五个圆环：与完备性等价的实分析定理

作者： *RafaelCantuba*[1]

摘要。本文阐述了 O. Riemenschneider 关于五个“圆环”的工作，这些蕴含关系涉及实分析定理，而每个定理都等价于实数域的戴德金完备性。这些圆环涵盖实函数论的五个要素：收敛性、连通性、可微性、紧致性和积分。

数学主题分类（2020）：26-01 关键词：实分析、拓扑学、高等微积分

arXiv:2601.11681v1 [math.HO] 16 Jan 2026

1 引言

初等实分析中的证明可以分为两类。一类证明直接来自集合论和逻辑学，例如涉及使用嵌套量词的证明。真正的困难来自另一类证明，即利用完备性公理，或实数系的戴德金完备性（最小上界性质）的证明。综述 [2] 列出了完备性公理的 72 种等价形式，从单调收敛原理、介值定理，到中值定理、一致连续定理、微积分基本定理的一种形式，以及阿尔泽拉–阿斯科利定理的两种形式。[在 [1], 中我们还发现，测度论中的 Littlewood 三原则是该列表中较新的补充。] 两篇 2013 年的论文分别探讨了这一实分析视角，但实际上还有第三篇更早的文献——一篇发表于 2001 年、未正式发表但可在线获取的作品 [10], ，本文正是对它的阐述。据说，这项工作源于这样一种尝试：以一种能够在无需太多额外工作的情况下看出基本实分析定理与完备性公理之间等价性的方式，组织实分析定理的证明，但代价是需要较早地引入拓扑概念。我们并不一定认为这是一个缺点。看来，这项工作的“繁琐”性质（证明这些等价关系）是一种深入学习拓扑学的良好方式，其推进速度通常是使用传统拓扑学教材时难以达到的。当然，这只是一种看法。

实分析原理被分为五个“圆环”，每个“圆环”更准确地说，是一个有限蕴含序列，从一个命题（⋆）出发，最终回到（⋆）。五个圆环中的任意两个都彼此重叠，而位于圆环交集处的这些命题表明，五个圆环中的所有命题都等价于戴德金完备性。这五个圆环的主题都是实分析中的重要概念：收敛、连通性、微分、紧致性和积分。本文按照这五个主题组织内容。

（*i*）收敛。 在定理 78 的证明中，我们证明了若干实分析原理彼此等价，这些原理都明确涉及实数列。其中包括柯西收敛准则、单调收敛原理、 $\mathbb{R}$（中的数列）的博尔查诺-魏尔斯特拉斯性质，以及闭区间套原理的两种形式。为了方便实分析学习者，所有必要的定义，以及仅依赖这些定义的定理及其证明，都可以在第 2.1 节中找到。该节介绍了数列、单调递增数列、子列、柯西序列、有界数列、收敛序列和嵌套区间等概念。它们的

[1]副教授，德拉萨大学数学与统计学系，菲律宾马尼拉马拉特区塔夫脱大道2401号，邮编1004，开放研究者与贡献者身份识别码：0000-0002-4685-8761

定义顺序与定理 78 证明中的蕴含关系脉络相一致。实分析原理其他圈的预备知识也采用这种编排方式。此外，有些原理必须分别与阿基米德原理（或较弱的“$\mathbb{R}$的可数共尾性”）通过逻辑合取相结合，才能纳入相应的圈。因此，我们还在第 2.6 节中简要介绍了所有依赖阿基米德原理的证明所需的预备知识。

(ii) 连通性。 定理 79 涉及与拓扑概念“连通性”相关的实分析原理。这些实分析原理包括最小上界性质或上确界存在性、介值定理、戴德金分割公理，以及关于区间连通性的若干命题。相应的预备知识见第 2.2 节，其中介绍了上界、上确界、内点与开集、闭包点与闭集、连通集、全不连通性、点处连续性、集合上的连续性、粘贴引理，以及戴德金分割、空隙和分割点。

(iii) 可微性。 定理 80 汇集了一些微分学的基本定理，例如极值定理、罗尔定理、中值定理及其扩展形式（也称为柯西中值定理），此外还有泰勒定理、由某个（$n+1$）阶导数为零来刻画次数至多为 n 的多项式、二阶导数非负的函数的凸性、一阶导数非负的函数的单调性，以及导数为零的函数是常数这一命题。在相应的预备知识部分，即第 2.3 节，我们将建立所需的理论工具：基于滤子基这一拓扑概念定义的极限、可微性的概念，以及极限的代数、连续函数和可微函数。

（*iv*）紧致性。实分析中的几乎所有定理都与紧致性有关；但对于实分析原理的第四个圈（见定理 81），我们只讨论那些陈述或证明明确或表面上涉及紧致性的定理。这些定理包括勒贝格覆盖引理、一致连续定理、闭有界区间上连续函数的有界性、用阶梯函数对连续函数进行一致逼近，当然还包括单位区间 $[0,1]$ 是紧致的这一陈述。预备知识见第 81 节，其中我们将介绍覆盖与子覆盖、紧集、勒贝格数、一致连续性、分割和阶梯函数等概念。

（*v*）积分。本理论最终将证明有关初等积分（达布/黎曼）的定理之间的等价关系，这些定理汇集于定理 82，其中包括闭有界区间上连续函数的达布/黎曼可积性、微积分基本定理的两种形式、闭有界区间上非负连续函数具有单调递增的原函数，以及任意两个原函数之差为常数这一结论。正如证明中将会看到的，与前几个圈相比，这里对先前已证明的等价关系依赖更多。第 2.5 节的预备知识包括阶梯函数的积分、下达布积分与上达布积分、黎曼和、通过上达布积分与下达布积分相等来定义的可积函数、作为黎曼和集合滤子基之极限的黎曼积分、可积函数的有界性，以及积分的可加性。

这些证明在技术上应当置于任意有序域中进行，这也正是 [10] 所采用的方法。不过，我们选择了一种朴素的方法，只在实数域 $\mathbb{R}$ 中进行证明，并以实分析的学生为考量。实际上，可以选择一条实分析原理

作为 $\mathbb{R}$ 的完备性公理，而五个圆环中的其余原理无论如何都可以在 $\mathbb{R}$ 中证明。其缺点是，[IO] 中有些实分析原理最终不在本文的讨论范围内。这些原理主要涉及级数；它们虽属于 [IO]，却未在本文中涉及，因为它们不在五个圆环之内：若要证明这些定理等价于戴德金完备性，就必须采用如下类型的论证：假设 $\mathbb{R}$ 的一个有序子域满足该原理，将其作为公理，然后证明这个子域本身就是 $\mathbb{R}$。在上述朴素方法中进行这类论证，似乎不太自然。

本文面向高年级本科生或初入门研究生，他们应掌握纯数学证明的基础知识：嵌套量词；含嵌套量词命题的否定；推理规则；直接证明、反证法和逆否命题证明；数学归纳法；集合包含关系和集合等式的证明；在论证中运用集合并集与交集的定义（这一点不容低估）；何时可以“不失一般性”地作出假设；以及如何使用函数的像集和原像。这些内容无法从微积分课程中学到，也不是微积分自然延伸到微分方程或“更高等”应用数学的内容。真正的高等数学讲究数学素养：难度逐步增加，研究方法日益复杂，但研究对象未必也随之变得复杂。实分析只涉及数列、区间和微积分中的基本对象，但对数学素养的要求很高。 [另请参阅第 6 节的引言段落，其中说明拓扑紧致性概念是一个“把关主题”。]

2 预备知识

本文的主题结构基于所需证明的层次。如果论证仅依据定义展开，那么这些内容就是第2.1–2.5节中的预备知识。如果某个实分析论证应当建立在戴德金完备性之上，那么这正是本文的核心所在；相关论证则包含在实分析原理五个圆环的定理 78–82 的证明中。正如引言中所详述的，定理 78–82 所需的预备知识分别可在第2.1–2.5节中找到。第 2.6 节在某种程度上介于第2.1–2.5节与定理 78–82 之间。阿基米德原理是戴德金完备性的推论，但其逆命题（超出本文的讨论范围）并不成立。因此，第 2.6 节中的证明在技术上并非直接源自实分析定义，但也不像定理 78–82 的“紧致性论证”那样复杂。

基本意图是为 [IO] 补充初学者理解蕴含圈所需的所有基本概念和证明；换言之，旨在说明，从实分析原理的五个圆环中可以获取的理论，确实能够融入入门级实分析。

2.1 实数数列

所有正整数构成的集合记作 $\mathbb{N}$，函数 $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ 称为一个数列。通常不会像对函数那样使用诸如 $c\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$，其中 $c\colon n \mapsto c(n)$ 的常见记法来表示数列。相反，我们将 $c_n := c(n)$ 称为该数列的第 n项，其中 n 是该项的索引c_n。数列本身用符号表示为：将第 n 项括在圆括号内，并在其后标出用来为各项编索引的 $n \in \mathbb{N}$：$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，可读作“各项为 c_n 的数列”。

命题 1. 给定一个数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，以下条件等价。

(i) 对于任意 m、$n \in \mathbb{N}$，若 $m < n$，则 $c_m \leq c_n$（分别地，$c_m < c_n$）。

(ii) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，不等式 $c_n \leq c_{n+1}$（分别地，$c_n < c_{n+1}$）成立。

[在这种情况下，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 被称为单调递增（分别地，严格递增[2]）数列。]

证明。（*i*） $\Longrightarrow$ （*ii*）利用事实 $n < n+1$。

（*ii*） $\Longrightarrow$ （*i*）我们对 n 使用归纳法。如果 $n = 1$，那么不存在正整数 $m < n$，因此所需命题真空成立。假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$，对所有正整数 $m < n$，都有 $c_m \leq c_n$（分别地，$c_m < c_n$）。等价地，$c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$（分别地，$c_1 < c_2 < \cdots < c_n$）。但此时，我们只需使用（*ii*）得到 $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n \leq c_{n+1}$（分别地，$c_1 < c_2 < \cdots < c_n < c_{n+1}$），这意味着对所有正整数 $m < n+1$，都有 $c_m \leq c_{n+1}$（分别地，$c_m < c_{n+1}$）。由归纳法可得所需命题。 □

如果 $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个数列，使得对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $N_k \in \mathbb{N}$，或者等价地说，赋值规则 $k \mapsto N_k$ 是一个函数 $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$，那么，给定一个数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，将 $k \mapsto N_k$与 $n \mapsto c_n$ 复合后仍然是一个函数 $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$，也就是仍然是一个数列。我们可以将其记为 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$。如果再附加条件，即 $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是严格递增的，那么就称 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$的子序列 。

命题 2。 如果$(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$的子序列，那么对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $N_k \geq k$。

证明。 由于 $N_1 \in \mathbb{N}$，我们有 $N_1 \geq 1$。如果对于某个 $k \in \mathbb{N}$，有 $N_k \geq k$，根据子序列的定义，$N_{k+1} > N_k \geq k$，因此 $N_{k+1} > k$。这个严格不等式意味着，整数 N_{k+1} 可能取得的最小值是比 k大 **1** 的整数。也就是说，$N_{k+1} \geq k+1$。通过归纳法，我们得到所需的结论。□

数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为柯西序列 ，如果对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 m，$n \in \mathbb{N}$若 m，$n \geq N$，则 $|c_m - c_n| < \varepsilon$。

引理 3. 若$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增但不是柯西序列，则存在 $\varepsilon > 0$ 以及$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列$(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $c_{N_{k+1}} \geq c_{N_1} + k\varepsilon$。

证明。 由于 (c_n) 不是柯西序列，存在一个 $\varepsilon > 0$，使得

(⋆) 对所有 $N \in \mathbb{N}$，都存在 m，$n \in \mathbb{N}$，使得 m，$n \geq N$且 $|c_m - c_n| \geq \varepsilon$。

我们证明上述条件蕴含

(⋆⋆) 对所有 $N \in \mathbb{N}$，都存在 m，$n \in \mathbb{N}$，使得 $m > n \geq N$且 $c_m \geq c_n + \varepsilon$。

给定 $N \in \mathbb{N}$，假设 **(⋆)** 中的整数 m, n 相等。由于 $k \mapsto c_k$ 是一个函数，因此有 $c_m = c_n$，这意味着 $0 = |c_m - c_n| \geq \varepsilon > 0$，从而得到矛盾 $0 > 0$。此后，$m \neq n$，并且不失一般性地假设 $m > n$。由于 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是单调递增的，这意味着 $c_m \geq c_n$，或者说 $c_m - c_n \geq 0$，因此非负数 $c_m - c_n$ 必定等于其绝对值。也就是说，$c_m - c_n = |c_m - c_n| \geq \varepsilon$，这意味着 $c_m \geq c_n + \varepsilon$，由此证明了 **(⋆⋆)** 。

现在我们用 **(⋆⋆)** 构造 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列。对于 $N = 1$，存在 m_1，$N_1 \in \mathbb{N}$ 满足$m_1 > N_1 \geq 1$，使得 $c_{m_1} \geq c_{N_1} + \varepsilon$。我们将 **(⋆⋆)** 用于 $N = m_1 + 1$，得到 m_2，$N_2 \in \mathbb{N}$ 满足 $m_2 > N_2 \geq N = m_1 + 1 > m_1 > N_1 \geq 1$且 $c_{m_2} \geq c_{N_2} + \varepsilon$。由前面的不等式可得$N_2 > m_1$。由于 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增，$c_{N_2} \geq c_{m_1} \geq c_{N_1} + \varepsilon$，因此 $c_{N_2} \geq c_{N_1} + \varepsilon$。假设

[2]严格递增的数列是单调递增的，但反过来不成立：任何常数序列（任意两项都相等）都是单调递增的，却不是严格递增的。

对于某个整数 $k \geq 2$，我们已确定了 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的项 c_{m_t} 和 c_{N_t}，其中所有满足 $m_t > N_t \geq t$ 的正整数 $t < k$ 都有 $N_1 < N_2 < \cdots < N_{k-1}$，并且若 $t \leq k-2$，则 $c_{N_{t+1}} \geq c_{N_t} + \varepsilon$。我们将 (⋆⋆) 用于$N = m_{k-1}+1$，得到 m_k，$N_k \in \mathbb{N}$，使得 $m_k > N_k \geq N = m_{k-1}+1 > m_{k-1} > N_{k-1} \geq k-1$（特别是，$N_k > N_{k-1}$ 和 $N_k > m_{k-1}$），并且 $c_{m_k} \geq c_{N_k} + \varepsilon$。由 $N_k > m_{k-1}$可得$c_{N_k} \geq c_{m_{k-1}}$；根据归纳假设，$c_{m_{k-1}} \geq c_{N_{k-1}} + \varepsilon$，因此 $c_{N_k} \geq c_{k-1} + \varepsilon$。通过归纳法，我们构造出了数列 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是严格递增序列，并且

$$c_{N_{k+1}} \geq c_{N_k} + \varepsilon, \qquad \text{(for all } k \in \mathbb{N}\text{).} \quad (1)$$

由于 $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 严格递增，$(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 确实是 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列 .

现在我们可以用归纳法证明最后一个不等式 $c_{N_{k+1}} \geq c_{N_1} + k\varepsilon$。在 (1) 中令 $k = 1$，即可得到 $k = 1$ 处所需的不等式。若所需的不等式对某个 $k \in \mathbb{N}$ 成立，那么在两边 $c_{N_{k+1}} + \varepsilon \geq c_{N_1} +$都加上 ε，得到 $k + 1\varepsilon$；根据 (1)，左边至多为 $c_{N_{k+2}}$，由此完成归纳。 □

给定 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$，如果数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $c_n \in \mathcal{S}$，则称该数列为属于 $\mathcal{S}$ 的数列。

命题 4。给定数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，以下条件等价。

(i) 存在 $M > 0$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $|c_n| \leq M$。

(ii) 存在一个区间 $[a, b]$，使得$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[a, b]$中的一个数列。

*[*在这种情况下，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为有界数列。*]*

证明。*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* 由于 $|c_n| \leq M$ 等价于 $-M \leq c_n \leq M$，我们可以使用区间 $[a, b] = [-M, M]$。

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)* 如果 $a = 0 = b$，那么我们只需使用 $M = 1 > 0$。此后，我们假设 a 或 b 中有一个非零，因此 $|a|$ 或 $|b|$ 中有一个为正，这意味着 $M := \max\{|a|, |b|\}$ 为正。给定 $n \in \mathbb{N}$，根据假设，$a \leq c_n \leq b$，其中第一个不等式可改写为 $-c_n \leq -a$。因此，我们有 $c_n \leq b \leq |b| \leq \max\{|a|, |b|\} = M$ 和 $-c_n \leq -a \leq |a| \leq \max\{|a|, |b|\} = M$，进一步化简为 $c_n \leq M$ 和 $-c_n \leq M$，其中左侧是 $|c_n|$唯一可能的值，所以无论如何，$|c_n| \leq M$。 □

如果命题 4 中的常数 M 在特定情境下适用，我们就说数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 被 M所界。若只有部分项的绝对值不超过 M，则同样可以称这些项被 M所界。

命题 5. 柯西序列有界。

证明。假设 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是柯西数列。由于 $1 > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $m,\ n \in \mathbb{N}$，若 $m,\ n \geq N$，则 $|c_m - c_n| < 1$。特别地，这对 $n = N$也成立。也就是说，对于所有指标 $m \geq N$，都有 $|c_m - c_N| < 1$。将左侧替换后得到 $||c_m| - |c_N|| < 1$，这是由反三角不等式[3]得出的。新的左侧至少为 $|c_m| - |c_N|$。因此，$|c_m| - |c_N| < 1$，将 $|c_N|$移至右侧后，我们此时证明了对于所有指标 $m \geq N$，都有 $|c_m| < |c_N| + 1$，这意味着 $|c_m| \leq |c_N| + 1$。也就是说，索引 m及其之后的所有数列项都被 $|c_N| + 1$所界。于是整个数列都被 M所界：$= \max\{|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_N| + 1\}$，它是正数，因为集合中的一个数 $|c_N| + 1$是正数。 □

[3]已知 $a \in \mathbb{R}$：对于任意 $k \in \{-1, 1\}$，有 $ka \leq |a|$；并且存在 $k \in \{-1, 1\}$ 使得 $ka = |a|$。已知 $a,\ b \in \mathbb{R}$，存在 $k \in \{-1, 1\}$ 使得 $|a + b| = k(a + b) = ka + kb \leq |a| + |b|$。已知 $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$，令 $a = x - y$和 $b = y - z$，得到三角不等式 $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$。令 $a = u$和 $b = v - u$，得到 $-|u - v| \leq |u| - |v|$；令 $a = u - v$和 $b = v$，得到 $|u| - |v| \leq |u - v|$。合并可得：$-|u - v| \leq |u| - |v| \leq |u - v|$，这等价于$||u| - |v|| \leq |u - v|$，即反三角不等式。

若存在 $M \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有$c_n \leq M$，则称数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有上界 。如果在特定语境中常数 M很重要，则称数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$被 M所上界约束 。

命题 6. 如果数列$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增或严格递增，那么以下条件等价：

(i) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界；

(ii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有上界。

证明. *(i)* $\implies$ *(ii)*利用以下事实 $c_n \leq |c_n|$。

(ii) $\implies$ *(i)* 由*(ii)*可知，存在 $M \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $c_n \leq M$。由于$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$单调递增（分别地，严格递增），对于任意 $n \in \mathbb{N}$，如果 $n > 1$，那么 $c_n \geq c_1$（分别地，$c_n > c_1$，但这也意味着 $c_n \geq c_1$）。不等式 $c_n \geq c_1$ 对 $n = 1$也成立：由于$k \mapsto c_k$ 是一个函数，$n = 1$ 意味着 $c_n = c_1$，进而意味着 $c_n \geq c_1$。至此，我们已经证明 $n \in \mathbb{N}$ 蕴含 $c_1 \leq c_n \leq M$。也就是说，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是实数集 $[c_1, M]$中的一个数列，因此是一个有界数列。 □

命题 7. 如果（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个没有上界的严格递增数列，那么（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$的任意子序列也都是如此。

证明。设 $M \in \mathbb{R}$，并设（c_{N_k}）$_{k\in\mathbb{N}}$ 是（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$的一个子序列。由于（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 没有上界，存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得 $c_K > M$。根据命题 2，$N_K > K$；又由于（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递增，$c_{N_K} > c_K$。因此，$c_{N_K} > M$，且（c_{N_k}）$_{k\in\mathbb{N}}$没有上界。 □

数列（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $c \in \mathbb{R}$，是指对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有$n \in \mathbb{N}$，若$n \geq N$，则 $|c_n - c| < \varepsilon$。如果存在 $c \in \mathbb{R}$，使得（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 c，那么（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，即为收敛的。

若 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $c \in \mathbb{R}$，则可使用经典的“epsilon-over-two”技巧证明 c是唯一的，我们将其称为 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限（即数列的极限），记作 $\lim_{n\to\infty} c_n := c$。epsilon-over-two 技巧也可用于证明收敛序列是柯西序列，因此根据命题 5，收敛序列有界。反过来则不成立：项在 -1 和 1 之间交替的数列有界，但不收敛。要使有界性能够推出收敛，还需要附加条件；这也是“第一圈”实分析定理值得关注的原因之一，后文将对此进行探讨。

回到“收敛蕴含柯西”这一事实，其逆命题（柯西序列收敛）证明起来要长得多，这也是研究“第一圈”实分析定理的另一个原因。现在，我们先强调收敛这一概念的一些简单却微妙的推论，随后介绍一个引理，说明柯西序列这一概念与子序列收敛之间的相互关系。

引理 8. *(i)* 给定 $k \in \mathbb{R}$，若 $\lim_{n\to\infty} c_n = c$，则 $\lim_{n\to\infty} kc_n = kc$。

(ii) If $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$*, and for any* $n \in \mathbb{N}$*,* $0 \leq c_n \leq \lambda_n$*, then*[4] $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

(iii) 断言 $\lim_{n\to\infty} |c_n - c| = 0$ 和 $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ 等价[5]。

[4]显然，这是序列极限夹逼定理的一个较弱版本，但目前这已经足够了。[5]给出的证明表明，我们不需要使用任何关于收敛序列运算的规则。

证明。 (*i*) 若 $k = 0$，则 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 成为零序列 $(0)_{n\in\mathbb{N}}$，显然收敛于 0。否则，给定 $\varepsilon > 0$，我们发现 $\frac{\varepsilon}{|k|} > 0$，因此存在 $N \in \mathbb{N}$，使得若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq N$，则$|c_n - c| < \frac{\varepsilon}{|k|}$，这意味着 $|kc_n - \overline{kc}| < \varepsilon$。

(ii) 如果 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛于 0，那么存在 $\varepsilon > 0$ 使得

(⋆) 对任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 $N_k \in \mathbb{N}$，使得 $N_k \geq k$ 且 $|c_{N_k}| = |c_{N_k} - 0| \geq \varepsilon$.

