arXiv:2601.11512v1 [math.RT] 16 Jan 2026

斜群代数的克鲁尔-加布里埃尔维数

Shantanu Sardar

马德普拉塔国立大学数学系，阿根廷布宜诺斯艾利斯马德普拉塔

Abstract. 设 K 为代数闭域， G 为有限维代数 Λ 的有限阿贝尔群 K-线性自同构群， $\bar{\Lambda}(=\Lambda G)$ 是相应的斜群代数。作者与 S. Trepode 和 A. G. Chaio 引入了伽罗瓦半覆盖函子的概念，以研究斜群代数上的不可约态射。本文在代数 Λ 和 $\bar{\Lambda}$ 上的态射范畴及函子范畴之间建立了伽罗瓦半覆盖函子，并证明它们的克鲁尔-加布里埃尔维数相等。这一计算证实了 Prest 关于克鲁尔-加布里埃尔维数有限性的猜想，以及 Schr¨oer 关于该维数与斜温和代数上的稳定秩（达到稳定的根基幂中的最小幂）之间联系的猜想。此外，我们确定了（斜）Brauer 图代数所有可能的稳定秩。

1. Introduction

环的 Krull–Gabriel维数 KG(Λ) 是 Geigle 在其学位论文 [5]中提出的，它是对有限表示模范畴的加布里埃尔维数的一种修正。事实证明，这一维数也 [8, Lemma B.9] 是 Λ 的 pp公式格的 m维数，等价地说，是尖点有限维模格的维数；该维数是初等克鲁尔维数的一种变体，由 Garavaglia [3]引入。克鲁尔-加布里埃尔维数适用于任意局部有界 K-范畴。事实上，它适用于任意骨架小阿贝尔范畴。

记号 1.1. 假设 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$ 是一个有限箭图，其中 Q_0 是顶点集，Q_1 是箭集，而 $s,t:Q_1\to Q_0$ 分别表示源与靶函数。取 I 为在 G 的作用下 Q_0 的一组代表元。令 G_{i_0} 为 $i_0\in I$ 在 G 和$G_{i_0j_0}:=G_{i_0}\cap G_{j_0}$中的稳定子。路径 p 的 G-轨道记作 O_p。我们用 mod-K 表示所有有限维 K-向量空间构成的范畴，用 mod-Λ 表示所有有限生成右Λ-模构成的范畴。若 M是 N的直和项，则将 $M\in N$记作 $M,N\in$mod-Λ。将 rad_A^α 记作 mod-Λ的根基 rad_A 的超限幂。函子 F 的子函子 G 记作$G\subseteq F$，相应的商函子记作 F/G。

我们从一些关于 KG 维数的众所周知的结果开始。M. Auslander 在 [1,推论 3.14] 中证明，KG(Λ) = 0 当且仅当代数 Λ 为有限表示型。H. Krause 在 [9, 11.4] 中表明，对于任意代数 Λ，KG(Λ) ≠ 1 。W. Geigle 在 [6, 4.3] 中证明，如果 Λ 是温和遗传代数，则 KG(Λ) = 2。A. Skowronski 在 [20, 定理 1.2] 中证明，如果 Λ 是国内表示型的循环有限代数，则 KG(Λ) = 2。M. Wenderlich 在 [25]中证明，如果 Λ 是强单连通代数，则 Λ 为国内型当且仅当 KG(Λ) 为有限；R. Laking、M. Prest 和 G. Puninski 在 [11] 中证明了一个著名结果：国内表示型的串代数具有有限 KG 维数。H. Krause 在 [8, 推论 8.14]中证明，如果 KG(Λ) = $n\in\mathbf{N}$，那么 $\mathrm{rad}_\Lambda^{\omega(n+1)}=0$，即它们的稳定秩至多为 $\omega(n+1)$，其中 ω 是第一个无限基数。下面列出一些代数：其所有点化模的格的宽度是无限的，因此它们的 KG 维数没有定义。该列表包括（严格地说）

E-mail address: shantanusardar17@gmail.com。

野代数、非国内弦代数、管状代数、pg-临界代数、具有非多项式增长的强单连通代数以及加权曲面代数。

将有限维结合代数分类为有限型、温和型（国内型和非国内型）或野型是一项具有挑战性的任务。正如我们在上一段所看到的，计算 KG 维数和（稳定）秩等数值不变量，可以使这项任务更容易。本文关注斜群代数的 KG 维数。这类代数最初是从表示论的角度在 [15] 中研究的。对于域 K 上的有限维代数 Λ，若有限群 G 通过自同构作用于 Λ，则斜群代数 Λ 与 Λ 具有许多表示论性质，这些性质通常体现为 mod-Λ 与 mod-Λ 之间函子的性质。

定义 1.2 (斜群代数)。设有限群 G 通过自同构作用于代数 Λ。斜群代数 Λ 定义为：

- 其底层向量空间为 $\Lambda \otimes_K KG$；
- 乘法定义为 $(\lambda \otimes g)(\mu \otimes h) = \lambda(\mu) \otimes gh$ 对于 λ、$\mu \in \Lambda$ 和 g、$h \in G$，并通过线性性和分配律延拓。

注意，代数 Λ 通常不是基本的。

作者与 S. Trepode 和 A. G. Chaio [17] 展示了某类函子的存在性，这类函子称为伽罗瓦半覆盖（第 2 节），其定义在 Λ 和 Λ 的模范畴之间，用于研究斜群代数上的不可约态射。本文中，我们考察态射范畴 H(mod-Λ)，其对象是模范畴上的同态，态射则由一对满足交换图条件的同态给出（第 3 节）。将函子逐分量应用后，我们将函子 F_λ : mod-Λ →mod-Λ 扩展为函子 HF_λ : H(mod-Λ) →H(mod-Λ)。我们证明这个诱导函子确实是一个伽罗瓦半覆盖函子。

定理 1.3. 设群 G 作用于代数 Λ 上，且 Λ 是相应的斜群代数。那么，对于任意 $f, h \in$ H(模-Λ)，函子 HF_λ : H(模-Λ) → H(模-Λ) 诱导以下向量空间同构：

$$\mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(\mathrm{H}F_\lambda f, \mathrm{H}F_\lambda h) \approx \begin{cases} \bigoplus_{g\in G} \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)({}^g f, h) & \text{if } G_f \neq G; \\ \bigoplus_{g\in G} \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)(f, {}^g h) & \text{if } G_h \neq G; \\ \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)^{|G|}(f, h) & \text{if } G_{fh} = G. \end{cases}$$

我们还研究了 Λ和 Λ上的有限表示函子范畴 F(Λ) 和 F(Λ)，并引入一个正合且忠实的函子 ϕ : F(Λ) →F(Λ)，同时发现它是一个伽罗瓦半覆盖函子。

定理 1.4. 设有限阿贝尔群 G 作用于有限维代数 Λ 上，且 Λ 是相应的斜群代数。那么，对于任意 $T_1, T_2 \in \mathcal{F}(\Lambda)$，函子 $\phi : \mathcal{F}(\Lambda) \to \mathcal{F}(\Lambda)$ 诱导以下向量空间同构：

$$\mathcal{F}(\bar{\Lambda})(\phi(T_1), \phi(T_2)) \approx \begin{cases} \bigoplus_{g\in G} \mathcal{F}(\Lambda)({}^g T_1, T_2) & \text{if } G_{T_1} \neq G; \\ \bigoplus_{g\in G} \mathcal{F}(\Lambda)(T_1, {}^g T_2) & \text{if } G_{T_2} \neq G; \\ \mathcal{F}(\Lambda)^{|G|}(T_1, T_2) & \text{if } G_{T_1T_2} = G. \end{cases}$$

In [17], 我们已经证明，稳定秩在斜群代数构造下保持不变 n. The 本文的主要贡献在于证明斜化同样保持 KG 维数不变。

定理 1.5。设 Λ是一个有限维代数，G是由 K-线性自同构构成的有限阿贝尔群，作用于 Λ，且 Λ 是相应的斜群代数。那么，Λ 的 ***KG*** 维数KG(Λ)等于 Λ的 ***KG*** 维数KG(Λ) 。

作为一项应用，我们确定了斜温和代数和斜 Brauer 代数的 KG 维数。斜温和代数是在 [4] 中引入的，用于研究一类驯矩阵问题；当域的特征不等于二时，它们表现为阶为二的群的温和代数的斜群代数。我们还验证了以下关于斜温和代数的 KG 维数与根基幂零指数之间关系的著名猜想。

推论 1.6。 下面列出一些猜想：
J. Schroer [22] $\mathrm{KG}(\Lambda) = n \geq 2$ 当且仅当 $\mathrm{rad}_{\Lambda}^{\omega(n-1)} = 0$ 且 $\mathrm{rad}_{\Lambda}^{\omega n} = 0$；*M. Prest* [12] [13]有限维代数 Λ 属于驯表示型，当且仅当其克鲁尔-加布里埃尔维数$\mathrm{KG}(\Lambda)$有限。

另一方面，Brauer 图代数是特殊双串代数中的一个特殊子类，由对称代数 [18, Section 2.3], 组成，其起源于有限群的模表示论，具体表现为布劳尔树代数 [7]。将 Brauer 图解释为带状图 [10]，使 Brauer 图代数与曲面簇理论建立了联系，并为 Brauer 图代数的表示论增添了几何视角。斜 Brauer 图代数是 Brauer 图代数的推广 [16, Section 3.1]。[16, Proposition 3.9]表明，对于一个斜 Brauer 图代数 Λ，可以构造一个 Brauer 图代数 Λ，使得 Λ 可表示为 Λ 在某个二阶群作用下的斜群代数。因此，它们的 KG 维数相等。此外，我们还给出了关于它们的稳定秩的如下结果。

定理 1.7. 对于斜 *Brauer* 图代数 Λ 及其关联的 *Brauer* 图代数 Λ，有 $\omega \leq \mathrm{st}(\Lambda) = \mathrm{st}(\bar{\Lambda}) < \omega^2$。

