果唯一映射到终对象是垂直纤维化，则称 Z 是垂直纤维的 。

注 4.20。 由于 $K\backslash-$ 和 $J\backslash-$ 保持极限，特别是将终对象映到终对象，因此对于所有 $J \to K \in I_{JL}$， Z 是垂直纤维当且仅当 $K\backslash Z \to J\backslash Z$ 是 Kan 纤维化。

注 4.21。 由于 $-\backslash Z$ 和 $-\backslash W$ 将余极限映到极限，并且由于 Kan 纤维化类在拉回下封闭，$X \to Y$ 是垂直纤维化当且仅当（4.19）对于 $j: J \to K$ 任意标记余纤维化都是 Kan 纤维化。

考虑函子

$$p^*: ss\mathcal{S}_+ = \mathrm{Fun}([0], ss\mathcal{S}_+) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{\Delta}_s^{\mathrm{op}}, ss\mathcal{S}_+)$$

由与唯一函子 $\mathbb{\Delta}_s^{\mathrm{op}} \to [0]$进行前复合所确定。它有一个左伴随 $p_!$，将 $ss\mathcal{S}_+$ 中的半单纯对象映到其余极限。换言之， $p_!Z$ 是半单纯对象 $Z(\Delta_s^\bullet) = Z/\Delta_s^\bullet$的实现。利用这些伴随以及从 $\Delta^{n,\flat}$ 出发的映射在 $ss\mathcal{S}_+$中保持余极限这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}(\Delta_s^{n,\flat}, p_!Z) &\simeq \|\,\mathrm{Map}(\Delta_s^{n,\flat}, Z/\Delta_s^\bullet)\|\\ &\simeq \|\,\mathrm{Map}(\Delta_s^\bullet, \Delta_s^{n,\flat}\backslash Z)\|\\ &\simeq \|\Delta_s^{n,\flat}\backslash Z\|\,.\end{aligned} \tag{4.22}$$

$p_!Z$ 的标记由每个 $Z(\Delta^m_s)$中标记边的余极限的像所确定，因此，按照与上述类似的论证， $p_!Z$ 由.....的像标记

$$\|\Delta^{1,\sharp}\backslash Z\| \to \|\Delta^{1,\flat}_s\backslash Z\|\,. \tag{4.23}$$

垂直纤维性条件的作用在于，它为我们提供了足够多的 Kan 纤维化，使极限能够与几何实现交换，从而控制 $p_!Z$。考虑 $ssSet_+$上的预层 $\mathrm{Map}(-, p_!Z)$ 和 $\|-\backslash Z\|$。将其限制到由 $\Delta^n,_s{}^\flat$（对于 $n \geq 0$）和 $\Delta^1,_s{}^\sharp$ 生成的全子范畴 $\mathcal{C} \subset ssSet_+$ 上时，我们有一个自然变换

$$\alpha : \|-\backslash Z\| \to p_!Z(-)$$

在 $\mathcal{C}$ 上的预层，由 (4.22) 和 (4.23) 给出。由于 $p_!Z(-)$ 是从其到 $\mathcal{C}$的限制右 Kan 延拓，因此我们可以唯一地将 α 延拓为 $ssSet_+$上的预层自然变换。

引理 4.24。 若 Z 是垂直纤维的双半单纯空间，且 J 是半单纯集合，则上面构造的自然变换给出一个等价

$$p_!Z(J) = \|J\backslash Z\|.$$

证明。 函子 $J \mapsto p_!Z(J)$将余极限映射为极限。由垂直纤维性、引理 3.14和引理 3.19， $J \mapsto \|J\backslash Z\|$ 将一条边为标记余纤维化的推出映射为拉回，并将沿标记余纤维化的序列余极限映射为逆极限。带标记半单纯集的范畴由对象 $\Delta^n,_s{}^\flat$和$\Delta^1,_s{}^\sharp$ 在此类余极限下生成。由 (4.22) 可知，预层在 $\Delta^n,_s{}^\flat$上相同，因此只剩下 $\Delta^1,_s{}^\sharp$。这里仅需证明 (4.23) 到其像中的等价，即单态射。

映射 $\Delta^1,_s{}^\sharp\backslash Z \to \Delta^{1,s}{}^\flat\backslash Z$ 由 Z的垂直纤维性，是半 Kan 空间之间的 Kan 纤维化；并且它是逐层单态射，因为在层级 m的映射是 Z/Δ^m_s中标记边的包含。根据引理 3.20，我们可以将任意映射 $\Delta^0_s \to \Delta^1,_S{}^\flat\backslash Z$ 沿着 $\Delta^0_s \to T$延拓。然后，我们可以使用引理 3.14将 (4.23) 的任意纤维计算为一个 Kan 空间的几何实现

$$F = T \times_{\Delta^{1,\flat}_s\backslash Z} \Delta^{1,\sharp}_s\backslash Z\,,$$

它的每个 $F_n = \emptyset$或 $*$都如此。由于 F 是 Kan 的，只有在 $F = \emptyset$或 T 时才会发生这种情况。 □

引理 4.25。 存在一个保极限函子

$$t^* : ssS_+ \to bssS_+$$

由自然等价唯一确定

$$J\backslash t^*X \simeq \widetilde{U}(X^J)\,.$$

证明。 考虑函子

$$\begin{aligned} ss\mathcal{S}_+ \times ss\mathcal{S}_+^{\mathrm{op}} &\to ss\mathcal{S} \\ (X, J) &\mapsto \widetilde{U}(X^J). \end{aligned}$$

由于 U 是右伴随，因此它分别保持每个变量中的极限，所以在伴随关系下，它对应于一个保持极限的函子

$$ss\mathcal{S}_+ \to \mathrm{Fun}^R(ss\mathcal{S}_+^{\mathrm{op}}, ss\mathcal{S}).$$

目标与 $bss\mathcal{S}_+$ 等价，其逆由 $Z \mapsto -\backslash Z$给出。 □

以下引理是联系右提升性质与正交性的关键。

引理 4.26。 若 $A \to B$ 是带标记半单纯集合之间的带标记内角无奇异映射，且 $J \to K$ 是带标记半单纯集合之间的标记余纤维化，则诱导映射

$$A \otimes K \coprod_{A \otimes J} B \otimes J \to B \otimes K$$

也是带标记内角无奇异映射。

证明。 此结果在范畴 $ssSet_+$ 中由 [Hen20] 53.10 和 5.5.6 得出。由备注 3.7可知，带标记半单纯集合之间的任意带标记内角无奇异映射都是逐级单射。范畴 $ssSet_+$ 中一条边为逐级单射的推出，在将其视为 $ss\mathcal{S}_+$中的图表时仍是推出，因此该结果也适用于$ss\mathcal{S}_+$。 □

推论 4.27。 若 $X \to Y$ 是标记内纤维化，且 $j : J \to K$ 是标记半单纯集合之间的标记余纤维化，则诱导映射

$$f : X^K \to X^J \times_{Y^J} Y^K \tag{4.28}$$

也为标记内纤维化。此外，若 j 是标记内可逆无能，则 f 是平凡纤维化。

证明。 设 $s : S \to T$ 是半单纯集合的任意标记内可逆无能映射。由伴随性，只需证明 $X \to Y$ 具有相对于

$$S \otimes K \coprod_{S \otimes J} T \otimes J \to T \otimes K$$

的右提升性质；根据引理 4.26，该映射是标记内可逆无能。若 j 是标记内可逆无能，我们可以取任意单态射作为 s。 □

推论 4.29。 若 $X \to Y$ 是标记内纤维化，且 $j : J \to K$ 是标记半单纯集合之间的标记余纤维化，则诱导映射

$$f : \widetilde{U}(X^K) \to \widetilde{U}(X^J \times_{Y^J} Y^K)$$

是一个 Kan 纤维化。此外，如果 j 是带标记内角无奇异的，那么 f 是一个平凡纤维化。

证明。 根据 [Har15] 2.1.7 和 2.1.8 的证明，映射 $\Lambda^{n,i}_{s}{}^{\sharp} \to \Delta^{n,i}{}^{\sharp}$ 均为标记的 $\widetilde{}$内可逆无能，因此根据伴随， U 将标记的内纤维化映为 Kan 纤维化。映射 $\partial\Delta^{n,\sharp} \to \Delta^{n,\sharp}$ 均为标记余纤维化，因此根据伴随， $\widetilde{U}$ 将平凡纤维化映为平凡纤维化。结论随即由推论4.27得出。 □

推论 4.30。 若 X 是标记内 *Kan* 空间，则标记双半单纯空间 t^*X 是垂直纤维的。

证明。 根据定义 t^*X 的泛性质，只需证明：对于半单纯集合之间任意的标记余纤维化 $J \to K$ ，映射

$$\widetilde{U}(X^K) \to \widetilde{U}(X^J)$$

是 Kan 纤维化。这由推论4.29立即得出。 □

考虑复合函子

$$\mathcal{T} : \mathcal{IK}_+ \subset ss\mathcal{S}_+ \xrightarrow{t^*} bss\mathcal{S}_+ \xrightarrow{p_!} ss\mathcal{S}_+ .$$

我们将证明 $\mathcal{T}$ 等价于受限局部化（4.12）。

推论 4.31。 设 X 为标记内 *Kan* 空间， J 为带标记半单纯集。那么我们有自然等价

$$\mathcal{T}(X)(J) \simeq \|\widetilde{U}(X^J)\| .$$

证明。 由推论 4.30，标记双半单纯空间 t^*X 在竖直方向上是纤维的。对于任意标记半单纯集合 J，由引理 4.25 可得

$$\mathcal{T}(X)(J) \simeq p_! t^*X(J) \simeq \|J \backslash t^*X\| \simeq \|\widetilde{U}(X^J)\| .$$

□

推论 4.32。 假设在标记半单纯空间的一个拉回方块中

$$\mathcal{Q} = \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \longrightarrow & Y , \end{array}$$

各对象都是标记内 *Kan* 空间，且映射 f 是标记内纤维化。那么方块 $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$也是一个拉回方块。