根据 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ 的假设，存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得

(⋆⋆) 如果 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq K$，那么 $|\lambda_n| = |\lambda_n - 0| < \varepsilon$。

关键是在 (⋆) 中令 $k = K$，从而得到 $N_K \in \mathbb{N}$、$N_K \geq K$ 和 $|c_{N_K}| \geq \varepsilon$。前两个条件使得 (⋆⋆) 中的假设在 $n = N_K$ 处成立，因此 $|\lambda_{N_K}| < \varepsilon$。此时，我们有 $|\lambda_{N_K}| < \varepsilon \leq |c_{N_K}|$，也就是 $|\lambda_{N_K}| < |c_{N_K}|$。但根据假设，所涉及的所有数列的项都是非负的，因此它们必定等于其绝对值，于是有 $\lambda_{N_K} < c_{N_K}$。这与对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $c_n \leq \lambda_n$ 的假设相矛盾。因此，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 0。

(iii) 在收敛序列的定义中，$|(c_n - c) - 0| < \varepsilon$ 等价于 $|c_n - c| < \varepsilon$。 □

引理 9. 如果$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 c，那么它的任意子序列$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$也收敛。

证明。 设 ε。由于 $c = \lim_{n\to\infty} c_n$，存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$|c_n - c| < \varepsilon, \qquad (\text{if } n \geq K). \quad (2)$$

设 $k \in \mathbb{N}$，使得 $k \geq K$。根据子序列的定义，情形 $k > K$ 推出 $N_k > N_K$；而由于 $k \mapsto N_k$ 是一个函数，情形 $k = K$ 推出 $N_k = N_K$。因此，$k \geq K$ 推出 $N_k \geq N_K$。根据命题 2，$N_k \geq N_K \geq K$，所以 $N_k \geq K$。因此，假设 (2) 在 $n = N_k$ 处成立。这给出 $|c_{N_k} - c| < \varepsilon$。至此，我们已证明 $\lim_{k\to\infty} c_{N_k} = c$。 □

命题 10. 一个不收敛的单调递增数列，存在一个严格递增且同样不收敛的子数列。

证明. 假设 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个不收敛的单调递增数列。令 $c_{N_1} := c_1$。假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$，我们已从数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$中选出若干项，并按如下顺序排列：$c_{N_1} < c_{N_2} < \cdots < c_{N_k}$，使得 $N_1 < N_2 < \cdots < N_k$。

为导出矛盾，假设对于所有 $n \geq N_{k-1} + 1$，都有 $c_{N_{k-1}} \neq c_n$。条件$n \geq N_{k-1} + 1$意味着 $N_{k-1} < n$；由于 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是单调递增的，这进一步意味着$c_{N_{k-1}} \leq c_n$。与 $c_{N_{k-1}} \neq c_n$合取，得到 $c_{N_{k-1}} = c_n$，也就是说 $c_n - c_{N_{k-1}} = 0$。因此，给定$\varepsilon > 0$，存在 $N_{k-1} + 1 \in \mathbb{N}$，使得若 $n \geq N_{k-1} + 1$，则有 $|c_n - c_{N_{k-1}}| = |0| = 0 < \varepsilon$。于是，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛。↯

此后，存在 $N_k \geq N_{k-1} + 1$ [，使得 $N_k > N_{k-1}$]，从而 $c_{N_{k-1}} < c_{N_k}$。根据归纳法，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，我们找到了数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中按 $c_{N_1} < c_{N_2} < \cdots < c_{N_k}$ 排列的项，使得 $N_1 < N_2 < \cdots < N_k$。这意味着 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的严格递增子序列。

假设 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛（到某个 $L \in \mathbb{R}$）。给定 $\varepsilon > 0$，存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对于任意整数 $k \geq K$，都有 $|c_{N_k} - L| < \varepsilon$，这意味着 $-\varepsilon < c_{N_k} - L < \varepsilon$，因此 $L - \varepsilon < c_{N_k} < L + \varepsilon$。也就是说，

（⋆）对于任意 $k \in \mathbb{N}$，若 $N_k \geq N_K$，则 $L - \varepsilon < c_{N_k} < L + \varepsilon$。

设 $m \in \mathbb{N}$，使得 $m \geq N_K$。由命题 2，$N_K \leq m \leq N_m$；又由于（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$单调递增，或由于 $n \mapsto c_n$ 是一个函数，$c_{N_K} \leq c_m \leq c_{N_m}$。由于 $k \geq K$，我们可以在（$\star$）中令 $k = K$，并利用结论中的第一个不等式，得到 $L-\varepsilon < c_{N_K} \leq c_m \leq c_{N_m}$。由 $N_K \leq m \leq N_m$ 以及子序列的定义可知，$K \leq m$。因此，我们可以在（$\star$）中令 $k = m$，并利用结论中的第二个不等式，得到 $L - \varepsilon < c_{N_K} \leq c_m \leq c_{N_m} < L + \varepsilon$。这意味着 $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$。从每一项中减去 L，并改写为绝对值的形式，得 $|c_n - L| < \varepsilon$。因此，（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，这与某个假设矛盾。因此，（c_{N_k}）$_{k\in\mathbb{N}}$ 不收敛。 □

引理 11. 一个有收敛子列的柯西序列收敛于该子列的极限。

证明。由 $\varepsilon > 0$，我们有 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$。设 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个柯西序列，则存在 $C \in \mathbb{N}$ 使得

(⋆) 若 $m,\ n \in \mathbb{N}$ 且 $m,\ n \geq C$，则 $|c_m - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$。

设 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个收敛子列，且 $c := \lim_{k\to\infty} c_{N_k}$，则存在 $S \in \mathbb{N}$ 使得

(⋆⋆) 若 $k \in \mathbb{N}$ 且 $k \geq S$，则 $|c_{N_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2}$。

令 $H := \max\{S, C\}$。由于 H 或为 S，或为 C，而两者都属于 $\mathbb{N}$，因此我们得到 $H \in \mathbb{N}$。此外，$H \geq C$，且由命题 2，$N_H \geq H \geq C$。对于任意 $n \geq N_H$，我们也有 $n \geq C$，由 (⋆) 可得 $|c_n - c_{N_H}| < \frac{\varepsilon}{2}$。由 $H = \max\{S, C\}$，我们还得到 $H \geq S$，这由 (⋆⋆) 推出 $|c_{N_H} - c| < \frac{\varepsilon}{2}$。

根据三角不等式，$|c_n - c| \leq |c_n - c_{N_H}| + |c_{N_H} - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$。因此，$\lim_{n\to\infty} c_n = c$。 □

我们还将考虑区间序列，它们不过是将每个$n \in \mathbb{N}$映射到一个区间的函数。其记号与数列相同，例如 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$，但要强调的是，这些项都是区间。就我们的目的而言，我们只考虑闭有界区间。对于每个这样的区间，比如 $I = [a, b]$，其长度 定义为 $\ell(I) := b - a$。

命题 12。如果 $c,\ x \in I$，那么 $|c - x| \leq \ell(I)$。

证明。如果 $I = [a, b]$，那么 $a \leq c \leq b$ 和 $a \leq x \leq b$，后者意味着 $-b \leq -x \leq -a$，将其与第一个不等式组相加，得到 $-(b - a) \leq c - x \leq b - a$。根据长度的定义，$-\ell(I) \leq c - x \leq \ell(I)$。因此，$|c - x| \leq \ell(I)$。 □

命题 13。给定一个由非空闭有界区间组成的数列$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$，以下条件等价。

(i) 对任意 h、$k \in \mathbb{N}$，若 $h < k$，则 $I_h \subseteq I_k$。

(ii) 对每个 $k \in \mathbb{N}$，包含关系 $I_k \leq I_{k+1}$ 成立。

[在这种情况下，$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 称为嵌套区间数列。]

证明。证明与命题 1 的证明类似。 □

引理 14。*(i)* 如果$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是嵌套区间数列，那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，区间 I_k 的左端点数列$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 单调递增，且以上界 I_n的右端点 b_n为界。

(ii) 若$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 单调递增且以 M 为上界，并且$\lim_{k\to\infty} a_k = c$，则对每个$k \in \mathbb{N}$，都有 $a_k \leq c \leq M$。

证明。*(i)* 由于区间 I_k 相互嵌套，给定 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $I_{k+1} \subseteq I_k$，这意味着 $a_{k+1} \in [a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$。因此，$a_k \leq a_{k+1} \leq b_k$。由第一个不等式，$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 单调递增。

假设存在 K，$N \in \mathbb{N}$，使得 $a_K > b_N$。由于第 N 个区间 $I_N = [a_N, b_N]$ 非空，我们有 $a_N \leq b_N$，因此 $a_N \leq b_N < a_K \in [a_K, b_K] = I_K$，这意味着 $a_K \notin I_N$。也就是说，I_K 中有一个元素不属于 I_N，或者说，$I_K \not\subseteq I_N$。这意味着 $K \not\leq N$。否则，根据数列的定义（若 $K = N$）或嵌套区间的定义（若 $K < N$），就会得出矛盾。从此，$N < K$。根据嵌套区间的定义，$I_N \subseteq I_K$。因此，$b_N \in [a_N, b_N] \subseteq [a_K, b_K]$，这意味着 $a_K \leq b_N \leq b_K$，其中第一个不等式与假设 $a_K > b_N$ 矛盾。因此，对于任意 k，$n \in \mathbb{N}$，我们有 $a_k \leq b_n$。

(ii) 假设存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得 $a_K > c$。这意味着 $a_K - c > 0$。根据收敛的定义，存在 $M \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $k \in \mathbb{N}$，若 $k \geq M$，则有 $|a_k - c| < a_K - c$，其中左侧至少为 $a_k - c$。因此 $a_k - c < a_K - c$，也就是说 $a_k < a_K$。换言之，我们已经证明，对于所有指标 $k \geq M$，都有 $a_k < a_K$。特别地，这对任意 $k > H := \max\{M, K\}$ 都成立；更具体地说，对情形 $k = H > K$ 也成立。也就是说，我们找到了指标 H 和 K，使得 $K < H$ 但 $a_K > a_H$，这与假设数列 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 单调递增相矛盾。因此，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $a_k \leq c$。

假设 $c > M$。这意味着 $c - M > 0$，根据收敛性，存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $k \in \mathbb{N}$，若 $k \geq K$，则 $|c - a_k| = |a_k - c| < c - M$，其中最左边的量至少为 $c - a_k$。因此，$c - a_k < c - M$，这意味着 $M < a_k$。特别地，这在 $k = K$ 时也成立。也就是说，我们得到了一个索引 K，使得 $a_K > M$，这与 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 有上界 M 这一事实相矛盾。因此，$c \leq M$。□

若 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，则在引理 8*(i)* 中令 $k = -1$，可得 $(-c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 也收敛，且 $\lim_{n\to\infty}(-c_n) = -\lim_{n\to\infty} c_n$。若 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 具有这样的性质：$(-c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增，则称 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递减；而若 $(-c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有上界 $-M$，则称 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有下界 M。由此，我们立即得到引理 14*(ii)* 的以下推论。

推论 15。 如果 $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是单调递减且有下界 M，并且 $\lim_{k\to\infty} b_k = c$，那么对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $M \leq c \leq b_k$。

我们所说的数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在集合 $\mathcal{S}$ 中有多少项（有限项或无限项），是指集合 $\{n \in \mathbb{N} \text{ 的基数：} \ c_n \in \mathcal{S}\}$，或函数 $n \mapsto c_n$ 下 $\mathcal{S}$ 的原像。这与集合 $\{c_n : \ n \in \mathbb{N}\} \cap \mathcal{S}$，或 $\mathcal{S}$ 与 $n \mapsto c_n$ 的值域的交集无关。等价地，如果所有满足 $c_n \in \mathcal{S}$ 的指标 n 所组成的集合是有限的（分别为无限的），我们就说数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{S}$ 中有有限项（分别为无限项）。以下命题的陈述中没有体现这一概念，但其证明中使用了这一概念。

引理 16. 若 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界数列，则存在一个嵌套区间数列 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $c_{N_k} \in I_k$ 和 $\ell(I_k) = \frac{b-a}{2^{k-1}}$。

证明。设 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $I_1 = [a, b]$ 中的一个数列。假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$，已找到闭有界区间 $[a_{k-1}, b_{k-1}] = I_{k-1} \subseteq I_{k-2} \subseteq \cdots \subseteq I_1$，使得 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在所有这些区间中都有无限多项，并且 $\ell(I_n) = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ 对所有正整数 $n < k$ 都成立。如果 $L_{k-1} := \left[a_{k-1}, \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right]$ 且 $R_{k-1} := \left[\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, b_{k-1}\right]$，那么 $I_{k-1} = L_{k-1} \cup R_{k-1}$。如果 L_{k-1} 和 R_{k-1} 中各自只包含 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的有限项，那么 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $L_{k-1} \cup R_{k-1} = I_{k-1}$ 中的项数有限。↯ 因此，

存在 $I_k = [a_k, b_k] \in \{L_{k-1}, R_{k-1}\}$（其中 $I_k \subseteq I_{k-1}$），使得 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 I_k 中有无限多项，且 $\ell(I_k) = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{1}{2}\ell(I_{k-1}) = \frac{b-a}{2^k}$。由归纳法，我们构造出一个嵌套区间数列 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\ell(I_k) = \frac{b-a}{2^{k-1}}$，并且 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 I_k 中有无限多项。对于 $k = 1$，由于 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $I_1 = [a, b]$ 中的一个数列，我们令 $N_1 = 1$，于是$c_{N_1} = I_1$。假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$，已经确定指标 $N_1 < N_2 < \cdots < N_{k-1}$，使得$c_{N_t} \in I_t$ 对所有正整数 $t < k$ 都成立。由于 I_k 中有无限多个 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的项，指标集合$\{n \in \mathbb{N} \colon c_n \in I_k\}\backslash\{1, 2, \ldots, N_{k-1}\}$ [仍然是无限的；也就是说，排除从 1 到 N_{k-1} 的所有正整数（而不只是预先确定的指标 $N_1 < N_2 < \cdots < N_{k-1}$]）后，仍有一个指标 N_k 大于 N_{k-1}，使得 $c_{N_k} \in I_k$。由归纳法，我们构造出 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $c_{N_k} \in I_k$。

□

2.2 上确界与连通集

给定 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ 和 $b \in \mathbb{R}$，我们称 b 是 $\mathcal{S}$ 的上界，或者称 $\mathcal{S}$ 有上界 b，如果对于每个 $x \in \mathcal{S}$，都有 $x \leq b$。如果 $c \in \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个上界，并且对于 $\mathcal{S}$ 的任意上界 b，都有 $c \leq b$，那么称 c 是 $\mathcal{S}$ 的上确界或最小上界。如果 $\mathcal{S}$ 确实有上确界，设 c_0 和 c 都是 $\mathcal{S}$ 的上确界。上界 c_0 与上确界 c 的关系是 $c_0 \leq c$，而上确界 c_0 与上界 c 的关系也是 $c \leq c_0$。因此，$c_0 = c$，也就是说（如果 $\mathcal{S}$ 有上确界，那么）上确界是唯一的，我们将其记为 $\sup \mathcal{S}$。

引理 17。 *(i)* 如果 b 是 $\mathcal{S}$ 的一个元素和上界，那么 $b =$ 上确界$\mathcal{S}$。

(ii) 若 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，且 b_1 是 $\mathcal{S}$ 的上界，那么要么 $\sup \mathcal{S}$ 存在（作为 $\mathbb{R}$ 的一个元素），要么存在一个由嵌套区间构成的数列 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$，I_k 的左端点 a_k 是 $\mathcal{S}$ 的一个元素，I_k 的右端点 b_k 是上界但不是 $\mathcal{S}$ 的元素，并且 $\ell(I_k) = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$。

证明。*(i)* 设 β 是 $\mathcal{S}$ 的上界。由于 $b \in \S$，我们有 $b \leq \beta$。因此，$b = \sup \mathcal{S}$。

*(ii)*由于 $\mathcal{S}$ 非空，存在 $a_1 \in \mathcal{S}$。若 $b_1 \in \mathcal{S}$，则由部分 *(i)* 可知结论成立。否则，假设 $b_1 \notin \mathcal{S}$。

假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$，已经确定了区间 $I_{k-1} \subseteq I_{k-2} \subseteq \cdots \subseteq I_1$，使得对于所有正整数 $n < k$，I_n 的左端点 a_n 是 $\mathcal{S}$ 的一个元素，I_n 的右端点 b_n 是上界但不是 $\mathcal{S}$ 的元素，并且 $\ell(I_n) = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$。若 I_{k-1} 的中点 $\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个元素，则令 $a_k := \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ 且 $b_k := b_{k-1}$。若 I_{k-1} 的中点 $\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ 不属于 $\mathcal{S}$，则令 $a_k := a_{k-1}$ 且 $b_k := \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$。两种情况下都有 $a_{k-1} \leq a_k \leq b_{k-1}$ 和 $a_{k-1} \leq b_k \leq b_{k-1}$，因此 $I_k := [a_k, b_k] \subseteq I_{k-1}$；此外，两种情况下 a_k 都是 $\mathcal{S}$ 的一个元素，而 b_k 是 $\mathcal{S}$ 的上界。对于 I_k 的长度，我们发现两种情况下，其中一个端点都是 $\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$，因此它与另一个端点（即 a_{k-1} 或 b_{k-1}）之间的距离为 $\ell(I_k) = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{1}{2}\ell(I_{k-1}) = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$。若 $b_k \in \mathcal{S}$，则由部分 (i) 可知结论成立。否则，条件 $b_k \notin \mathcal{S}$ 完成归纳。

□

命题 18。 如果 $\mathcal{S} \subseteq [a, b]$、$a \in \mathcal{S}$，且 $c =$ 上确界$\mathcal{S}$，那么 $c \in [a, b]$。

证明。 如果 $x \in \mathcal{S} \subseteq [a, b]$，那么 $x \leq b$，因此 b 是 $\mathcal{S}$的上界，所以根据上确界的定义，$c \leq b$。由于 a是一个元素，而 c 是 $\mathcal{S}$的上界，因此我们有 $a \leq c$。此时，我们有 $a \leq c \leq b$，所以$c \in [a, b]$。

□

命题 19. 如果 $a < c =$ 上确界$\mathcal{S}$，那么存在 $\xi \in \mathcal{S}$ 使得 $a < \xi \leq c$。

证明。根据上确界的定义，如果 b是 $\mathcal{S}$的上界，那么 $c \leq b$。根据逆否命题，如果$b < c$，那么 b 不是 $\mathcal{S}$ 的上界。根据命题中的假设，这适用于 $b = a$，所以 a不是 $\mathcal{S}$的上界。根据上界的定义，这意味着存在 $\xi \in \mathcal{S}$ 使得 $\xi \not\leq a$，或者说 $a < \xi$。由于 ξ 是 $\mathcal{S}$的一个元素，而 c 是 $\mathcal{S}$的一个上界，因此我们有 $\xi \leq c$。 □

回顾 $\mathbb{R}$上的标准拓扑。给定一个实数集合 A，如果存在一个（有界）开区间（a, b），使得 $x \in$（a, b）且（a, b）$\subseteq A$，那么实数 x 称为 A 的内点；而如果对于任意开区间（a, b），只要$x \in$（a, b），就有（a, b）$\cap A \neq \emptyset$（或者等价地，（a, b）$\not\subseteq A^c$，其中 $A^c := \mathbb{R} \backslash A$），那么 x 称为 A 的闭包点。A 的内部A^o 是其所有内点组成的集合，而闭包 A^- 是所有闭包点组成的集合。上述内点和闭包点的定义直接推出集合包含关系 $A^o \subseteq A$ 和 $A \subseteq A^-$。如果 $A \subseteq A^o$，那么 A 称为开集；如果 $A^- \subseteq A$，那么 A 是闭集。因此，A 是开集当且仅当 $A = A^o$，而 A是闭集当且仅当 $A^- = A$。所有有界开区间显然都是开集。由于区间$\mathbb{R} =$（$-\infty, \infty$）包含任意有界开区间，因此 $\mathbb{R}$ 显然是开集。空集 $\emptyset$ 显然是开集。

如果 x 是由开集构成的集族 $\{A_\lambda$ 中所有集合的并集 $\mathcal{O}$ 的元素，那么对于某个 $\ell \in \Lambda$，x 属于其中一个集合 $A_\ell \subseteq A_\ell^o$，因此存在一个开区间 $I \subseteq A_\ell \subseteq \mathcal{O}$，使得 $x \in I$。这意味着 $x \in \mathcal{O}^o$，所以 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^o$，且 $\mathcal{O}$ 是开集。也就是说，任意开集集族的并集都是开集。给定 a、$b \in \mathbb{R}$，我们有 $(-\infty, a) = \bigcup_{x \in (-\infty, a)} (x, a)$，并且 $(b, \infty) = \bigcup_{x \in (b, \infty)} (b, x)$，其中构成并集的有界开区间都是开集。因此，无界开区间 $(-\infty, a)$ 和 (b, ∞) 都是开集。

两个有界开区间 I 和 J 的交集也是一个有界开区间。只需取右端点中较小的一个，以及 I 和 J 的左端点中较大的一个即可。如果 A 和 B 是开集，且如果 $x \in A \cap B$，那么 $x \in A$ 意味着存在一个有界开区间 I_1，使得 $x \in I_1 \subseteq A$，而 $x \in B$ 意味着存在一个有界开区间 I_2，使得 $x \in I_2 \subseteq B$。因此，$x \in I_1 \cap I_2 \subseteq A \cap B$，其中 $I_1 \cap I_2$ 是一个有界开区间。这意味着 $x \in (A \cap B)^o$，所以 $A \cap B \subseteq (A \cap B)^o$，且 $A \cap B$ 是开集。利用归纳法，有限个开集的交集是开集。

若 $A \subseteq B$，则上述关于内点和闭包点定义的陈述现在应分别以“$(a, b) \subseteq A \subseteq B$，”和“$\emptyset \neq (a, b) \cap A \subseteq (a, b) \cap B$，”结尾。因此，$A^o \subseteq B^o$ 和 $A^- \subseteq B^-$ 都是 $A \subseteq B$的推论。

对于上述闭包点定义，若采用替代结尾“$I \not\subseteq A^c$”，则可立即得出：x 不是 A 的内点，当且仅当 x 是 A^c的闭包点；此外，x 是 A^c 的内点，当且仅当 x 不是$(A^c)^c = A$的闭包点。因此，$x \in (A^o)^c$ 当且仅当 $x \in (A^c)^-$，而 $x \in (A^c)^o$ 当且仅当 $x \in (A^-)^c$。由此可得恒等式$(A^o)^c = (A^c)^-$ 和$(A^c)^o = (A^-)^c$。

由于前述等式，一个 A 实数集合是开集，当且仅当$A^o = A$ 当且仅当（A^o）$^c = A^c$ 当且仅当（A^c）$^- = A^c$ 当且仅当 A^c 是闭集。也就是说，A 是开集，当且仅当 A^c 是闭集。由于这同样适用于 A^c，我们发现，A^c 是开集，当且仅当 $A =$（A^c）^{c} 是闭集。闭有界区间 $[a, b]$ 的补集是（$-\infty, a$）$\cup$（b, ∞），它是开集的并集，并且自身也是开集，因此 $[a, b]$ 是闭集。由于（$-\infty, a$）和（b, ∞）是开集，它们的补集 $[a, \infty) =$（$-\infty, a$）^{c} 以及（$-\infty, b] =$（b, ∞）^{c} 是闭集。

如果 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是一个闭集族，那么$\{A_\lambda^c : \lambda \in \Lambda\}$ 是一个开集族，因此 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ 是开集，而 $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 是闭集。也就是说，

任意闭集族的交集都是闭集。如果 A_1、A_2、…、A_N都是闭集，那么 A_1^c、A_2^c、…、A_N^c都是开集，$\bigcap_{k=1}^N A_k^c$也如此。因此，$\bigcup_{k=1}^N A_k = \left(\bigcap_{k=1}^N A_k^c\right)^c$是闭集。也就是说，有限个闭集的并集是闭集。