本文安排如下。第（2）节介绍斜群代数的基本信息。本节的主要亮点是伽罗瓦半覆盖函子 $F_\lambda : \text{mod-}\Lambda \to \text{mod-}\Lambda$的存在，它是函子 $F : \Lambda \to \Lambda$ 的推前。由于 Λ 在对偶群的某种作用下也可表示为 Λ 的斜群代数（定理2.6），我们得到另一个伽罗瓦半覆盖函子 $F^\lambda : \text{mod-}\bar{\Lambda} \to \text{mod-}\Lambda$。在第（3）节中，我们首先证明 F_λ 与 F^λ 互为伴随（命题 3.2）。我们还证明了代数及其斜群代数的态射（分别为单态射）范畴之间存在伽罗瓦半覆盖函子 $\mathrm{H}F_\lambda : \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda) \to \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)$（分别为 $\mathrm{S}F_\lambda : \mathrm{S}(\text{mod-}\Lambda) \to \mathrm{S}(\text{mod-}\Lambda)$）（定理 3.6），并给出一个说明性例子 3.7；其中函子 $\mathrm{H}F_\lambda$ 和 $\mathrm{H}F^\lambda$（分别为 $\mathrm{S}F_\lambda$ 和 $\mathrm{S}F^\lambda$）在对象上是 G-稳定的（命题 3.4），且互为伴随（引理 3.5）。在第（4）节中，我们考察代数 Λ（分别为 Λ）的模范畴上有限表示函子范畴 $\mathrm{F}(\Lambda)$（分别为 $\mathrm{F}(\Lambda)$），并给出一个正合函子 $\phi : \mathrm{F}(\Lambda) \to \mathrm{G}(\Lambda)$（命题 4.2 和 4.3），随后证明它是伽罗瓦半覆盖忠实函子（定理 4.5 和推论 4.6）。在第（5）节中，我们证明 KG 维数在斜群代数构造下保持不变（定理 5.3）；作为应用，温和（分别为 Brauer 图）代数及其斜温和（Brauer 图）代数的 KG 维数相等（推论 5.4 和 5.12）。推论 5.5 验证了 Prest 猜想，该猜想指出，斜温和代数的国内型可由其 KG 维数有限来刻画；推论 5.8 验证了 Schr¨oer 猜想对斜温和代数成立。此外，我们确定了（斜）Brauer 图代数所有可能的稳定秩（定理 5.14）。

致谢
作者曾在 CEMIM-马德普拉塔国立大学访问，期间获得 CONICET 提供的博士后奖学金资助。

2. Galois semi-covering Functor over the module category

在博士论文 [14], J. A. de la Pe¨na 中，作者观察到，在自由群作用的情形下，斜化这一概念与伽罗瓦覆盖相同。这促使我们研究群作用不一定自由时的斜群代数构造，并引入伽罗瓦半覆盖函子的概念。首先回顾从 [17] 到 F_λ：模-Λ →模-Λ 的伽罗瓦半覆盖，以定义函子 ϕ；该函子在保持 KG 维数方面发挥着根本作用。

定义 2.1。 设 A 为线性范畴，G 为作用于 A 上的群。若函子 $F : A \to B$ 满足：对于任意 X、$Y \in Ob(A)$，以下条件成立，则称其为 G-半覆盖：

$$B(FX, FY) \approx \begin{cases} \oplus_{g \in G} A(gX, Y) & if\ G_X \neq G; \\ \oplus_{g \in G} A(X, gY) & if\ G_Y \neq G; \\ A^{|G|}(X, Y) & if\ G_{XY} = G. \end{cases}$$

假设 2.2。固定一个阶为 n 的有限阿贝尔群 G，其作用于 KQ 上，并满足：对于每个 $i_0 \in I$，$G_{i_0} \neq \tilde{G}$ 蕴含 $|O_{i_0}| = n$。回顾一下，G 的所有不可约表示构成一个群，记为 $\hat{G}$，其群运算为表示的张量积，并且单位元为 $|\hat{G}| = n$。

Q_G（斜群代数的底层箭图）的顶点由 $Q_{G_0} = \{(i_0, \rho) \mid i_0 \in \tilde{I}, \rho \in \hat{G}_{i_0}\}$. 与顶点 (i_0, ρ) 对应的 $(KQ)G$ 的幂等元为 $e_{i_0\rho} = i_0 \otimes e_\rho$，其中 $e_\rho = \frac{1}{|G_{i_0}|} \sum_{g \in G_{i_0}} \rho(g)g$ 是 KG_{i_0} 的一个幂等元。考虑 KQ_G $\bar{e} = \sum_{i_0 \in \tilde{I}} \bar{e_{i_0}}$ 的幂等元，其中 $\bar{e_{i_0}} = \sum_{\rho \in \hat{G}_{i_0}} e_{i_0\rho}$.

我们回顾由 $F : KQ \to (KQ)G$ 诱导的半覆盖函子 [17, 命题 2.12]，其定义如下：对每个 $i \in Q_0$，令 $F(i) = \bar{e_{i_0}}$，其中 $i_0 \in O_i \cap I$，以及它的推前函子 $F_\lambda : \text{mod-}\Lambda \to \text{mod-}\bar{\Lambda}$。

定义 2.3. 设 $F : \Lambda \to \bar{\Lambda}$ 为伽罗瓦半覆盖函子。我们定义推前函子 F_λ : 模-Λ →模-$\bar{\Lambda}$ 如下：

设 $M \in$ 模-Λ，则 $F_\lambda M = \oplus_{i_0 \in \tilde{I}} F_\lambda M(\bar{e_{i_0}})$ 其中，对于每个 $\bar{e_{i_0}} \in \bar{\Lambda}$，我们定义

$$F_\lambda M(\bar{e_{i_0}}) := \bigoplus_{F(x) = \bar{e_{i_0}}} M(x).$$

假设 $\bar{\alpha} \in \bar{\Lambda}_1 G(\bar{e_{i_0}}, \bar{e_{j_0}})$。考虑以下情况：

(1) 若 $G_{i_0} \neq G$，则存在某个 $h \in G$，使得有一条箭 $\alpha_h : hi_0 \to j_0$ 满足 $\bar{\alpha} = F(\alpha_h)$。那么，同态 $F_\lambda M(\bar{\alpha}) : F_\lambda M(e_{i_0}) \to F_\lambda M(\bar{e_{j_0}})$ 由如下同态定义：

$$(\mu_g) \mapsto (\sum_{g \in G} M(g\alpha_h)(\mu_g)).$$

(2) 若 $G_{i_0} = G$ 但 $G_{j_0} \neq G$，则存在一条箭 $\alpha_h : i_0 \to hj_0$，其中某个 $h \in G$ 满足$\bar{\alpha} = F(\alpha_h)$。则同态 $F_\lambda M(\bar{\alpha}) : F_\lambda M(\bar{e_{i_0}}) \to F_\lambda M(e_{j_0})$ 定义如下：

$$\mu \mapsto (M(g_1\alpha_h)(\mu), \cdots, M(g_n\alpha_h)(\mu)).$$

(3) 若 $G_{i_0 j_0} = G$，则存在一条箭 $\alpha : i_0 \to j_0$，使得 $\bar{\alpha} = F(\alpha)$。同态$F_\lambda M(\bar{\alpha}) : F_\lambda M(\bar{e_{i_0}}) \to F_\lambda M(\bar{e_{j_0}})$ 由同态定义：

$$\mu \mapsto M(\alpha)(\mu).$$

Mod-$\bar{\Lambda}$中的态射：假设 $f := (f_{i_0})_{i_0 \in Q_0} : M \to N \in \text{mod-}\bar{\Lambda}$ 是一个模同态 $\hat{}$，其中，$f_{i_0} : M(i_0) \to N(i_0)$。则 $F_\lambda(f) := (f_{\bar{e_{i_0}}}) : F_\lambda(M) \to F_\lambda(N)$，其中，$f_{\bar{e_{i_0}}} : F_\lambda(M)(\bar{e_{i_0}}) \to F_\lambda(N)(\bar{e_{i_0}})$ 对所有 $i \in O(i_0)$，均由同态 $f_i : M(i) \to N(i)$ 定义。若 $M \in \text{mod-}\bar{\Lambda}$，则 $F_\lambda(M) \in \text{mod-}\bar{\Lambda}$。因此，函子 F_λ 限制为函子 $\text{mod-}\bar{\Lambda} \to \text{mod-}\bar{\Lambda}$，也记作 F_λ。

群作用在 Mod-$\bar{\Lambda}$： 给定一个 $M \in$ 模-$\bar{\Lambda}$ 我们用 ${}^gM$ 表示模 $M \bigcirc g^{-1}$，并用 $f : M \to N$ 表示模同态 ${}^gf$，即满足以下条件的 Λ-模同态 ${}^gM \to {}^gN$： ${}^gf_x := f_{g^{-1}x}$，对任意 $x \in Q_0$均成立。这定义了 G 在 Mod-$\bar{\Lambda}$ 上的作用。此外，映射 $f \to {}^gf$定义了向量空间同构 $\Lambda(M, N) \approx \Lambda({}^gM, {}^gN)$。

以下定理保证了从 mod-Λ 到 mod-$\bar{\Lambda}$ 存在一个伽罗瓦半覆盖。

定理 2.4。 [17, 定理 3。11] 假设群 G 作用于代数 Λ，且 $F : \Lambda \to \bar{\Lambda}$ 是一个伽罗瓦半覆盖。则对于任意 M、$N \in$ 模-Λ，函子 F_λ : 模-$\Lambda \to$ 模-$\bar{\Lambda}$ 诱导出以下向量空间同构：

$$\text{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F_\lambda M, F_\lambda N) \approx \begin{cases} \oplus_{g \in G} \text{Hom}_\Lambda({}^gM, N) & \text{if } G_M \neq G; \\ \oplus_{g \in G} \text{Hom}_\Lambda(M, {}^gN) & \text{if } G_N \neq G; \\ \text{Hom}_\Lambda^{|G|}(M, N) & \text{if } G_{MN} = G. \end{cases}$$

下面的注记 [17]表明，与伽罗瓦覆盖不同，伽罗瓦半覆盖不一定保持不可分解模。

注记 2.5。对于所有 $g \in G$，都存在一个 $M \in$Ind-Λ，使得：

$$F_\lambda({}^gM) = \begin{cases} \bar{M} & \text{if } G_M \neq G; \\ \bigoplus_{\hat{g}\in\hat{G}} \hat{g}\bar{M} & \text{if } G_M = G. \end{cases}$$

下面的定理 [15, 推论5.2]展示了斜化的对合运算。

定理2.6。对于阿贝尔群 G，代数 Λ与$(\bar{\Lambda})\hat{}G$的斜群代数*Morita*等价，其中$\hat{}G$在 $\bar{\Lambda}$ 上的作用定义为 $\chi(\lambda \otimes g) := \chi(g)\lambda \otimes g$，其中 $\lambda \in \Lambda$、$g \in G$。