证明。只需检查，当我们在 $\mathcal{T}(\mathcal{Q})(J)$ 处取值时，得到的是一个拉回方块： J 任意标记单形。根据推论4.31， $\mathcal{T}(\mathcal{Q})(J)$ 等价于以下拉回方块的几何实现。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}(W^J) & \longrightarrow & \widetilde{U}(X^J) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{U}(Z^J) & \longrightarrow & \widetilde{U}(Y^J) \end{array}$$

根据推论4.29，该图表中的对象都是半 Kan 空间，竖直映射是 Kan 纤维化。因此，根据引理3.14，拉回在几何实现下保持不变。

□

推论 4.33。设 $\mathcal{I}$ 是一个逆范畴，且 $F\colon \mathcal{I} \to ss\mathcal{S}_+$ 是一个 J_{JL}-*Reedy* 纤维化图表。则各项 $F(i)$以及极限 $\lim(F)$ 都是标记内 *Kan* 空间，并且诱导映射

$$\mathcal{T}(\lim(F)) \to \lim(\mathcal{T}(F)) \tag{4.34}$$

是一个等价。

证明。每个 $F(i)$ 都是 F 在 $\mathcal{I}_{\leq i}$上的限制的极限，并且可以验证$F_{\leq i} \to T$ 是一个 J_{JL}-Reedy 纤维化，因此由引理 3.17，极限上的诱导映射$F(i) \to T$ 是一个标记内纤维化。对 $i = \infty$ 同样适用，由此可得 $\lim F \to T$ 是一个标记内纤维化。

要证明（4.34）是一个等价，只需证明在任意标记半单纯空间 J上取值时它都是等价。由于取值和指数化保极限，我们可以利用推论 4.31将所讨论的映射识别为

$$\|\widetilde{U}(\lim F^J)\| \to \lim \|\widetilde{U}(F^J)\|\,. \tag{4.35}$$

~由于指数化和U保极限，因此图表$\widetilde{U}(F^J)\colon \mathcal{I} \to ss\mathcal{S}$ 在i处的匹配映射可以识别为

$$\widetilde{U}(F(i)^J) \to \widetilde{U}(M_F(i)^J)\,,$$

根据推论，这是一个 Kan 纤维化4.29 ，且 J_{JL}-Reedy 纤维化 F。这表明 $\widetilde{U}(F^J)$是 J_{KQ}-Reedy 纤维化的，因此根据引理 3.19，映射（4.35）是一个等价。

□

注意，对于任意带标记半单纯集 J，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}(J, t^*X(\Delta^n_s)) &\simeq \mathrm{Map}(\Delta^n_s, J\backslash t^*X) \\
&\simeq \mathrm{Map}(\Delta^n_s, \widetilde{U}(X^J)) \\
&\simeq \mathrm{Map}(\Delta^{n,\sharp}_s \otimes J, X) \\
&\simeq \mathrm{Map}(J, X^{\Delta^{n,\sharp}_s})\,.
\end{aligned}$$

此外，这些等价关于 J 也是自然的，因此我们可以将 t^*X 视为 $ss\mathcal{S}_+$中的半单纯对象 $X^{\Delta^\bullet_{,\,s}{}^\sharp}$，并将 $p_!t^*X$ 视为该对象的实现。该对象的零层是 $X^{\Delta^0_s} \simeq X$，因此通过包含到余极限中，我们得到一个映射

$$u_X\colon X \to \mathcal{T}(X)\,.$$

这一构造对于 X也是自然的，这意味着它扩展为一个自然变换 $u\colon id \to \mathcal{T}$。

引理 4.36. 对于标记内 *Kan* 空间 X，映射 $u_X : X \to \mathcal{T}(X)$ 是一个平凡 *Kan* 纤维化。

证明。 设 $J \to K$ 是标记半单纯集合之间的一个标记余纤维化。在 $X(J)$ 的每个连通分支中选取一个基点，即可得到自然投影 $X(J) \to \pi_0 X(J)$ 的一个截面，而根据定义，该自然投影是满态射。考虑由所有方块均为拉回所定义的以下空间图表。

$$\begin{array}{ccccc} X(K)' & \longrightarrow & X(K) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \mathcal{T}(X)(K) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0 X(J) & \longrightarrow & X(J) & \longrightarrow & \mathcal{T}(X)(J) \end{array} \tag{4.37}$$

为证明该结论，我们必须证明 $X(K) \to P$ 是满态射。由于空间的满态射在基变换下保持不变，映射 $P' \to P$ 和$X(K)' \to X(K)$ 均为满态射，因此由三取二，只需证明$X(K)' \to P'$ 是满态射。根据推论4.31， P' 等价于以下拉回

$$\pi_0 X(J) \times_{\|\widetilde{U}(X^J)\|} \|\widetilde{U}(X^K)\| .$$

根据 u 的构造，我们可以将 $\pi_0 X(J)$ 看作集中在零次的半单纯集合，而用于构造上述拉回的映射则是映射的实现

$$\pi_0 X(J) \to X(J) \to \widetilde{U}(X^J), \tag{4.38}$$

其中第二个因子是 0-单形的包含。常值半单纯集合 $\pi_0 X(J)$ 等价地为 $\mathcal{FL}(\pi_0 X(J))$，因此根据引理 3.20 以及 $\widetilde{U}(X^J)$ 是内 Kan 空间这一事实，我们可以将（4.38）延拓为一个映射

$$\pi_0 X(J) \to \widetilde{U}(X^J),$$

其实现产生一个与（4.38）等价的映射。由于 $\pi_0 X(J)$ 是半 Kan 空间，而 $\widetilde{U}(X^K) \to \widetilde{U}(X^J)$ 是半 Kan 空间之间的 Kan 纤维化，根据引理 3.14 可知，拉回 $\pi_0 X(J) \times_{\widetilde{U}(X^J)} \widetilde{U}(X^K)$ 在实现下保持不变。因此，我们可以将映射 $X(K)' \to P'$ 识别为以下对象的实现

$$X(K)' \to \pi_0 X(J) \times_{\widetilde{U}(X^J)} \widetilde{U}(X^K). \tag{4.39}$$

为了证明半单纯空间的一个映射在几何实现后变成满态射，只需证明该映射在 0-单形上的映射是满态射。在 0-单形上，（4.39）由下式给出

$$X(K)' \to \pi_0 X(J) \times_{X(J)} X(K),$$

这是一个等价，因为（4.37）的左侧矩形是一个拉回。 □

定义 4.40。 标记半单纯空间之间的一个 $\Delta^{1,\sharp}_{,s}$-同伦，是两个映射 $f, g\colon X \to Y$ 之间的映射 $H\colon X \otimes \Delta^{1,\sharp}_{,s} \to Y$，它沿着 $id \otimes d_i\colon X \otimes \Delta^0_s \to X \otimes \Delta^{1,\sharp}_{,s}$ 分别限制为 f 和 g。

定义 4.41。 带标记半单纯空间之间的映射 $f\colon X \to Y$ 若存在映射 $g\colon Y \to X$ 以及 $\Delta^{1,\sharp}_{,s}$-同伦 $g\circ f \sim id_X$ 和 $f\circ g \sim id_Y$，则称其为 $\Delta^{1,\sharp}_{,s}$-同伦等价。

由引理 4.26可知，包含 $id \otimes d_i\colon X \otimes \Delta^0_s \to X \otimes \Delta^{1,\sharp}_{,s}$ 之一是带标记内角无奇异，因此当 X 逐层离散时，它特别是一个 $\mathcal{CSS}_+$-等价。任意 X 都是逐层离散对象的余极限；由于 $\otimes$ 在每个变量上都保余极限，$X \to X \otimes \Delta^{1,\sharp}_{,s}$ 总是一个 $\mathcal{CSS}_+$-等价。因此，任何 $\Delta^{1,\sharp}_{,s}$-同伦等价也是一个 $\mathcal{CSS}_+$-等价。

引理 4.42。 标记内 *Kan* 空间之间的平凡纤维化 $f\colon X \to Y$ 是一个$\mathcal{CSS}_+$-等价。

证明。 首先，假设 X 和 Y 都是逐层离散的。于是，映射 $f\colon X \to Y$是弱 Joyal–Lurie 模型结构中双纤维对象之间的平凡纤维化。根据 [Hen20], 平凡纤维化也是同伦等价，并且弱 Joyal–Lurie 模型结构中的同伦恰好是 $\Delta^{1,\sharp}_{\text{-同伦},s}$ 正如上文所述，$\Delta^{1,\sharp}_{\text{-同伦}_s}$ 等价是 $\mathcal{CSS}_+$-等价。

如果 X 和 Y 是任意的标记内 Kan 空间，则底层半单纯空间上的映射 $U(X) \to U(Y)$ 可以建模为 $\mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}_s, sSet)$中的垂直纤维对象之间的垂直纤维化。通过忘却目标中的退化映射，这产生了一个双半单纯集的映射 $U(f)\colon U(X) \to U(Y)$。利用伴随

$$\mathrm{Map}(\Delta^1_s, U(\overline{X})/\Delta^m_s) \simeq \mathrm{Map}(\Delta^m, \Delta^1_s\backslash U(\overline{X}))\,,$$

我们可以通过标记所有单纯形来标记半单纯集合 $U(X)/\Delta^m_s$

$$\Delta^m_s \to \Delta^1_s\backslash U(\overline{X})$$

其在几何实现上诱导的映射

$$\|\Delta^m_s\| \to \|\Delta^1_s\backslash U(\overline{X})\| \simeq X(\Delta^{1,\flat}_s)$$

经由 X的标记分解。对 Y 做同样的操作，会得到一个标记双半单纯集的映射 $\overline{f}\colon X \to Y$，使得 $p_!f \simeq f$。我们进一步声称，f 是垂直纤维对象之间的垂直纤维化。由于我们假设 $U(f)$是垂直纤维化，因此只需检查这些映射

$$\Delta^{1,\sharp}_s\backslash\overline{Y} \to \Delta^{1,\flat}_s\backslash\overline{Y},$$
$$\Delta^{1,\sharp}_s\backslash\overline{X} \to \Delta^{1,\sharp}_s\backslash\overline{Y} \times_{\Delta^{1,\flat}_s\backslash\overline{Y}} \Delta^{1,\flat}_s\backslash\overline{X}\,,$$