至此，我们已经回顾了后续证明所需的所有拓扑概念。下面再补充一点，说明开集的概念与实数系中的距离函数，或函数 $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$denotedby$(x,c) \mapsto |x-c|$，之间的关系。

断言 $c \in (a,b)$ 等价于存在 $\delta > 0$ 使得 $(c-\delta, c+\delta) \subseteq (a,b)$。[必要性可用 $\delta := \min\{b-c, c-a\}$ 证明，充分性则由 $c-\delta < c < c+\delta$ 得出。] 利用这一等价关系，可以证明：c 是G 的内点，当且仅当存在 $\delta > 0$ 使得 $(c-\delta, c+\delta) \subseteq G$。因此，$G$ 是开集，当且仅当对每个 $c \in G$，都存在 $\delta > 0$ 使得 $(c-\delta, c+\delta) \subseteq G$。

对于任意 x，$c \in \mathbb{R}$ 条件 $x \in (c-\delta,\ c+\delta)$ 成立，当且仅当 $c-\delta < x < c+\delta$，当且仅当 $-\delta < x-c < \delta$，当且仅当 $|x-c| < \delta$。今后，任何形如 $x \in (c-\delta,\ c+\delta)$ 的断言都可以与 $|x-c| < \delta$ 互换使用。例如，$(c-\delta,\ c+\delta) \subseteq G$，这等价于 "$x \in (c-\delta,\ c+\delta)$ 蕴含 $x \in G$"，并进一步等价于"$|x-c| < \delta$ 蕴含 $x \in G$"。因此，G 是开集，当且仅当对于每个 $c \in G$，存在 $\delta > 0$，使得 $|x-c| < \delta$ 蕴含 $x \in G$。

命题 20。若 $c =$ 上确界$\mathcal{S}$，则 $c \in \mathcal{S}^-$。

证明。给定区间 (a,b)，使得 $c \in (a,b)$，我们有 $a < c < b$，由命题 19 可知，存在$\xi \in \mathcal{S}$使得 $a < \xi \leq c < b$。等价地，$\xi \in \mathcal{S}$且 $\xi \in (a,b)$。也就是说，$\xi \in (a,b) \cap \mathcal{S}$，因此这个交集非空。所以，$c$ 是$\mathcal{S}$的闭包点。 □

命题 21。若$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$是实数集$\mathcal{S}$中的一个收敛数列，则$\lim_{n\to\infty} c_n \in S^-$。

证明。令$c := \lim_{n\to\infty} c_n$，设 (a,b) 为一个区间，使得 $c \in (a,b)$。由于 (a,b) 是一个开集，存在 $\delta > 0$，使得 $|x-c| < \delta$蕴含$x \in (a,b)$。由于$\delta > 0$且$c = \lim_{n\to\infty} c_n$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，若 $n \geq N$则 $|c_n - c| < \delta$。特别地，在 $n = N$处，我们有 $|c_N - c| < \delta$，而这之前已证明蕴含 $c_N \in (a,b)$。但是，由于 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是$\mathcal{S}$中的一个数列，我们有 $c_N \in \mathcal{S}$，所以 $c_N \in (a,b) \cap \mathcal{S}$，因此这个交集非空。至此，我们已证明$c$是$\mathcal{S}$的闭包点。 □

如果 $U \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$，那么我们称 U相对于I相对开，如果存在一个开集 G，使得 $U = G \cap I$。相对开集的这个定义与我们之前对开集的定义有如下关系：集合 $U \subseteq \mathbb{R}$ 是开集，当且仅当 U相对于 $\mathbb{R}$开。

命题 22。如果 $U \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$，那么以下条件等价。

(i) 存在一个闭集 F，使得$U = F \cap I$。

(ii) 集合 $I\backslash U$ 相对于 I相对开。

*[*如果上述条件之一成立，那么我们称 U 相对于闭。*]*

证明。*(i)* $\Longrightarrow$*(ii)*集合 F^c和 F具有性质 $\mathbb{R} = F \cup F^c$。将两边与 $I \subseteq \mathbb{R}$取交集，可得 $I = (F \cap I) \cup (F^c \cap I)$，其中右侧等于 $U \cup (F^c \cap I)$。因此，$I\backslash U = F^c \cap I$，其中 F^c是开集，因为 F是闭的。所以，$I\backslash U$相对于 I相对开。

(ii) $\Longrightarrow$(i) </style}如果存在一个开集 G使得 $G \cap I = I\backslash U$，那么 $(G \cap I)^c = (I \cap U^c)^c$，并且 $G^c \cup I^c = I^c \cup U$。我们将两边与 I取交集，得到 $(G^c \cap I) \cup \emptyset = \emptyset \cup (U \cap I)$，其中 $U \cap I$化简为 U，因为 $U \subseteq I$。因此，$G^c \cap I = U$，其中 G^c是闭集，因为 G是开集。 □

推论 *23*。 *</style}*集合 U 相对于 I 是开集，当且仅当 $I\backslash U$ 相对于 I是闭集。

证明。 集合 V 相对于 I 闭，当且仅当（根据命题 22*(ii)*） $I\backslash V$ 相对于 I 开。令 $V = I\backslash U$。 □

命题24。 给定 $I \subseteq \mathbb{R}$，以下条件等价。

(i) 存在 集合 I 的非空不相交子集 A 和 B，它们都相对于 I 开，并且满足 $I = A \cup B$.

(ii) T 存在集合 I 的非空子集 U，它相对于 I 开且闭，并且满足 $U \neq$ I.

*[*不满足上述某一陈述的集合称为连通集。*]*

证明。 (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) 我们证明所需的集合为 $U := A$。条件 $I = A \cup B$ 蕴含 $A = I\backslash B$。由于 B 在 I中相对开，根据命题 23， A 在 I中相对闭。由于 A 和 B 不相交且非空，存在 $a \in A$ 和 $b \in B$ 使得 $a \neq b$。因此， b 是 $B \subseteq I$ 中的一个元素，但不属于 A，所以 I 不是 A的子集，因而不可能等于 A。

(*ii*) $\Longrightarrow$ (*i*) 我们证明所需的集合为 $A := U$ 和 $B := I\backslash U$，它们不相交，且并集为 I。由于 U 非空且在 I中相对开， A也如此；又由于 U 在 I中相对闭，根据命题 22， B在 I中相对开。由于 $A = U \neq I$，我们发现 I 不是 $A = U$的子集，因此存在 $b \in I$ 使得 $b \notin U$，或者 $b \in I\backslash U = B$，所以 $B \neq \emptyset$。 □

例 25。 集合 $\{0, 1\}$ 不连通。它的子集 $A := \{0\}$ 和 $B := \{1\}$ 均非空、不相交，且其并集为 $\{0, 1\}$。开集 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$和 $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$具有性质 $A = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cap \{0, 1\}$和 $B = \{0, 1\} \cap \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$，因此 A和 B都是相对于 $\{0, 1\}$ 的开集。 –

引理 26。 设 $I \subseteq \mathbb{R}$，且设 $a \in I$。I 连通的充要条件是：若 U是 I 的一个子集，包含 a，并且相对于 I既开又闭，那么 $U = I$。

证明。 **(**$\Longrightarrow$**)** 假设 I 是连通的。根据连通性的定义，这等价于命题24*(ii)*的否定，即 I的任意非空子集 U，若相对于 I既开又闭，则必等于 I。当 U 包含 a时，这一点也成立。

($\Longleftarrow$**)** 设 U是 I 的一个非空子集，且相对于 I既开又闭。

我们证明 $a \in U$。否则， $I\backslash U$ 包含 a，因此非空。由于 U 相对于 I既开又闭，根据命题 22 和推论 23， $I\backslash U$也如此。根据假设， $a \in I\backslash U$， $I\backslash U = I$，这意味着 $U = \emptyset$，与 U非空这一假设矛盾。因此， $a \in U$，并且根据假设，$U = I$。至此，我们已证明 I 满足命题 24*(ii)*的否定。因此， I 是连通的。 □

例 27。 单点集 $\{r\}$ 是连通的。开集（$r - 1$， $r + 1$）和闭集 $[r - 1, r + 1]$ 具有性质 $\{r\} =$ （$r - 1$， $r + 1$）$\cap \{r\}$ 和 $\{r\} = [r - 1, r + 1] \cap \{r\}$，因此 $\{r\}$ 相对于自身既是开集又是闭集，而包含 r 且相对于 $\{r\}$ 同时开且闭的唯一可能子集就是它自身。根据引理 26， $\{r\}$ 是连通的。

引理 26 陈述中的连通集的刻画，当所讨论的集合是单点集（仅包含一个元素）时始终成立。对于 $\mathbb{R}$ 的子集，如果其中的任意连通子集都是单点集，则称其为全不连通。

命题 28. 如果 I 连通，那么对于任意的 $a, b \in I$，都有 $[a, b] \subseteq I$。

证明. 假设 I 连通，但存在 $a,b \in I$ 使得 $[a,b] \not\subseteq I$，于是存在 $c \in [a,b]$ 使得 $c \notin I$。由 $c \in [a,b]$，我们得到 $a \leq c \leq b$；而由 $c \notin I$ 和 $a,b \in I$，可知 $a \neq c$ 和 $c \neq b$。因此，$a < c < b$。区间 $(-\infty, c)$ 和 (c,∞) 是开集，因此，I 的子集 $A := \{x \in I : x < c\} = I \cap (-\infty, c)$ 和 $B := \{x \in I : c < x\} = I \cap (c,\infty)$ 都是 I 中的相对开集。由 $a < c < b$ 和 $a,b \in I$，可知 $a \in A$ 和 $b \in B$，因此 A 和 B 非空。如果 $x \in I$，那么根据三歧律，$x < c$、$x = c$ 或 $c < x$ 三者必有其一。由于 $c \notin I$，第二种可能性不成立。因此，$x < c$ 或 $c < x$，这就证明了 $I \subseteq (-\infty, c) \cup (c,\infty)$。将两边与 I 取交集，得到 $I \subseteq (I \cap (-\infty, c)) \cup (I \cap (c,\infty)) = A \cup B$。由于 $A, B \subseteq I$，我们也有 $A \cup B \subseteq I$。因此，$I = A \cup B$，这表明 I 不连通。↯ 因此，对于任意的 $a,b \in I$，都有 $[a,b] \subseteq I$。 □

命题29。 设 I 是一个区间。如果 $[a,b] \subseteq I$ 中的任意区间都是连通的，那么 I 是连通的。

证明。 设 I 是一个区间。我们通过逆否命题证明该陈述的其余部分。假设 I 不连通。这意味着存在开集 G_1 和 G_2，使得 $A := G_1 \cap I$ 和 $B := G_2 \cap I$ 是 I 的非空、不相交且相对开子集，并且 $I = A \cup B$。由于 A 和 B 非空，存在 $a \in A$ 和 $b \in B$。由于 A 和 B 不相交，我们有 $a \neq b$，不失一般性，假设 $a < b$，因此 $[a,b] \neq \emptyset$。由于 I 是一个区间，条件 $a,\ b \in I$ 和 $a < b$ 推出 $[a,b] \subseteq I$。

集合 $X := G_1 \cap [a,b]$ 和 $Y := G_2 \cap [a,b]$ 都是相对于 $[a,b]$ 的开集。我们对等式 $I = A \cup B$ 两边与 $[a,b]$ 取交集，代入 $A = G_1 \cap I$ 和 $B = G_2 \cap I$，经过一些集合论运算后，由于 $[a,b] \subseteq I$，每个 $[a,b] \cap I$ 都可以替换为 $[a,b]$。结果是 $[a,b] = (G_1 \cap [a,b]) \cup (G_2 \cap [a,b]) = X \cup Y$。

如果存在 $k \in X \cap Y = (G_1 \cap [a,b]) \cup (G_2 \cap [a,b]) \subseteq (G_1 \cap I) \cup (G_2 \cap I) = A \cap B$，那么 $x \in A \cap B$，这与 A 和 B 的不交性矛盾。至此，我们已经证明 $[a,b]$ 不连通。因此，存在一个包含于 I 中的闭有界区间，它不连通，证明完毕。 □

给定一个函数 $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$，以及 $c \in I$，若对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $x \in I$，如果 $|x - c| < \delta$，那么 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$，我们就称 f 在 c 处连续。

例 30 (常值函数和线性函数连续)。 上述“点处连续性”的定义就是所谓的“ε-δ”定义。对于某个常数 k，若常值函数 $f(x) = k$，那么这个断言显然成立，因为此时结论变为 $|k - k| = 0 < \varepsilon$。因此，常值函数在其指定定义域中的任意实数处都连续。若对于某些常数 $m \neq 0$ 和 b，有 $f(x) = mx + b$（或者说 f 是一个“线性函数”），则可以使用通常的“ε-δ”证明，并利用 $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|} > 0$ 来证明 f 连续。一般而言，对于任意 $m,\ b \in \mathbb{R}$ 函数 $x \mapsto mx + b$ 在 $\mathbb{R}$ 的任意子集中的任意元素处都连续。

命题 31. 给定一个函数 $f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$，以下各项等价。

(i) 对每个 $c \in I$，函数 f 在 c 处连续。*(ii)* 对任意开集 $G \subseteq \mathbb{R}$，其原像 $f^{-1}[G] := \{t \in I :\ f(t) \in G\}$（$G$ 在 f 下的原像）是 I 中的相对开集。*(iii)* 对任意闭集 $F \subseteq \mathbb{R}$，其原像 $f^{-1}[F]$（G 在 f 下的原像）是 I 中的相对闭集。*[*满足上述任一条件的函数 f 称为在 I 上连续。*]*

证明。(i) $\Longrightarrow$(ii) 设 G 是一个开集，且 $c \in f^{-1}[G]$。因此， $f(c) \in G$，并且由于 G 是开集，存在 $\varepsilon > 0$，使得 $|y - f(c)| = |f(c) - y| < \varepsilon$ 蕴含 $y \in G$。由 (i)，存在 $\delta > 0$，使得$x \in I$且 $|x - c| < \delta$ 蕴含 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$。因此，若 $x \in I$ 且 $|x - c| < \delta$，则 $f(x) \in G$，这进一步蕴含 $x \in f^{-1}[G]$。也就是说， $x \in I$ 且 $x \in (c-\delta, c+\delta)$ 蕴含 $x \in f^{-1}[G]$。等价地，$I \cap (c-\delta, c+\delta) \subseteq f^{-1}[G]$。若 Q 是对所有 $c \in f^{-1}[G]$ 而言所有区间（它们都是开集）$(c-\delta, c+\delta)$ 的并集，则 Q 是一个开集。由 $(c-\delta, c+\delta) \subseteq f^{-1}[G]$, 我们得到

$$I \cap Q = I \cap \left(\bigcup_{c \in f^{-1}[G]} (c-\delta, c+\delta) \right) = \bigcup_{c \in f^{-1}[G]} (I \cap (c-\delta, c+\delta)) \subseteq f^{-1}[G], \tag{3}$$

但此时， $f^{-1}[G] \subseteq I$中的任意元素 c都包含在 $\bigcup_{c \in f^{-1}[G]} (c-\delta, \ c+\delta) = Q$中。因此，$c \in I$ 且 $c \in Q$，所以 $c \in I \cap Q$。这证明了 $f^{-1}[G] \subseteq I \cap Q$；结合（3），可得 $f^{-1}[G] = I \cap Q$，其中 Q 是一个开集。因此， $f^{-1}[G]$ 相对于 I是开集。

（*ii*） $\Longrightarrow$ （*iii*）如果 F是闭集，那么 F^c是开集。由（*ii*）， $f^{-1}[F^c]$ 相对于 I是开集。根据推论 23, 集合 $I \backslash f^{-1}[F^c] = I \cap [f^{-1}[F^c]]^c = \cap[[f^{-1}[F]]^c]^c = I \cap f^{-1}[F] = f^{-1}[F]$ 相对于 I是闭集（其中最后一个集合相等是因为 $f^{-1}[F] \subseteq I$）。

(iii) $\Longrightarrow$*(i)* *</style}*令 ，且令 。区间 *:(()* ， $f(c) + \varepsilon)$ 是开集，因此 J^c 是闭的。根据 *(ii)*，原像 $f^{-1}[J^c]$ 相对于 I 是闭的。这意味着

$$I \backslash f^{-1}[J^c] = I \cap [f^{-1}[J^c]]^c = \cap[[f^{-1}[J]]^c]^c = I \cap f^{-1}[J] = f^{-1}[J],$$

相对于 I 是开集。（最后一个集合相等是因为 $f^{-1}[J] \subseteq I$。）由于 $f(c) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon) = J$，我们有 $c \in f^{-1}[J]$。由于 $f^{-1}[J]$ 相对于 I 是开集，存在一个开集 G，使得 $f^{-1}[J] = G \cap I$，因此 $c \in f^{-1}[J] = G \cap I \subseteq G$。由于 G 是开集，存在 $\delta > 0$，使得 $(c-\delta, c+\delta) \subseteq G$，这进一步意味着 $I \cap (c-\delta, c+\delta) \subseteq G \cap I$，其中右侧等于 $f^{-1}[J]$。也就是说，$I \cap (c-\delta, c+\delta) \subseteq f^{-1}[J]$。等价地，$x \in I$ 且 $x \in (c-\delta, c+\delta)$ [，这等价于 $|x-c| < \delta$] 蕴含 $x \in f^{-1}[J]$。若确实 $x \in I$ 且 $|x-c| < \delta$，则 $x \in f^{-1}[J]$，因此 $f(x) \in J = (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$，这意味着 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$。 □

命题 32. 若 f 在 I上连续，且 $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 I 中的一个收敛到 $c \in I$的数列，则$\lim_{n \to \infty} f(c_n) = f(c)$。

证明。 设 $\varepsilon > 0$。由于 f在 c处连续，存在 $\delta > 0$使得

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon, \qquad (\text{if } x \in I, |x - c| < \delta). \tag{4}$$

由于 $\delta > 0$ 且 $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛到 c，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，若 $n \geq N$，则 $|c_n - c| < \delta$。若确实有 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq N$，则 $|c_n - c| < \delta$；并且由于 $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是I中的一个数列，我们有 $c_n \in I$。因此，条件 (4) 在 $x = c_n$处成立，所以 $|f(c_n) - f(c)| < \varepsilon$。因此，$\lim_{n \to \infty} f(c_n) = f(c)$。 □

命题 33。 如果 I连通，且 f在 I上连续，那么像集 $f[I] := \{f(x) \colon x \in I\}$ （I在 f下的像）是连通的。

证明。 假设 I是连通的，但为了导出矛盾，假设像集 $f[I]$ 不连通。这意味着存在开集 G_1 和 G_2，使得 $A := G_1 \cap f[I]$ 和 $B := G_2 \cap f[I]$ 是

非空且不相交，并且 $f[I]=A\cup B$。由于 f连续，原像 $f^{-1}[G_1]$和 $f^{-1}[G_2]$都是开集。由于取原像保持交集，因此 $f^{-1}[A]=f^{-1}[G_1]\cap f^{-1}[f[I]]$和 $f^{-1}[B]=f^{-1}[G_2]\cap f^{-1}[f[I]]$，其中我们使用集合论规则 $f^{-1}[f[I]]=I$（该规则对 f的定义域 I有效），于是得到 $f^{-1}[A]=f^{-1}[G_1]\cap I$和 $f^{-1}[B]=f^{-1}[G_2]\cap I$，这意味着这些原像在 I中都是相对开集。由于 A和 B非空，存在$a\in A=G_1\cap f[I]\subseteq f[I]$和$b\in B=G_2\cap f[I]\subseteq f[I]$，因此存在 t_1、 $t_2\in I$，使得 $f(t_1)=a\in A$ 和 $f(t_2)=b\in B$。因此， $t_1\in f^{-1}[A]$ 和 $t_2\in f^{-1}[B]$，这些原像集合也就非空。如果存在 $k\in f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$，那么 $f(k)$同时属于 A和 B，这与 A和 B不相交这一事实矛盾。因此， $f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]=\emptyset$。由于取原像也保持并集，对 $f[I]=A\cup B$两边在 f下取原像，然后使用规则 $f^{-1}[f[I]]=I$，得到 $I=f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$。至此，我们已经完成了 I不连通的证明。$\lightning$因此， $f[I]$是连通的。 □

命题 34. 给定两个闭有界区间 $[a_0,b_0]$和 $[a,b]$，其中 $a_0<b_0$，存在一个连续函数 f：$[a_0,b_0]\longrightarrow[a,b]$，使得 $[a_0,b_0]$在 f下的像等于 $[a,b]$。

证明。 由于a在 $\mathbb{R}$ 中存在$_0<b_0$,$_{b_0-a_0}^{1}$，且函数 f 对每个 $x\in I:=[a_0,b_0]$定义为

$$f(x)=\frac{b-a}{b_0-a_0}(x-a_0)+a=\frac{b-a}{b_0-a_0}x+\frac{ab_0-a_0b}{b_0-a_0},$$

根据例 30，该函数在 I 上连续。如果 $a_0\le x\le b_0$，那么从每个元素中减去 a_0，将每个元素除以 b_0-a_0，将每个元素乘以 $b-a$，然后给每个元素加上 a，得到 $a\le f(x)\le b$。因此，$f^{-1}[I]\subseteq[a,b]$。如果 $a\le y\le b$，那么通过类似的计算，数值$c=\frac{b_0-a_0}{b-a}(y-a)+a_0$具有性质 $a_0\le c\le b_0$和 $y=f(c)$。由此完成了对 $f^{-1}[I]=[a,b]$的证明。 □

引理35 （粘贴引理）。 设 F_1 和 F_2 都是相对于某个集合 I 闭的集合。若 f_1 在 F_1 上连续，且 f_2 在 F_2 上连续，并且对于所有 $x\in F_1\cap F_2$，都有 $f_1(x)=f_2(x)$，那么函数 g： $F_1\cup F_2\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$g(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in F_1,\\ f_2(x), & x\in F_2,\end{cases}$$

在 $F_1\cup F_2$ 上连续。

证明。 设 F 是一个闭集。由于 f_1 在 F_1 上连续，且 f_2 在 F_2 上连续，因此集合 $f_1^{-1}[F]$ 相对于 F_1 闭，而 $f_2^{-1}[F]$ 相对于 F_2 闭。因此，存在闭集 F_3 和 F_4，使得 $f_1^{-1}[F]=F_3\cap F_1$ 和 $f_2^{-1}[F]=F_4\cap F_2$。由于 F_1 和 F_2 都相对于 I 闭，因此存在闭集 F_5 和 F_6，使得 $F_1=F_5\cap I$ 和 $F_2=F_6\cap I$，并且进一步有 $f_1^{-1}[F]=F_3\cap F_5\cap I$ 和 $f_2^{-1}[F]=F_4\cap F_6\cap I$。集合 $F_7:=F_3\cap F_5\cup F_4\cap F_6$ 是一个闭集，并且进一步有，$f_1^{-1}[F]\cup f_2^{-1}[F]=(F_3\cap F_5\cup F_4\cap F_6)\cap I=F_7\cap I$。由于 F_1， $F_2\subseteq I$，我们有 $F_1\cup F_2\subseteq I$。由于 $f_1^{-1}[F]\subseteq F_1\subseteq F_1\cup F_2$ 和 $f_2^{-1}[F]\subseteq F_2\subseteq F_1\cup F_2$，若将两边与 $F_1\cup F_2$ 取交集，则由 $f_1^{-1}[F]\cup f_2^{-1}[F]=F_7\cap I$ 得到 $f_1^{-1}[F]\cup f_2^{-1}[F]=F_7\cap(F_1\cup F_2)$。至此，我们已经证明 $f_1^{-1}[F]\cup f_2^{-1}[F]$ 相对于 $F_1\cup F_2$ 闭。