$\hat{}$由于代数 Λ 是 Λ 在对偶群 G 对 G的作用下得到的斜代数。我们将相应的伽罗瓦半覆盖函子定义为 F^λ : mod-$\bar{\Lambda}$ → mod-Λ。

3. Galois semi-covering functor over morphism category

本节中，我们给出一个代数及其斜群代数的（单）态射范畴之间的伽罗瓦半覆盖函子。回顾一下，对于阿贝尔范畴 A，可以如下定义态射范畴 H(A)，它也是一个阿贝尔范畴。H(A)的对象是 A 中的所有态射 $(X \xrightarrow{f} Y)$。从对象 $(X \xrightarrow{f} Y)$ 到 $(X' \xrightarrow{f'} Y')$ 的态射是由 (a, b) 构成的对，其中 $a : X \to X'$ 和 $b : Y \to Y'$ 满足 $b \bigcirc f = f' \bigcirc a$。态射的复合按分量进行。$A$ 的单态射范畴记为 S(A)，它是 H(A) 的全子范畴，由A中的所有单态射组成。同样，对于 F_λ : mod-Λ → mod-Λ，我们证明诱导函子 HF_λ : H(mod-Λ) →H(mod-Λ) 以及 SF_λ : S(mod-Λ) → S(mod-Λ) 也是伽罗瓦半覆盖。

H(mod-Λ)上的 G-作用：设 $g \in G$ and $\mathbb{X} = (X \xrightarrow{f} Y)$ 是 H(mod-Λ) 中的一个对象。我们将对 $\mathbb{X}$ 逐分量施加 g 作用后，在 H(mod-Λ) 中得到的对象记为 ${}^g\mathbb{X} = ({}^gX \xrightarrow{{}^gf} {}^gY)$。假设给定了 H(mod-$\Lambda$) 中的一个态射 $\psi = (\psi_1, \psi_2) : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$。定义 ${}^g\psi = ({}^g\psi_1, {}^g\psi_2)$ 为 H(mod-Λ) 中从 ${}^g\mathbb{X}$ 到 ${}^g\mathbb{Y}$ 的态射，它由对 ψ 逐分量施加 g 作用得到。我们注意到，g 在 H(mod-Λ) 上诱导了一个自同构。仍将由自同构 $g : \Lambda \to \Lambda$ 在 H(mod-Λ) 上诱导的自同构记为 g。所有诱导自同构 g : H(mod-Λ) → H(mod-Λ) 构成 H(mod-Λ) 上的一个自同构群，该群与 G 同构。我们将新得到的群记为 G。这定义了 G 在 H(mod-Λ) 上的一个作用。由于 $g : \Lambda \to \Lambda$ 是一个自同构，ψ 是单态射当且仅当 ${}^g\psi$ 是单态射。因此，G 在 H(mod-Λ) 上的作用限制在 S(mod-Λ) 上。

诱导函子 HF_λ （分别为 SF_λ）作用于 H(mod-Λ)（分别为 S(mod-Λ)）：采用相同的思路（逐分量应用函子），我们可以将函子 F_λ :mod-Λ →mod-Λ 扩展为函子 HF_λ : H(mod-Λ) → H(mod-$\bar{\Lambda}$)，将 $(X \xrightarrow{f} Y) \in$ H(mod-Λ) 映为H(mod-Λ) 中的 $(F_\lambda(X) \xrightarrow{F_\lambda(f)} F_\lambda(Y))$。由于 F_λ 是正合的，我们可以将 HF_λ 限制到相应的单态射范畴，记作 SF_λ : S(mod-Λ) → S(mod-$\bar{\Lambda}$)。类似地，函子 HF^λ : H(mod-$\bar{\Lambda}$) → H(mod-Λ) 可通过逐分量应用函子 F^λ :mod-$\bar{\Lambda}$ →mod-Λ得到。由于函子 F^λ 是正合的，我们也得到受限函子 SF^λ : S(mod-$\bar{\Lambda}$) → S(mod-Λ)。

为简便起见，我们有时将 $\mathbb{X} = (X \xrightarrow{f} Y) \in$ H(mod-Λ) 记作 f_{XY}（或者在源和靶明确时，简记为 f）。下面的命题 [17] 表明，与伽罗瓦覆盖不同，伽罗瓦半覆盖不一定保持不可约态射。

命题 3.1. 假设对于某些 $M, N \in$模-Λ，有 $f_{MN} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$。那么存在一个 f 满足 f $\hat{g}$ $\bar{M}\hat{g}\bar{N} \in \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\hat{g}\bar{M}, \hat{}g\bar{N})$，使得以下条件成立：

$$\mathrm{H}F_\lambda(f_{{}^gM,{}^gN}) \approx \begin{cases} \overbrace{\bar{N}}^{\hat{g}\in\hat{G}} \bar{f}_{\hat{g}\bar{M}\bar{N}} & if\ G_M = G, G_N \neq G; \\ \overbrace{\bar{M}}^{\hat{g}\in\hat{G}} \bar{f}_{\bar{M}\hat{g}\bar{N}} & if\ G_M \neq G, G_N = G; \\ \bigoplus_{\hat{g}\in\hat{G}} \bar{f}_{\hat{g}\bar{M}\hat{g}\bar{N}} & if\ G_{MN} = G; \\ \bar{f}_{\bar{M}\bar{N}} & if\ G_M, G_N \neq G. \end{cases}$$

其中，$\coprod_{i\in I} f_i$ 表示 f_i对应指标集 I，而 $i \in I$ 在模处粘合 Z。

下一个结果给出了函子 F_λ 的伴随函子。

命题 3.2. 伽罗瓦半覆盖函子 F^λ : 模-$\bar{\Lambda}$ → 模-Λ 是函子 F_λ : 模-Λ →模-Λ的伴随函子。

证明。 我们证明，对于任意的 $C \in$ 模-Λ 和 $D \in$模-Λ，存在一个向量空间同构 $\mathrm{Hom}_\Lambda(F^\lambda D, C) \approx \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(D, F_\lambda C)$。根据 D 和 C 是否在 G-作用下稳定，可能的情况如下:

$G_D, G_C = G$ 根据注 2.5，我们有 $\mathrm{Hom}_\Lambda(F^\lambda D, C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\oplus_{g\in G} {}^g\bar{D}, C) = \oplus_{g\in G} \mathrm{Hom}_\Lambda({}^g\bar{D}, C)$。此外，$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(D, F_\lambda C) = \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(D, \oplus_{\hat{g}\in \hat{}G} \hat{}^g\bar{C}) = \oplus_{\hat{g}\in \hat{}G} \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(D, \hat{}^g\bar{C})$。由定理 2.4 和命题 3.1 可得结论。

$G_D \neq G$, $G_C \neq G$ 我们有，$\mathrm{Hom}_\Lambda(F^\lambda D, C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\bar{D}, C)$，由注 2.5 可知。此外，$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(D, F_\lambda C) = \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(D, C)$。于是由定理 2.4 和命题 3.1 可得结论。

$G_D \neq G, G_C = G$ 我们有，$\mathrm{Hom}_\Lambda(F^\lambda D, C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\bar{D}, C)$，由注 2.5 可知。此外，$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(D, F_\lambda C) = \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(D, \oplus_{\hat{g}\in \hat{}G} \hat{}^g\bar{C}) = \oplus_{\hat{g}\in \hat{}G} \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(D, \hat{}^g\bar{C})$。现在，由定理 2.4 可知，$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F_\lambda \bar{D}, F_\lambda C) = \mathrm{Hom}_\Lambda^{|G|}(\bar{D}, C) = \mathrm{Hom}_\Lambda^{|G|}(F^\lambda D, C)$。再次利用注 2.5，可得 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F_\lambda \bar{D}, F_\lambda C) = \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\oplus_{g\in G} {}^g D, F_\lambda C) = \oplus_{g\in G} \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}({}^g D, F_\lambda C)$。由于对于任意的 $g_1, g_2 \in G$，$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}({}^{g_1} D, F_\lambda C) \approx \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}({}^{g_2} D, F_\lambda C)$，因此显然 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(D, F_\lambda C) \approx \mathrm{Hom}_\Lambda(F^\lambda D, C)$。

$G_D = G$, $G_C \neq G$ 此情形与前一种情形类似。

因此得证。□

注记 3.3. 由于 (F_λ, F^λ) 是一个伴随对，对于任意 $X \in$mod-Λ 和 $M \in$mod-$\bar{\Lambda}$，存在两个自然同构 $\eta_{X,M}$: $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F_\lambda(X)\ M) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, F^\lambda(M))$，以及其逆映射 $\eta^{-1}_{X,M}$: $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, F^\lambda(M)) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F_\lambda(X)\ M)$。

接下来，我们证明函子 $\mathrm{H}F_\lambda$ 和 $\mathrm{H}F^\lambda$ 分别起着与 F^λ 和 F_λ 类似的作用 .

命题 3.4. 设 $\mathbb{X}, \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \in \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)$。则有以下结论。

(1) $\mathrm{H}F_\lambda({}^g\mathbb{X}) \approx \mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X})$，对任意 $g \in G$ 均成立。*(2)* $\mathrm{H}F^\lambda \circ \mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X}) \approx \oplus_{g\in G} {}^g\mathbb{X}$。*(3)* 对于不可分解对象 $\mathbb{X}_1$ 和 $\mathbb{X}_2$，$\mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X}_1) \approx \mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X}_2)$ 蕴含 $\mathbb{X}_1 \approx {}^g\mathbb{X}_2$，其中某个 $g \in G$。

证明。 (1) 由命题 3.1 可得。

(2) 给定 $\mathbb{X} : A \to B$，考虑以下同构 $\mathrm{H}F^\lambda \bigcirc \mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X}) \approx (F^\lambda \bigcirc F_\lambda(A) \xrightarrow{F^\lambda \circ F_\lambda(f)} F^\lambda \bigcirc F_\lambda(B)) \approx (\oplus_{g\in G} {}^g A \xrightarrow{\oplus_{g\in G} {}^g f} \oplus_{g\in G} {}^g B) \approx \oplus_{g\in G} ({}^g A \xrightarrow{{}^g f} {}^g B) \approx \oplus_{g\in G} {}^g\mathbb{X}$。第二个同构由典范同构 $F^\lambda \bigcirc F_\lambda(C) \approx \oplus_{g\in G} {}^g C$ 得出，对任意 $C \in A$ 均成立。