是 Kan 纤维化。这是因为我们根据几何实现定义了标记，而角包含在几何实现下会成为等价。

设 $J \to K$ 是带标记半单纯集之间的标记内无害映射。由于 Y 是标记内 Kan 空间，映射

$$Y(K) \to Y(J)$$

在连通分支上是满射。由于 Y 是垂直纤维的，我们可以利用引理 4.24 将其写成映射的几何实现

$$K\backslash\overline{Y} \to J\backslash\overline{Y}, \tag{4.43}$$

而且它是 Kan 半单纯集之间的 Kan 纤维化。由于 (4.43) 是 Kan 纤维化，且在连通分支上诱导满射，因此它必然在 0-胞腔上也是满射。由于零号顶点的包含 $\Delta^0_s \to \Delta^m_s$是无害的，由 Kan 纤维性可知，(4.43) 在所有 m-胞腔上也都是满射，其中m。由伴随性可知，这意味着每一行 Y/Δ^m_s都是标记内 Kan。

现在设 $J \to K$ 是带标记半单纯集之间的任意标记余纤维化。由于 f 是平凡纤维化，映射

$$X(K) \to X(J) \times_{Y(J)} Y(K) \tag{4.44}$$

在连通分支上是满射。由于 f 是垂直纤维化，我们可以利用引理 3.14 和 4.24 将 (4.44) 写成 Kan 纤维化的几何实现

$$K\backslash\overline{X} \to J\backslash\overline{X} \times_{J\backslash\overline{Y}} K\backslash\overline{Y}.$$

如上所述，对所有 m，此映射在 m-单形上都是满射，因此每一行

$$\overline{f}/\Delta^m_s : \overline{X}/\Delta^m_s \to \overline{Y}/\Delta^m_s$$

都是逐层离散标记内 Kan 空间之间的平凡纤维化，因此由本证明的第一部分可知，它是一个 $\mathcal{CSS}_+$ 等价。因此，$f \simeq p_! f$ 是 $\mathcal{CSS}_+$ 等价的余极限，故其自身也是一个 $\mathcal{CSS}_+$-等价。 □

推论 4.45. 对于标记内 *Kan* 空间 X，映射 $u_X : X \to \mathcal{T}(X)$ 唯一地经由一个等价 $\widetilde{u}_X : \mathcal{L}_{\mathcal{CSS}_+}(X) \to \mathcal{T}(X)$ 分解。

证明。 该分解存在，因为 $\mathcal{T}(X)$ 是完备半 Segal 空间。映射 $\widetilde{u}_X$ 是一个 $\mathcal{CSS}_+$ 等价，这是由三取二性质得到的，因为 $X \to \mathcal{T}(X)$ 是一个平凡 Kan 纤维化，因此根据引理 4.42，它是一个等价。 □

由于每个标记完备半 Segal 空间也是标记内 Kan 空间，我们得到一个受限局部化

$$\mathcal{T} : \mathcal{IK}_+ \leftrightarrows \mathcal{CSS}_+ : i_{\mathcal{CSS}_+}.$$

推论 4.46。 限制函子 $\mathcal{T}: \mathcal{IK}_+ \to \mathcal{CSS}_+$ 呈现了关于平凡纤维化的局部化。

证明。 记 $\mathcal{L}_w: \mathcal{IK}_+ \to \mathcal{IK}_+[w^{-1}]$ 为对平凡纤维化的局部化。由引理 4.42，内 Kan 空间之间的平凡纤维化都是 $\mathcal{CSS}_+$ 等价，因此根据局部化的泛性质， $\mathcal{L}_{\mathcal{CSS}_+}$ 的限制可分解为

$$\mathcal{IK}_+ \xrightarrow{\mathcal{L}_w} \mathcal{IK}_+[w^{-1}] \xrightarrow{F} \mathcal{CSS}_+ .$$

现在我们断言，复合映射

$$G: \mathcal{CSS}_+ \xhookrightarrow{i_{\mathcal{CSS}_+}} \mathcal{IK}_+ \xrightarrow{\mathcal{L}_w} \mathcal{IK}_+[w^{-1}]$$

是 F 的逆。由 $\mathcal{L}_{\mathcal{CSS}_+} \circ i_{\mathcal{CSS}_+} \sim id$ 可立即得出关系 $F \circ G \sim id$。对于另一个方向，考虑以下交换图表。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{IK}_+ & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \mathcal{CSS}_+ & \xrightarrow{i_{\mathcal{CSS}_+}} & \mathcal{IK}_+ \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}_w} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}_w} \\
\mathcal{IK}_+[w^{-1}] & \xrightarrow{F} & \mathcal{CSS}_+ & \xrightarrow{G} & \mathcal{IK}_+[w^{-1}]
\end{array}$$

由于自然变换 $u: id \to \mathcal{T}$ 的各个连通分支都是平凡纤维化，经函子复合后的变换

$$\mathcal{L}_w(u): \mathcal{L}_w \to \mathcal{L}_w \circ \mathcal{T} \simeq G \circ F \circ \mathcal{L}_w$$

是自然等价。于是，由局部化泛性质的唯一性部分可得 $G \circ F \sim id$。

□

5 切片与函子范畴

由于我们对 $\mathcal{T}$ 作为在纤维化处局部化的描述，我们可以说明$\mathcal{T}$ 在某些右伴随构造下的表现。特别地，我们将讨论指数对象和切片。切片的情形对流范畴 [HO] 的应用尤其重要，因为切片支配着极限和余极限。证明 ∞流范畴的 -范畴是稳定的，一个核心环节是确定最基本的极限和余极限。

本节中，我们注意到弱模型结构的一个典型特征：只要我们将上纤维对象（逐层离散）映射到纤维对象（带标记内 Kan 空间），构造就会表现良好。

推论 5.1。 设 X 是一个带标记内 *Kan* 空间， J 是一个带标记半单纯集合。那么自然映射

$$\mathcal{T}(X^J) \to \mathcal{T}(X)^J$$

是一个等价。

证明。 自然映射来自一个 (colim lim → lim colim) 比较。在任意带标记半单纯集 S 上求值，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(X^J)(S) &\simeq \|\widetilde{U}((X^J)^S)\| \\ &\simeq \|\widetilde{U}(X^{J\otimes S})\| \\ &\simeq \mathcal{T}(X)(J\otimes S) \\ &\simeq \mathcal{T}(X)^J(S)\,.\end{aligned}$$

这里，我们利用 X^J 是一个标记内 Kan 空间这一事实，由推论4.27 得出，然后两次应用推论4.31 。 □

引理 5.2. 设 W 是一个标记完备半 *Segal* 空间，且 $J \to K$ 是一个 $\mathcal{CSS}_+$-等价。则限制诱导出标记完备半 *Segal* 空间之间的等价 $W^K \to W^J$ 。

证明。 由引理4.26的伴随性可知， $W^K \to W^J$ 与J_{JL} 正交，只要 $J \to K$ 是逐层离散对象之间的标记余纤维化。将此应用于 $\emptyset \to J$ 可知，只要 W^J 是逐层离散的， J 就是完备带标记半 Segal 空间。由于 $\mathcal{CSS}_+$ 对极限封闭，且逐层离散对象在余极限下生成 $ss\mathcal{S}_+$ ，并且 $W^{(-)}$ 将余极限映为极限，这表明任意 W^J 都是标记完备半 Segal 空间。

类似地，当 $J \to K \in J_{JL}$时，由引理4.26 的伴随性可知，$W^K \to W^J$ 与所有逐层离散对象之间的标记余纤维化正交。将此应用于 $\emptyset \to A$ 即可得到等价

$$W^K(A) \simeq W^J(A)\,.$$

现在，使 $W^K \to W^J$ 成为等价的映射类 $J \to K$ 强饱和，且包含 J_{JL}，因此也包含所有 $\mathcal{CSS}_+$-等价。 □

回忆一下， $\mathcal{L}\colon ss\mathcal{S} \to s\mathcal{S}$ 由沿着 $\mathbb{\Delta}_s \to \mathbb{\Delta}$的左 Kan 延拓给出，而 $\mathcal{R}_+\colon ss\mathcal{S}_+ \to s\mathcal{S}$ 是带标记遗忘函子（4.10）的右伴随，该伴随构造于 [Har15]。

推论 5.3。 若 J 是半单纯集合，且 X 是标记内 *Kan* 空间，则存在一个等价

$$\mathcal{R}_+\mathcal{T}\left(X^{J^\flat}\right) \to \left(\mathcal{R}_+\mathcal{T}(X)\right)^{\mathcal{L}(J)}$$

完备 *Segal* 空间之间的等价。此外，这个等价对 X 和 J 都是自然的。

证明。 由于 X 是一个标记内 Kan 空间， $\mathcal{T}(X)$ 是一个完备半 Segal 空间。根据 [Har 15] 引理 3.4.1，存在自然的 $\mathcal{CSS}_+$等价 $J^\flat \to \mathcal{F}_+\mathcal{L}(J)$，因此结合推论 5.1 和引理5.2可得等价

$$\mathcal{T}(X^{J^\flat}) \simeq \mathcal{T}(X)^{J^\flat} \simeq \mathcal{T}(X)^{\mathcal{F}_+\mathcal{L}(J)}\,. \tag{5.4}$$

根据 [Har15]引理 3.4.2，函子 $\mathcal{F}_+$ 具有弱幺半结构，其中每个

$$\mathcal{F}_+(Y) \otimes \mathcal{F}_+(Z) \to \mathcal{F}_+(Y \times Z)$$

是一个 $\mathcal{CSS}_+$ 等价。固定 Z后，我们得到右伴随上的一个诱导自然变换

$$\mathcal{R}_+(W)^Z \to \mathcal{R}_+(W^{\mathcal{F}_+ Z}), \tag{5.5}$$

只要 W 是完备带标记半 Segal 空间，我们就可以将 $\mathcal{R}_+$ 应用于（5.4），并进一步复合

$$\mathcal{R}_+\mathcal{T}(J^\flat) \simeq \mathcal{R}_+\left(\mathcal{T}(X)^{\mathcal{F}_+\mathcal{L}(J)}\right) \simeq \mathcal{R}_+\mathcal{T}(X)^{\mathcal{L}(J)},$$