为完成证明，我们证明 $g^{-1}[F]=f_1^{-1}[F]\cup f_2^{-1}[F]$。条件 $x\in g^{-1}[F]$等价于 $g(x)\in F$，但根据 g的定义，数 $g(x)$ 等于 $f_1(x)$ 或 $f_2(x)$。因此，$g(x)\in F$蕴含 $f_1(x)\in F$或 $f_2(x)\in F$。反之，如果 $f_1(x)\in F$或 $f_2(x)\in F$中的一个成立，那么当 $x\in F_1$时，$g(x)=f_1(x)\in F$；当 $x\in F_2$时， $g(x)=f_2(x)\in F$。因此， $g(x)\in F$当且仅当 $f_1(x)\in F$或 $f_2(x)\in F$。这等价于 $x\in g^{-1}[F]$当且仅当 $x\in f_1^{-1}[F]$或 $x\in f_2^{-1}[F]$。此外，$x\in g^{-1}[F]$当且仅当 $x\in f_1^{-1}[F]\cup f_2^{-1}[F]$。因此， $g^{-1}[F]=f_1^{-1}[F]\cup f_2^{-1}[F]$，这就完成了 g在 $I=F_1\cup F_2$上连续的证明。 □

命题36。 如果 I 连通，那么包含于 I 中的任意闭有界区间都是连通的。

证明。 假设 I 是连通的，但为了导出矛盾，假设存在一个区间 $[a,b]\subseteq I$不连通。因此，存在 $[a,b]$的非空、不相交子集 A和 B，它们都相对于 $[a,b]$开，且 $[a,b]=A\cup B$。于是，$A=[a,b]\setminus B$和 $B=[a,b]\setminus A$。根据推论 23，A 和 B 相对于 $[a,b]$闭。根据例 30，由 $x\mapsto 0$定义的常值函数 $A\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 A上连续，而由 $x\mapsto 1$ 给出的常值函数 $B\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 B上连续。由于 $A\cap B=\emptyset$，此时我们已经满足粘贴引理的所有假设，从而可以推出函数 $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x):=\begin{cases}0, & x\in A,\\ 1, & x\in B,\end{cases}$$

在 $A\cup B=[a,b]$上连续。

由于区间 $(-\infty,\ a]$,$[b,\infty)$ 和 $[a,b]$ 是闭的，集合 $L_a:=(-\infty,\ a]\cap I$, $R_b:=I\cap[b,\infty)$ 以及 $[a,b]=[a,b]\cap I$（因为 $[a,b]\subseteq I$）都是相对于 I 闭的。

由于，$R=(-\infty,\ \infty)=(-\infty,\ a]\cup[a,b]\cup[b,\infty)$，将等式两边与 I 取交集可得 $I\cap\mathbb{R}=L_a\cup([a,b]\cap I)\cup R_b$。由于 $[a,b]\subseteq I\subseteq\mathbb{R}$，我们进一步有 $I=L_a\cup[a,b]\cup R_b$。现在我们定义 $g\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$g(x):=\begin{cases}f(a), & x\in L_a,\\ f(x), & x\in[a,b],\\ f(b), & x\in R_b.\end{cases}$$

我们不能有 $a=b$，因为这会使 $[a,b]$ 成为单点集，所以根据例 27，$[a,b]$ 是连通的。↯ 因此，$a<b$。这意味着 $L_a\cap R_b=\emptyset$。对于另外两个交集，我们有 $\{a\}=L_a\cap[a,b]$ 和$\{b\}=[a,b]\cap R_b$，但对于这两个交集中的每一个，g 的取值都相同：无论我们将 a 视为 $a\in L_a$还是 $a\in[a,b]$，$g(a)$在两种情况下仍都等于 $f(a)$。类似地，$b\in L_a$或 $b\in[a,b]$中的任意一个都会得到 $g(b)=f(b)$。根据粘贴引理，g 在 $L_a\cup[a,b]\cup R_b=I$ 上连续。由于 I 是连通的，根据命题 33，$g[I]=\{0,1\}$ 是连通的，这与例 25矛盾。因此，任意 $[a,b]\subseteq I$ 都是连通的。 □

引理 37. 设$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个不收敛的单调递增数列，且$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是任意数列。定义 $I_1:=(-\infty,\ a_1]$，并对每个整数 $n\geq 2$，令 $I_n:=[a_{n-1},a_n]$。令$A:=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$。函数 $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}c_1, & x\in I_1,\\ c_{n-1}+\frac{x-a_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}(c_n-c_{n-1}), & x\in I_n, n\geq 2,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 上连续，其中 $\{c_n\colon\in\mathbb{N}\}\subseteq f[\{a_n\colon\ n\in\mathbb{N}\}]$。

证明。 根据命题10，不失一般性，我们可以假设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是严格递增的。更确切地说，如果原来的任意单调递增数列（它不收敛）不是严格递增的，我们可以选取 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 作为一个严格递增子序列，它同样不收敛。

根据例 30，常值函数 $x\mapsto c_1$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，特别地，在 $I_1=(-\infty,\ a_1]$ 上连续，因此 f 在 $I_1=\bigcup_{n=1}^{1}I_n$ 上连续。假设对于某个 $k\in\mathbb{N}$，函数 f 在$\bigcup_{n=1}^{k}I_n$ 上连续，而$\bigcup_{n=1}^{k}I_n$ 是闭区间的并集，因而是闭集。同样根据例 30，函数 $x\mapsto c_k+\frac{x-a_k}{a_{k+1}-a_k}(c_{k+1}-c_k)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，因为它具有 $x\mapsto mx+b$ 的形式，其中 $m=\frac{c_{k+1}-c_k}{a_{k+1}-a_k}$ 且 $b=\frac{a_{k+1}c_k-a_kc_{k+1}}{a_{k+1}-a_k}$。特别地，该函数在闭

集 $[a_k, a_{k+1}] = I_{k+1}$ 上的限制是连续的。在 $\bigcup_{n=1}^{k} I_n$ 和 I_{k+1} 的交集处，即 a_k 处，f 的值：当 $k = 1]$ 时为 $0\,[$，当 $k \geq 2]$ 时为 $c_k\,[$，这等于 f 的值：在 a_k 处为 $I_{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$。根据粘贴引理，$f$ 在 $\bigcup_{n=1}^{k+1} I_n$ 上连续，并通过归纳法，我们证明了对于任意 $k \in \mathbb{N}$，函数 f 在 $\bigcup_{n=1}^{k} I_n$ 上连续。如果存在 $x \in A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ 使得 f 在 x 上不连续，那么存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in I_N \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_n$，因此 f 在 $\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ 上不连续。↯因此，f 在 A 上连续。

现在证明 f 在 A^c 上的连续性。令 $\varepsilon > 0$，并令 $x \in A^c$。由于 A 是闭区间的并集，因此它是闭集；而 A^c 是开集，所以存在 $\delta > 0$，使得 $(x - \delta,\ x + \delta) \subseteq A^c$。如果 $|x - t| < \delta$，那么 $t \in (x - \delta,\ x + \delta) \subseteq A^c$；根据 f 的定义，条件 $t \in A^c$ 意味着 $f(t) = 0$。但由于 $x \in A^c$，我们还有 $f(x) = 0$。因此，$|f(t) - f(x)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$。所以，$f$ 在任意的 $x \in A^c$ 处连续。至此证明了 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $a_n \in I_n$，因此 $f(a_n) = c_{n-1} + 1 \cdot (c_n - c_{n-1}) = c_n$，这就证明了 $\{c_n : \in \mathbb{N}\} \subseteq f[\{a_n :\ n \in \mathbb{N}\}]$。 □

命题 38。对于 A 的非空真子集 $\mathbb{R}$，以下各项等价。

(i) 对于每个 $a \in A$ 和每个 $b \in A^c$，$a < b$。

(ii) 对于每个 $x \in \mathbb{R}$ 和每个 $a \in A$，如果 $x < a$，则 $x \in A$。

(iii) $\bigcup_{a \in A} (-\infty,\ a) \subseteq A$。

(iv) $\bigcup_{b \in A^c} (b,\ \infty) \subseteq A^c$。

[若 A 满足条件 (i)–(iv) 之一，我们称 A 是 $\mathbb{R}$的戴德金分割。]

证明。*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*设 $x \in \mathbb{R}$，且设 $a \in A$ 满足 $x < a$。为导出矛盾，假设$x \notin A$。由*(i)*，我们有 $a < x$，这与 $\mathbb{R}$中的三歧性定律矛盾。因此，*(ii)*成立。
(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)* 给定 $x \in \bigcup_{a \in A} (-\infty,\ a)$，存在 $\alpha \in A$ 使得 $x \in (-\infty,\ \alpha)$，或者 $x < \alpha$。由 *(ii)*，$x \in A$。因此，$\bigcup_{a \in A} (-\infty,\ a) \subseteq A$。

(iii) $\Longrightarrow$ *(iv)* 给定 $x \in \bigcup_{b \in A^c} (b,\ \infty)$，存在 $\beta \in A^c$ 使得 $x \in (\beta,\ \infty)$，或者 $\beta < x$。为导出矛盾，假设 $x \notin A^c$。等价地，$x \in A$。由*(iii)*，$(-\infty,\ x) \subseteq A$，因此由 $\beta < x$可得 $\beta \in A$。↯因此，$x \in A^c$，于是$\bigcup_{b \in A^c} (b,\ \infty) \subseteq A^c$。

(iv) $\Longrightarrow$ *(i)* 设 $a \in A$ 和 $b \in A^c$。为导出矛盾，假设 $a \geq b$。由于 A 和A^c 不相交，我们不可能有 $a = b$。因此，$a > b$，这进一步意味着 $a \in (b,\ \infty)$，其中，根据*(iv)*，该区间是 A^c 的子集。因此，$b \in A$。↯所以，$a < b$。 □

命题 39。给定 $\mathbb{R}$ 的一个戴德金分割 A，以下各条件等价。

(i) 对任意 $c \in \mathbb{R}$，存在 $a \in A$ 和 $b \in A^c$，使得 $c \notin [a, b]$。

(ii) $\bigcup_{a \in A} (-\infty, a) = A$ *and* $\bigcup_{b \in A^c} (b, \infty) = A^c$.

[如果 A 满足条件 (i)–(ii) 中的一个，那么我们称 A 是 $\mathbb{R}$ 中的一个空隙 。如果 A 不是空隙，那么否定条件 (i) 中的数 c 称为 A 的分割点 。]

[6]割的传统定义涉及一对集合，例如，A 在*(i)*中与 A^c配对。不过，我们发现*(ii)*中的定义比 [5, 6] 更为便于使用。我们将*(ii)*中的陈述解释为 [5, 第 p. 195] 页对“向下封闭”含义的阐释，不应将其与先前定义的 $\mathbb{R}$的闭子集混淆。

证明。*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* 我们通过逆否命题来证明这一点。*(ii)* 的否定等价于以下断言：*(ii)* 中的两个集合等式之一不成立。根据命题 38*(iii)–(iv)*，集合包含关系$A \subseteq \bigcup_{a\in A}(-\infty, a)$和 $A^c \subseteq \bigcup_{b\in A^c}(b, \infty)$中有一个不成立。

若存在 $c \in A$ 使得 $c \notin \bigcup_{a\in A}(-\infty, a)$，则对任意 $a \in A$，有 $c \notin (-\infty, a)$，或者有$c \in [a, \infty)$。因此，$a \leq c$。已知 $b \in A^c$，由于 $c \in A$，根据割的定义，$c < b$。此时，我们有$a \leq c < b$，所以 $c \in [a, b]$。

若存在 $c \in A^c$ 使得 $c \notin \bigcup_{b\in A^c}(b, \infty)$，则对任意 $b \in A^c$，有 $c \notin (b, \infty)$，这意味着 $c \in (-\infty, b]$，从而得到 $c \leq b$。由 $b \in A^c$ 以及间隙的定义可知，若 $a \in A$，则$a < c \leq b$。因此，$c \in [a, b]$。

在这两种情况下，我们都得到了*(i)*的否定。

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)*设 $c \in \mathbb{R} = A \cup A^c$。

若 $c \in A$，则由*(ii)*中的第一个集合等式，存在 $\alpha \in A$ 使得 $c \in (-\infty, \alpha)$，或者说 $c < \alpha$。由于 A 是 $\mathbb{R}$ 的真子集，补集 A^c 非空，因此存在 $\beta \in A^c$。根据割的定义，$\alpha < \beta$。此时，我们有 $c < \alpha < \beta$，所以 $c \notin [\alpha, \beta]$。

若 $c \in A^c$，则*(ii)* 中的第二个集合等式意味着存在 $\beta \in A$ 使得 $c \in (\beta, \infty)$。由于 A 非空，存在 $\alpha \in A$；根据割的定义，$\alpha < \beta < c$，所以 $c \notin [\alpha, \beta]$。 □

2.3 滤子基、极限与可微函数

由非空子集组成的非空集族 $\mathscr{B}$，其中这些子集属于 $\mathbb{R}$，称为滤子基[7]，如果对于每个 $A, B \in \mathscr{B}$，都存在 $C \in \mathscr{B}$ 使得 $C \subseteq A \cap B$。如果 $c \in \mathbb{R}$，那么我们称滤子基 $\mathscr{B}$ 趋近于 c，记作 $\mathscr{B} \longrightarrow c$；若对每个 $\delta > 0$，都存在 $I \in \mathscr{B}$ 使得 $I \subseteq (c - \delta, c + \delta)$。

给定 $L \in \mathbb{R}$、$X \subseteq \mathbb{R}$、一个函数 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$，以及一个趋近于 $c \in \mathbb{R}$ 的滤子基 $\mathscr{B}$，如果对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $I \in \mathscr{B}$ 使得 $f[I] \subseteq (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$，那么我们称 f 趋近于 L 沿着 $\mathscr{B}$，或称 f 当 L 趋近于 $\mathscr{B}$ 时趋近于 c，记作 $f \longrightarrow L$ 当 $\mathscr{B} \longrightarrow c$。

命题 40。根据三歧律，若 $f \longrightarrow L$ 当 $\mathscr{B} \longrightarrow c$ 时，则 L 唯一。在这种情况下，我们定义 $\lim_{\mathscr{B}\to c} f := L$，称为 f 的沿着 $\mathscr{B}$的极限，或称 f 的当 $\mathscr{B} \longrightarrow c$时的极限。如果存在 $L \in \mathbb{R}$ 使得 $L = \lim_{\mathscr{B}\to c} f$，那么“该 $\lim_{\mathscr{B}\to c} f$存在。”*]*

证明。为导出矛盾，假设存在一个与 L 不同的实数 K，使得 f 沿滤子基 $\mathscr{B}$ 同时趋近于 K 和 L。不失一般性，我们进一步假设 $K < L$。因此，$\varepsilon := \frac{L-K}{2} > 0$。由于 f 沿 $\mathscr{B}$ 趋近于 K 和 L，存在 $I \in \mathscr{B}$ 和 $J \in \mathscr{B}$，使得 $f[I] \subseteq (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$，且 $f[J] \subseteq (K - \varepsilon,\ K + \varepsilon)$。由于 $\mathscr{B}$ 是一个滤子基，存在 $X \in \mathscr{B}$ 使得 $X \subseteq I \cap J$，因此 $f[X] \subseteq f[I \cap J] \subseteq f[I]$，且 $f[X] \subseteq f[I \cap J] \subseteq f[J]$。此时，我们有 $f[X] \subseteq (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$ 和 $f[X] \subseteq (K - \varepsilon,\ K + \varepsilon)$，这进一步意味着

$$f[X] \subseteq (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \cap (K - \varepsilon, K + \varepsilon)\,.$$

由于 $\mathscr{B}$ 是滤子基，$X \in \mathscr{B}$ 意味着 X 是非空的，因此 $f[X]$也是非空的。因此，存在 $y \in f[X] \subseteq (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon) \cap (K - \varepsilon,\ K + \varepsilon)$。于是，$L - \varepsilon < y < K + \varepsilon$，将 $\varepsilon = \frac{L-K}{2}$ 代入其中，得到 $0 < y - \frac{L+K}{2} < 0$，这与三歧律相矛盾。因此，对于任意不同于 L的实数 K，函数 f 不可能沿着 $\mathscr{B}$趋近于 K。证明完毕。 □

[7]这是一个标准的拓扑概念，但尽管它十分有用，在主流拓扑学或实分析中却很少受到强调。我们使用了 [3,p. 14] 和 [11, pp. 121–122]。

命题 41。 设 $X \subseteq \mathbb{R}$，设 $c \in \mathbb{R}$，并设 $\mathscr{B}$ 是一个趋近于 c的滤子基。

(i) 给定 $C \in \mathbb{R}$，对于由 $F\colon x \mapsto C$ 定义的常值函数 $F\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$，有 $\lim\limits_{\mathscr{B}\to c} F = C$。

(ii) 对于由 $\mathrm{id}\colon x \mapsto x$ 定义的恒等函数$\mathrm{id}\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$，有 $\lim_{\mathscr{B}\to c} \mathrm{id} = c$。因此，若 $\mathscr{B} \longrightarrow c$，则 c 是唯一的。

(iii) 给定 $L \in \mathbb{R}$，并给定一个函数 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$，若将由 $x \mapsto f(x) - L$ 定义的函数 $X \longrightarrow \mathbb{R}$ 记为 $f - L$，则 $\lim\limits_{\mathscr{B}\to c} f = L$ 当且仅当 $\lim_{\mathscr{B}\to c}(f - L) = 0$。

(iv) 给定函数 $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$，若 $\lim\limits_{\mathscr{B}\to c} f = 0 = \lim_{\mathscr{B}\to c} g$，则 $\lim\limits_{\mathscr{B}\to c} fg = 0$。

(v) 给定 $C \in \mathbb{R}$ 和函数 f、g：$X \longrightarrow \mathbb{R}$，若 $\lim\limits_{\mathscr{B}\to c} f$ 和 $\lim_{\mathscr{B}\to c} g$ 存在，则

$$\begin{aligned} \lim_{\mathscr{B}\to c}(f+g) &= \lim_{\mathscr{B}\to c} f + \lim_{\mathscr{B}\to c} g, \\ \lim_{\mathscr{B}\to c} Cf &= C\lim_{\mathscr{B}\to c} f. \end{aligned}$$

(vi) 给定函数 f、g：$X \longrightarrow \mathbb{R}$，若 $\lim\limits_{\mathscr{B}\to c} f$ 和 $\lim_{\mathscr{B}\to c} g$ 存在，则

$$\lim_{\mathscr{B}\to c} fg = \lim_{\mathscr{B}\to c} f \lim_{\mathscr{B}\to c} g.$$

证明。*(i)* 设 $\varepsilon > 0$。由于滤子基 $\mathscr{B}$ 非空，存在 $I \in \mathscr{B}$；又因为 F 是取值为 C 的常值函数，所以集合 $F[I]$ 要么是单点集 $\{C\}$，要么是空集；这两者都是 $(C-\varepsilon,\ C+\varepsilon)$ 的子集。因此，$\lim\limits_{\mathscr{B}\to c} F = C$。

*(ii)*设 $\varepsilon > 0$，并定义 $\delta := \varepsilon$，于是 $\delta > 0$。由于 $\mathscr{B} \longrightarrow c$，存在 $I \in \mathscr{B}$，使得 $I \subseteq (c-\delta,\ c+\delta)$；其中，左侧因 id 是恒等函数，等于 $\mathrm{id}[I]$。因此，$\lim_{\mathscr{B}\to c} \mathrm{id} = c$。此等式成立，当且仅当对每个 $\delta > 0$，都存在 $I \in \mathscr{B}$，使得 $I = \mathrm{id}[I] \subseteq (c-\delta,\ c+\delta)$；这又当且仅当 $\mathscr{B} \longrightarrow c$。因此，若 $\mathscr{B} \longrightarrow c$ 且 $\mathscr{B} \longrightarrow k$，则 c 和 k 都等于 $\lim_{\mathscr{B}\to c} \mathrm{id}$；根据命题 40，该极限唯一。因此，$c = k$。

（iii）根据我们对极限的定义，只需证明 $f[I] \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ 与 $(f-L)[I] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ 等价即可。若 $y \in (f-L)[I]$，则存在 $x \in I$ 使得 $y = f(x) - L$，因此 $y + L = f(x) \in f[I] \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$，这意味着 $|y + L - L| < \varepsilon$，或者说 $|y| < \varepsilon$，而这等价于 $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$。由此证明了 $(f-L)[I] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$。反之，若 $y \in f[I]$，则存在$x \in I$使得 $y = f(x)$，因此 $y - L = f(x) - L \in F[I] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$，或等价地，$|y - L + 0| < \varepsilon$，或者说 $|y - L| < \varepsilon$，而这等价于 $y \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$。因此，$f[I] \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$。

(iv) 设 $\varepsilon > 0$，并令 $\eta := \min\left\{\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\right\} > 0$。因此，$\eta < \varepsilon$ 且 $\eta < 1$。此外，$(-\eta, \eta) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$。利用不等式的基本性质，条件 $0 < \eta < 1$ 意味着 $(-\eta, \eta)$ 在乘法下封闭。也就是说，若 x，$y \in (-\eta, \eta)$，则 $xy \in (-\eta, \eta)$。若 $\lim\limits_{\mathscr{B}\to c} f = 0 = \lim_{\mathscr{B}\to c} g$，则存在$I, J \in \mathscr{B}$，使得 $f[I] \subseteq (-\eta, \eta)$ 且 $g[J] \subseteq (-\eta, \eta)$。由于 $\mathscr{B}$是一个滤子基，因此存在 $K \in \mathscr{B}$使得 $K \subseteq I \cap J$。给定 $y \in (fg)[K]$，存在 $x \in K \subseteq I \cap J \subseteq I$（并且也存在 $x \in I \cap J \subseteq J$），使得$y = f(x)g(x)$。但是 $x \in I$和 $x \in J$意味着 $f(x) \in f[I] \subseteq (-\eta, \eta)$，且 $g(x) \in g[J] \subseteq (-\eta, \eta)$。因此，$y = f(x)g(x) \in (-\eta, \eta)$。于是，$(fg)[I \cap J] \subseteq (-\eta, \eta) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$，因此，$\lim\limits_{x\to c} [f(x)g(x)] = 0$。

(v) 给定 $\varepsilon > 0$，我们有 $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$，因此若 $L := \lim_{\mathscr{B}\to c} f$ 且 $K := \lim_{\mathscr{B}\to c} g$，则存在 $I, J \in \mathscr{B}$，使得 $f[I] \subseteq \left(L - \frac{1}{2}\varepsilon, L + \frac{1}{2}\varepsilon\right)$ 且 $g[J] \subseteq \left(K - \frac{1}{2}\varepsilon, K + \frac{1}{2}\varepsilon\right)$。由于 $\mathscr{B}$ 是一个滤子基，因此存在 $T \in \mathscr{B}$ 使得 $T \subseteq I \cap J$。给定 $y \in (f+g)[T]$，存在 $x \in T$ 使得 $y = f(x) + g(x)$。但是 $x \in T \subseteq I \cap J \subseteq I$ [以及 $x \in I \cap J \subseteq J$] 也意味着 $f(x) \in f[I] \subseteq \left(L - \frac{1}{2}\varepsilon, L + \frac{1}{2}\varepsilon\right)$ 且 $g(x) \in g[J] \subseteq \left(K - \frac{1}{2}\varepsilon, K + \frac{1}{2}\varepsilon\right)$，它们分别意味着 $|f(x) - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$ 以及 $|g(x) - K| < \frac{1}{2}\varepsilon$。根据三角不等式，

$$\begin{aligned} |y - (L+K)| &= |f(x) + g(x) - (L+K)| = |[f(x) - L] + [g(x) - K]|, \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - K| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