(3) 假设 $\mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X}_1) \approx \mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X}_2)$。应用 $\mathrm{H}F^\lambda$，由第 (2) 部分可得 $\oplus_{g\in G} {}^g\mathbb{X}_1 \approx \mathrm{H}F^\lambda \bigcirc \mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X}_1) \approx \mathrm{H}F^\lambda \bigcirc \mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X}_2) \approx \oplus_{g\in G} {}^g\mathbb{X}_2$。因此，$\mathbb{X}_1$ 是 $\oplus_{g\in G} {}^g\mathbb{X}_2$ 的一个直和项。H(mod-Λ) 的 Krull–Schmidt 性质意味着存在 $g \in G$ 使得 $\mathbb{X}_1 \approx {}^g\mathbb{X}_2$，证毕。□

由于函子 $\mathrm{S}F_\lambda$ 和 $\mathrm{S}F^\lambda$ 是函子 $\mathrm{H}F_\lambda$ 和 $\mathrm{H}F^\lambda$ 在单态射范畴上的限制，因此它们也满足上述命题中所述的类似性质。

下面我们证明函子 $\mathrm{H}F_\lambda$ 和 $\mathrm{H}F^\lambda$（分别地，$\mathrm{S}F_\lambda$ 和 $\mathrm{S}F^\lambda$）互为伴随。

引理 *3.5.* 设 $\mathbb{X}$ 属于 ***H(mod-Λ)***，且 $\mathbb{M}$ 属于 ***H(mod-$\bar{\Lambda}$)***。则存在如下 *K*-向量空间的自然同构: $\zeta_{\mathbb{X},\mathbb{M}}$: ***H(mod-$\bar{\Lambda}$)(HF_λ(X)*** $\mathbb{M}$***)*** $\to$ ***H(mod-Λ)(X, HF^λ(M))***。特别地，当 $\mathbb{X} \in$ ***S(mod-Λ)*** 且 $\mathbb{M} \in$ ***S(mod-$\bar{\Lambda}$)*** 时，函子 SF_λ 和 SF^λ 也存在类似的同构。

证明。 假设 $\mathbb{X} = (X \xrightarrow{f} Y)$ 且 $\mathbb{M} = (M \xrightarrow{h} N)$。根据命题 3.2 中介绍的伴随对 (F_λ, F^λ) 的伴随同构，我们定义如下 K-线性映射

$$\zeta_{\mathbb{X},\mathbb{M}} : \mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(\mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X}), \mathbb{M}) \to \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)(\mathbb{X}, \mathrm{H}F^\lambda(\mathbb{M}))$$

将 $\mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(\mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X})\ \mathbb{M})$ 中的 $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$ 映为 $\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)(\mathbb{X},\mathrm{H}F^\lambda(\mathbb{M}))$ 中的 $\eta=(\eta_{\mathbb{X},\mathbb{M}}(\zeta_1)\eta_{\mathbb{Y},\mathbb{N}}(\zeta_2))$。通过直接计算并依据 $\eta_{-,-},F^\lambda$ 和 F_λ 的定义，可以证明 η 是 $\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)$ 中的一个 $^-$态射。类似地，可以定义 K-线性映射

$$\zeta'_{\mathbb{X},\mathbb{M}}:\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)(\mathbb{X},\mathrm{H}F^\lambda(\mathbb{M}))\to\mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(\mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X}),\mathbb{M})$$

通过将 $\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)(\mathbb{X},\mathrm{H}F^\lambda(\mathbb{M}))$ 中的 $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ 发送到 $\mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(\mathrm{H}F_\lambda(\mathbb{X})\ \mathbb{M})$ 中的 $\zeta=(\eta^{-1}_{\mathbb{X}},\mathbb{M}(\eta_1)\eta^{-1}_{\mathbb{Y}},\mathbb{N}(\eta_1))$。容易看出，$\zeta_{\mathbb{X},\mathbb{M}}$ 与 $\zeta'_{\mathbb{X},\mathbb{M}}$ 互为逆映射。因此，$\zeta_{\mathbb{X},\mathbb{M}}$ 是一个同构。□

下述定理表明，代数的同态范畴与其斜群代数的同态范畴之间存在伽罗瓦半覆盖。

$^-$定理 3.6. 设群 G 作用于代数 Λ，且 Λ 是相应的斜群代数。那么，对于任意 $f,h\in\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)$，函子 $\mathrm{H}F_\lambda:\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)\to\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)$ 诱导出以下向量空间同构：

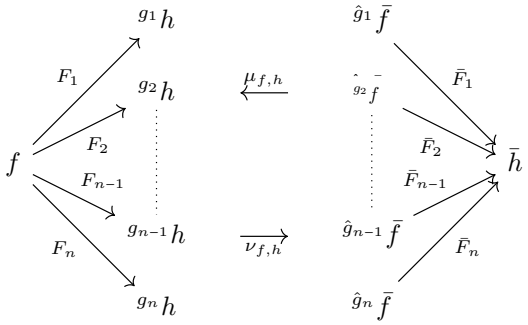
$$\mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(\mathrm{H}F_\lambda f,\mathrm{H}F_\lambda h)\approx\begin{cases}\bigoplus_{g\in G}\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)({}^gf,h) & if\ G_f\neq G;\\ \bigoplus_{g\in G}\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)(f,{}^gh) & if\ G_h\neq G;\\ \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)^{|G|}(f,h) & if\ G_{fh}=G.\end{cases}$$

证明。这里，我们分析前两种情形，并考虑三种不同情况：$G_f\neq G,G_h=G$；$G_h\neq G,G_f=G$ 以及 $G_f\neq G,G_h\neq G$。现在，我们将同构$\nu_{f,h}$明确描述如下：

情形一： 这里，$G_f\neq G,G_h=G$。因此，若 $G_M=G,G_N\neq G$，则 $F_\lambda({}^gf)=\bar{f}=\begin{cases}\overbrace{\bar{M}}^{\bar{N}}\\ \bar{M}\hat{g}\in\hat{}_G\bar{f}_{\hat{g}\bar{M}\bar{N}}\text{；若 }G_M\neq G,G_N=G\text{，则}\hat{g}\in\hat{}\end{cases}$

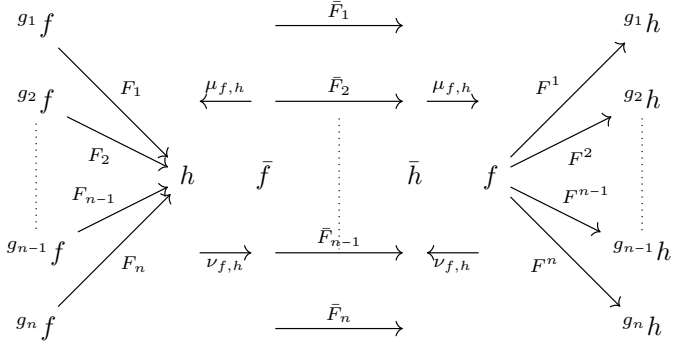
$_G\bar{f}_{\bar{M}\hat{g}\bar{N}}$；若 $G_M,G_N\neq G.$，则$\bar{f}_{\bar{M}\bar{N}}$；并且

$_-\qquad\qquad\qquad



情形 III: 此处， $G_f \neq G$， $G_h \neq G$。由于 G-作用不同时固定 f 和 h，因此它是局部伽罗瓦覆盖。由此，对于 $g \in G$，从 ${}^g f$ 到 h 的箭的数量等于从 f 到 h 的箭的数量$^{-}$ $^{-}$（= 从 f 到 ${}^g h$ 的箭的数量亦然），即。

$$\dim_K \mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(\bar{f},\bar{h}) = \dim_K \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)(\bigoplus_{g\in G} {}^g f, h) = \dim_K \bigoplus_{g\in G} \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)({}^g f, h).$$



第二个等式成立，因为它是一个有限维向量空间。因此我们得到

$$\mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(\bar{f},\bar{h}) \approx \bigoplus_{g\in G} \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)({}^g f, h) \approx \bigoplus_{g\in G} \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)(f, {}^g h).$$

设 $m \leq n$ 为等价类 O_{f_i} 中在$^{-}$ $^{-}$ $^{-}$ G-作用下的非零代表元 f_i 的数量。则同构 $\mathrm{H}\nu_{f,h} : \oplus_{g\in G} \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)({}^g f, h) \to \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)(f,h)$ 由 $\mathrm{H}\nu_{f,h}(F_1,\cdots,F_m)_{1\times m} = (F_1,\cdots,F_m)$ 给出$^{-}$ $^{-}$ $^{-}$ $^{-}$ $^{-}$，其逆映射 $\mathrm{H}\mu_{f,h}$ 则由 $\mu_{f,h}(F_1,\cdots,F_m) = (F_1,\cdots,F_m)_{1\times m}$$^{-}$ $^{-}$ $^{-}$ $^{-}$ $^{-}$给出，其中，$F_i = F_{g_i f h} : {}^{g_i} f \to h$ 和 $F_i = F_{\bar{f}\bar{h}} : f \to h$ 分别是 $\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)$ 和 $\mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)$ 中的态射。此外，上述表达式中的第二个同构以类似方式定义。

注意，我们有以下等式：

$$\dim_K \mathrm{H}^{|\tilde{G}|}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(\bar{f},\bar{h}) = \dim_K \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda)(\bigoplus_{g\in G} {}^g f, \bigoplus_{g\in G} {}^g h).$$

情形 IV: 这里， $G_{fh} = G$。因此， $F_\lambda(f) = \oplus_{\hat{g}\in \hat{}G} {}^{\hat{}g}\bar{f}$ 且 $F_\lambda(h) = \oplus_{\hat{g}\in \hat{}G} {}^{\hat{}g}\bar{h}$，其中某个 $\bar{f},\bar{h} \in \mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})$ 由命题 3.1 给出。根据上述讨论，显然，

$$\dim_K \mathrm{H}^{|G|}(\text{mod-}\Lambda)(f,h) = \dim_K \mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(\bigoplus_{\hat{g}\in\hat{G}} {}^{\hat{g}}\bar{f}, \bigoplus_{\hat{g}\in\hat{G}} {}^{\hat{g}}\bar{h}) = \dim_K \mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(F_\lambda(f), F_\lambda(h)).$$

因此，我们有，$\mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda})(F_\lambda(f)\ F_\lambda(h)) = \mathrm{H}^{|G|}(\text{mod-}\Lambda)(f,h)$，因为它是一个有限维向量空间。这里，显式同构 $\mathrm{H}\nu_{f,h} : \mathrm{H}^{|G|}(\Lambda)(f,h) \to \mathrm{H}(\bar{\Lambda})(F_\lambda(f)\ F_\lambda(h))$ 由将 $F_i \mapsto \oplus_{g\in G} {}^g F_i$ 映至 $^{-}$ 给出。容易验证这是一个单态射；因此，由于两个向量空间的维数相同，便得到该同构。□