其中最后一个等价是 5.5（对 $W = \mathcal{T}(X)$ 和 $Z = \mathcal{L}(J)$而言）。 □

引理 5.6。 对于 J 和 K 单纯集合，存在自然映射

$$J \diamond K \to J \star K \tag{5.7}$$

它们是 $\mathcal{CSS}$-等价。换言之，任意完备 *Segal* 空间都正交于（5.7）。

证明。 这由 [Lur09] 引理 4.2.1.2 的证明得出，关键在于内角无定形态射是 $\mathcal{CSS}$-等价，并且$\mathcal{CSS}$-等价的集合在余极限下闭。

□

设 J 是一个未标记半单纯集合， W 是一个完备半 Segal 空间。通过映射链

$$\mathrm{Map}(J^\flat, W) \xleftarrow{\simeq} \mathrm{Map}(\mathcal{F}_+\mathcal{L}(J), W) \simeq \mathrm{Map}(\mathcal{L}(J), \mathcal{R}_+W),$$

任意 $p : J^\flat \to W$ 都确定一个映射 $\overline{p} : \mathcal{L}(J) \to \mathcal{R}_+W$。

推论 5.8. 在上述情形下，我们有一串自然等价

$$\mathcal{R}_+(W_{p/}) \simeq \mathcal{R}_+(W)_{\overline{p}/} \simeq \mathcal{R}_+(W)^{\tilde{p}/},$$

它与到 $\mathcal{R}_+(W)$ 的投影相容。

证明. 首先注意到，由于完备 Segal 空间范畴在形成指数对象和拉回时封闭，由引理 2.8 可知 $\mathcal{R}_+(W)^{p/}$ 也是一个完备 Segal 空间。

对于每个 n，沿着 $\mathcal{CSS}$-等价作拉回

$$\mathcal{L}(J) \diamond \Delta^n \to \mathcal{L}(J) \star \Delta^n$$

确定一个等价

$$(\mathcal{R}_+(W)_{\overline{p}/})(\Delta^n) \to (\mathcal{R}_+(W)^{\overline{\tilde{p}}/})(\Delta^n). \tag{5.9}$$

这些映射关于 Δ^n 和 J 是自然的，因此它们组装成覆盖 $\mathcal{R}_+(W)$ 的单纯空间之间的一个等价。

类似地，沿着 $\mathcal{CSS}_+$-等价进行拉回

$$J^\flat \star \Delta^{n,\flat}_s \to \mathcal{F}_+\mathcal{L}(J \star \Delta^n_s) \to \mathcal{F}_+(\mathcal{L}(J) \star \mathcal{L}(\Delta^n_s)).$$

诱导出一个等价

$$\mathcal{F}_+\left(\mathcal{R}_+(W)_{\overline{p}/}\right) \to W_{p/} \tag{5.10}$$

覆盖余单位 $\mathcal{F}_+\mathcal{R}_+W \to W$。得益于等价（5.9），$\mathcal{R}_+(W)_{p/}$是一个完备 – Segal 空间，并且根据 [Har15]，$\mathcal{R}_+$ 和 $\mathcal{F}_+$ 限制为 $\mathcal{CSS}_+$ 与 $\mathcal{CSS}$之间的逆等价。因此，（5.10）的伴随是一个等价$\mathcal{R}_+(W)_{p/} \to \mathcal{R}_+(W_{p/})$ 覆盖 $\mathcal{R}_+(W)$上的恒等映射。□

现在我们希望研究切片相对于局部化$\mathcal{T}$的行为。为此，我们还需要另一种纤维化。

定义 5.11。令 J_L 为 ssS_+ 中的映射所组成的集合，其中包括 J_{JL} 和左角 $\Lambda^n_{,0}{}^\flat \to \Delta^n_{,s}{}^\flat$ 对于 $1 \le n$。我们称 J_L-纤维化为标记左纤维化，称 J_L-余纤维化为标记左无害。

对偶地，令 J_R 表示由 J_{JL} 和右角 $\Lambda^n_{,n}{}^\flat \to \Delta^n_{,s}{}^\flat$（其中 $1 \le n$）组成的映射族。我们称 J_R-纤维化为标记右纤维化，称 J_R-余纤维化为标记右平凡。

引理 5.12. 若 $a\colon A \to B$ 和 $j\colon J \to K$ 是标记半单纯集合之间的标记余纤维化，则诱导映射

$$f\colon J \star B \coprod_{J\star A} K \star A \to K \star B$$

仍是标记余纤维化，并且：

1. 若 a 是标记左无害映射，则 f 是带标记内角无奇异映射。
2. 若 j 是标记左无害映射，则 f 也是标记左无害映射。

对偶命题也成立：

1. 若 j 是标记右平凡的，则 f 是带标记内角无奇异的。2. 若 a 是标记右平凡的，则 f 也是标记右平凡的

证明。从 $\star$ 的公式可以直接看出，f 是逐级单射的。证明的其余部分只需对 [Lur09]引理 2.1.2.3 稍作修改。与那里一样，我们可以将问题归结为 $j \in I_{JL}$ 的情形。若 j 是 $\Delta^1_{,\flat} \to \Delta^1_{,s}{}^\sharp$，则映射 f 成为等价，因此只需处理边界包含 $\partial\Delta^n_{,s}{}^\flat \to \Delta^n_{,s}{}^{\flat s}$。与[Lur09], 中一样，我们可以假设 a 是生成左角柱之一。当 a 是$\Lambda^n_{,i}{}^\flat \to \Delta^n_{,s}{}^\flat$，其中 $0 \le i \le n$ 时，处理方式与未标记情形完全相同。当 a 是

$$(\Lambda^n_n, \{n-1, n\}) \to (\Delta^n_s, \{n-1, n\})$$

映射 f 变为

$$(\Lambda^{n+m+1}_{n+m+1,s}, \{n+m, n+m+1\}) \to (\Delta^{n+m+1}_s, \{n+m, n+m-1\}),$$

它仍然是带标记内角无奇异。当 $a = S_{2/6}$ 时，映射 f 会变成对 Δ^{m+3}_s 的重新标记，这很容易写成原始 $2/6$ 映射的一个推出。由此完成了 a 为标记左无害的情形。其他情形也可以用大致相同的方法证明。

□

如 [Lur09], 所述，这立即得出以下推论。

推论 5.13。 设 $f : X \to Y$ 是一个标记内纤维化， $j : J \to K$ 是标记半单纯集合之间的一个标记余纤维化，且 $p : K \to X$ 是任意映射。那么所诱导的映射

$$q : X_{p/} \to X_{pj/} \times_{Y_{fpj/}} Y_{fp/}$$

是一个标记左纤维化，并且：

1. 若 j 是标记右平凡，则 q 是平凡纤维化。*2.* 若 f 是平凡纤维化，则 q 也是。

证明。 由伴随关系，提升问题

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X_{p/} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ B & \longrightarrow & X_{pj/} \times_{Y_{fpj/}} Y_{fp/} \end{array}$$

等价于提升问题

$$\begin{array}{ccc} J \star B \coprod_{J \star A} K \star A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ K \star B & \longrightarrow & Y . \end{array}$$

现在，结论由引理5.12得出。 □

推论 5.14。 如果 W 是一个标记完备半 *Segal* 空间，且 $p : J \to W$ 是从一个带标记半单纯集出发的映射，那么 $W_{p/} \to W$ 与 J_{JL}正交。特别地，$W_{p/}$ 也是一个完备半 *Segal* 空间。

证明。 设 $A \to B$ 是带标记内角无奇异映射。由伴随可知，正交提升问题

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & W_{p/} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ B & \longrightarrow & W \end{array}$$

等价于正交提升问题

$$\begin{array}{ccc} J \star A \underset{A}{\amalg} B & \longrightarrow & W \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ J \star B & \longrightarrow & T^{\sharp}. \end{array}$$

由引理 5.12，左侧竖直映射是带标记内角无奇异的。 □

推论 5.15。 若 X 是标记内 *Kan* 空间，则 $X_{p/}$ 也是标记内 *Kan* 空间，并且由局部化单位 $u : id \to \mathcal{T}$ 诱导的映射 $X_{p/} \to \mathcal{T}(X)_{up/}$ 分解为一个等价。

$$\alpha : \mathcal{T}(X_{p/}) \to \mathcal{T}(X)_{up/},$$

此外，该映射与到 $\mathcal{T}(X)$ 的投影相容。

证明。 根据推论 5.13 由 $u_* : X_{p/} \to \mathcal{T}(X)_{up/}$ 诱导的映射 u 是一个平凡纤维化。根据推论5.14，其目标是一个完备半 Segal 空间，因此也是一个标记内 Kan 空间，所以 $X_{p/}$ 也是一个标记内 Kan 空间。根据推论 4.45， $X_{p/} \to \mathcal{T}(X)_{up/}$ 经由映射 $u_{X_{p/}}$ 分解为 $\alpha : \mathcal{T}(X_{p/}) \to \mathcal{T}(X)_{p/}$。由于 u_* 和 $u_{X_{p/}}$ 都是平凡纤维化，因此根据引理 $\mathcal{CSS}_+$-等价 4.42， α 也是一个 $\mathcal{CSS}_+$-等价。根据三取二，由于 α 的源和目标都属于 $\mathcal{CSS}_+$，它也是一个逐层等价。

为说明 α 与到 $\mathcal{T}(X)$的投影相容，考虑以下图表。

$$\begin{array}{ccccc} X_{p/} & \xrightarrow{u} & \mathcal{T}(X_p/) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{T}(X)_{up/} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{u} & \mathcal{T}(X) & \xrightarrow{id} & \mathcal{T}(X) \end{array}$$