但 $|y - (L+K)| < \varepsilon$ 等价于 $y \in (L + K - \varepsilon, L + K\varepsilon)$。

我们已证明 $(f+g)[T] \subseteq (L + K - \varepsilon, L + K\varepsilon)$。因此，$\lim_{\mathscr{B}\to c}(f+g) = L + K$。

设 $\varepsilon > 0$。若 $C = 0$，则函数 Cf 是零常值函数，由 *(i)* 可知，结论得证。以下假设 $C \neq 0$，则有 $\frac{\varepsilon}{|C|} > 0$。若 $L := \lim_{\mathscr{B}\to c} f$，则存在 $I \in \mathscr{B}$ 使得 $f[I] \subseteq \left(L - \frac{\varepsilon}{|C|}, L + \frac{\varepsilon}{|C|}\right)$。给定 $y \in (Cf)[I]$，存在 $x \in I$ 使得 $y = Cf(x)$，因此 $\frac{y}{C} = f(x) \in f[I] \subseteq \left(L - \frac{\varepsilon}{|C|}, L + \frac{\varepsilon}{|C|}\right)$，这意味着 $\left|\frac{y}{C} - L\right| < \frac{\varepsilon}{|C|}$。将两边乘以正数 $|C|$，得到 $|y - CL| < \varepsilon$。等价地，$y \in (CL - \varepsilon, CL + \varepsilon)$，且我们已证明 $(Cf)[I] \subseteq (CL - \varepsilon, CL + \varepsilon)$。因此，$\lim_{\mathscr{B}\to c} Cf = CL$。

(vi) 若 $L := \lim_{\mathscr{B}\to c} f$ 且 $K := \lim_{\mathscr{B}\to c} g$，则分别将函数 $x \mapsto f(x) - L$、$x \mapsto g(x) - K$ 和 $x \mapsto f(x)g(x) - LK$ 简记为 $f - L$、$g - K$ 和 $fg - LK$。对于任意 $x \in X$，我们有恒等式 $f(x)g(x) - LK = [f(x) - L][g(x) - K] + K[f(x) - L] + L[g(x) - K]$。作为函数等式，$fg - LK = (f-L)(g-K) + K(f-L) + L(g-K)$。右侧当 $\mathscr{B} \longrightarrow c$ 时的极限可由命题前面的部分得出，具体说明如下。由于右侧的极限存在，左侧的极限也存在。根据唯一性定理（命题 40），我们确实可以对函数等式两边取极限。现在详细进行计算。由 (iii)，$L = \lim_{\mathscr{B}\to c} f$ 和 $K = \lim_{\mathscr{B}\to c} g$ 可推出 $\lim_{\mathscr{B}\to c}(f - L) = 0 = \lim_{\mathscr{B}\to c}(g - K)$。由 (iv)，$\lim_{\mathscr{B}\to c}(f - L)(g - K) = 0$；由 (v)，$\lim_{\mathscr{B}\to c}(fg - LK) = 0 + K \cdot 0 + L \cdot 0 = 0$；因此再次利用 (iii)，可得 $\lim_{\mathscr{B}\to c} fg = LK$。 □

命题 42. 给定一个（非空）$X \subseteq \mathbb{R}$，并给定 $c \in X$，这些集合

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(X,c) &:= \{X \cap (c - \delta, c) : \delta > 0\}, \\ \mathscr{R}(X,c) &:= \{X \cap (c, c + \delta) : \delta > 0\}, \\ \mathscr{T}(X,c) &:= \{X \cap [(c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)] : \delta > 0\}, \end{aligned}$$

是趋向于 c 的滤子基。

证明. 设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}(X,c)$、$\mathscr{R}(X,c)$ 或 $\mathscr{T}(X,c)$ 之一。给定 $I \in \mathscr{B}$，令 δ_I 为满足以下条件的正实数：若 $\mathscr{B} = \mathscr{L}(X,c)$，则 $I = X \cap (c - \delta_I, c)$ [；若 $\mathscr{B} = \mathscr{R}(X,c)$，则 $I = X \cap (c, c + \delta_I)$；或者若 $\mathscr{B} = \mathscr{T}(X,c)$]，则 $I = X \cap [(c - \delta_I) \cup (c + \delta_I)]$。我们首先证明

($\star$) given $I, J \in \mathscr{B}$, if $\delta_I < \delta_J$, then $I \subseteq J$.

因此，$-\varepsilon < -\delta$，并且在情形 $\mathscr{B} = \mathscr{L}(X,\ c)$ 下，我们还分别有 $c - \varepsilon < c - \delta < c$ [，在情形 $\mathscr{B} = \mathscr{R}(X,\ c)$ 下则有 $c < c + \delta < c + \varepsilon$，而对于情形 for，我们需要两组不等式

情形 $\mathscr{B} = \mathscr{T}(X,\ c)$[。这些不等式表明，在情形 $\mathscr{B} = \mathscr{L}(X,\ c)$[下，$(c-\delta,\ c) \subseteq (c-\varepsilon,\ c)$；在情形 $\mathscr{B} = \mathscr{R}(X,\ c)$ 下，$(c,\ c+\delta) \subseteq (c,\ c+\varepsilon)$。而对于情形 for the case $\mathscr{B} = \mathscr{T}(X,\ c)$，我们需要两种集合包含关系]，，并将两边与 X 取交集，得到 $I \subseteq J$。这证明了 $(\star)$。

设 $I, J \in \mathscr{B}$。若 $\delta_I = \delta_J$，则 $I = J$，这意味着 $I \subseteq J$。若 δ_I和 δ_J互不相同，我们不失一般性地假设 $\delta_I < \delta_J$，根据（$\star$），$I \subseteq J$。无论哪种情况，$I \subseteq J$，这意味着 $I = I \cap J$，进而意味着 $I \subseteq I \cap J$，其中 $I \in \mathscr{B}$。因此，$\mathscr{B}$ 是一个滤子基。

给定 $\delta > 0$，集合 $(c-\delta, c)$、$(c, c+\delta)$ 和 $(c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ 都是 $(c-\delta, c+\delta)$ 的子集，因此，这些集合中的任意一个与 X的交集也都是子集。因此，$\mathscr{B} \longrightarrow c$。 □

给定一个函数 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$，并给定 $c \in X$，我们定义

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} f(x) &:= \lim_{\mathscr{T}(X,c)\to c} f, \\ \lim_{x\to c-} f(x) &:= \lim_{\mathscr{L}(X,c)\to c} f, \\ \lim_{x\to c+} f(x) &:= \lim_{\mathscr{R}(X,c)\to c} f. \end{aligned} \tag{5}$$

沿滤子基 $\mathscr{T}(X,c)$ [，以及沿 $\mathscr{L}(X,c)$ 和沿 $\mathscr{R}(X,c)$] 的任意极限，将分别称为当 $x \longrightarrow c$ [、分别当 $x \longrightarrow c-$以及当 $x \longrightarrow c+$]时的极限。

命题 43。以下各项等价。

(i) 极限$_{x\to c} f(x)$ 存在。*(ii)* 极限$_{x\to c-} f$ (x) 和极限$_{x\to c+} f(x)$ 存在且相等。

特别地，如果上述命题之一成立，那么极限$_{x\to c-} f(x)$ = 极限$_{x\to c} f(x)$ = 极限$_{x\to c+} f(x)$。

证明。设 f是一个函数 $X \longrightarrow \mathbb{R}$，并令 $c \in X$。

$(\Longrightarrow)$ 令 $L :=$ 极限$_{x\to c} f(x)$，并令 $\varepsilon > 0$。

由于 f沿着 $\mathscr{T}_c$趋近于 L，存在 $I \in \mathscr{T}_c$使得 $f[I] \subseteq (L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$。由 $I \in \mathscr{T}_c$，可知存在 $\delta > 0$使得 $I = X \cap [(c-\delta,\ c) \cup (c,\ c+\delta)]$。因此，$X \cap (c-\delta,\ c) \subseteq I$是 $\mathscr{L}_c$中的一个集合，而 $X \cap (c,\ c+\delta) \subseteq I$属于 $\mathscr{R}_c$。此外，

$$\begin{aligned} f[X \cap (c-\delta, c)] &\subseteq f[I] \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon), \\ f[X \cap (c, c+\delta)] &\subseteq f[I] \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon). \end{aligned} \tag{6}$$

因此，$\lim_{x\to c-} f(x) = L$ 且 $\lim_{x\to c+} f(x) = L$。

（$\Longleftarrow$）假设 $\lim_{x\to c-} f(x) = L = \lim_{x\to c+} f(x)$，并令 $\varepsilon > 0$。由 $\lim_{x\to c-} f(x) = L$，存在$I \in \mathscr{L}_c$使得 $f[I] \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$；而由 $L = \lim_{x\to c+} f(x)$，存在 $J \in \mathscr{R}_c$使得$f[J] \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$。由 $I \in \mathscr{L}_c$和 $J \in \mathscr{R}_c$，可知存在 $\delta_1 > 0$和 $\delta_2 > 0$使得 $I = X \cap (c-\delta_1, c)$ 且 $J = X \cap (c, c+\delta_2)$。数 $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 是两个正数之一，因此为正数，并且还具有性质 $\delta \leq \delta_1$ 和 $\delta \leq \delta_2$，由此可得$c-\delta_1 \leq c-\delta < c$和 $c < c+\delta \leq c+\delta_2$。

这些不等式可用于证明 $(c-\delta, c) \subseteq (c-\delta_1, c) \cup (c, c+\delta_1)$ 和 $(c, c+\delta) \subseteq (c-\delta_2, c) \cup (c, c+\delta_2)$。将两边（两个集合包含关系）与$X$取交集，然后取并集，可得 $K := X \cap [(c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)] \subseteq I \cup J$其中 $K \in \mathscr{T}_c$，并且 $f[K] \subseteq f[I \cup J] = f[I] \cup f[J] \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$。因此，$\lim_{x\to c} f(x) = L$。 □

我们有一种特殊情形，即 $X=[a,b]$ 或 $X=(a,b)$。此处，我们有以下集合等式

$$\mathscr{R}([a,b],a)=\mathscr{T}([a,b],a),\qquad \mathscr{L}([a,b],b)=\mathscr{T}([a,b],b),$$
$$\mathscr{R}((a,b),a)=\mathscr{T}((a,b),a),\qquad \mathscr{L}((a,b),b)=\mathscr{T}((a,b),b),$$

因此，

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a}f(x),\qquad \lim_{x\to b-}f(x)=\lim_{x\to b}f(x),\quad (\text{if } f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\text{ or } f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}).\ (7)$$

给定 $X\subseteq\mathbb{R}$ 以及一个实数 c，它既是 X的元素，也是其内点。若函数$f\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 存在，则称其在 c处可微。根据命题 40，赋值规则 $f'\colon c\mapsto\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$是一个函数，称为 f的导数。[由于 f是一个函数$X\longrightarrow\mathbb{R}$，$f'$的默认定义域是 X的子集，其中包含所有 c，使得 f在这些点处可微。]给定 $f(x)$的表达式，若其对应的 $f'(x)$表达式也已知，则微分算子 $\frac{d}{dx}$（关于变量 x）由条件 $\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$定义。

命题 44。*(i)* 函数 f在 c处连续，当且仅当 $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$。

(ii) 给定值为 C的常值函数，我们有 $\frac{d}{dx}C=0$。

(iii) 对于恒等函数 $x\mapsto x$，我们有 $\frac{d}{dx}x=1$。

(iv) 若 f 在 c处可微，则 f 在 c处连续。

(v) 给定一个常数 $C\in\mathbb{R}$，若 f 和 g（在某个给定集合上）可微，则 $f+g$ 和 Cf 也可微。此外，$(f+g)'=f'+g'$ 和 $(Cf)'=C\cdot f'$。

(vi) 若 f *and* g（在某个给定集合上）可微，则 fg 也可微。此外，$(fg)'=f'g+g'f$

证明。(i) ($\Longrightarrow$) 设 f是一个函数 $X\longrightarrow\mathbb{R}$。给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $|x-c|<\delta$蕴含 $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$。集合 $I:=X\cap[(c-\delta,c)\cup(c,c+\delta)]$属于 $\mathscr{T}_c$。给定 $y\in f[I]$，存在 $x\in I\subseteq(c-\delta,c)\cup(c,c+\delta)\subseteq(c-\delta,c+\delta)$，这蕴含 $|x-c|<\delta$，使得 $y=f(x)$。根据假设，$|f(x)-f(c)|<\varepsilon$，或等价地，$y=f(x)\in(f(c)-\varepsilon,f(c)+\varepsilon)$，这就证明了$f[I]\subseteq(f(c)-\varepsilon,f(c)+\varepsilon)$。因此，$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$。

(i)($\Longleftarrow$) 再次假设，f是一个 $X\longrightarrow\mathbb{R}$函数。令 $\varepsilon>0$。如果 $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$，那么存在 $I\in\mathscr{T}_c$使得 $f[I]\subseteq(f(c)-\varepsilon,\ f(c)+\varepsilon)$。由于 $I\in\mathscr{T}_c$，存在$\delta>0$使得$I=X\cap[(c-\delta,\ c)\cup(c,\ c+\delta)]$。

如果 $x\in X$且 $|x-c|<\delta$，那么 $x\in(c-\delta,c+\delta)=(c-\delta,c)\cup\{c\}\cup(c,c+\delta)=I\cup\{c\}$。因此，$f(x)\in f[I]\cup\{f(c)\}\subseteq(f(c)-\varepsilon,\ f(c)+\varepsilon)\cup\{f(c)\}$，其中，右侧由于$f(c)\in(f(c)-\varepsilon,\ f(c)+\varepsilon)$，可以进一步化简为（$f(c)-\varepsilon,\ f(c)+\varepsilon$）。

也就是说，$f(x)\in(f(c)-\varepsilon,\ f(c)+\varepsilon)$，或者等价地，$|f(x)-f(c)|<\varepsilon$。因此，$f$在 c处连续。

(ii) 以及 *(iii)* 根据例 30，常值函数 $x\mapsto 0$和 $x\mapsto 1$在任意 $c\in\mathbb{R}$ 处都连续。[因此，对于这样的 c，所述常值函数的任意定义域 $X\subseteq\mathbb{R}$都可以根据我们对可微性的定义要求来选择，即 c既是 X 的一个元素，也是其内点，就像
$X=(c-1,\ c+1)$。]根据*(i)*，$\lim_{x\to c}0=0$和 $\lim_{x\to c}1=1$，其中右侧分别等于 $\lim_{x\to c}\frac{C-C}{x=c}$

和 $\lim_{x\to c}\frac{x-c}{x-c}$。因此，$x\mapsto 0$ 和 $x\mapsto 1$ 在 c处可微，其导数分别为$c\mapsto 0$和 $c\mapsto 1$。使用我们的微分算子记号，$\frac{d}{dx}C=0$和 $\frac{d}{dx}x=1$。

*(iv)*设 $f\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $c\in X$处可微。根据例 30，函数 $x\mapsto x-c$ 在 c处连续，因此由 *(i)* $\lim_{x\to c}(x-c)=c-c=0$。我们将命题 41*(vi)* [与 (5) 中给出的滤子基] 用于平凡恒等式 $f(x)-f(c)=(x-c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$，得到：$\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)]=\lim_{x\to c}(x-c)\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=0\cdot f'(c)=0$。根据命题 41*(iii)*，$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$；并由本命题的*(i)* 部分可知，$f$在 c处连续。*(v)*利用命题 41*(v)* [和 (5) 中给出的滤子基]，计算 $\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}+g(x)\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right]$ 以及 $\lim_{x\to c}Cf(x)-Cf(c)\frac{x-c}{x-c}$。

(vi) 假设 $f,g\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $c\in X$处可微。恒等式右侧当 $x\to c$ 时的极限

$$\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}=g(x)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}+f(c)\frac{g(x)-g(c)}{x-c},$$

由于以下原因，可以利用命题 41(v)–(vi) [和 (5) 中给出的滤子基]计算：极限 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 和 $\lim_{x\to c}g(x)$ ~~$=g(c)\frac{x-c}{x-c}$~~存在，这是因为~~f~~和 g在 c处可微；在应用命题 41(v)时，数 $f(c)$可作为一个“常数”，而 $\lim_{x\to c}g(x)=g(c)$则由该命题的 (i) 和 (iv) 部分得出。结果为 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}=g(c)f'(c)$~~$+f(c)g'(c)$。也就是~~说，$fg$的导数将任意的 $c\in\mathbb{R}$映射为 $g(c)f'(c)+f(c)g'(c)=f(c)g'(c)+f'(c)g(c)$。因此，$(fg)'=fg'+f'g$。

□

如果 f'（在 $\mathbb{R}$ 的某个子集上）可微，那么 f' 的导数，即 f 的二阶导数，为 f''。我们还使用记号 $f^{(0)}:=f$、$f^{(1)}:=f'$ 和 $f^{(2)}:=f''$。如果对于某个非负整数 n，函数 $f^{(n)}$（在 $\mathbb{R}$ 的适当子集上）可微，那么我们将 $f^{(n)}$ 的导数定义为 $f^{(n+1)}$。通过归纳法，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们都定义了 f 的 n阶导数 $f^{(n)}$。

引理 45。 如果 f 在 $\mathcal{S}\subseteq\mathbb{R}$ 上连续 *[*，分别地，可微*]*，那么 $-f$ 也如此。

证明。 设 $c\in\mathcal{S}$。如果 f 在 c 处连续，那么根据命题 44（*i*），$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$，并且根据命题 41（*v*），$\lim_{x\to c}(-f)(x)=-\lim_{x\to c}f(x)=-f(c)$，因此再次根据命题 44（*i*），$-f$ 在 c 处连续。对于可微的情形，使用命题 44（*v*）。 □

引理 46。 设 $n\in\mathbb{N}$，并设 f 是函数 $[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$。假设所有 $f^{(0)}$、$f^{(1)}$、$f^{(2)}$、……、$f^{(n)}$在 $[a,b]$上连续，且 $f^{(n)}$ 在(a,b)上可微。给定 $x\in(a,b]$，存在唯一的 $\rho(x)\in\mathbb{R}$，使得由下式定义的函数 $F\colon[a,x]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$F(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-\rho(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!},$$

在 $[a,x]$ 上连续，且在 (a,x) 上可微。此外，$F(a)=0$并且

$$F'(t)=\frac{(x-t)^n}{n!}\left[\rho(x)-f^{(n+1)}(t)\right].$$

证明。 假设 $x \in (a,b]$ 意味着 $a < x$，因此 $x - a$ 不为零，并且这个数

$$\rho(x) = \frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right],$$

在 $\mathbb{R}$ 中存在。定义 $F\colon [a,x] \longrightarrow \mathbb{R}$，使得

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \rho(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{8}$$

我们证明，式 (8) 的右侧在所需集合上连续且可微。为此，我们以命题 41 和命题 44 中确立的连续性与可微性代数规则为基础。

设 $c \in [a,b]$。根据命题 41*(i)–(ii)*，有 $\lim_{t\to c} t^0 = \lim_{t\to c} 1 = 1$ 和 $\lim_{t\to c} t^1 = \lim_{t\to c} t = c$。若对某个非负整数 m，有 $\lim_{t\to c} t^m = c^m$，则根据 $\lim_{t\to c} t^1 = c$ 和命题 41*(vi)*，$\lim_{t\to c} t^{n+1} = \lim_{t\to c} t \lim_{t\to c} t^n = c^{n+1}$。由归纳法，对每个 $m \in \mathbb{N}$，函数 $t \mapsto t^m$ 在 c 处连续，因此根据命题 44*(i)*，$\lim_{t\to c} t^m = c^m$。根据命题 41*(v)*，函数

$$t \mapsto \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} x^{k-m} t^m = (x-t)^k,$$

m在任意的 $c \in [a,b]$ 处连续，其中，根据命题 44*(i)*，$\lim_{t\to c} \sum c^{m-1-k}t^k = mc^{m-1}$，其中$k=0$右侧为 $\lim_{t\to c} \frac{t^m - c^m}{t-c}$。特别地，对于任意 $c \in (a,\ b)$，这都成立。这证明函数 $t \mapsto t^m$ 在任意 $c \in (a,\ b)$ ~~处可~~微，且导数为 $t \mapsto mt^{m-1}$。利用命题 44*(v)*，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x-t)^k &= \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} x^{k-m} \frac{d}{dt} t^m = 0 + \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} x^{k-m} m t^{m-1}, \\
&= -k \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \binom{k-1}{m-1} x^{k-m} t^{m-1} = -k \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k-1}{m} x^{(k-1)-m} t^m, \\
&= -k(x-t)^{k-1}.
\end{aligned} \tag{9}$$

给定 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，假设 $f_{(k)}$ 在 $[a,b]$ 上连续，这意味着 $f^{(k)}$ 在整个 $(a,\ b)$ 上有定义，因此 $f^{(k-1)}$ 在 $(a,\ b)$ 上可微。根据命题 41*(v)*、44*(i)* 和 44*(v)*，式 (8) 右侧作为 t 的函数，在 $[a,b]$ 上连续，并在 $(a,\ b)$ 上可微；由式 (9) 以及命题 44*(i),(v),(vi)* 可计算其导数为 $F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}\left[\rho(x) - f^{(n+1)}(t)\right]$。

——— □

引理 47. 设 f 是一个函数 $(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$，并设 $c \in (a,b)$。

(i) 若 $\lim_{x\to c} f(x) > 0$，则存在非空开区间 $I \subseteq (a,c)$ 和 $J \subseteq (c,b)$，使得 $f[I], f[J] \subseteq (0, \infty)$。

(ii) 若 $f'(c) > 0$，则存在一个非空开区间 $I \subseteq (c,b)$，使得 $f[I] \subseteq (f(c)\ \infty)$。

(iii) 若 $f'(c) < 0$，则存在一个非空开区间 $I \subseteq (a,c)$，使得 $f[I] \subseteq (f(c)\ \infty)$。

(iv) 若 $f[\,(a,b)\,] \subseteq (-\infty, f\,(c)\,]$，且若 f 在 c 处可微，则 $f'\,(c) = 0$。