我们以一个例子结束本节，以说明半覆盖的概念。

例子 3.7。考虑例子 [17, Example 3.10] 中的代数 Λ 及其斜代数 Λ。**情形一：** 假设 $G_f \neq G$，$G_h = G$。此处，我们分析前两种情形，并考虑 $G_{f_s} \neq G$，$G_{f_t} \neq G$；$G_{f_s} \neq G$，$G_{f_t} = G$ 以及 $G_{f_s} = G$，$G_{f_t} \neq G$ 这三种不同情况。

$G_{f_s} \neq G$，$G_{f_t} \neq G$：考虑 $f: \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2\\3&\\2&4\end{smallmatrix}$ 和 $h: \begin{smallmatrix}3&&1&&5\\&2&&4&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&&4\\3&&1&&5\\&2&&4&\end{smallmatrix}$。这里，$gf: \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\4\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&4\\1&\\2&4\end{smallmatrix}$ 和 $gh = h$。注意，$\mathrm{H}F_\lambda f: \begin{smallmatrix}1&&3&&4\\&2&&2&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&&2\\1&&3&&4\\&2&&2&\end{smallmatrix}$ 和 $\mathrm{H}F_\lambda h := \oplus_{\hat{g}\in\mathbb{Z}_2\hat{}} {}^g\bar{h}$，其中，$\bar{h}: \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}$ 和 $\hat{g}\bar{h}: \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}3\\\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$。显然，$\dim_K \mathrm{H}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)(\mathrm{H}F_\lambda f,\ \mathrm{H}F_\lambda h) = \dim_K \oplus_{g\in G} \mathrm{H}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)(gf,\ h) = 2$。

$G_{f_s} \neq G$，$G_{f_t} = G$：考虑 $f: 2 \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}4\\\end{smallmatrix}$ 和 $h: \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to 1\ \begin{smallmatrix}1&&2\\2&&3\end{smallmatrix}\ 4$。这里，$gf: 2 \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}3\\\end{smallmatrix}$ 和 $gh = h$。注意，$\mathrm{H}F_\lambda f = N_{\hat{g}\in\mathbb{Z}_2\hat{}} {}^g\bar{f}: 2 \oplus 4 \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\\end{smallmatrix}$，其中 $\bar{f}: 2 \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\\end{smallmatrix}$，${}^g\bar{f}: 4 \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\\end{smallmatrix}$ 和 $\bar{N} = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\\end{smallmatrix}$；而 $\mathrm{H}F_\lambda h = \oplus_{\hat{g}\in\mathbb{Z}_2\hat{}} {}^g\bar{h}$，其中 $\bar{h}: \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2\\3&\\2&4\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\\end{smallmatrix}$ 和 $\hat{g}\bar{h}: \begin{smallmatrix}5\\4\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&4\\1&\\2&4\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\\end{smallmatrix}$。显然，$\dim_K \mathrm{H}(\mathrm{mod}\text{-}\bar{\Lambda})(\mathrm{H}F_\lambda f,\ \mathrm{H}F_\lambda h) = \dim_K \oplus_{g\in G} \mathrm{H}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)({}^gf,\ h) = 2$。

情形二：假设 $G_f \neq G, G_h \neq G$。这里我们考虑 $G_{f_s} \neq G, G_{f_t} = G$ 和 $G_{h_s} \neq G, G_{h_t} = G$ 的情形。考虑 $f: 2 \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}4\\\end{smallmatrix}$ 和 $h: \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\\end{smallmatrix}$。这里，${}^gf: 4 \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}4\\\end{smallmatrix}$ 和 ${}^gh = \begin{smallmatrix}5\\4\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\\end{smallmatrix}$。注意，$\mathrm{H}F_\lambda f = N_{\hat{g}\in\mathbb{Z}_2\hat{}} {}^g\bar{f}: 2 \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$，其中 $\bar{f}: 2 \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$，${}^g\bar{f}: 2 \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ 和 $\bar{N} = 2$；而 $\mathrm{H}F_\lambda h = N_{\hat{g}\in\mathbb{Z}_2\hat{}} {}^g\bar{h}: \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}3\\\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}4\\\end{smallmatrix}$，其中 $\bar{h}: \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}3\\\end{smallmatrix}$，${}^g\bar{h}: \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}4\\\end{smallmatrix}$ 和 $\bar{N} = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$。显然，$\dim_K \mathrm{H}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)(\mathrm{H}F_\lambda f, \mathrm{H}F_\lambda h) = \dim_K \oplus_{g\in G} \mathrm{H}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)({}^gf, h) = \dim_K \oplus_{g\in G} \mathrm{H}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)(f, {}^gh) = 1$。

情形-3: 假设 $G_f = G, G_h = G$。考虑 $f: 2 \to \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}$ 和 $h: \begin{smallmatrix}3&&1\\&2&&4\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&&2\\1&&3&&4\\&2&&2&\end{smallmatrix}$。注意，$\mathrm{H}F_\lambda f := \oplus_{\hat{g}\in\mathbb{Z}_2\hat{}} {}^g\bar{f}$，其中，$\bar{f}: 2 \to \begin{smallmatrix}2\\3\\2\end{smallmatrix}$ 和 $\hat{g}\bar{f}: 4 \to \begin{smallmatrix}4\\5\\4\end{smallmatrix}$，且 $\mathrm{H}F_\lambda h := \oplus_{\hat{g}\in\mathbb{Z}_2\hat{}} {}^g\bar{h}$，其中，$\bar{h}: \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2\\3&\\2&5\end{smallmatrix}$ 和 $\hat{g}\bar{h}: \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\4\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&4\\1&\\2&4\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}5\\\end{smallmatrix}$。显然，$\dim_K \mathrm{H}(\mathrm{mod}\text{-}\bar{\Lambda})(\mathrm{H}F_\lambda f, \mathrm{H}F_\lambda h) = \dim_K \mathrm{H}^{|G|}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)(f, h) = 2$。

注记 3.8。由于函子 $\mathrm{S}F_\lambda$ 是函子 $\mathrm{H}F_\lambda$ 在单态射范畴 $\mathrm{S}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)$ 上的限制，因此我们可以说，$\mathrm{S}F_\lambda: \mathrm{S}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda) \to \mathrm{S}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)$ 也是一个伽罗瓦半覆盖。

4. Galois semi-covering functor over functor categories

本节将证明，代数及其斜群代数上的态射范畴之间的伽罗瓦半覆盖函子 $\mathrm{H}F_\lambda$ 会在它们的函子范畴之间诱导出一个伽罗瓦半覆盖函子 ϕ。我们还将验证函子 ϕ是正合且忠实的。

Serre 子范畴： 若且唯若对于 C 中的任意正合列 $0 \to X \to Z \to Y \to 0$，在 S 中都有 $Z \in S$ 当且仅当 X，$Y \in S$，全子范畴 S 才是 Serre 子范畴。因此，S 对其子对象、商对象和扩张封闭。Serre 子范畴是阿贝尔子范畴。正合函子的核是其定义域范畴的 Serre 子范畴。

有限表示函子：我们用 $\mathrm{G}(\Lambda)$ 表示所有从 $\mathrm{mod}\text{-}\Lambda$ 到有限维 K-向量空间范畴 $\mathrm{mod}\text{-}K$ 的逆变 K-线性函子所构成的范畴。每个 $M \in \mathrm{mod}\text{-}\Lambda$ 都关联一个逆变 Hom 函子 $\mathrm{H}_M \in \mathrm{G}(\Lambda)$，定义为 $\mathrm{H}_M(X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M)$，其中任意 $X \in \mathrm{mod}\text{-}\Lambda$ 均如此，并记作 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)$。同态 $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ 对应于 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, f): \mathrm{Hom}_\Lambda(-, M) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(-, N)$，使得 $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, f): \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N)$ 由 $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, f)(g) = fg$ 定义，其中任意 $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M)$ 均如此。根据米田引理，函数 $f \to \mathrm{Hom}_\Lambda(-, f)$ 定义了向量空间之间的同构 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \to \mathrm{G}(\Lambda)(\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M), \mathrm{Hom}_\Lambda(-, N))$。此外，这给出 $M \approx N$ 当且仅当 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M) \approx \mathrm{Hom}_\Lambda(-, N)$。

函子 $F \in \mathrm{G}(\Lambda)$ 是有限表示的，当且仅当存在函子正合列 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(-, f)} \mathrm{Hom}_\Lambda(-, N) \to F \to 0$，其中 $M, N \in \mathrm{mod}\text{-}\Lambda$，且 Λ-模同态 $f: M \to N$i.e. $F \approx \mathrm{Coker}\mathrm{Hom}_\Lambda(-, f)$，使得 $F(X)$ 同构于映射 $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, f): \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N)$ 的余核。记 $\mathrm{F}(\Lambda)$ 为由有限表示函子构成的 $\mathrm{G}(\Lambda)$ 的全子范畴。显然 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M) \in \mathrm{F}(\Lambda)$。

$\mathrm{mod}\text{-}\Lambda$ 的加性子范畴 $\mathrm{Add}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)$:
对象：$\mathrm{mod}\text{-}\Lambda$ 中对象的任意直和。

态射: $f := (f_{ij}) : \oplus_{j\in J} M_j \to \oplus_{i\in I} N_i$ 其中, $f_{ij} : M_j \to N_i$, 对于 $i \in I$, $j \in J$。

对于任意 $j \in J$, 我们只有有限多个 $i \in I$ 满足 $f_{ij} \neq 0$。事实上, 这是因为对于任意 $j \in J$, M_j 都是有限维的。

给定 $T \in$ F(Λ), 定义 $\hat{T}$:Add(mod-Λ) →mod-K 如下:

令 $\hat{T}(\oplus_{j\in J} M_j) = \oplus_{j\in J} T(M_j)$, 并且 $\hat{T}(f) : \oplus_{i\in I} T(N_i) \to \oplus_{j\in J} T(M_j)$ 由 $T(f_{ij}) : \hat{T}(N_i) \to T(M_j)$ 定义, 其中 $i \in I$, $j \in J$。注意, 在 mod-Λ 上, T 等于 T。

函子 ϕ 介于 Λ 和 Λ 上的函子范畴之间:

考虑函子 ϕ :F(Λ) →F($\bar{\Lambda}$)如下:

对于任意 $T \in$F(Λ), 有 $\phi(T) := \hat{T} \bigcirc F^{\lambda}$。显然, $\phi(T) \in$G($\bar{\Lambda}$)。

对于 F_{λ} 的半稠密性质, 如 [17, 推论 3.14], 所述, 给定 $M \in$Ind-Λ , 根据注 2.5, 存在唯一的 $M \in$Ind-Λ, 使得以下情形成立:

- If $\bar{M} \approx F_{\lambda}(M)$, then $\phi(T)(\bar{M}) = \hat{T}(F^{\lambda}(F_{\lambda}(M))) \approx \hat{T}(\oplus_{g\in G} {}^{g}M) = \oplus_{g\in G} T({}^{g}M)$.
- If $\bar{M} \notin F_{\lambda}(M)$, then $F^{\lambda}(\bar{M}) = M$. Hence we get $\phi(T)(\bar{M}) = T(M)$.