左方形由 u的自然性而交换，外方形由切片的自然性而交换。因此，根据 $\mathcal{CSS}_+$ 局部化的泛性质的唯一性部分，右方形交换。

□

结合推论 5.15和推论5.8，我们立即得到如下结果。

推论 5.16。 若 X 是一个标记内 *Kan* 空间， J 是一个半单纯集合，且 $p : J^{\flat} \to X$ 是一个映射，则存在完备 *Segal* 空间的自然等价

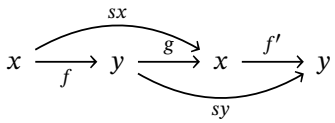
$$\mathcal{R}_+\mathcal{T}(X_{p/}) \simeq (\mathcal{R}_+\mathcal{T}(X))^{\overline{up}/}.$$

该等价与到 $\mathcal{R}_+\mathcal{T}(X)$的遗忘映射相容。

本节最后应用切片理论来计算 $\mathcal{R}_+\mathcal{T}(X)$中的映射空间。

引理 5.17。 若 $X \to T^{\sharp}$ 是一个标记左纤维化，则对于某个半 *Kan* 空间 Y，有 $X = Y^{\sharp}$。

证明。取 X 中的任意一条边 $f\colon x \to y$。由于 X 也是一个内 Kan 空间，点 x 和 y 可延拓为映射 $\widetilde{x}$、$\widetilde{y}\colon T^\sharp \to X$。该映射将 $T^\sharp$ 中唯一的边映至 X 中的标记边 sx 和 sy。可以将它们视为 x 和 y 处单位的选取。现在，由于 $X \to T^\sharp$ 是一个左纤维化，所有形如 $\Lambda^2_{0,s} \to X$ 的角都可以填充。对含有 f 和 sx 的角进行填充，得到一条边 $g\colon y \to x$，以及一个见证 $g\circ f = sx$ 的 2-单形。我们再次填充含有 g 和 sy 的角，得到一条边 $f'\colon y \to x$，以及一个见证 $f'\circ g = sy$ 的 2-单形。现在我们在 X 中有如下“图表”。



所示 2-单形到 Δ^3_s 的包含是内可逆无能的。由于 sx 和 sy 已标记，上述图表可扩展为一个 $(\Delta^3_s, S_{2/6}) \to X$。由于 X 是标记内 Kan 空间，该图表还可提升为一个映射 $\Delta^{3,\sharp}_s \to X$，这表明 f、g 和 f' 也已标记。这说明 X 中的所有边都已标记，因此其底层半单纯空间必定是半 Kan 空间。 □

引理 5.18。若 Y 是半 *Kan* 空间，则 $\mathcal{T}(Y^\sharp)$ 是以 $\|Y\|$ 为值的常值半单纯空间，且所有边都已标记。

证明。对于半单纯映射 $\Delta^m_s \to \Delta^n_s$，我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(Y^\sharp)(\Delta^{n,\sharp}_s) & \longrightarrow & \mathcal{T}(Y^\sharp)(\Delta^{m,\sharp}_s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}(Y^\sharp)(\Delta^{n,\flat}_s) & \longrightarrow & \mathcal{T}(Y^\sharp)(\Delta^{m,\flat}_s)\,. \end{array} \tag{5.19}$$

根据定义，$\mathcal{T}(Y^\sharp)$ 由以下对象的像标记：

$$Y^\sharp(\Delta^{1,\sharp}_s) \to Y^\sharp(\Delta^{1,\flat}_s) \to \|\widetilde{U}(Y^{\Delta^{1,\flat}_s})\|\,,$$

其中第一个映射是等价，第二个映射是本质满。因此，$\mathcal{T}(Y^\sharp)$ 的所有边都已标记，所以 (5.19) 中的水平映射都是等价。由于 Y 是半 Kan 空间，$Y^\sharp$ 是标记内 Kan 空间，因此 $\mathcal{T}(Y^\sharp)$ 是完备半 Segal 空间。(5.19) 的上方水平映射由沿一个标记内无害映射作限制所确定，因此是等价。因此 $\mathcal{T}(Y^\sharp)$ 是一个常值半单纯空间，而零次空间按构造为 $\|\widetilde{U}(Y^\sharp)\| = \|Y\|$. □

推论 5.20。给定标记内 *Kan* 空间 X中的两个点 x，$y\colon \Delta^0_s \to X$，完备 *Segal* 空间 $\mathcal{R}_+\mathcal{T}(X)$ 中相应对象之间的映射空间 $\mathrm{Map}_{\mathcal{R}_+\mathcal{T}(X)}(x,y)$ 等价于半 *Kan* 空间的实现

$$\left(\mathrm{Hom}^L_X(x,\widetilde{y})\right)_n = \{x\}\times_{X(\Delta^0_s)} X(\Delta^0_s \star \Delta^{n,\flat}_s)\times_{X(\Delta^{n,\flat}_s)}\{\widetilde{y}\}\,, \tag{5.21}$$

其中 $\tilde{y}$ 是 y 到映射 $T^\sharp \to X$ 的任意延拓。

证明。由于 $X_{x/} \to X$ 是左纤维化，我们得到一个标记半单纯空间的拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_X^L(x,y)^\sharp & \longrightarrow & X_{x/} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^\sharp & \xrightarrow{\tilde{y}} & X \end{array}$$

它还满足推论4.32的假设。因此，将 $\mathcal{R}_+\mathcal{T}$ 应用于此，并利用推论5.16和引理5.18，我们得到一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \| \mathrm{Hom}_X^L(x,\tilde{y}) \| & \longrightarrow & \mathcal{R}_+\mathcal{T}(X)^{\overline{ux}/} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_+\mathcal{T}(X) \end{array}$$

其中左上角是一个常值单纯空间。在 Δ^0 处对其求值，并利用注记2.9 即可得到结论。 □

6 拟幺性条件的比较

在本小节中，我们比较拟幺性的三个条件。这些条件是：

1. 是一个标记内 Kan 空间，如定义4.1所述，是对 [Hen20]的推广。2. 每个顶点都存在一个幂等等价，如 [Ste18] 和 [Tan18]所述。3. 存在终端退化映射和初始退化映射 s_0， $s_n : X_n \to X_{n+1}$ 如 [AB24]所述。

我们先比较前两个。

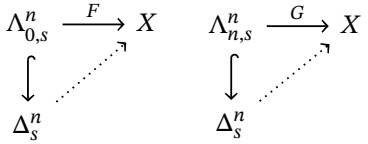
定义 6.1. 考虑 $ss\mathcal{S}$ 中以下几类映射。

1. $J_L = \left\{\Lambda^n_{i,s} \to \Delta^n_s, 0 \le i < n\right\}$
2. $J_R = \left\{\Lambda^n_{i,s} \to \Delta^n_s, 0 < i \le n\right\}$
3. $J_I = \left\{\Lambda^n_{i,s} \to \Delta^n_s, 0 < i < n\right\}$

我们分别称 J_L-、 J_R- 和 J_I-纤维化为左、右和内纤维化。相应地，我们分别称对应的余纤维化类为左、右和内无害。

注记 6.2. 由于 [Lur09] 引理 2.1.2.3 的证明在未标记的情形下同样成立，因此引理 5.12 和推论 5.13 的显然类似结论在$ss\mathcal{S}$中成立。

定义 6.3. 内 Kan 空间 X 中的一条边 f 称为等价，如果我们能够解决提升问题



对于 $2 \leq n$ 而言在同伦意义下成立，只要 F 的第一条边（分别地，G 的最后一条边）与 f 同伦。

注记 6.4。 注意，根据定义，等价的子空间 $X_1^{eq} \subset X_1$ 的包含是一个单态射。

注记 6.5。 由于标记角包含 $(\Lambda^n_{0,s}, \{0,1\}) \to (\Delta^n_s, \{0,1\})$ 和 $(\Lambda^n_{n,s}, \{n-1, n\}) \to (\Delta^n_s, \{n-1, n\})$ 属于 J_{JL}，内 Kan 空间 X 中的任何标记边都是 $U(X)$ 中的等价。

定义 6.6。 内 Kan 空间 X 中的一条边 f 称为 幂等的，如果

1. $d_0 f \sim d_1 f \in X_0$。2. 存在一个 2-胞腔 $H \in X_2$，使得
对于 $i = 0$， $d_i H \sim f$ 成立，1、2。

定义 6.7。 若内 Kan 空间 X 满足：对每个 $x \in X_0$，在 x处都存在一个幂等等价 e，则称其为拟幺的。若半单纯空间之间的映射 $F : X \to Y$ 将幂等等价映为幂等等价，则称其为拟幺映射。

注记 6.8。 注意，幂等元的像总是幂等元，因此只需假设每个 $F(e)$ 都是等价。事实上，由推论 6.19的证明可知，对于 X 和 Y 拟幺的情形，只需假设 $F : X \to Y$ 在每个顶点 $x \in X$处保持一个幂等等价即可。

在 [Ste18] 中证明了，任何逐层离散的拟幺内 Kan 空间都属于遗忘函子 $sSet \to ssSet$的像。此外，若我们为每个顶点 e_x 选择一个幂等等价 $x \in X_0$，就可以令 X 上的单纯形结构满足 $s_0 x = e_x$。于是，由 [Tan18], 可知，逐层离散的拟幺内 Kan 空间之间的拟幺映射，均可在相差唯一同伦的意义下提升为单纯映射。

定义 6.9。 令 $\mathcal{IK}_{qu} \subset ss\mathcal{S}$ 表示由拟幺内 Kan 空间以及它们之间的拟幺映射张成的（非满）子范畴。

定义 6.10。 对于半单纯空间 X，我们令 $X^\natural$ 表示这样得到的带标记半单纯空间：将 X 中的所有等价（按照定义 6.3 的意义）标记出来。

我们将证明，遗忘函子和 $(-)^\natural$ 诱导出逆等价$\mathcal{IK}_+ \simeq \mathcal{IK}_{qu}$。我们先给出一些预备引理。

引理 6.11。 内 *Kan* 空间 X 中的一条边 $f: x \to y$ 是等价，当且仅当 $X_{f/} \to X_{x/}$ 和 $X_{/f} \to X_{/y}$ 是平凡纤维化。