证明。(i) 由于 $L := \lim_{x\to c} f(x) > 0$，存在 $X \in \mathscr{T}_c$ 使得 $f[X] \subseteq (L-L, L+L) = (0, 2L)$。由 $X \in \mathscr{T}_c$，存在 $\eta > 0$ 使得 $X = (a,b) \cap [(c-\eta, c) \cup (c, c+\eta)]$。由 $c \in (a,b)$，我们得到 $a < c < b$，因此 $(a,c) \subseteq (a,b)$ 且 $(c,b) \subseteq (a,b)$，进而得到

$$
\begin{aligned}
I := (a,c) \cap [(c-\eta, c) \cap (a,b)] &= (c-\eta, c) \cap [(a,c) \cap (a,b)]\,, \\
&= (c-\eta, c) \cap (a,c), && (10)\\
&\subseteq (a,c), \text{ as desired,} \\
I = (a,c) \cap [(c-\eta, c) \cap (a,b)] &\subseteq (c-\eta, c) \cap (a,b)\,, \\
&\subseteq [(c-\eta, c) \cap (a,b)] \cup [(c, c+\eta) \cap (a,b)] = X, && (11)\\
J := (c,b) \cap [(c, c+\eta) \cap (a,b)] &= (c, c+\eta) \cap [(c,b) \cap (a,b)]\,, \\
&= (c, c+\eta) \cap (c,b), && (12)\\
&\subseteq (c,b), \text{ as desired,} \\
J = (c,b) \cap [(c, c+\eta) \cap (a,b)] &\subseteq (c, c+\eta) \cap (a,b)\,, \\
&\subseteq [(c, c+\eta) \cap (a,b)] \cup [(c-\eta, c) \cap (a,b)] = X. && (13)
\end{aligned}
$$

由 (10) 和 (12)，I 和 J 各自都是两个有界开区间的交集，因此也是有界开区间。由 (11) 和 (13)，我们发现 $f[I]$ 和 $f[J]$ 都是 $f[X] \subseteq (0, 2L) \subseteq (0, \infty)$ 的子集。

为完成证明，我们证明 I 和 J 非空。由 $a < c < b$ 和 $\eta > 0$，我们分别得到 $a < c$ 和 $c - \eta < c$ [，以及 $c < b$ 和 $c < c + \eta$]。若 $x := {}^{c+}\!/_{\text{最大值}_2^{\{a,c-\eta\}}}$ [，且 $y := {}^{c+}\!/_{\text{最小值}_2^{\{b,c+\eta\}}}$]，则分别有 $a < x < c$ 和 $c - \eta < x < c$ [，以及 $c < y < b$ 和 $c < y < c + \eta$]。因此，$x \in (c-\eta,\ c) \cap (a,\ c)$ 分别为 $= I \neq \emptyset$ [，而 $y \in (c,\ c+\eta) \cap (c,\ b) = J \neq \emptyset$]。

(ii) 定义 $F\colon (a,b) \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$，使得 $F(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$。根据假设，$f'(c) = \lim_{x\to c} F(x) > 0$，因此由 (i)，存在一个非空开区间 $I \subseteq (c,b) \subseteq (a,b)$，使得 $F[I] \subseteq (0, \infty)$。令 $y \in f[I]$。由于 $I = (c,b) \subseteq (a,b)$，也就是说 I 是 f 的定义域的子集，因此存在 $x \in (c,b)$，使得 $y = f(x)$。此外，对于这个 x，由于 $F[I] \subseteq (0, \infty)$，我们有 $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = F(x) > 0$。由于 $x \in (c,b)$，我们有 $c < x < b$，所以 $x - c$ 为正数，将其乘以 $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ 两边，得到 $f(x) - f(c) > 0$，这意味着 $f(c) < f(x) = y$。因此，$f[I] \subseteq (f(c)\ \infty)$。

(iii) 我们还使用由 $F(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 定义的函数 $F\colon (a,b) \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$。由假设 $f'(c) = \lim_{x\to c} F(x) < 0$，可得 $-\lim_{x\to c} F(x) > 0$。根据命题 41(v)，$\lim_{x\to c}(-F)(x) > 0$，因此由 (i)，存在一个非空开区间 $I \subseteq (a,c) \subseteq (a,b)$，使得 $(-F)[I] \subseteq (0, \infty)$。由于 I 是 f 的定义域的子集，对任意 $y \in f[I]$，存在 $x \in I = (a,c)$ 使得 $y = f(x)$，且 $-\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$。由于 $x \in (a, c)$，我们有 $a < x < c$，所以 $x - c$ 为负数；将其乘到 $-\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ 的两边，得到 $-[f(x) - f(c)] < 0$，这意味着 $-f(x) + f(c) < 0$，因此 $f(c) < f(x) = y$。这证明了 $f[I] \subseteq (f(c)\ \infty)$。

(iv) 若 $f'(c) > 0$，则由 (ii) 可知，存在一个非空开区间 $I \subseteq (c,b) \subseteq (a,b)$，使得 $f[I] \subseteq (f(c)\ \infty)$。由 $I \neq \emptyset$，存在 $\xi \in I$；而由 $f[I] \subseteq (f(c)\ \infty)$，可得 $f(c) < f(\xi)$。但由于 $\xi \in I \subseteq (a,b)$，根据假设 $f[(a,b)] \subseteq (-\infty, f(c)\,]$，，我们有 $f(\xi) \leq f(c)$。↯

对于情形 $f'(c) < 0$，我们使用 *(iii)*，得到一个非空开区间 $I \subseteq (a,\ c) \subseteq (a,\ b)$，它具有性质 $f[I] \subseteq (f(c)\ \infty)$。因此，存在 $\xi \in I$，并且根据 $f[I] \subseteq (f(c)\ \infty)$，我们有 $f(c) < f(\xi)$；但根据 $f[(a,\ b)] \subseteq (-\infty,\ f(c)\,]$，，我们有 $f(\xi) \leq f(c)$。↯

根据假设， $f'(c)$ 存在于 $\mathbb{R}$ 中；但由于 $f'(c) > 0$和 $f'(c) < 0$都导致了矛盾，根据三角不等式，唯一的可能是 $f'(c) = 0$。 □

2.4 紧集与一致连续性

给定 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$，并给定由 $\mathbb{R}$ 的子集组成的一个集族 $\mathscr{C}$，如果 $\mathscr{C}$，我们就称其为 $\mathcal{S}$ 的覆盖，或称 $\mathscr{C}$覆盖 $\mathcal{S}$，或称 $\mathcal{S}$可以由 $\mathscr{C}$ 中的集合覆盖，如果 $\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{U\in\mathscr{C}} U$。

命题 48。 如果 $\mathscr{C}$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个覆盖，并且 A、$B \subseteq \mathcal{S}$ 各自都可以由其中有限个集合覆盖，那么 $A \cup B$ 也可以。

证明。如果存在 U_1，U_2，……，$U_m \in \mathscr{C}$，使得 $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} U_k$，并且如果存在 U_{m+1}，U_{m+2}，……，$U_n \in \mathscr{C}$，使得 $B \subseteq \bigcup_{k=m}^{n} U_k$，那么 $A \cup B \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k$，其中 U_1、U_2、……、U_n 是来自 $\mathscr{C}$ 的有限个集合。 □

命题 49。 如果这些区间 (a_1, b_1)、(a_2, b_2)、……、(a_n, b_n) 覆盖 $[a, b]$，那么 $b - a < \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$。

证明。我们对 n 使用归纳法。如果 $n = 1$，那么 $[a, b] \subseteq (a_1, b_1)$，因此 $a_1 < a$ 和 $b < b_1$，其中前者蕴含 $-a < -a_1$。于是，$b - a < b_1 - a_1$。假设对某个 $n \in \mathbb{N}$，任何被 n 个有界开区间 I_k 覆盖的闭有界区间I都具有性质 $\ell(I) < \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$。假设 (a_1, b_1)、(a_2, b_2)、……、(a_{n+1}, b_{n+1}) 覆盖 $[a, b]$。由于 $a \in [a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n+1}(a_k, b_k)$，存在 $K \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 使得$a \in (a_K, b_K)$，因此 $a_K < a < b_K$。如果 $b < b_K$，那么 $[a, b] \subseteq (a_K, b_K)$，这属于归纳法的基础情形，因此证毕。此后假设 $b_K \leq b$。于是，$a_K < a < b_K \leq b$，因此 $[b_K, b] \subseteq [a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n+1}(a_k, b_k)$。这意味着

$$[b_K, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n+1}(a_k, b_k). \tag{14}$$

由 $a_K < a < b_K \leq b$，我们发现 $[b_K, b]$和 (a_K, b_K) 不相交。因此，如果 $x \in [b_K, b]$，那么 $x \notin (a_K, b_K)$，我们可以从 (14) 右侧的并集中删去 (a_K, b_K)。于是，$[b_K, b]$被 n 个集合覆盖，根据归纳假设，$[b_K, b]$ 的长度 $b - b_k$ 小于 (a_1, b_1)、(a_2, b_2)、……、(a_{n+1}, b_{n+1})（不包括 (a_K, b_K)）的长度之和，也就是 (a_1, b_1)、(a_2, b_2)、……、(a_{n+1}, b_{n+1}) 的长度之和减去 (a_K, b_K) 的长度。也就是说，$b - b_K \leq a_K - b_K + \sum_{k=1}^{n+1}(b_k - a_k)$，这意味着

$$b - a_K < \sum_{k=1}^{n+1}(b_k - a_k). \tag{15}$$

但由 $a_K < a < b_K \leq b$，我们得到 $-a < -a_K$，因此 $b - a < b - a_K$，再由 (15)，进一步得到 $b - a < \sum_{k=1}^{n+1}(b_k - a_k)$。通过归纳法，我们得到所需的结论。 □

假设 $\mathscr{C}$是 $\mathcal{S}$的一个覆盖。如果 $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$也是 $\mathcal{S}$的一个覆盖，那么就称 $\mathscr{B}$为 $\mathcal{S}$的子覆盖，或者说，覆盖 $\mathscr{C}$(的 $\mathcal{S}$) 有一个子覆盖 （本例中即 $\mathscr{B}$）。我们遵循一种传统但常受质疑的做法：在“覆盖”前加上修饰语“开”，表示覆盖中的集合都是开集；在“覆盖”（或“子覆盖”）前加上“有限”，表示覆盖或子覆盖的基数有限（而非其中集合的基数）。如果集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ 的任意开覆盖都有有限子覆盖，就称 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ 为紧致 集。

命题 50. 如果 I 是紧致的，且 f 在 I上连续，那么 $f[I]$ 是紧致的。

证明. 设 $\mathscr{C}$ 是 $f[I]$的一个开覆盖。因此， $f[I] \subseteq \bigcup_{U\in\mathscr{C}} U$，对两边在 f下取原像，得到 $I \subseteq \bigcup_{U\in\mathscr{C}} f^{-1}[U]$。但由于每个集合 $U \in \mathscr{C}$都是开集，且 f是连续的，每个原像 $f^{-1}[U]$都是开集，因此前面的集合包含关系意味着 $\mathscr{B} := \{f^{-1}[U] : \ U \in \mathscr{C}\}$是 I的一个开覆盖。由于 I是紧致的，存在有限多个集合 $f^{-1}[U_1]$、$f^{-1}[U_2]$、……、$f^{-1}[U_n]$，它们来自 $\mathscr{B}$，这意味着存在有限多个集合 U_1、U_2、……、U_n，它们来自 $\mathscr{C}$，使得 $I \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}[U_k]$。对两边在 f下取像，得到 $f[I] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k$。因此， $f[I]$是紧致的。 □

命题 51. 如果存在一个紧致的闭有界区间（长度为正），那么任何闭有界区间都是紧致的。

证明. 设某个长度为正的区间 $[a_0, b_0]$ 是紧致的（因此 $a_0 < b_0$），并设 $[a, b]$ 是任意一个闭有界区间。根据命题 34，存在函数 f: $[a_0, b_0] \longrightarrow [a, b]$，它在 $[a_0, b_0]$上连续，且 $[a_0, b_0]$在 f 下的像等于 $[a, b]$。根据命题 50，这样的像集是紧致的。 □

引理 52. 如果 $\mathcal{S}$ 是非空紧集，且 $\mathscr{C}$ 是 $\mathcal{S}$ 的开覆盖，那么存在 $\delta > 0$，称为开覆盖 $\mathscr{C}$ 的勒贝格数，使得对于任意 x、$c \in \mathcal{S}$，如果 $|x - c| < \delta$，那么存在 $G \in \mathscr{C}$，使得 x、$c \in G$。

证明。 由于 $\mathscr{C}$覆盖了 $\mathcal{S}$，我们有 $\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{G\in\mathscr{C}} G$，因此给定 $t \in \mathcal{S}$，存在 $G_t \in \mathscr{C}$使得 $t \in G_t$。由于 G_t是开集，存在 $\delta_t > 0$使得 $|x - t| < \delta_t$推出 $x \in G_t$。 由于 $\frac{1}{2}\delta_t < \delta_t$，我们发现 $|x - t| < \frac{1}{2}\delta_t$推出 $|x - t| < \delta_t$。 此后， $|x - t| < \frac{1}{2}\delta_t$推出 $x \in G_t$，或者等价地，$x \in \left(t - \frac{1}{2}\delta_t, t + \frac{1}{2}\delta_t\right)$ 推出 $x \in G_t$。 至此，我们已经证明了

($\star$) for each $t \in \mathcal{S}$, we have $\left(t - \frac{1}{2}\delta_t, t + \frac{1}{2}\delta_t\right) \subseteq G_t$.

此外，给定任意 $t \in \mathcal{S}$ $t \in \left(t - \frac{1}{2}\delta_t\ t + \frac{1}{2}\delta_t\right) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \left(s - \frac{1}{2}\delta_s\ s + \frac{1}{2}\delta_s\right)$ $\mathcal{S} \subseteq$，由于,, $\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \left(s - \frac{1}{2}\delta_s\ s + \frac{1}{2}\delta_s\right)$ – $\mathscr{B} = \left\{\left(s - \frac{1}{2}\delta_s, s + \frac{1}{2}\delta_s\right) \ s \in \mathcal{S}\right\}$ – 我们有,, 因此集族 : : 是$\mathcal{S}$的一个开覆盖。由于 $\mathcal{S}$是紧致的， $\mathscr{B}$有一个有限子覆盖，其中的集合记为 $\left(s_1 - \frac{1}{2}\delta_{s_1},\right.$ $\left.s_1 + \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right),\left(s_2 - \frac{1}{2}\delta_{s_2}\ s_2 + \frac{1}{2}\delta_{s_2}\right)$ $\left(s_n - \frac{1}{2}\delta_{s_n}\ s_n + \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$ $\star$ – ,, . . . , 。由 ( ) 可得, – – –

($\star\star$) for each $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, we have $\left(s_k - \frac{1}{2}\delta_{s_k}, s_k + \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right) \subseteq G_{s_k}$.

由于每个 δ_{s_k} 都是正的，因此

$$\delta := \min\left\{\tfrac{1}{2}\delta_{s_1}, \tfrac{1}{2}\delta_{s_2}, \ldots, \tfrac{1}{2}\delta_{s_n}\right\}. \tag{16}$$

设 x， $c \in \mathcal{S}$ 使得 $|x - c| < \delta$。由于 $\mathscr{B}$ 覆盖了 $\mathcal{S}$，我们有 $c \in \mathcal{S} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \left(s_k - \frac{1}{2}\delta_{s_k},\ s_k + \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$，因此存在 $K \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 使得 $c \in \left(s_K - \frac{1}{2}\delta_{s_K},\ \delta + \frac{1}{2}\delta_{s_K}\right)$，或者 $|c - s_K| < \frac{1}{2}\delta_{s_K}$。 由（16）式，$|x - c| < \delta \leq \frac{1}{2}\delta_{s_K}$，根据三角不等式:

$|x - s_K| \leq |x - c| + |c - s_K| < \frac{1}{2}\delta_{s_K} + \frac{1}{2}\delta_{s_K} = \delta_{s_K}$，但不等式 $|x - s_K| < \delta_{s_K}$ 蕴含 $x \in (s_K - \delta_{s_K},$ $s_K + \delta_{s_K})$ ，而该结论与 $c \in \left(s_K - \frac{1}{2}\delta_{s_K},\ \delta + \frac{1}{2}\delta_{s_K}\right)$ 以及（$\star\star$）合取后,-蕴含 x， $c \in G_{s_K} \in \mathscr{C}$。证明完毕。 □

引理53。 若 f 在 $\mathcal{S}$上连续，则对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\mathcal{S}$ 的一个开覆盖 $\mathscr{C}$，使得对每个$G \in \mathscr{C}$，若 $x, c \in G$，则 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$。

证明。设 $t \in \mathcal{S}$。给定 $\varepsilon > 0$，我们有 $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$，因此根据 f在 t处的连续性，存在 $\delta_t > 0$，使得 $|x - t| < \delta$蕴含 $|f(x) - f(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$，等价地，

($\star$) if $x \in (t - \delta_t, t + \delta_t)$, then $|f(x) - f(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

由于 $\delta_t > 0$，我们有 $t - \delta_t < t < t + \delta_t$，也就是说 $t \in (t - \delta_t, t + \delta_t) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (s - \delta_s, s + \delta_s)$。由于$t \in \mathcal{S}$是任意的，我们有 $\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (s - \delta_s, s + \delta_s)$，其中并集中的每个区间都是开集。因此，$\mathscr{C} := \{(s - \delta_s, s + \delta_s) : \ s \in \mathcal{S}\}$ 是 $\mathcal{S}$的开覆盖。如果 $x, c \in (s - \delta_s, s + \delta_s)$，那么根据（$\star$），我们有 $|f(x) - f(s)| < \frac{1}{2}\varepsilon$，并且$|f(s) - f(c)| = |f(c) - f(s)| < \frac{1}{2}\varepsilon$。根据三角不等式，$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f(s)| + |f(s) - f(c)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$。 □

给定 $I \subseteq \mathbb{R}$，若函数 $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足一致连续，则对每个 $\varepsilon > 0$，都存在$\delta > 0$，使得对于任意 x，$c \in I$，若 $|x - c| < \delta$，则 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$。事实上，若 $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$一致连续，那么对每个 $t \in I$，在上述一致连续性的 ε-δ定义中令 $c = t$，便可得出 f 在 t处连续，因此一致连续性蕴含连续性。若要推出一致连续性，就必须将连续性假设与一个附加条件结合起来；这正是后文定理 81 中实分析原理环环相扣的部分缘由。本节余下的内容，即第 2.4 节，本应放在下一节第 2.5 节中，因为这些内容更适合归入积分理论的基本内容。不过，这些内容已用于定理 81 的证明。

给定 a，$b \in \mathbb{R}$，其中 $a \leq b$，我们所说的 $[a, b]$ 的 分割，是指包含端点 a 和 b 的 $[a, b]$ 的有限子集。如果 $a = b$，那么该定义意味着 $[a, b]$ 的唯一可能分割是 $\{a\}$。如果 $a < b$，那么通常用严格递增的下标来标记 $[a, b]$ 的一个分割中的元素，例如：对于基数为 n 的 $[a, b]$ 的一个分割，其元素记作 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$。

命题54。如果 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ 是 $[a, b]$ 的一个分割，那么 $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$。

证明。对于每个 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，都有 x_{k-1}，$x_k \in [a, b]$，因此 $a \leq x_{k-1}$，$x_k \leq b$，所以$[x_{k-1}, x_k] \subseteq [a, b]$，并且我们还得到 $\bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \subseteq [a, b]$。

设 $x \in [a, b]$。如果 $x > x_k$对所有 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$都成立，那么特别地，在 $k = n$处，我们有 $b = x_n < x$，因此 $x \notin [a, b]$。↯ 所以，存在 $K \in \{1, 2, \ldots, n\}$使得 $x \leq x_K$。也就是说，K 是$\mathcal{S}$中的一个元素：$= \{m \in \mathbb{N} : \ x \leq x_m, \ 1 \leq m \leq n\}$，因此它是 $\mathbb{N}$的一个非空子集。良序原理 指出，$\mathbb{N}$的每个非空子集都有最小元素，或者说，存在 $L \in \mathcal{S}$（这意味着 $x \leq x_L$）使得 $m \in \mathcal{S}$蕴含 $L \leq m$。根据逆否命题，$m < L$蕴含 $m \notin \mathcal{S}$，或者说$x_m < x$。特别地，这在 $m = L - 1$处成立。因此，$x_{L-1} < x \leq x_L$，这意味着 $x \in [x_{L-1}, x_L]$，其中$L \geq 1$蕴含$L - 1 \geq 0$。因此，$x \in [x_{L-1}, x_L] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$，从而 $[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$。证明完毕。 □

函数 $\varphi\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 若存在 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ 的一个分割，使得对于每个 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，函数 φ 在（x_{k-1}，x_k）上为常数，则称其为 阶梯函数。根据此定义，阶梯函数 φ 在分割点 x_0，x_1，……，x_n 处的取值并不重要。

命题 55。若 $\varphi\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是阶梯函数，则存在 c_1、c_2、……、$c_N \in \mathbb{R}$，使得$\{\varphi(x) : x \in [a, b]\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$。

证明。由于 φ 是定义在 $[a, b]$上的阶梯函数，因此存在 $[a, b]$ 的一个分割 $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$，使得对于每个 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，函数 φ 在（x_{k-1}，x_k）上的值为常数 C_k。在各分割点处，令 $y_k := \varphi(x_k)$，对所有 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ 均成立。因此，$[a, b]$ 在 φ 下的像只包含有限个实数 y_0、y_1、……、y_n、C_1、C_2、……、C_n。将这 N 个数重新命名为 c_1、c_2、……、c_N。 □

2.5 积分理论的一些要素

本节介绍一些必要的基础知识，以建立积分的初等概念，并探讨一些推论，例如可积函数的有界性和积分的可加性。我们首先说明，阶梯函数的积分在某种程度上独立于所选的分割。

命题 56. 设 $\varphi\colon\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个阶梯函数，并给定 $\Delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ 的一个分割$[a,b]$，使得 φ 在对所有 $k\in\{1,2,\ldots,n\}$成立时，在(x_{k-1},x_k) 上取值 c_i。令 $\int_a^b\varphi=\sum_{i=1}^n c_i(x_i-x_{i-1})$。若$\Omega=\{u_0,u_1,\ldots,u_m\}$ 是 $[a,b]$ 的一个包含 Δ的分割，那么对每个 $j\in\{1,2,\ldots,m\}$，存在$C_j\in\mathbb{R}$ 使得 $\{C_j\}=\varphi\left[(u_{j-1},u_j)\right]$, 且 $\int_a^b\varphi=\sum_{j=1}^m C_j(u_j-u_{j-1})$。 *[因此，数 $\int_a^b\varphi$ 由 Δ唯一确定，并称为（阶梯函数的）积分 φ。]*

证明。 我们对 m 使用归纳法。假设对于包含 Δ 的 $[a,b]$ 的任意分割 $\Omega=\{v_0,v_1,\ldots,v_t\}$ [where $t<m$]，该命题都成立。那么，这个归纳假设适用于 $[a,b]$ 的分割 $\{u_0,u_1,\ldots,u_m\}\backslash\{u_{m-1}\}$。也就是说，对于每个 $j\in\{1,2,\ldots,m-2,m\}$，存在 $C_j\in\mathbb{R}$ 使得

$$\begin{aligned}\{C_j\}&=\varphi\left[(u_{j-1},u_j)\right],\\ \{C_m\}&=\varphi\left[(u_{m-2},u_m)\right],\qquad(17)\\ \int_a^b\varphi&=\left[\sum_{j=1}^{m-2}C_j(u_j-u_{j-1})\right]+C_m(u_m-u_{m-2}).\qquad(18)\end{aligned}$$

由于 $u_{m-2}<u_{m-1}<u_m$，$(u_{m-2},\ u_{m-1})\subseteq(u_{m-2},\ u_m)$ 且 $(u_{m-1},\ u_m)\subseteq(u_{m-2},\ u_m)$，这意味着$\varphi\left[(u_{m-2},\ u_{m-1})\right]\subseteq\varphi\left[(u_{m-2},\ u_m)\right]$ 且 $\varphi\left[(u_{m-1},\ u_m)\right]\subseteq\varphi(u_{m-2},\ u_m)$，并由 (17) 得

$$\varphi\left[(u_{m-2},u_{m-1})\right]\subseteq\{C_m\},\qquad\varphi\left[(u_{m-1},u_m)\right]\subseteq\{C_m\},$$