对于任意态射 $\alpha \in$mod-$\bar{\Lambda}$, 定义 $\phi(T)(\alpha) = T(F^{\lambda}(\alpha))$。

T 下一个注确保 ϕ 将 F(Λ) 中的同态映射为 F(Λ 中的同态).

注 4.1。假设 $T_1, T_2 \in$ F(Λ), 且 $\iota : T_1 \to T_2$ 是函子同态。The n $\phi(\iota) : \phi(T_1) \to \phi(T_2)$定义如下: 设 $M, N \in$ mod-Λ和 $f \in \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M, N)$。分两种情况:

$M \notin F_{\lambda}(M)$ 这里, $\phi(\iota)_{\bar{M}} : T_1(M) \to T_2(M)$是同态 $\iota_M : T_1(M) \to T_2(M)$。$M = F_{\lambda}(M)$ 令 $\phi(\iota)_{\bar{M}} : \oplus_{g\in G} T_1({}^{g}M) \to \oplus_{g\in G} T_2({}^{g}M)$为由 $\iota_{{}^{g}M} : T_1({}^{g}M) \to T_2({}^{g}M)$定义的同态, 其中 $g \in G$。

我们考虑以下几种情况:

(1) 若 $\bar{M} \notin F_{\lambda}(M)$ $\bar{N} \notin F_{\lambda}(N)$, 则 $F^{\lambda}(\bar{f}_{\bar{M}\bar{N}}) = f_{MN}$, 其中 $f : M \to N$是 mod-Λ中的相应同态。由于 $\iota_M T_1(f) = T_2(f)\iota_N$成立, 因为 ι是函子的函子同态, 所以得到 $\phi(\iota)_{\bar{M}}\phi(T_1)(f) = \phi(T_2)(f)\phi(\iota)_{\bar{N}}$。(2) 若 $\bar{M} \notin F_{\lambda}(M)$ $\bar{N} = F_{\lambda}(N)$, 则 $F^{\lambda}(\bar{f}) = \underbrace{M}_{g\in G} f_{M{}^{g}N}$, 其中 $f_i : M \to {}^{g_i}N$是 mod-Λ中的相应同态。由于 $\iota_M T_1(f_i) = T_2(f_i)\iota_{{}^{g_i}N}$ 成立, 因为 ι 是函子的函子同态, 所以得到 $\phi(\iota)_{\bar{M}}\phi(T_1)(f) = \phi(T_2)(f)\phi(\iota)_{\bar{N}}$。(3) 若 $\bar{M} = F_{\lambda}(M)$ $\bar{N} \notin F_{\lambda}(N)$, 则 $F^{\lambda}(\bar{f}) = \underbrace{N}_{g\in G} f_{{}^{g}MN}$, 其中 $f_i : g_i M \to N$是 mod-Λ中的相应同态。由于 $\iota_{g_i M} T_1(f_i) = T_2(f_i)\iota_N$ 成立, 因为 ι 是函子的函子同态, 所以得到 $\phi(\iota)_{\bar{M}}\phi(T_1)(f) = \phi(T_2)(f)\phi(\iota)_{\bar{N}}$。(4) 若 $\bar{M} = F_{\lambda}(M)$ $\bar{N} = F_{\lambda}(N)$, 则 $F^{\lambda}(\bar{f}) = \oplus_{g\in G} f_{{}^{g}M{}^{g}N}$, 其中 $g_i f : g_i M \to g_i N$是 mod-Λ中的相应同态。由于 $\iota_{{}^{g_i}M} T_1({}^{g_i}f) = T_2({}^{g_i}f)\iota_{{}^{g_i}N}$成立, 因为 ι是函子的同态, 所以得到 $\phi(\iota)_{\bar{M}}\phi(T_1)(f) = \phi(T_2)(f)\phi(\iota)_{\bar{N}}$。

这表明, $\phi(\iota) : \phi(T_1) \to \phi(T_2)$ 是函子同态。

下面的结果保证了 ϕ 的正合性。

命题 4.2. *$\phi : \mathcal{F}(\Lambda) \to \mathcal{G}(\Lambda)$ 是一个正合函子。*

证明。对于给定的正合列 $0 \to T \xrightarrow{\iota} T' \xrightarrow{\iota'} T'' \to 0$ 以及 $\bar{M} \in$模-$\bar{\Lambda}$, 对所有 $g_i \in G$, 列 $0 \to T({}^{g_i}M) \xrightarrow{\iota_{{}^{g_i}M}} T'({}^{g_i}M) \xrightarrow{\iota'_{{}^{g_i}M}} T''({}^{g_i}M) \to 0$都是正合的。因此, 根据定义, ϕ 是正合的。□

Be 下面我们证明 ϕ 保有限表示函子, 即对于任意 $T \in$ F(Λ, $\phi(T) \in$ F(Λ).

命题 4.3. *假设 $M, N \in$ 模-Λ 且 $f : M \to N$ 是一个同态。那么*

(1) $\phi(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, f))$ 与 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(F^{\lambda}(-)\ f)$:$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(F^{\lambda}(-)\ M) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(F^{\lambda}(-)\ N)$ 同构。(2) 对任意 $T = \mathrm{Coker}\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, f)$, $\phi(T) = \mathrm{Coker}\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-, F_{\Lambda}(f)) \in F(\Lambda)$。因此, 存在如下交换图（函子之间在同构意义下）:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}(\text{mod-}\Lambda) & \xrightarrow{\theta(\text{mod-}\Lambda)} & \mathcal{F}(\Lambda) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}F_\lambda} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathrm{H}(\text{mod-}\bar{\Lambda}) & \xrightarrow[\theta(\text{mod-}\bar{\Lambda})]{} & \mathcal{F}(\bar{\Lambda}) \end{array}$$

其中， θ(模-Λ) ：H(模-Λ) →$\mathcal{F}(\Lambda)$ 是H(模-Λ)对象上的米田函子

$$\textit{defined by } (X_1 \xrightarrow{f} X_2) \to \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_\Lambda(-, X_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(-,f)} \mathrm{Hom}_\Lambda(-, X_2)).$$

证明。(1) 对任意 $\bar{X} \in$mod-$\bar{\Lambda}$，由注 2.5 可知， ϕ(Hom$_\Lambda$(–, f))($\bar{X}$) =Hom$_\Lambda$(–, f)○F^λ($\bar{X}$) =Hom$_\Lambda$(F^λ($\bar{X}$) f) $\oplus_{g\in G}$ Hom$_\Lambda$(^gX, M) → $\oplus_{g\in G}$Hom$_\Lambda$(^gX, N) 由同态 Hom$_\Lambda$(^gX, f) :Hom$_\Lambda$(^gX, M) →Hom$_\Lambda$(^gX, N) 定义，对所有 $g \in G$ 均成立。因此结论成立。

(2) 对任意 T =CokerHom$_\Lambda$(–, f)，存在正合列 Hom$_\Lambda$(–, M) $\xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(-,f)}Hom_\Lambda$(–, N) →T → 0。由于 ϕ : F(Λ) →G(Λ) 由命题 4.2 可知是正合的，故以下函子列是正合的:

$$\phi(\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)) \xrightarrow{\phi(\mathrm{Hom}_\Lambda(-,f))} \phi(\mathrm{Hom}_\Lambda(-, N)) \to \phi(T) \to 0.$$

此外 ，根据命题 3.2，(F^λ, F_λ) 是一个伴随对，因此下图是交换图。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_\Lambda(F^\lambda(-), M) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(F^\lambda(-),f)} & \mathrm{Hom}_\Lambda(F^\lambda(-), N) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \approx} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \approx} \\ \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-, F_\lambda(M)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-,F_\lambda(f))} & \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-, F_\lambda(N)) \end{array}$$

Now 由 (1)， ϕ(T) ≈余核ϕ(Hom$_\Lambda$(–, f)) ≈CokerHom$_\Lambda$(F^λ(–) f) ≈CokerHom$_{\bar{\Lambda}}$(–, F_λ(f))。□

于是我们得到一个协变正合函子 ϕ : F(Λ) →F($\bar{\Lambda}$)，满足对任意 T =CokerHom$_\Lambda$(–, f)， ϕ(T) =$\hat{}T$○F^λ ≈ CokerHom$_{\bar{\Lambda}}$(–, F_λ(f))。特别地，对任意 $M, N \in$mod-Λ 以及一个同态 $f : M \to N$，有 ϕ(Hom$_\Lambda$(–, M)) =Hom$_{\bar{\Lambda}}$(–, F_λ(M)) 和 ϕ(Hom$_\Lambda$(–, f)) =Hom$_{\bar{\Lambda}}$(–, F_λ(f))。

关于 G在G(Λ)上的作用：对于任意 $T \in$ G(Λ) 和 $g \in G$，按如下方式定义 $^gT \in$ G(Λ):

$$(^gT)(M) = T(^{g^{-1}}M) \text{ for any } M \in \text{mod-}\Lambda.$$

$$(^gT)(f) = T(^{g^{-1}}f) \text{ for any homomorphism } f \in \text{mod-}\Lambda.$$

存在同构 ^{g}Hom$_\Lambda$(–, M) ≈Hom$_\Lambda$(–, ^gM) 和 ^{g}CokerHom$_\Lambda$(–, f) ≈CokerHom$_\Lambda$(–, ^gf)，对于任意 $M \in$ mod-Λ、 $f \in$ mod-Λ 和 $g \in G$ 均成立，因此 G 在 G(Λ) 上的作用限制在 F(Λ) 上。下面的引理表明，对于任意 T =CokerHom$_\Lambda$(–, f) $\in$ F(Λ)， T 的稳定性等价于 f 的源和靶同时稳定。

引理 4.4。设 T =CokerHom$_\Lambda$(–, f) $\in \mathcal{F}(\Lambda)$，对于一个 Λ-模同态 $f : M \to N$，则 $G_T = G$ 当且仅当 $G_{MN} = G$。

证明。这里， $G_T = G$ 推出对所有 $g \in G$， CokerHom$_\Lambda$(–, ^gf) ≈CokerHom$_\Lambda$(–, f)，因此$G_f = G$。所以， $G_{MN} = G$。反之显然。□

T ¯下一个定理确立了伽罗瓦半覆盖函子 ϕ :F(Λ) → F(Λ 的存在性).