证明。 形如以下形式的提升问题

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n_s & \longrightarrow & X_{f/} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^n_s & \longrightarrow & X_{x/} \end{array}$$

根据伴随关系等价于以下形式的问题

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1_s \star \partial\Delta^n_s \underset{\Delta^0_s \star \partial\Delta^n_s}{\amalg} \Delta^0_s \star \Delta^n_s & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^1_s \star \Delta^n_s & \longrightarrow & T \end{array}$$

这正是一个$\Lambda^{n+2}_{0\,s}$，其第一条边为 f的填充。对$X_{/f} \to X_{/y}$采用对偶论证即可。 □

推论 6.12。 设 $p: X \to Y$ 是半单纯空间之间的平凡纤维化。在 X 中的一条边 $f: x \to y$ 是等价，当且仅当 $p(f)$ 在 Y中是等价。

证明。 考虑以下图表。

$$\begin{array}{ccccc} X_{f/} & \xrightarrow{a} & X_{x/} \times_{Y_{p(x)/}} Y_{p(f)/} & \longrightarrow & X_{x/} \\ & & \downarrow & & \downarrow b \\ & & Y_{p(f)/} & \longrightarrow & Y_{p(x)/} \end{array}$$

根据推论 5.13，映射 a 和 b 是平凡纤维化。由平凡纤维化的拉回稳定性以及引理 4.2，$Y_{p(f)/} \to Y_{p(x)/}$ 是平凡纤维化，当且仅当 $X_{f/} \to X_{x/}$ 是平凡纤维化。对偶论证表明，$Y_{/p(f)} \to Y_{/p(y)}$是平凡纤维化，当且仅当 $X_{/f} \to X_{/y}$ 是平凡纤维化。现在由引理 6.11，$p(f)$ 是等价，当且仅当 f 是等价。 □

推论 6.13。 若 $p: X \to Y$ 是平凡纤维化，且 Y 是内 *Kan* 空间，则X 也是内 *Kan* 空间；此外，X 是拟幺的当且仅当 Y 是拟幺的。

证明。 内 Kan 空间这一性质显然成立，因为平凡纤维化也是内纤维化。现在假设 Y 是拟幺的。对于任意顶点 $x \in X_0$，取一个 2-胞腔 $H \in Y_2$，它见证了一个幂等等价 $e: p(x) \to p(x)$。利用平凡 Kan 纤维化的性质，先对 $\partial\Delta^1_s \to \Delta^1_s$ 进行提升 e，得到 $e': x \to x$ 中的一条边 X；然后对 $\partial\Delta^2_s \to \Delta^2_s$进行提升 H，得到一个 2-胞腔 H'，它见证了 e' 是幂等的。现在由于$p(e')$ 是等价，e 根据推论6.12，e 也是等价。

现在假设 X 是拟幺的。对于任意顶点 $y \in Y_0$，将其提升为顶点 $x \in X_0$，使得 $p(x) = y$。令 H 为一个 2-单形，它见证了x处的幂等等价。于是根据推论 6.12，$p(H)$ 见证了y处的幂等等价。 □

引理 6.14。 设 $X \in sSet$ 是一个拟范畴。那么，边 f 在 X 中可逆，当且仅当 $\mathcal{F}(X)$ 中对应的边是定义 6.3意义下的等价。

证明。 由于连接与左 Kan 延拓可交换，根据右伴随的唯一性，对于任意半单纯映射 $p : J \to \mathcal{F}(X)$，切片 $\mathcal{F}(X)_{p/}$与 $\mathcal{F}(X_{\tilde{p}/})$一致，其中 $\tilde{p} : \mathcal{L}(J) \to X$ 是 p的伴随。在解直化下，余预层之间的自然变换
$f^* : \mathrm{Map}_X(y, -) \to \mathrm{Map}_X(x, -)$ 由以下左纤维化的跨距表示

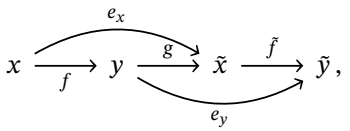
$$X_{y/} \xleftarrow{\sim} X_{f/} \to X_{x/}.$$

因此，由 Yoneda 引理可知， f 在 X 中是等价，当且仅当 $X_{f/} \to X_{x/}$ 是等价。拟范畴之间的左纤维化是等价，当且仅当它是平凡纤维化。平凡纤维化由$\mathcal{F}$检测；根据上文， $\mathcal{F}(X_{f/}) \to \mathcal{F}(X_{x/})$ 是平凡纤维化，当且仅当 $\mathcal{F}(X)_{f/} \to \mathcal{F}(X)_{x/}$ 是平凡纤维化。对偶论证表明， f 在 X 中是等价，当且仅当$\mathcal{F}(X)_{/f} \to \mathcal{F}(X)_{/y}$ 是平凡纤维化。由引理 6.11 可得， f 在 X 中是等价，当且仅当 $\mathcal{F}(X)$ 中的伴随边是等价。

□

推论 6.15。 拟单位内 *Kan* 空间中的等价所组成的集合满足 *2*-出-*6* 性质。

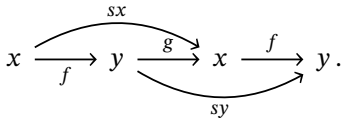
证明。 设 X 是一个拟单位内 Kan 空间，且 $H : \Delta^3_s \to X$ 是一个边为



其中 e_x 和 e_y 是等价。取一个从半单纯集合出发的平凡 Kan 纤维化 $X' \to X$，并将 H 提升为映射 $H' : \Delta^3_s \to X'$。根据推论 6.12， H' 中分别提升 e_x 和 e_y的边 e'_x 和 e'_y 是等价。因此，根据推论 6.13， X' 是一个拟单位拟范畴，所以根据 [Ste18]，对于一个拟范畴 X， $X' = \mathcal{F}(X)$。现在考虑 H'的伴随 H''。根据伴随的自然性， H'' 的边是 H'中各边的伴随。特别地，根据引理 6.14，作为 e'_x 和 e'_y的伴随的边 e''_x和 e''_y是 X中的等价。拟范畴中的等价满足 2-出-6 性质，因此 H'' 中的所有边都是等价。于是根据推论 6.12 和引理 6.14， H中的所有边也都是等价。

□

引理 6.16。 拟单位内 *Kan* 空间 X 中的一条边 $f : x \to y$ 是等价，当且仅当对于任意选取的幂等等价 $sx : x \to x$和 $sy : y \to y$，都存在一条边 $g : y \to x$ 以及一个 $H \in X_3$，其边为



(6.17)

证明。必要性立即由推论 6.15 得出。假设 $f : x \to y$ 是等价，并且 sx 和 sy 分别是 x 和 y处的幂等等价。由于 sx 是等价，我们可以找到一条边 f 和一个见证 $\tilde{f} \circ sx = f$ 的 2-单形 $\tilde{s}_0 f$。现在填充角 $\Lambda^3_2, _s \to X$；该角由沿 f粘合两个 $\tilde{s}_0 f$ 的副本 $\tilde{}$，以及一个见证 sx 幂等性的 2-单形 ssx 构成。所得单形的 d_2 面 $s_0 f$ 见证了 $f \circ sx = f$。类似地，我们可以找到一个见证 $sy \circ f = f$ 的 2-单形 $s_1 f$。现在，由于 f 是等价，我们可以填充一个 $\Lambda^2_0, _s$，从而找到一条边 g 和一个见证 $g \circ f = sx$ 的 2-单形 $d_3 H$。现在，将 2-单形 $d_3 H, s_0 f$ 和 $s_1 f$ 沿其公共边粘合，构造一个 $\Lambda^3_0, _s \to X$。由于 f是等价，我们可以填充此角，从而得到所需的单形 H。

□

注 6.18. 我们称一个3-单形 H 其边如（6.17）所示，见证了 f 关于 sx 和 sy的逆。

推论 6.19. 拟幺内内 Kan 空间之间的映射 $F : X \to Y$ 保持等价，当且仅当它保持幂等等价。

证明。任何半单纯映射都会保持幂等，因此“仅当”部分显然成立。假设 F 保持幂等等价，并设 $f : x \to y$ 是 X 中的一个等价。分别在 x 和 y 处选取幂等等价 sx 和 sy。由引理 6.16，我们可以选取 X 中的一个 3-单形 H，见证 f 关于 sx 和 sy 的逆。于是， $F(H)$ 是一个 3-单形；由于 F 保持幂等等价，它见证了 $F(f)$ 关于 $F(sx)$ 和 $F(sy)$ 的逆。特别地，由引理 6.16， $F(f)$ 是一个等价。

□

前一个推论表明，赋值 $X \mapsto X^\natural$ 定义了一个函子$\mathcal{IK}_{qu} \to ss\mathcal{S}_+$。现在我们证明，这个函子可经由带标记内 Kan 空间的全子范畴分解。

推论 6.20。 内 Kan 空间 X 是拟幺的，当且仅当 $X^\natural$ 是带标记内 Kan 空间。

证明。 首先假设 X 是拟幺的。那么 $X^\natural \to T^\sharp$ 具有相对于以下对象的右提升性质：

1. $d_i : \Delta^0_s \to \Delta^1, _s{}^\sharp$，因为每个顶点都存在一个幂等等价 e.