但由于 C_m 包含于上述每个像集中，我们进一步得到集合相等。因此，我们可以定义$C_{m-1}:=C_m$，并由(18)得，

$$\begin{aligned}\int_a^b\varphi&=\left[\sum_{j=1}^{m-2}C_j(u_j-u_{j-1})\right]+C_m(u_m-u_{m-1}+u_{m-1}-u_{m-2}),\\ &=\left[\sum_{j=1}^{m-2}C_j(u_j-u_{j-1})+C_m(u_m-u_{m-1})\right]+C_m(u_{m-1}-u_{m-2}),\\ &=\left[\sum_{j=1}^{m-2}C_j(u_j-u_{j-1})+C_m(u_m-u_{m-1})\right]+C_{m-1}(u_{m-1}-u_{m-2}),\\ &=\sum_{j=1}^{m}C_j(u_j-u_{j-1}).\end{aligned}$$

由归纳法可得所需结论。 □

命题 57. 若将所有阶梯函数 $[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$构成的集族定义为 $\mathscr{S}[a,b]$，则给定常数函数 $C\colon\ x\mapsto C$ 以及给定的 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}[a,b]$，有 $C,C\varphi,\varphi+\psi\in\mathscr{S}[a,b]$。此外，$\int_a^b C=C(b-a)$，$\int_a^b C\varphi=C\int_a^b\varphi$ 且 $\int_a^b(\varphi+\psi)=\int_a^b\varphi+\int_a^b\psi$。

证明。 根据命题 56，存在实数集 $[a,b]$ 的一个分割 $\Delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$，使得对于所有 $k\in\{1,2,\ldots,n\}$，φ 在 $(x_{k-1},\ x_k)$ 上取值 C_k，而 ψ 在该区间上取值 G_k。函数 C、$C\varphi$ 和 $\varphi+\psi$ 分别取值 C、$C\cdot C_k$ 和 C_k+G_k，因此对于所有 $k\in\{1,2,\ldots,n\}$，它们在 $(x_{k-1},\ x_k)$ 上都是常数，

因此 C，$C\varphi$，$\varphi+\psi\in\mathscr{S}[a,b]$。此外，

$$\begin{aligned}
\int_a^b C &= \sum_{k=1}^{n} C(x_k-x_{k-1}) = C\sum_{k=1}^{n}x_k - C\sum_{k=1}^{n}x_{k-1},\\
&= C\sum_{k=1}^{n}x_k - C\sum_{k=0}^{n-1}x_k = Cx_n + C\sum_{k=1}^{n-1}x_k - C\sum_{k=1}^{n-1}x_k - Cx_0,\\
&= Cx_n - Cx_0 = Cb - Ca = C(b-a),\\
\int_a^b C\varphi &= \sum_{k=1}^{n} C\cdot C_k(x_k-x_{k-1}) = C\sum_{k=1}^{n}C_k(x_k-x_{k-1}) = C\int_a^b \varphi,\\
\int_a^b (\varphi+\psi) &= \sum_{k=1}^{n}(C_k+G_k)(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}C_k(x_k-x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n}G_k(x_k-x_{k-1}),\\
&= \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi. \quad \square
\end{aligned}$$

给定 $X\subseteq\mathbb{R}$ 和函数 f，g，h：$X\longrightarrow\mathbb{R}$，考虑以下断言

$$\begin{aligned}
&\forall x\in X \quad f(x)\le g(x),\\
&\forall x\in X \quad f(x)< g(x),\\
&\forall x\in X \quad f(x)= g(x),\\
&\forall x\in X \quad f(x)\le g(x)\le h(x) \implies f(x)\le h(x),\\
&\forall x\in X \quad f(x)< g(x)< h(x) \implies f(x)< h(x),\\
&\forall x\in X \quad f(x)< g(x) \implies f(x)\le g(x),\\
&\forall x\in X \quad f(x)\le g(x) \iff -g(x)\le -f(x),\\
&\forall x\in X \quad |f(x)-g(x)|<\varepsilon \iff g(x)-\varepsilon< f(x)< g(x)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

由于这些断言对函数 f、g 和 h的共同定义域 X 中的任意 x 都成立，因此我们将省略对元素 x的提及，并将上述内容改写为所谓的“逐点函数记法”，于是上述各个断言可分别简写为

$$\begin{aligned}
&f\le g,\\
&f< g,\\
&f= g,\\
&f\le g\le h \implies f\le h,\\
&f< g< h \implies f< h,\\
&f< g \implies f\le g,\\
&f\le g \iff -g\le -f,\\
&|f-g|<\varepsilon \iff g-\varepsilon< f< g+\varepsilon,
\end{aligned}$$

分别为。

58. 设 φ、$\psi\in\mathscr{S}[a,b]$。若 $\varphi\le\psi$，则 $\int_a^b\varphi\le\int_a^b\psi$。若 $\varphi<\psi$，则 $\int_a^b\varphi<\int_a^b\psi$。

命题

证明。根据阶梯函数的定义，存在集合 S 的分割 $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ 和 $\{y_0,y_1,\ldots,y_m\}$，使得对于任意 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ 和任意 $j\in\{1,2,\ldots,m\}$，都存在 A_i，$B_j\in\mathbb{R}$，使得

$\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^n A_i(x_i - x_{i-1})$ 和 $\int_a^b \psi = \sum_{j=1}^m B_j(y_j - y_{j-1})$。令

$$\{z_0, z_1, \ldots, z_h\} := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, y_1, \ldots, y_m\},$$

其中 $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b$。根据命题 56，对每个 $k \in \{1, 2, \ldots, h\}$，都存在 $U_k, V_k \in \mathbb{R}$使得

$$\{U_k\} = \varphi\left[(z_{k-1}, z_k)\right], \tag{19}$$
$$\{V_k\} = \psi\left[(z_{k-1}, z_k)\right], \tag{20}$$
$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=1}^h U_k(z_k - z_{k-1}), \tag{21}$$
$$\int_a^b \psi = \sum_{k=1}^h V_k(z_k - z_{k-1}). \tag{22}$$

令 $k \in \{1, 2, \ldots, h\}$，并令 $x \in (z_{k-1}, z_k)$。由于 $\varphi \le \psi$ [分别有 $\varphi < \psi$]，因此我们得到 $\varphi(x) \le \psi(x)$[分别有 $\varphi(x) < \psi(x)$], 。根据 (19)、(20)， $U_k \le V_k$ [分别有 $U_k < V_k$]，将两边乘以 $z_k - z_{k-1}$；由于 $z_{k-1} < z_k$，该数为正。因此， $U_k(z_k - z_{k-1}) \le V_k(z_k - z_{k-1})$[分别有 $U_k(z_k - z_{k-1}) < V_k(z_k - z_{k-1})$]。对所有 $k \in \{1, 2, \ldots, h\}$ 求和，并利用 (21)、(22) 进行代换，得到 $\int_a^b \varphi \le \int_a^b \psi$ [分别有 $\int_a^b \varphi < \int_a^b \psi$]。 □

f 在 $[a, b]$ 上的**下达布积分** 定义为

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\left\{\int_a^b \varphi \,:\, \varphi \in \mathscr{S}[a, b], \quad \varphi \le f\right\},$$

而**上达布积分** 在 f 上 $[a, b]$ 为

$$\overline{\int_a^b} f := -\sup\left\{\int_a^b \varphi \,:\, \varphi \in \mathscr{S}[a, b], \quad \varphi \le -f\right\}.$$

对于这两个定义，将 f 替换为 $-f$，并与另一个定义比较，可得

$$\underline{\int_a^b}(-f) = -\overline{\int_a^b} f, \qquad \overline{\int_a^b}(-f) = -\underline{\int_a^b} f, \tag{23}$$

或者，如果根据某个前提得到了 (23) 中的一个恒等式，那么将 f 替换为 $-f$即可得到另一个恒等式。

命题 59。 如果下达布积分和上达布积分都存在，那么 $\int_a^b f \le \int_a^b f$。

证明。 设 $\mathcal{S}_1 := \left\{\int_a^b \varphi \colon\ \varphi \in \mathscr{S}[a, b],\, \varphi \le f\right\}$ 且 $\mathcal{S}_2 := \left\{\int_a^b \varphi \colon\ \varphi \in \mathscr{S}[a, b],\, \varphi \le -f\right\}$。根据假设，上确界 $\int_a^b f = \sup\ \mathcal{S}_1$ 和 $-\int_a^b f = \sup\ \mathcal{S}_2$ 均存在。令 $\phi, \psi \in \mathscr{S}[a, b]$，使得 $\phi \le f$和 $\psi \le -f$成立，其中后者意味着 $f \le -\psi$。因此， $\phi \le f \le -\psi$，这意味着 $\phi \le -\psi$。根据命题 58， $\int_a^b \phi \le \int_a^b (-\psi)$；根据命题 57， $\int_a^b \phi \le -\int_a^b \psi$，其中左边是 $\mathcal{S}_1$中的任意元素，因此右边是 $\mathcal{S}_1$的上界，且它与上确界$\int_a^b f = \sup\ \mathcal{S}_1$ 的关系由不等式 $\int_a^b f \le -\int_a^b \psi$给出，所以 $\int_a^b \psi \le -\int_a^b f$。这一次，左边是 $\mathcal{S}_2$中的任意元素，因此右边是一个上界，并且它与上确界的关系由$-\int_a^b f \le -\int_a^b f$给出。因此， $\int_a^b f \le \int_a^b f$。 □

我们称函数 f 在 X 上有上界 $M \in \mathbb{R}$ ，如果像集 $f[X]$ 被M有上界，或者说 M是 $f[X]$的上界。

命题 60。如果 fi 在集合 X_1、X_2、.....、X_n 上有上界，那么 f 在 $\bigcup_{k=1}^{n} X_k$ 上有上界 .

证明。对 n 使用归纳法，所需结论在 $n=1$ 时显然成立。假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$，如果 X 在 n 个集合上有上界，那么 f 在这些 n 个集合的并集上有上界。如果 f 在集合 X_1、X_2、.....、X_{n+1} 上分别有上界，那么根据归纳假设，f 在前 n 个集合的并集 Y 上被某个 M_1 有界；根据假设，它在最后一个集合 X_{n+1} 上被 M_2 有界。如果 $x \in Y \cup X_{n+1}$，那么 $f(x) \leq M_1 \leq \max\{M_1, M_2\}$ 或 $f(x) \leq M_2 \leq \max\{M_1, M_2\}$，所以 f 在 $Y \cup X_{n+1}$ 上被 $\max\{M_1, M_2\}$ 有界。由归纳法可得所需结论。 □

命题 61. 任意阶梯函数 $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a,b]$上有上界。

证明。若 $\varphi\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个阶梯函数，则存在 $[a,b]$ 的一个分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$，使得对每个 $k \in \{1,2,\ldots,n\}$，函数 φ 在 (x_{k-1}, x_k) 上为常数，因而有上界；在单点集 $\{x_{k-1}\}$ 和 $\{x_k\}$ 上也是如此。根据命题 60，对于任意 $k \in \{1,2,\ldots,n\}$，φ 在 $[x_{k-1}, x_k] = (x_{k-1}, x_k) \cup \{x_{k-1}\} \cup \{x_k\}$ 上有上界。再次使用命题 60，并结合命题 54，可知 φ 在 $\bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] = [a,b]$ 上有上界。 □

引理 62. 如果 $\int_a^b f$ 存在，那么 f 在 $[a,b]$上有上界。

证明. 由于 $-\int_a^b f = \sup\left\{\int_a^b \varphi\colon\ \varphi \in \mathscr{S}[a,b],\quad \varphi \leq -f\right\}$ 和 $1 > 0$，根据命题 19，存在 $\psi \in \mathscr{S}[a,b]$ 使得 $\psi \leq -f$ 和 $-\int_a^b f - 1 < \int_a^b \psi \leq -\int_a^b f$。由 $\psi \leq -f$，我们得到 $f \leq -\psi$，其中 $-\psi \in \mathscr{S}[a,b]$ 根据命题 57，并且根据命题 61，被某个数有上界

$M \in \mathbb{R}$。因此，对于任意 $x \in [a,b]$，我们有 $f(x) \leq -\psi(x) \leq M$。所以，$f$在$[a,b]$上有上界。 □

给定一个集合族 $\mathscr{C}$，函数 $f\colon\ \mathscr{C} \longrightarrow \bigcup_{S \in \mathscr{C}} S$ 若满足对于任意 $S \in \mathscr{C}$，都有 $f(S) \in S$，则称为选择函数 。给定函数 $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$、$[a,b]$的一个分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$，以及选择函数 $\xi\colon\ [x_{k-1}, x_k] \mapsto \xi_k$，其中 $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ [（我们将其称为与分割 Δ]相关联的选择函数），则 f（在 $[a,b]$ 上，针对分割 Δ 和选择函数ξ）的黎曼和 定义为

$$\mathcal{R}(f, \Delta, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}).$$

令 $\mathscr{P}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 的所有分割构成的集合族。对于每个 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}[a,b]$，令$\mathbb{R}^{\Delta}$表示所有满足 $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ 的选择函数 $\xi\colon\ [x_{k-1}, x_k] \mapsto \xi_k$ 构成的集合族，并令$\Sigma_\Delta = \Sigma_\Delta(f) := \{\mathcal{R}(f,\ \Omega\ \xi)\colon \Omega \in \mathscr{P}[a,b],\quad \Delta \subseteq \Omega\ \ \xi \in \mathbb{R}^{\Omega}\}$。

命题 63. 集族 $\mathscr{I}(a,b;\quad f)\colon = \{\Sigma_\Delta\colon\ \Delta \in \mathscr{P}[a,b]\}$ 是一个滤子基[8]。如果 $\mathscr{I}(a,b;\quad f)$趋近于某个 $I \in \mathbb{R}$，那么 I 是唯一的[，且 f 在 $[a,b]$ 上的黎曼积分 定义为 $\int_a^b f\colon = I]$。

证明。若 $\Sigma_\Delta, \Sigma_\Lambda \in \mathscr{I}(a,b;\ f)$，则 $\Delta, \Lambda \in \mathscr{P}[a,b]$ 是 $[a,b]$ 的有限子集，分别包含 a 和 b，$\Delta \cup \Lambda$ 也如此。因此，$\Delta \cup \Lambda \in \mathscr{P}[a,b]$ 且 $\Sigma_{\Delta\cup\Lambda} \in \mathscr{I}(a,b;\ f)$。若 $\mathcal{R}(f,\Omega\ \xi) \in \Sigma_{\Delta\cup\Lambda}$，则$\Delta\cup\Lambda \subseteq \Omega$，其中左侧包含 Δ 和 Λ。因此，$\mathcal{R}(f,\Omega\ \xi) \in \Sigma_\Delta$ 且 $\mathcal{R}(f,\Omega\ \xi) \in \Sigma_\Lambda$，或者 $\mathcal{R}(f,\Omega\ \xi) \in \Sigma_\Delta \cap \Sigma_\Lambda$，这证明了 $\Sigma_{\Delta\cup\Lambda} \subseteq \Sigma_\Delta \cap \Sigma_\Lambda$。任意的 Σ_Δ 都是非空的，因为

[8]此陈述引自 [II, 第 122] 页。

$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 包含自身，并且给定选择函数 ξ，它将一个区间映射到左端点，黎曼和 $\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,(x_k - x_{k-1})$ 是 Σ_Δ 的一个元素。因此，$\mathscr{I}(a,\ b;\ f)$ 是一个滤子基。若它趋近于某个 $I \in \mathbb{R}$，则根据命题 40，数 I 是唯一的。 □

引理 64。 如果 $\int_a^b f$ 存在，那么 f 在 $[a,b]$上有上界。

证明。 如果 $I := \int_a^b f$存在，那么滤子基 $\mathscr{I}(a,\ b;\ f)$ 趋近于 I。由于 $1 > 0$，存在 $\Sigma_\Delta \in \mathscr{I}(a,\ b;\ f)$，使得 $\Sigma_\Delta \subseteq (I-1,\ I+1)$。令 $\xi \in \mathbb{R}^\Delta$。由于 Δ包含自身，$\mathcal{R}(f,\ \Delta,\ \xi) \in \Sigma_\Delta$，因此 $I - 1 < \mathcal{R}(f,\ \Delta,\ \xi) < I + 1$。如果 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$，那么

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) < I + 1, \qquad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^\Delta. \tag{24}$$

为了导出矛盾，假设 f在 $[a,b]$上无上界。如果对于所有 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$，函数 f 在 $[x_{k-1}, x_k]$上都有上界，那么根据命题 54 和命题 60，f 在$\bigcup_{k=1}^{n}[x_{k-1}, x_k] = [a,b]$上有上界。↯ 因此，存在 $K \in \{1, 2, \dots, n\}$，使得 f在$[x_{K-1}, x_K]$上无上界。令 $Y := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) - f(\xi_K)(x_K - x_{K-1})$。根据分割的记号，$x_K - x_{K-1} > 0$，因此将 Y代入式 (24) 并将等式两边除以 $x_K - x_{K-1}$，得到

$$f(\xi_K) < \frac{I - Y + 1}{x_K - x_{K-1}}, \qquad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^\Delta. \tag{25}$$

由于 f在 $[x_{K-1}, x_K]$上没有上界，数 $\frac{I-Y+1}{x_K - x_{K-1}}$ 不是$[x_{K-1}, x_K]$在 f作用下的像的上界，因此存在 $\gamma \in [x_{K-1}, x_K]$使得

$$f(\gamma) > \frac{I - Y + 1}{x_K - x_{K-1}}. \tag{26}$$

令 $\zeta \in \mathbb{R}^\Delta$ 为选择函数 $\zeta\colon\ [x_{k-1}, x_k] \mapsto \zeta_k$，其中当 $k \neq K$时 $\zeta_k = x_{k-1}$，且 $\zeta_K = \gamma$。由 (26)，$f(\zeta_K) > \frac{I-Y+1}{x_K - x_{K-1}}$；但在 (25) 中令 $\xi = \zeta$，则 $f(\zeta_K) < \frac{I-Y+1}{x_K - x_{K-1}}$。↯ 因此，$f$在$[a,b]$上有上界。 □

如果 $\overline{\int_a^b} f$和 $\int_a^b f$都存在，且 $\overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$，那么称 f 在 $[a,b]$上是黎曼可积 的。

引理 65. 如果 f 在 $[a,b]$上黎曼可积，那么 $\int_a^b f$ 存在。此外，$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$。

证明. 设 $I := \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$，设

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ \int_a^b \varphi \,:\, \varphi \in \mathscr{S}[a,b],\ \varphi \le f \right\}, \qquad \mathcal{S}_2 := \left\{ \int_a^b \varphi \,:\, \varphi \in \mathscr{S}[a,b],\ \varphi \le -f \right\},$$

并令 $\varepsilon > 0$。由于 $I = \int_a^b f = \sup \mathcal{S}_1$，且 $\varepsilon > 0$蕴含 $I - \varepsilon < I$，根据命题 19，存在 $\phi \in \mathscr{S}[a,b]$，使得 $\phi \le f$

$$I - \varepsilon < \int_a^b \phi \le I. \tag{27}$$

由 $-I = -\int_a^b f = \sup \mathcal{S}_2$、不等式 $(-I) - \varepsilon < -I$ 以及命题 19，存在$\psi_0 \in \mathscr{S}[a,b]$，使得 $\psi_0 \le -f$

$$(-I) - \varepsilon < \int_a^b \psi_0 \le -I. \tag{28}$$

根据命题 57，我们有 $\psi := -\psi_0 \in \mathscr{S}[a,b]$，其中 $-\psi \le -f$，这意味着 $f \le \psi$，于是（28）变为（$-I$）$-\varepsilon < -\int_a^b \psi \le -I$，或者等价地，$I \le \int_a^b \psi < I + \varepsilon$；结合（27）可得

$$I - \varepsilon < \int_a^b \phi \le I \le \int_a^b \psi < I + \varepsilon. \tag{29}$$

根据命题 56，存在 $[a,b]$ 的一个分割 $\Lambda = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$，使得若 ζ：$[t_{k-1}, t_k] \mapsto \zeta_k$ 是与 Δ 相关联的选择函数，则 $\int_a^b \phi = \sum_{k=1}^m \phi(\zeta_k)(t_k - t_{k-1})$，且 $\int_a^b \psi = \sum_{k=1}^m \psi(\zeta_k)(t_k - t_{k-1})$。若 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ 是 $[a,b]$ 的任意一个包含 Λ 的分割，则我们可以再次使用命题 56 得出，对于与 Δ 相关联的任意选择函数 ξ：$[x_{k-1}, x_k] \mapsto \xi$，有积分 $\int_a^b \phi = \sum_{k=1}^n \phi(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 以及 $\int_a^b \psi = \sum_{k=1}^n \psi(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$。至此，我们也已证明 $\phi \le f \le \psi$，这意味着对于所有 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，$\phi(\xi_k) \le f(\xi_k) \le \psi(\xi_k)$。将每一项乘以正数 $(x_k - x_{k-1})$，并对所有 k 求和，得到

$$\int_a^b \phi \le \mathcal{R}(f, \Delta, \xi) \le \int_a^b \psi,$$

由此，与 (29) 合取可得 $I - \varepsilon < \mathcal{R}(f, \Delta, \xi) < I + \varepsilon$，或者 $\mathcal{R}(f, \Delta, \xi) \in (I - \varepsilon, I + \varepsilon)$，其中 $\mathcal{R}(f, \Delta, \xi)$ 是 $\Sigma_\Delta \in \mathscr{I}(a, b; f)$ 的任意元素，因此 $\Sigma_\Delta \subseteq (I - \varepsilon, I + \varepsilon)$。所以，$\mathscr{I}(a, b; f)$ 趋近于 I。 □

命题 66. $\int_a^a f = 0$。

证明。 在退化区间 $[a,a]$ 上，任意阶梯函数的积分都为零，因此达布上积分与下积分定义中的集合只是单点集 $\{0\}$，其上确界为零。

因此，$\underline{\int_a^a} f = 0 = \overline{\int_a^a} f$ 对于退化区间上的任意函数 f。根据引理 65，$\int_a^a f = 0$. □

给定函数 f：$X \longrightarrow \mathbb{R}$ 和 $A \subseteq X$，由 $x \mapsto f(x)$ 给出的函数 $f|_A$：$A \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 f 在 A 上的限制。

命题 67。 如果 $c \in [a,b]$ 和 $\varphi \in \mathscr{S}[a,b]$，那么 $\varphi|_{[a,c]} \in \mathscr{S}[a,c]$ 和 $\varphi|_{[c,b]} \in \mathscr{S}[c,b]$。 [今后我们定义 $\int_a^c \varphi := \int_a^c \varphi|_{[a,c]}$ 和 $\int_c^b \varphi := \int_c^b \varphi|_{[c,b]}$。] 此外，$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$。