¯**定理 4.5.** 设有限阿贝尔群 G 作用于有限维代数 Λ ，其对应的斜群代数为 Λ 。那么对于任意 $T_1, T_2 \in \mathcal{F}(\Lambda)$，函子 $\phi : \mathcal{F}(\Lambda) \to \mathcal{F}(\Lambda)$ 诱导出以下向量空间同构:

$$\mathcal{F}(\bar{\Lambda})(\phi(T_1), \phi(T_2)) \approx \begin{cases} \oplus_{g\in G}\mathcal{F}(\Lambda)(^gT_1, T_2) & \textit{if } G_{T_1} \neq G; \\ \oplus_{g\in G}\mathcal{F}(\Lambda)(T_1, ^gT_2) & \textit{if } G_{T_2} \neq G; \\ \mathcal{F}(\Lambda)^{|G|}(T_1, T_2) & \textit{if } G_{T_1T_2} = G. \end{cases} \tag{1}$$

证明. 假设对于 $i = 1, 2$，有 $T_i = \mathrm{CokerHom}_\Lambda(-, f_i)$。若 $G_{T_1} \neq G$，则由引理 4.4 可得 $G_{f_1} \neq G$。由命题 4.3 和定理 3.6，可得 $\oplus_{g\in G}$ F(Λ)($^gT_1, T_2$) ≈ $\oplus_{g\in G}$ H(mod-Λ)($^gf_1, f_2$) ≈ H(mod-Λ)(H$F_\lambda f_1$,H$F_\lambda f_2$) ≈F(Λ)($\phi(T_1)$ $\phi(T_2)$)。其余情形类似。□

下面的推论保证了 ϕ 的忠实性。

推论 4.6. 假设 G 作用于一个代数 Λ，且 Λ 是相应的斜群代数。那么函子 $\phi : \mathcal{F}(\Lambda) \to \mathcal{F}(\Lambda)$ 是忠实的。

证明。在不同情形下，将定理 4.5 中的同构与 F(Λ)(T_1, T_2) 到等式 1 右侧函子范畴态射空间的包含映射复合（例如，当 $G_{T_1} \neq G$ 时，F(Λ)(T_1, T_2) $\hookrightarrow \oplus$F(Λ)($^gT_1, T_2$)），我们得到一个从F(Λ)(T_1, T_2) 到 F(Λ)($\phi(T_1)$ $\phi(T_2)$) 的单态射。这表明，ϕ 是忠实的。□

5. KG-dimension of the skew group algebras

本节的主要贡献是证明 KG 维数在斜化下保持不变。因此，我们验证了 Prest 关于 KG 维数有限性的猜想，以及 Schr¨oer 关于斜温和代数上 KG 维数与稳定秩之间联系的猜想。此外，我们确定了（斜）Brauer 图代数所有可能的稳定秩。

这里，我们如下定义 KG(Λ) 为范畴 F(Λ) 的 KG 维数 KG。

定义 5.1. 令 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 为从 mod-Λ 到 mod-K 的所有有限表示反变 K-线性函子所构成的范畴。研究 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 的结构，一种自然的方法是考察其关联的 ***Krull-Gabriel***滤过：

$$\mathcal{F}(\Lambda)_{-1} \subseteq \mathcal{F}(\Lambda)_0 \subseteq \mathcal{F}(\Lambda)_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}(\Lambda)_\alpha \subseteq \mathcal{F}(\Lambda)_{\alpha+1} \subseteq \cdots$$

$\mathcal{F}(\Lambda)$ 的 ***Serre***子范畴，递归定义如下：

(1) $\mathcal{F}(\Lambda)_{-1} = 0$；*(2)* $\mathcal{F}(\Lambda)_{\alpha+1}$ 是 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 的 ***Serre*** 子范畴，由商范畴 $\mathcal{F}(\Lambda)/\mathcal{F}(\Lambda)_\alpha$ 中具有有限长度的所有函子构成，其中 α 为任意序数；*(3)* 对任意极限序数 β，$\mathcal{F}(\Lambda)_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta}\mathcal{F}(\Lambda)_\alpha$。

克鲁尔-加布里埃尔维数 KG（Λ）Λ 是满足条件 $\mathcal{F}$（Λ）$_\alpha$ =$\mathcal{F}$（Λ）的最小序数 α（若存在这样的序数）；若不满足该条件，则为 KG（Λ）= ∞。在后一种情形下，我们称满足条件 $\mathcal{F}$（Λ）$_\alpha$ =$\mathcal{F}$（Λ）$_{\alpha+1}$ 的最小序数 α 为 Λ的稳定***Krull-Gabriel***维数 KG_{st}（Λ）。

以下引理对于确定斜代数的 KG 维数至关重要。

引理5.2。 [8, 附录B] 假设 C、D 是阿贝尔范畴，且 $F : C \to D$ 是正合函子。若 F 是忠实的，则 KG（C）≤ KG（D）。

下一个定理得出结论：KG-维数在斜化下保持不变。

定理 5.3。 设 Λ是有限维代数，G 是由 $\mathcal{K}$ 线性自同构构成的有限阿贝尔群，作用于 Λ，且 Λ 是相应的斜群代数。那么，Λ 的 ***KG*** 维数 KG（Λ）等于 Λ的 ***KG*** 维数 KG（Λ）。

证明。 命题4.2和命题4.6保证 ϕ 是一个正合忠实函子，因此由引理5.2可得 KG(Λ) ≤ KG(Λ) ≤ KG((Λ)G) ≈ KG(Λ)。□

5.1. 斜温和代数的KG-维数

Gi给定箭图 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$以及 KQ的容许理想 I，代数 KQ/I 称为 a特 殊双串代数，当

(1) 在 Q 的每个顶点 v 上，至多有两支箭以 v 为起点，且至多有两支箭以 v为终点；

(2) 对于 Q 中的每支箭 α，至多存在一支满足 $\alpha\beta \notin I$ 的箭 β，且至多存在一支满足 $\gamma\alpha \notin I$ 的箭 γ。

如果理想 I 由长度至少为二的路径生成，则称其为串代数。温和代数是串代数的一个子类，其理想 I 由长度恰好为二的路径生成。

关于温和代数和斜温和代数的详细概念，请参见 [17, 第 4 节。1]此外，斜温和代数被发现是赋有某种 $\mathbb{Z}_2$作用 [2, 的温和代数的斜群代数，参见第 3 节。2]作为定理 5.3 的直接应用，我们得到以下结果:

推论 *5.4. </style}*假设 Λ 是温和代数 Λ 的相应斜温和代数，则它们的 *KG* 维数相等。

推论 1.6 中的 Prest 猜想对串代数 [11]成立。温和代数是串代数的一个子类，因此上述推论证实了该猜想对斜温和代数成立，因为有无穷多个带刻画了它们的非国内型性质。

推论 5.5. 设 Λ 是一个斜温和代数。那么，当且仅当 时，Λ 具有驯表示型；此时 Λ 的克鲁尔-加布里埃尔维数 $KG(\Lambda)$ 有限。

另一方面，推论 1.6 中的施罗尔猜想揭示了 KG 维数与根基的幂零指数之间的联系。让我们回顾一下加性范畴的根基的定义。

定义 5.6. Λ 的根基 rad_Λ 是由不可分解对象之间的不可逆态射生成的理想。Λ 中的态射若属于 $\mathrm{rad}(\Lambda)$，则称为根基态射。其幂归纳定义如下。

(1) 若 n 有限，则 rad^n_Λ =$\mathrm{rad}^{n-1}_\Lambda \mathrm{rad}_\Lambda$ ；*(2)* 若 α 是极限序数，则 $\mathrm{rad}^\alpha_\Lambda := \bigcap_{\mu<\alpha}\mathrm{rad}^\mu_\Lambda$ ；*(3)* 若 $\alpha = \mu + n$ 是后继序数，则 $\mathrm{rad}^\alpha_\Lambda := (\mathrm{rad}^\mu_\Lambda)^{n+1}$ ；*(4)* $\mathrm{rad}^\infty_\Lambda := \bigcap_\mu \mathrm{rad}^\mu_\Lambda$。

存在一个理想降链mod-Λ ⊇根基$_\Lambda$ ⊇ 根基$^2_\Lambda$ ⊇ ⋯ ⊇ 根基$^\omega_\Lambda$ ⊇ 根基$^{\omega+1}_\Lambda$ ⊇ ⋯ ⊇ 根基$^\infty_\Lambda$ ⊇ 0. Λ的稳定秩记为$\mathrm{st}(\Lambda)$，它是满足根基$^\alpha_\Lambda$ =根基$^{\alpha+1}_\Lambda$ 的最小序数 α。

作者与 S. Trepode 和 A. G. Chaio 证明，伽罗瓦半覆盖函子保留根基的幂 [17, 定理 4.3、4.6]。

定理 5.7。 设 $F_\lambda : \Lambda \to \Lambda$ 是一个伽罗瓦半覆盖。那么

(1) F_λ 保留根基的幂；*(2)* $\Lambda=$ 的稳定秩 Λ的稳定秩。

此外，Schr¨oer 猜想在 [11, 定理 10.19] 中对串代数得到了验证。由定理 5.3 和 5.7，我们得到以下结果:

推论 5.8。 对于斜温和代数 $\bar{\Lambda}$, $KG(\bar{\Lambda}) = n \geq 2$ 当且仅当 $\mathrm{rad}^{\omega(n-1)}_{\bar{\Lambda}} = 0$ 且 $\mathrm{rad}^{\omega n}_{\bar{\Lambda}} = 0$.