2. 未标记内角包含，因为 X 是内 Kan 空间。3. 标记外角包含，依据等价的定义。4. $S_{2/6}$ 根据推论6.15。

反过来，根据推论4.29 可知，子空间

$$X^{\simeq} := \widetilde{U}(X^\natural) \subset U(X^\natural) = X$$

所有边都是等价的单纯形所构成的空间是一个内 Kan 空间。映射 $\Delta^0 \to T$由引理 3.20 可知是无害的，因此每个顶点 $x : \Delta^0_s \to X$ 都可延拓为一个映射 $T \to X^{\simeq}$，其在 Δ^2_s处的取值给出了 x处的一个幂等等价。

□

命题 6.21。 函子 U 和 $(-)^\natural$ 限制后给出逆等价 $\mathcal{IK}_+ \simeq \mathcal{IK}_{qu}$。

证明。尚待证明的关键事实是：如果 X 是标记内 Kan 空间，那么 $U(X)$ 中的边 $f : x \to y$ 是等价，当且仅当它能提升为 X 中的标记边，换言之，即 $X \simeq U(X)^\natural$。充分性可直接由 X 是标记内 Kan 空间得出，因此假设 f 是等价。由推论 4.29，标记边构成的子空间 $\widetilde{U}(X) \subset U(X)$ 是半 Kan 空间，因此利用引理 3.20 将顶点 x 和 y 延拓为映射 $T \to \widetilde{U}(X)$，我们得到分别位于 x 和 y 处的带标记幂等元 sx 和 sy。由于标记边也是等价，我们可以找到一个 3-单形 H，它证明 f 关于 sx 和 sy 存在逆。现在，由于 X 中标记边的集合具有 2-出-6 性质，f 必须在 X 中是标记边。

结合上述推论 6.19 和 6.20 可知，遗忘函子的限制分解为 $U : \mathcal{IK}_+ \to \mathcal{IK}_{qu}$。此外，根据推论 6.19 和 6.20，构造 $X^\natural$ 确定了一个函子 $(-)^\natural : \mathcal{IK}_{qu} \to \mathcal{IK}_+$。显然有一个自然等价 $id_{\mathcal{IK}_{qu}} \simeq U((-)^\natural)$，并且正如我们上面所论证的，$id_{\mathcal{IK}_+} \simeq U(-)^\natural$。 □

推论 6.22。 对于拟幺内 *Kan* 空间 X 和半单纯集合 J，指数对象 X^J 也是一个拟幺内 *Kan* 空间，并且存在一个自然等价 $(X^J)^\natural \simeq (X^\natural)^{J^\flat}$。

证明。 根据命题 6.21和推论 4.27， $(X^\natural)^{J^\flat}$ 是一个标记内 Kan 空间。根据命题 6.21，因此只需证明 $(X^\natural)^{J^\flat}$ 的底层半单纯空间是 X^J。左伴随 $(-)^\flat$ 关于 $\otimes$是强幺半的，从而得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} ss\mathcal{S} & \xrightarrow{(-)^\flat} & ss\mathcal{S}_+ \\ {\scriptstyle -\otimes J}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\otimes J^\flat} \\ ss\mathcal{S} & \xrightarrow[(-)^\flat]{} & ss\mathcal{S}_+ . \end{array}$$

因此，根据右伴随的唯一性，我们得到一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} ss\mathcal{S} & \xleftarrow{U} & ss\mathcal{S}_+ \\ {\scriptstyle (-)^J}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (-)^{J^\flat}} \\ ss\mathcal{S}, & \xleftarrow[U]{} & ss\mathcal{S}_+ , \end{array}$$

将其应用于 $X^\natural$ 时，得到

$$U((X^\natural)^{J^\flat}) \simeq U(X^\natural)^J \simeq X^J .$$ □

推论 6.23。 对于拟单位内 *Kan* 空间 X、半单纯集合 J 和映射 $p : J \to X$，令 $\bar{p}$ 表示提升 p的唯一映射 $J^\flat \to X^\natural$。那么 $X_{p/}$ 也是拟单位内 *Kan* 空间，并且存在自然等价 $(X_{p/})^\natural \simeq (X^\natural)_{\bar{p}/}$。

证明。 根据命题 6.21， $X^\natural$ 是标记内 Kan 空间；根据推论 5.13，
$(X^\natural)_{\overline{p}/} \to X^\natural$ $(X^\natural)_{p/} \to$ 是
标记左纤维化，因此也是标记内 Kan 空间。根据命题6.21，因此只需证明 $(X^\natural)_{p/}$ 的底层半单纯空间是 $X_{p/}$。左伴随 $(-)^\flat$ 相对于 $\star$是强幺半的，从而得到交换方块

$$\begin{array}{ccc} ss\mathcal{S} & \xrightarrow{(-)^\flat} & ss\mathcal{S}_+ \\ {\scriptstyle -\star J}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\star J^\flat} \\ ss\mathcal{S}_{J/} & \xrightarrow[(-)^\flat]{} & (ss\mathcal{S}_+)_{J^\flat/}\,. \end{array}$$

由右伴随的唯一性，我们因此得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} ss\mathcal{S} & \xleftarrow{U} & ss\mathcal{S}_+ \\ \uparrow & & \uparrow \\ ss\mathcal{S}_{J/}, & \xleftarrow[U]{} & (ss\mathcal{S}_+)_{J^\flat/}, \end{array}$$

其中竖直映射计算切片。在 $p : J^\flat \to X^\natural$ 处应用时，这给出了所需的等价

$$U((X^\natural)_{\overline{p}/}) \simeq U(X^\natural)_{p/} \simeq X_{p/}\,. \qquad \square$$

证明定理 1.3 所需的最后一个要素是 $(-)^\natural$ 保（平凡）纤维化。我们先给出一个预备引理。

引理 6.24. 设 $X \overset{f}{\rightarrowtail} Y \overset{g}{\rightarrowtail} Z$ 是拟幺内 *Kan* 空间之间的内纤维化。若 f、g 和 $g\circ f$ 中任意两个是平凡纤维化，则第三个也是。

证明。 纤维化在复合下封闭，而 f 和 $g\circ f$ 为平凡纤维化的情形可由引理 4.2推出。依次使用引理 3.13 和推论 6.13 ，将 X、Y 和 Z 替换为逐层离散的拟幺内 Kan 空间，且替换映射为平凡纤维化 X 、 Y 和 Z。然后依次使用 [Ste18] 的主要结果，选取相容的单纯结构，从而得到一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X') & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle \mathcal{F}(f')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{F}(Y') & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle \mathcal{F}(g')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathcal{F}(Z') & \longrightarrow & Z \end{array}$$

其中 X'、Y' 和 Z' 是拟范畴，水平映射以及 g' 和 $g'\circ f'$ 都是平凡纤维化，而 f' 是内纤维化。由弱等价的三取二性质

等价， f' 在 $sSet$ 上的拟范畴模型结构中也是弱等价。在模型范畴中，一个态射是平凡纤维化，当且仅当它既是弱等价又是纤维化，因此 f' 是平凡纤维化，从而 $\mathcal{F}(f')$也是平凡纤维化。现在将引理 4.2 应用于上方的方形，可知 f 是平凡纤维化。□

推论 6.25。 函子 $(-)^\natural : \mathcal{IK}_{qu} \to \mathcal{IK}_+$ 保留平凡纤维化。

证明。 令 $X \to Y$ 为一个平凡纤维化。则 $X^\natural \to Y^\natural$ 根据伴随关系，对未标记边界包含具有右提升性质。相对于 $\Delta^{1,\flat}_{s} \to \Delta^{1,\sharp}_{s}$ 的提升问题直接由推论6.12得出。□

推论 6.26。 函子 $(-)^\natural : \mathcal{IK}_{qu} \to \mathcal{IK}_+$ 将内纤维化映射为带标记内纤维化。

证明。 令 $X \to Y$ 为拟幺内纤维化，且其定义域和值域均为拟幺内 Kan 空间。则 $X^\natural \to Y^\natural$ 根据伴随关系，对未标记内角具有右提升性质，并且根据推论 $S_{2/6}$ 具有右提升性质。现在提升问题

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda^n_{0,s}, \{0,1\}) & \xrightarrow{H} & X^\natural \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ (\Delta^n, \{0,1\}) & \longrightarrow & Y^\natural \end{array}$$

根据伴随关系等价于

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^{n-2} & \longrightarrow & X_{f/} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow a \\ \Delta^{n-2} & \longrightarrow & Y_{p(f)/} \times_{Y_{p(x)/}} X_{x/}\,, \end{array}$$

其中 $f : x \to y$ 是边 $H(\{0,1\})$。因此，只需证明映射 a 是平凡纤维化。根据 $X^\natural$ 和 $Y^\natural$ 的构造，边 f 和 $p(f)$ 分别是 X 和 Y 中的等价，因此我们有一个图表

$$\begin{array}{ccccc} X_{f/} & \xrightarrow{a} & Y_{p(f)/} \times_{Y_{p(x)/}} X_{x/} & \longrightarrow & Y_{p(f)/} \\ & \searrow^{c} & \downarrow b' & & \downarrow b \\ & & X_{x/} & \longrightarrow & Y_{p(x)/}\,, \end{array}$$

其中底部方块是一个拉回，且映射 b 和 c 都是平凡纤维化。根据拉回稳定性， b' 也是平凡纤维化。根据推论 6.13 和 6.23，该图表中的所有对象都是拟幺内内 Kan 空间，因此我们可以将引理 6.24应用于左侧三角形，得出 a 也是平凡纤维化。□

定理 *1.3* 的证明。局部化的陈述由推论 4.45和 4.46得出，且等价 $\mathcal{IK}_+ \simeq \mathcal{IK}_{qu}$ 保持平凡纤维化。纤维化极限的保持性由推论4.32、4.33和6.26得出。指数对象的保持性由推论 5.3 和 6.22得出。切片的保持性由推论 5.16 和6.23得出。

□

现在，我们考虑一个受 [AB24]启发的拟幺性充分条件。我们首先精确表述半单纯空间的外退化所需满足的相容性条件。

定义 6.27。 如果存在增广半单纯空间的交换图，使得半单纯空间 X 具有始退化和终退化，

$$\begin{array}{ccc} X_{\Delta^0_s/} & \xrightarrow{s_0} & X_{\Delta^1_s/} \\ & \searrow^{id} & \downarrow{\scriptstyle d_i} \\ & & X_{\Delta^0_s/} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_{/\Delta^0_s} & \xrightarrow{s_\omega} & X_{/\Delta^1_s} \\ & \searrow^{id} & \downarrow{\scriptstyle d_i} \\ & & X_{/\Delta^0_s} \end{array},$$

其中映射 Δ 是沿唯一映射 $\partial\Delta^1_s \to \Delta^0_s$的限制，并且对于每个顶点 $x \in X_0$，边 $s_0 x$ 和 $s_\omega x$ 属于 X_1的同一个连通分支。

在包含 $ss\mathcal{S} \subset ss\mathcal{S}_a$之下，我们可以在 $ss\mathcal{S}_a$中考虑平凡纤维化、内纤维化、左纤维化和右纤维化。由于 $ss\mathcal{S}$的包含保留推出和缩回，相应的无害映射类也得以保留。注意，映射 $f : X \to Y$ 在 $ss\mathcal{S}_a$ 中是纤维化，当且仅当对于每个 $x \in X_{-1}$，映射 $X_x \to Y_{f(x)}$ 在 $ss\mathcal{S}$中是纤维化。因此，我们立即得到引理 2.10和注记6.2的以下推论。

推论 6.28. 设 $X \to Y$ 是 $ss\mathcal{S}$ 中的内纤维化，且 $j : J \to K$ 是半单纯集合的映射。那么

$$X_{K/} \to X_{J/} \times_{Y_{J/}} Y_{K/}$$

它是左纤维化；若 j 是右无害映射，则它是平凡纤维化。

现在假设 X 具有初始退化映射 $s = s_0$。由 $\star$ 的结合律，我们得到映射

$$s_{J/} : X_{\Delta^0_s \star J/} \simeq (X_{\Delta^0_s/})_{J/} \to (X_{\Delta^1_s/})_{J/} \simeq X_{\Delta^1_s \star J/}$$

这些映射关于 J 是自然的。特别地，我们得到映射 $X_{\Delta^n_s/} \to X_{\Delta^{n+1}_s}$，每个映射都是限制映射 d_0 和 d_1 的一个截面。考虑映射

$$S : X_{\Delta^1_s/} \simeq X_{\Delta^1_s/} \times_{X_{\Delta^0_s/}} X_{\Delta^0_s/} \xrightarrow{id \times s} X_{\Delta^1_s/} \times_{X_{\Delta^0_s/}} X_{\Delta^1_s/} \simeq X_{\Lambda^2_{0,s}/},$$

其中拉回是在跨距 $X_{\Delta^1_s/} \overset{d_0}{\twoheadrightarrow} X_{\Delta^0_s/} \overset{d_0}{\twoheadleftarrow} X_{\Delta^1_s/}$ 上构成的。

引理 6.29。 如果 X 是一个具有初始退化的内 Kan 空间，那么该拉回的左侧竖直映射

$$\begin{array}{ccc} S^*X_{\Delta^2_s/} & \longrightarrow & X_{\Delta^2_s/} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\Delta^1_s/} & \xrightarrow{S} & X_{\Lambda^2_{0,s}/} \end{array}$$

对于任意半单纯集合 J，相对于唯一映射 $* \to J$ in $ss\mathcal{S}_a$ 具有右提升性质。

证明。包含$\Lambda^2_0{}_{,\ s} \star \Delta^0_s \simeq \Delta^0_s \star \Lambda^2_2{}_{,\ s} \to \Delta^0_s \star \Delta^2_s \simeq \Delta^3_s$ 是右无害的，因此 $X_{\Delta^3_s/} \to X_{\Delta^0_s \star \Lambda^2_{2,\ s}/}$ 根据推论6.28是平凡纤维化。接下来，由于分解

$$\begin{array}{ccc} X_{\Delta^3_s/} & \xrightarrow{d_3} & X_{\Delta^2_s/} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\Lambda^2_{0,s} \star \Delta^0_s/} & \xrightarrow{d_3} & X_{\Lambda^2_{0,s}/}, \end{array}$$

只需证明 $S^*d_3 : S^*X_{\Lambda^2_{0,\ s}\star\Delta^0_s/} \to X_{\Delta^1_s/}$ 相对于 $* \to J$ 具有右提升性质。考虑映射

$$T : X_{\Delta^2_s/} \simeq X_{\Delta^2_s/} \times_{X_{\Delta^1_s/}} X_{\Delta^1_s/} \xrightarrow{id \times s} X_{\Delta^2_s/} \times_{X_{\Delta^1_s/}} X_{\Delta^2_s/} \simeq X_{\Lambda^2_{0,s} \star \Delta^0_s/},$$

根据 s 的自然性，它适合以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} X_{\Delta^2_s/} & \xrightarrow{T} & X_{\Lambda^2_{0,s} \star \Delta^0_s/} \\ \downarrow{\scriptstyle d_2} & & \downarrow{\scriptstyle d_3} \\ X_{\Delta^1_s/} & \xrightarrow{S} & X_{\Lambda^2_{0,s}/} \end{array}$$

由于右侧竖直映射是平凡纤维化，只需证明左侧竖直映射d_2 相对于$* \to J$具有右提升性质。此映射可分解为

$$X_{\Delta^2_s/} \to X_{\Lambda^2_{1,s}/} \to X_{\Delta^1_s/},$$

其中第一个因子根据推论是一个平凡纤维化6.28，第二个因子则存在一个以类似方式构造的截面 s。 □

引理 6.30。 若内 Kan 空间 X 具有初始退化 s，则对任意顶点 $x \in X_0$，映射 $X_{sx/} \overset{d_1}{\to} X_{x/}$ 是平凡纤维化。

证明。 设 $J \to K$ 是半单纯集合之间逐层单射。根据伴随关系，提升问题

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & X_{sx/} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle d_1} \\ K & \longrightarrow & X_{x/} \end{array}$$

在 $ss\mathcal{S}$中等价于

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & X_{\Delta^1_s/} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle d_1} \\ K & \longrightarrow & X_{\Delta^0_s/} \end{array} \tag{6.31}$$

在 $(ss\mathcal{S}_a)_*$中，其中 $X_{\Delta^1_s/}$和 $X_{\Delta^0_s/}$分别由 sx和 x指定基点。利用 s的自然性，我们得到复合映射

$$X_{\Delta^0_s/} \xrightarrow{s^2} X_{\Delta^2_s/} \to X_{\Lambda^2_{0,s}/}$$

在同伦意义下可识别为

$$s \times s : X_{\Delta^0_s/} \to X_{\Delta^1_s/} \times_{X_{\Delta^0_s/}} X_{\Delta^1_s/}.$$

因此， s^2 可分解为经过一个映射 $X_{\Delta^0_s/} \to S^* X_{\Delta^2_s/}$。特别地，这意味着对于任意顶点 x，我们可以如下延拓（6.31）。

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{*} & \xrightarrow{s^2x} & S^*X_{\Delta^2_s/} & \longrightarrow & X_{\Delta^2_s/} & & \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ J & \longrightarrow & X_{\Delta^1_s/} & \xrightarrow[S]{} & X_{\Lambda^2_{0,s}/} & \xrightarrow{d_2} & X_{\Delta^1_s/} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_1} & & \downarrow{\scriptstyle d_1} & & \downarrow{\scriptstyle d_1} \\ K & \longrightarrow & X_{\Delta^0_s/} & \xrightarrow{s} & X_{\Delta^1_s/} & \xrightarrow{d_0} & X_{\Delta^0_s/} \end{array}$$

虚线提升由引理 6.29给出。然后，点线提升由推论 6.28 给出，因为 $d_1 : \Delta^1_S \to \Delta^2_s$是右无害的。复合映射 $d_2 \circ S$ 和 $d_0 \circ s$ 与恒等映射同伦，因此我们可以将其向前推进，从而得到（6.31）的一个解。 □

定理 *1.2* 的证明。设 X 是一个具有始对象和终端退化映射的内 Kan 空间 s_0 且 s_ω。由引理 6.11、引理 6.30 及其对偶可知，边$s_0 x \sim s_\omega x$ 是 X中的等价。此外，2-单形 $s^2 x$ 证明了 sx 是幂等的。 □

参考文献

[AB24] M. Abouzaid 和 A. J. Blumberg。《Floer 同伦论基础 I：流范畴》。载于：arXiv 预印本（2024）。网址：https: //arxiv . org/abs/2404.03193。[BR13] J. E. Bergner 和 C. Rezk。《Reedy 范畴与 Θ-构造》。载于：《数学杂志》274.1（2013），第 499–514 页。[Har15] Y. Harpaz。《拟幺 ∞-范畴》。载于：Algebraic & Geometric Topology 15.4（2015），第 2303–2381 页。[Hau21] R. Haugseng。《Segal 空间、跨度与半范畴》。载于：《美国数学会会刊》149.3（2021），第 961–975 页。[Hen20] S. Henry。《经典与构造数学中的弱模型范畴》。载于：《范畴理论及其应用》35.24（2020），第 875–958 页。[HO] A. Hedenlund 和 T. P. Oldervoll。《结构化流范畴与扭曲谱》。准备中。[JT07] A. Joyal 和 M. Tierney。《拟范畴与 Segal 空间之比较》。载于：Contemporary Mathematics 431.277-326（2007），第 10 页。[Lur09] J. Lurie。《高阶拓扑斯理论》。普林斯顿大学出版社，2009。[Lur18] J. Lurie。《谱代数几何》。载于：预印本（2018）。网址：https: //www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。[Maz25] A. Mazel-Gee。《模型 ∞-范畴 I：单纯空间∞-范畴的一些良好性质》。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 378.11（2025），第 7585–7623 页。[MW21] L. Martini 和 S. Wolf。《内在高阶范畴论中的极限与余极限》。载于：arXiv 预印本（2021）。网址：https : / /arxiv . org / abs / 2111.14495v1。[Ras18] N. Rasekh。《完备 Segal 空间导论》。载于：arXiv 预印本（2018）。网址：https://arxiv.org/abs/1805.03131。[RS71] C. P. Rourke 和 B. J. Sanderson。《Δ-集合 I：同伦论》。载于：《数学季刊》22.3（1971），第 321–338 页。[Ste18] W. Steimle。《拟范畴中的退化映射》。载于：《同伦及相关结构杂志》13.4（2018），第 703–714 页。[Tan18] H. L. Tanaka。《（介于 ∞-范畴之间的）并非严格幺的函子》。载于：《同伦及相关结构杂志》13.2（2018），第 273–286 页。