5.2. （斜）Brauer 图代数的 KG-维数

Brauer 图代数构成了特殊双串代数中对称代数的一个子类，如 [18, 定理 2.8、定理 1.8]所述。关于 Brauer 图代数的详细概念，请参见 [18,第 2.3]节。

定理 5.9。 *Brauer* 图代数是对称特殊双串代数。

另一方面，斜 Brauer 图代数在 [16, 第 3.1] 节中作为 Brauer 图代数的一种推广被引入；研究发现，它们是赋予某种 $\mathbb{Z}_2$作用的 Brauer 图代数的斜群代数，相关内容将在下文介绍。

定义 5.10。 斜 *Brauer* 图是数据 $\Gamma = (H, \iota, \sigma, m)$，其中

(1) H 是半边集合；*(2)* ι 是 H 的一个置换，允许存在满足 $\iota^2 = id_H$的不动点；

(3) σ 是 H 的一个置换，称为定向；

(4) $m : H \to \mathbb{Z}_{>0}$ 是一个在 σ-轨道上为常值的映射：它称为重数。

可以自然地为数据 $\Gamma = (H,\ \iota,\ \sigma,\ m)$ 定义一个图。记 H_0 为不被 ι 固定的半边集， $H_\times$ 为被 ι 固定的半边集。因此，该图的顶点集为 $\Gamma_0 \approx H/\sigma \cup H_\times$，边集为 $\Gamma_1 = H/\iota$。此外， σ 分解中的每个循环都会在 H/σ 中的一个顶点周围诱导出半边的循环次序。由于 $m : H \to \mathbb{Z}_{>0}$ 在一个 σ-轨道上为常值，它诱导出一个映射 $m : H/\sigma \to \mathbb{Z}_{>0}$。我们将 H/σ 中的顶点记为 o，将 $H_\times$ 中的顶点记为 $\times$。显然，每个 $\times$-顶点都恰有一条边与其关联。我们将 $\Gamma = (H,\ \iota,\ \sigma,\ m)$ 与新构造的图等同。

给定一个斜 Brauer 图 $\Gamma = (H,\ \iota,\ \sigma,\ m)$，如果对所有 $v \in H/\sigma$， $\mathbb{Z}_2$ 分次 $d : H \to \mathbb{Z}_2$ 是 0-齐次的，即 $\sum_{h \in H,\ s(h)=v} d(h) = 0$，其中 $s : H \to H/\sigma$ 是 Γ 中 o-顶点的源映射，则称 $(\Gamma,\ d)$ 为 $\mathbb{Z}_2$ 分次斜 Brauer 图。

对于一个 $\mathbb{Z}_2$ 分次斜 Brauer 图，按如下方式构造 Brauer 图 $\Gamma_d = (H_d,\ \iota_d,\ \sigma_d,\ m_d)$

(1) $H_d = H \times \mathbb{Z}_2$： H_d 的一个元素记作 h_i，表示 $h \in H$ 和 $i \in \mathbb{Z}_2$；(2) 对所有 $h_i \in H_d$，若 $h \in H_\times$，则 $\iota_d(h_i) = \begin{cases} h_{i+1} \\ \iota h \end{cases}$；若 $h \in H_0$.，则 $(\ )_i$；(3) 对所有

$h_i \in H_d$， $\sigma_d(h_i) = (\sigma h)^{i+d(h)}$；(4) 对所有 $h_i \in H_d$， $m_d(h_i) = m(h)$。

与 Γ 相关联的斜 Brauer 图代数 B，可表示为与覆盖 Γ_d 相关联的 Brauer 图代数 B_d 的斜群代数，这是由阶为 2 的循环群 $G = g$ 在 B_d上的下述作用得到的。记 B_d 中对应于边$[h_i] \in H_d/\iota_d$的幂等元为 $e_{[h_i]}$，则 G 在 $B_d = KQ_d/I_d$ 上有如下自然作用：

(1) 对所有 $[h_i] \in H_d/\iota_d$， $g.e_{[h_i]} = e_{[h_{i+1}]}$；(2) $g.\alpha_{h_i} = \alpha_{h_{i+1}}$，其中 Q_d 中由半边 $h_i \in H_d$诱导的箭为 α_{h_i}。

类似地，记 B中由边 $[h] \in H/\iota$得到的、对应于 $i = \phi, 0, 1$ 的幂等元为 $e_{[h]_i}$，则 G 的对偶群 $\hat{G} = \chi$ 在 $B = KQ/I$ 上有如下自然作用：

(1) 对所有 $[h] \in H_o/\iota$， $\chi.e_{[h]} = e_{[h]}$；对所有 $[h] \in H_\times/\iota$， $\chi.e_{[h]_i} = e_{[h]_{i+1}}$；(2) $\chi.{}^j\alpha_h^i = (-1)^{-d(h)j+1}\alpha_h^{i+1}$，其中 ${}^j\alpha_h^i$ 是 Q 中由半边 $h \in H$ 诱导的一个箭。滥用一下记号，若 $i = \phi$，则 $i + 1 = \phi$。

以下结果 [16, 命题 3.9] 表明，斜 Brauer 代数可由上述群 G 的作用下的 Brauer 代数的斜群代数得到。

命题 5.11. 令 f 为 B_dG 中由所有$[h] \in H/\iota$对应的 $e_{[h_0]} \otimes 1_G$ 之和给出的幂等元。那么，代数 fB_dGf 有一个自然的 G-作用，且由$e_{[h]} \mapsto f[h] := e_{[h_0]} \otimes 1_G$, $e_{[h]_i} \mapsto f_{[h]_i} := e_{[h_0]} \otimes \frac{1_G + (-1)^i g}{2}$（对 $i = 0,\ 1$和对 $i,\ j = \phi,\ 0,\ 1$）定义的映射 $\overline{\phi : B \to fB_dGf}$ 是代数同构，并且与 $\hat{G}$-作用相交换，其中 ${}^j\beta_h^i : f_{[h]_i} \to f_{[h]_j}$ 是 fB_dGf 中的箭。

以下结果直接由定理 5.3 和上述命题得到。

推论 5.12。 设 Λ 是与 *Brauer* 图代数 Λ 相关联的斜 *Brauer* 图代数，则它们的 *KG* 维数相等。

Kuber、Srivastava 和 Sinha 的下一个定理确定了特殊双串代数 [23] 的所有可能稳定秩。

定理 5.13。 对于任意至少含有一个带的特殊双串代数 Λ， $\omega \leq \mathrm{st}(\Lambda) < \omega^2$。

根据定理 5.9，Brauer 图代数是特殊双串代数，因此以下结果由定理 5.7 和定理 5.13 得出。

定理 5.14。 对于斜 *Brauer* 图代数 Λ 及其对应的 *Brauer* 图代数 Λ，有 $\omega \leq \mathrm{st}(\Lambda) = \mathrm{st}(\bar{\Lambda}) < \omega^2$。

References

[1] M. Auslander，《表示论中的函子方法》，载于：《代数表示》，数学讲义第 944 卷，105–179，1982。[2] C. Amiot 和 T. Br¨ustle，《利用轨形实现斜温和代数之间的导出等价》。载于：Documenta Mathematica 27，933–982，doi: 10.4171/DM/889，2022。[3] S. Garavaglia，《模的模型论中的维数与秩》，预印本，密歇根大学，1979，修订于 1980。[4] C. Geiss 和 J. A. de la Pe

~ 5 2, na, 307.

《族的 Auslander-Reiten 分支》，Bol. Soc. Mat. Mexicana 第 –326 期，1999。[5] W. Geigle，《温和遗传 Artin 代数表示论的克鲁尔–加布里埃尔维数及其对正合列结构的应用》，Manuscr. Math.，54，83–106，1985。[6] W. Geigle，《Artin 代数的克鲁尔维数》，载于：《表示论 I：有限维代数》，数学讲义第 1177 号，Springer-Verlag，柏林、海德堡、纽约，135–155，1986。[7] G. Janusz，《有限群的不可分解模》。Ann. of Math. (2) 89，209–241，1969。[8] H. Krause，《模范畴的谱》，Mem. Amer. Math. Soc. 149，第 707 号，2001。[9] H. Krause，《Artin 代数上的泛模》，Proc. London Math. Soc. 76，276–306，1998。[10] R. Marsh，S. Schroll，《Brauer 图代数的几何与簇变异》，J. Algebra 419，141–166，2014。[11] R. Laking，M. Prest，G. Puninski，《国内弦代数的克鲁尔–加布里埃尔维数》。Transactions of the American Mathematical Society，370(7)，4813–4840，2018。[12] M. Prest，《模型论与模》，伦敦数学学会讲义系列 130，剑桥大学出版社，剑桥，1988。[13] M. Prest，《纯性、谱与局部化》，《数学及其应用百科全书》121，剑桥大学出版社，剑桥，2009。[14] J. A. de la Pe˜na，《Automorfismos, algebras torcidas y cubiertas》，博士论文，墨西哥国立自治大学，1983。[15] I. Reiten 和 C. Riedtmann。《Artin 代数表示论中的斜群代数》。J. Algebra，92(1):224–282，1985。[16] V. Soto，《作为带重数（斜）Brauer 图代数的广义 Kauer 移动的倾斜变异》。arXiv 预印本 arXiv:2406.10634，2024。[17] S. Sardar，A. Gonzalez 和 S. Trepode。《斜群代数的不可约态射》，https://arxiv.org/abs/2507.20103，2025。[18] S. Schroll，《Brauer 图代数：关于 Brauer 图代数、相关温和代数及其与簇理论联系的综述》。载于《同调方法、表示论与簇代数》，CRM 短期课程，177–223。Springer，Cham，2018。[19] A. Skowronski 和 J. Waschb¨usch。《表示有限双串代数》。载于：Jour nal f¨ur die reine und angewandte Mathematik 345，172–181，1983。[20] A. Skowronski，《循环有限 Artin 代数的克鲁尔-加布里埃尔维数》，Algebr. Represent. Theory，第 19 卷第 1 期，215–233，2016。[21] J. Schr¨oer，《模范畴的无限根》，载于：Proceedings of the London Mathematical Society 81.3，651–674，2000。[22] J. Schr¨oer，《代数的克鲁尔–加布里埃尔维数——开放问题与猜想》，载于 H. Krause 和 C. M. Ringel（编），《无限长度模》，第 419–424 页，Birkh¨auser，2000。[23] S. Srivastava，V. Sinha 和 A. Kuber，《特殊双串代数模范畴的稳定根》。载于：arXiv:2311.10178，2023。[24] B. Wald 和 J. Waschb¨usch，《温和双串代数》，载于：Journal of Algebra 95.2，480–500，1985。[25] M. Wenderlich，《强单连通代数的克鲁尔维数》，Bull. Polish Acad. Sci., Ser. Math.，44，473–480，1996。