证明。 如果 $c = a$ 或 $c = b$，那么 $\int_a^c \varphi$ 和 $\int_c^b \varphi$ 中必有一个为零，另一个为 $\int_a^b \varphi$，于是结论成立。以下设 $c \in (a, b)$。根据阶梯函数的定义，存在 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ 对 $[a,b]$ 的一个分割，并存在实数 M_1，M_2，……，M_n，使得对于任意 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，

$$\{M_k\} = \varphi((x_{k-1}, x_k)), \tag{30}$$

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}). \tag{31}$$

根据命题54，$[a,b]=\bigcup_{k=1}^{n}[x_{k-1},x_k]=\Delta\cup\bigcup_{k=1}^{n}(x_{k-1},\ x_k)$，因此存在 $N\in\{1,2,\dots,n\}$，使得 $c=x_N$或 $c\in(x_{k-1},\ x_k)$。由于 $c\neq b=x_n$，对于 $c=x_N$的情形，整数 N至多为$n-1$，因此 $N+1$是整数 $\{1,2,\dots,n\}$中的一个。此外，对于 $c=x_N$的情形，

$$\{M_N\}=\varphi((x_{N-1},x_N))=\varphi|_{[a,c]}((x_{N-1},c)),\tag{32}$$

$$\{M_{N+1}\}=\varphi((x_N,x_{N+1}))=\varphi|_{[c,b]}((c,x_{N+1})),\tag{33}$$

而对于 $c\in(x_{N-1},\ x_N)$ 的情形，我们有 $x_{N-1}<c<x_N$，这意味着 $(x_{N-1},\ c)\subset(x_{N-1},\ x_N)$ 且 $(c,\ x_N)\subset(x_{N-1},\ x_N)$。因此，

$$\varphi|_{[a,c]}((x_{N-1},c))=\varphi((x_{N-1},c))\subseteq\varphi((x_{N-1},x_N))=\{M_N\},$$
$$\varphi|_{[c,b]}((c,x_N))=\varphi((c,x_N))\subseteq\varphi((x_{N-1},x_N))=\{M_N\},$$

但由于 φ 在区间 $(x_{N-1},\ x_N)$ 上为常数，我们得到

$$\varphi|_{[a,c]}((x_{N-1},c))=\{M_N\}=\varphi|_{[c,b]}((c,x_N)).\tag{34}$$

集合 $\{x_0,x_1,\dots,x_{N-1},c\}$ 是 $[a,c]$ 的一个分割，其中所有 $k\in\{1,2,\dots,N-1\}$ 都满足 (30)，并且在 $k=N$ 处，(32) 或 (34) 成立。因此，$\varphi|_{[a,c]}$ 是一个阶梯函数，其

$$\int_a^c\varphi|_{[a,c]}=\sum_{k=1}^{N-1}M_k(x_k-x_{k-1})+M_N(c-x_{N-1}).\tag{35}$$

我们还有 $[c,b]$ 的分割 $\{c,x_N,x_{N+1},\dots,x_n\}$，对于该分割，在第一个子区间上 (33) 或 (34) 成立，而所有 $k\in\{N+1,N+2,\dots,n\}$ 都满足 (30)。因此，$\varphi|_{[c,b]}$ 是一个阶梯函数，并且

$$\int_c^b\varphi|_{[c,b]}=M_N(x_N-c)+\sum_{k=N+1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1}).\tag{36}$$

将 (35) 和 (36) 相加，并注意到 $M_N(c-x_{N-1})+M_N(x_N-c)=M_N(x_N-x_{N-1})$，代入 (31) 后得到方程 $\int_a^b\varphi=\int_a^c\varphi|_{[a,c]}+\int_c^b\varphi|_{[c,b]}$。 □

命题 68. 如果 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，那么 $\int_a^b f$ 是唯一的实数，使得对于任意 φ、$\psi\in\mathscr{S}[a,b]$，若 $\varphi\le f\le\psi$，则 $\int_a^b\varphi\le\int_a^b f\le\int_a^b\psi$。

证明. f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，意味着 $\int_a^b f=\int_a^b f$，因此根据引理 65，存在 $\int_a^b f$，且 $\int_a^b f=\underline{\int_a^b}f=\int_a^b f$。设 $I\in\mathbb{R}$ 具有如下性质：

(⋆) for any $\varphi,\psi\in\mathscr{S}[a,b]$, if $\varphi\le f\le\psi$, then $\int_a^b\varphi\le I\le\int_a^b\psi$,

其中，$\int_a^b\varphi$ 可视为 $\mathcal{S}_1$ 中的任意元素：$=\left\{\int_a^b\phi:\ \ \phi\in\mathscr{S}[a,b],\ \ \phi\le f\right\}$，因此，数 I 是 $\mathcal{S}_1$ 的上界，并且与上确界 $\int_a^b f=\sup\mathcal{S}_1$ 满足不等式 $\int_a^b f\le I$。令 $\theta\in\mathscr{S}[a,b]$ 满足 $\theta\le-f$，或者说 $f\le-\theta$。由 (⋆)，$I\le\int_a^b(-\theta)$，并由命题 57，$I\le-\int_a^b\theta$，因此 $\int_a^b\theta\le-I$，其中左侧可视为$\mathcal{S}_2$中的任意元素：$=\left\{\int_a^b\phi:\ \ \phi\in\mathscr{S}[a,b],\ \ \phi\le-f\right\}$，因此 $-I$ 是 $\mathcal{S}_2$的上界，并且与上确界$-\int_a^b f=\sup\mathcal{S}_2$ 满足不等式 $-\int_a^b f\le-I$，或者说 $I\le\int_a^b f$。至此，我们已证明 $\int_a^b f\le I\le\int_a^b f=\int_a^b f=\int_a^b f$。因此，$I=\int_a^b f$。 □

命题 69。 如果 f 在 $[a,b]$上黎曼可积，且存在常数 m、 $M \in \mathbb{R}$，使得$m \le f \le M$ 在 $[a,b]$上成立，那么 $m\ (b-a)\ \le \int_a^b f \le M\ (b-a)$ 。

证明。 根据命题 57，常值函数 m， M 属于 $\mathscr{S}[a,b]$。利用假设 $m \le f \le M$和命题 68，$\int_a^b m \le \int_a^b f \le \int_a^b M$，其中阶梯函数的积分可根据命题 68 计算。结果为 $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$。 □

引理 70。 若 f 在 $[a,b]$的任意闭子区间上黎曼可积，则对任意 $c \in [a,b]$，有 $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$。

证明。 设 φ， ψ： $\mathscr{S}[a,b]$，使得 $\varphi \le f \le \psi$ 在 $[a,b]$上成立，并且这些函数不等式特别在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$上成立。根据假设， f在这些区间上的达布上积分与下积分均存在且相等，因此根据命题 68，有 $\int_a^c \varphi \le \int_a^c f \le \int_a^c \psi$ 和 $\int_c^b \varphi \le \int_c^b f \le \int_c^b \psi$。将这些不等式相加，

$$\int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi \le \int_a^c f + \int_c^b f \le \int_a^c \psi + \int_c^b \psi,$$

其中，最左端项和最右端项可根据命题 67 替换，从而得到 $\int_a^b \varphi \le \int_a^c f + \int_c^b f \le \int_a^b \psi$。至此，我们已证明实数 $\int_a^c f + \int_c^b f$具有如下性质：对于任意 φ， ψ： $\mathscr{S}[a,b]$，条件 $\varphi \le f \le \psi$蕴含 $\int_a^b \varphi \le \int_a^c f + \int_c^b f \le \int_a^b \psi$。根据命题 68，具有这一性质的实数只有 $\int_a^b f$。

Therefore $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. □

为了补全定理 82 中第五圆实分析原理所需的预备知识，我们在此定义原函数这一概念，它不过是导数的对偶概念。断言 f是 F的导数，等价于断言 F是 f的一个原函数 。“the”和“an”这两个冠词（定冠词与不定冠词）在这种对偶关系中并不保持对应：导数是唯一的，但原函数并不唯一。微积分中一个非常简单的例子是， $x \mapsto 2x$ 是 $x \mapsto x^2$的导数，而 $x \mapsto x^2$ 和 $x \mapsto x^2+1$ 都是 $x \mapsto 2x$的原函数。

2.6 阿基米德原理

阿基米德原理源自几何学，是欧几里得几何中的一条公理。下面是一种对该命题的直观描述：如果一条笔直的跑道长 $x > 0$ 个单位，而跑步者一步只有 $y > 0$ 个单位长，那么跑步者可以迈出某个整数 $N > \frac{x}{y}$ 步，到达跑道的终点。[我们不需要满足等式 $N = \frac{x}{y}$（比如当 $\frac{x}{y}$ 不是整数时，这可能无法实现），因为跑步者只需在迈出第 N 步或更早时，跑过跑道的长度即可。] 阿基米德原理的另一种常见表述涉及的不是两个正实数，而是任意实数；它与 $\mathbb{R}$ 的共尾子集这一概念有关，我们稍后会对此作出定义。首先，我们来介绍一种有些特别的概念。

非负实数 ε 是一个无穷小量 ，如果 $n \in \mathbb{N}$ 蕴含 $\varepsilon \le \frac{1}{n}$。零是一个无穷小量。

命题71。 有限个无穷小量的和仍是无穷小量。

证明。 我们对求和所涉及的无穷小量个数 $m \in \mathbb{N}$ 使用归纳法。若 $m = 1$，则所需结论显然成立。假设对于某个 $m \in \mathbb{N}$，任意 m 个无穷小量之和都是无穷小量。$m+1$ 个无穷小量之和可表示为 $S + \varepsilon$，其中 ε 是一个无穷小量，而 S 是 m 个无穷小量之和，根据归纳假设，它也是一个无穷小量。令 $n \in \mathbb{N}$。由于 S 和 ε 都是无穷小量， $S \le \frac{1}{n}$ 且 $\varepsilon \le \frac{1}{n}$，因此 $S + \varepsilon \le \frac{1}{2n}$，其中右边小于 $\frac{1}{n}$，因为

$n < 2n$。也就是说，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $S + \varepsilon \leq \frac{1}{n}$；或者说，$S + \varepsilon$ 是一个无穷小量。根据归纳法，我们得到所需结论。 □

引理 72. 以下命题等价。

(**阿基米德性质**) 阿基米德原理。对于任意 $x > 0$ 和任意 $y > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $Nx > y$。(**阿基米德性质$_{\mathbb{N}}$**) 数列 $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ 没有上界。(**阿基米德性质$_{\mathbb{I}}$**) $\mathbb{R}$ 中不存在正无穷小。

证明。**(阿基米德性质)** $\Longrightarrow$ **(阿基米德性质$_{\mathbb{N}}$)**。给定 $M \in \mathbb{R}$，我们有 $|M| + 1 > 0$；又由于 $1 > 0$，根据（**阿基米德性质**），存在 $N \in \mathbb{N}$，也就是数列 $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中的一项，使得 $N > \frac{|M|+1}{1} = |M| + 1 > |M| \geq M$，即 $N > M$，因此 $N \not\leq M$。所以，数列 $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ 没有上界。

(阿基米德性质$_{\mathbb{N}}$) $\Longrightarrow$ **(阿基米德性质$_{\mathbb{I}}$)**。我们用逆否命题证明这一点。若 $\mathbb{R}$ 中存在一个正无穷小 ε，那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$；由于两边均为正数，因此 $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$，且 $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有上界。

(阿基米德性质$_{\mathbb{I}}$) $\Longrightarrow$ **(阿基米德性质)**。令 $x > 0$ 和 $y > 0$。因此，$\frac{y}{x}$ 为正。若任何 $N \in \mathbb{N}$ 具有性质 $N \leq \frac{x}{y}$，且两边均为正，则 $\frac{y}{x} \leq \frac{1}{N}$，所以 $\frac{y}{x}$ 是一个正的无穷小量，这与（**阿基米德性质$_{\mathbb{I}}$**）矛盾。因此，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $N > \frac{x}{y}$。 □

引理 73。作为（**阿基米德性质**）的推论，极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$。

证明。我们先用归纳法证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$。当 $n = 1$ 时，我们只需得出 $\frac{1}{2} \leq 1$。若 $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，则 $n \leq 2^n$，且 $2n \leq 2^{n+1}$，其中左边等于 $n + n$；第二项至少为 1，因此 $n + 1 \leq n + n$。于是，$n + 1 \leq 2^{n+1}$，从而得到 $\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$。归纳证明至此完成。

给定 $\varepsilon > 0$，根据（**阿基米德性质**），存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $N > \frac{1}{\varepsilon}$，或者等价地，$\frac{1}{N} < \varepsilon$。若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq N$，则 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$，其中左侧如前所证，至少为 $\frac{1}{2^n}$。

Hence, $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Therefore, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. □

引理 74. 作为 (**阿基米德性质**)的推论，若 $c =$ 上确界 $\mathcal{S}$，则存在一个 $\mathcal{S}$ 中的数列收敛到 c。

证明。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\frac{1}{n} > 0$，因此 $c = \frac{1}{n} < c$。根据命题 19，存在 $c_n \in \mathcal{S}$ 使得 $c - \frac{1}{n} < c_n \leq c < c + \frac{1}{n}$。因此，$-\frac{1}{n} < c_n - c < \frac{1}{n}$，也就是说 $|c_n - c| < \frac{1}{n}$。由此我们构造了一个 $\mathcal{S}$ 中的数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $|c_n - c| < \frac{1}{n}$。

设 $\varepsilon > 0$。根据（**阿基米德性质**），存在一个正整数 $N > \frac{1}{\varepsilon}$，或等价地，$\frac{1}{N} < \varepsilon$。如果 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq N$，那么 $|c_n - c| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$。因此，$\lim_{n\to\infty} c_n = c$。 □

引理 75。作为 (**阿基米德性质**) 的推论，如果 $a < b$，那么对于每个 $\delta > 0$，存在一个分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$，将 $[a, b]$ 分割，使得对于每个 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，都有 $x_k - x_{k-1} < \delta$。

证明。由 $a < b$，我们得到 $b - a > 0$。由于 $\delta > 0$，根据（**阿基米德性质**），存在一个整数 $n > \frac{b-a}{\delta}$，或者 $\frac{b-a}{n} < \delta$。对于每个 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$，令 $x_k := a + k\frac{b-a}{n}$。因此，$x_0 = a + 0 = a$，并且 $x_n = a + (b - a) = b$。如果 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，那么 $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}(k - (k - 1)) = \frac{b-a}{n} < \delta$。 □

$\mathcal{S}$ 的子集 $\mathbb{R}$ 称为共尾（相对于序关系 $>$），如果对每个 $x \in \mathbb{R}$，都存在 $N \in \mathcal{S}$ 使得 $N > x$。

命题 76. 以下各项等价。

(**柯西收敛准则**) 的可数共尾性 $\mathbb{R}$。 存在 $\mathbb{R}$的一个可数无限共尾子集。

(**柯西收敛准则**$_{\mathbb{N}}$) 存在 $\mathbb{R}$中的一个无上界数列。

证明。**(柯西收敛准则)** $\Longrightarrow$ **(柯西收敛准则**$_{\mathbb{N}}$**)**。设 $\mathbb{R}$ 有一个可数无限共尾子集 $\mathcal{S}$。由于 $\mathcal{S}$ 是可数无限的，存在一个双射 $\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{S}$，这里将其记为 $n \mapsto c_n$。因此，数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的所有项构成的集合等于 $\mathcal{S}$。由于 $\mathcal{S}$是共尾的，给定 $M \in \mathbb{R}$，存在 $c_N \in \mathcal{S}$ 使得 $c_N > M$，也就是说 $c_N \not\leq M$。因此，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 没有上界。

(柯西收敛准则$_{\mathbb{N}}$**)** $\Longrightarrow$ **(柯西收敛准则)**。设存在 $\mathbb{R}$ 中的一个数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它没有上界。令$\mathcal{S} := \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$。给定 $x \in \mathbb{R}$，由于$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 没有上界，存在 $c_N \in \mathcal{S}$ 使得$c_N \not\leq x$，也就是说 $c_N > x$。这证明 $\mathcal{S}$ 是共尾的；又由于 $\mathcal{S}$ 中的元素可以用 $\mathbb{N}$作索引，我们得出 $\mathcal{S}$ 是可数的。若 $\mathcal{S}$ 只有有限个元素，设为 N个，并且不失一般性地将这些元素记为 $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$，那么根据共尾性，存在 $x_{N+1} \in \mathcal{S}$ 使得 $x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1}$，因此 $\mathcal{S}$ 同时有 N 和 $N + 1$个元素。↯ 因此， $\mathcal{S}$ 是可数无限的。 □

引理 77。(阿基米德性质) $\Longrightarrow$ (柯西收敛准则)。

证明。 根据（**阿基米德性质**），给定 $x \in \mathbb{R}$，我们有 $|x| + 1 > 0$；又由于 $1 > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得$N > \frac{|x|+1}{1} > |x| \geq x$。因此， $\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{R}$的一个共尾子集（它也是可数无穷集）。 □

引理 77 的逆命题不在本文的讨论范围之内。

至此，我们已向读者提供了证明实分析原理五个圆环中各项蕴含关系所需的全部定义和引理：收敛、连通性、可微性、紧致性和积分。我们从收敛开始。

3 第一圈：收敛

收敛序列理论是实函数论的重要基础。事实上，有人认为可以用数列（以及与之密切相关的级数概念）作为基础来讲授初等实分析。例如，见 [4]。显然，本文并非只讨论实分析的序列方法，也并非只采用一种方法。尽管如此，数列的重要性仍毋庸置疑，而支配实数收敛序列的关键原理构成了实分析定理的第一圈。这些原理如下。

(CCC) 柯西收敛准则。每个柯西数列都是收敛的。**(NIP$_{\text{s}}$)** 强套区间原理。如果 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个嵌套区间数列，那么$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$。**(NIP$_{\text{w}}$)** 弱套区间原理。如果 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个嵌套区间数列，且 $\lim\limits_{k\to\infty} \ell(I_k) = 0$，那么 $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$。

下述定理还陈述了另外两个原理。之所以将它们区分开来，是因为要将上述各原理列入等价关系清单，就必须分别与阿基米德原理（**阿基米德性质**）结合。关于（**阿基米德性质**）的预备材料，参见第 2.6 节。关于实数列的基础预备知识见第 2.1 节，其中的命题和引理将在定理 78 的证明中用到。

定理 78. 以下陈述等价:

（**阿基米德性质**）与（**CCC**） *[*阿基米德原理与柯西收敛准则这两个陈述的合取。*]*（**MCP**）单调收敛原理。有上界的单调递增数列是收敛的。（**阿基米德性质**）与（$\mathbf{NIP}_s$） *[*阿基米德原理与强套区间原理这两个陈述的合取。*]*（**阿基米德性质**）与（$\mathbf{NIP}_w$） *[*阿基米德原理与弱套区间原理这两个陈述的合取。*]*（**博尔查诺-魏尔斯特拉斯性质**）博尔查诺-魏尔斯特拉斯性质 $\mathbb{R}$。每个有界数列都有一个收敛子列。

证明. **(阿基米德性质)&(CCC)** $\Longrightarrow$ **(MCP)**。设 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有上界的单调递增数列。鉴于**(CCC)**, 只需证明 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是柯西数列。反设不然。根据引理 3，存在 $\varepsilon > 0$，以及 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$，使得

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，**(⋆)** 我们有 $c_{N_{k+1}} \geq c_{N_1} + k\varepsilon$。

由于 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有上界，存在 $M > 0$，使得

对于所有 $n \in \mathbb{N}$，**(⋆⋆)** 我们有 $c_n \leq M$。

特别地，当 $n = N_1$ 时，我们有$c_{N_1} \leq M < M + 1$，这意味着 $M + 1 - c_{N_1} > 0$。由于 $\varepsilon > 0$，根据**(阿基米德性质)**，存在 $K \in \mathbb{N}$，使得 $K > \frac{M+1-c_{N_1}}{\varepsilon}$，这意味着 $c_{N_1} + K\varepsilon > M + 1 > M$；其中最左边的项根据 **(⋆)** 至多为 $c_{N_{K+1}}$。因此， $c_{N_{K+1}} > M$，但在 **(⋆⋆)** 中令 $n = N_{K+1}$，则得到 $c_{N_{K+1}} \leq M$.↯

（**MCP**） $\Longrightarrow$ （**阿基米德性质**）。如果（**阿基米德性质**）不成立，那么根据引理 72，单调递增序列 $(n)_{n\in\mathbb{N}}$有上界，因此根据（**MCP**）它收敛，而收敛数列必为柯西数列。由于 $\frac{1}{2} > 0$，这意味着存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $m,\ n \in \mathbb{N}$且满足 $m,\ n \geq N$，都有 $|m - n| < \frac{1}{2}$。特别地，在$m = N + 1$和 $n = N$处，我们有 $|m - n| = |N + 1 - N| = 1 < \frac{1}{2}$。↯

（**MCP**） $\Longrightarrow$ （$\mathbf{NIP}_s$）。设 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 为一列嵌套区间。根据引理 14，区间 I_k 的左端点数列 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$单调递增且有上界，因此根据（**MCP**），它收敛于某个 $c \in \mathbb{R}$。同样根据引理 14，对于任意 $k,\ n \in \mathbb{N}$，都有 $a_k \leq c \leq b_n$。令 $k = n$，则对于任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $c \in I_k$。因此， $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$，且该交集非空。

(阿基米德性质)&($\mathbf{NIP}_s$**)** $\Longrightarrow$ **(阿基米德性质)&(**$\mathbf{NIP}_w$**)**。证明 **(**$\mathbf{NIP}_s$**)** $\Longrightarrow$ **(**$\mathbf{NIP}_w$**)** 即可，但这是因为这两个陈述具有相同的结论，并且 **(**$\mathbf{NIP}_s$**)** 的假设是 **(**$\mathbf{NIP}_w$**)** 的假设之一。

（**阿基米德性质**）&（$\mathbf{NIP}_w$） $\Longrightarrow$ （**博尔查诺-魏尔施特拉斯性质**）。假设（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。根据引理 16，存在一个嵌套区间数列（I_k）$_{k\in\mathbb{N}}$ 以及（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列（c_{N_k}）$_{k\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $c_{N_k} \in I_k$，且 $\ell(I_k) = \frac{b-a}{2^{k-1}}$。根据引理 73，**阿基米德性质**蕴含 $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$；根据引理 8*(i)*，$\lim_{k\to\infty} \ell(I_k) = 2(b-a)\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$。根据（$\mathbf{NIP}_w$），存在 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$。此时，我们已经

证明了对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 c_{N_k}，$x \in I_k$，且 $\lim_{k\to\infty} \ell(I_k) = 0$。根据绝对值的非负性和命题 12，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $0 \le |c_{N_k} - x| \le \ell(I_k)$，且 $\lim_{k\to\infty} \ell(I_k) = 0$。根据引理 8，这些条件蕴含 $\lim_{k\to\infty} c_{N_k} = x$。因此，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个收敛子列。

(博尔查诺-魏尔施特拉斯性质) $\Longrightarrow$ **(阿基米德性质)**。如果（**阿基米德性质**）不成立，那么根据引理 72，$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界；根据（**博尔查诺-魏尔施特拉斯性质**），它有一个收敛子列 $(n_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$，而该子列必然是柯西列。由于 $\frac{1}{2} > 0$，这意味着存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对于所有满足 $h, k \ge K$ 的 $h, k \in \mathbb{N}$，都有 $|n_h - n_k| < \frac{1}{2}$。特别地，当 $h = K+1$ 和 $k = K$ 时，有 $|n_{K+1} - n_K| < \frac{1}{2}$。由于 n_{K+1} 和 n_K 是整数，$|n_{K+1} - n_K|$ 也是整数。根据子序列的定义，$K < K+1$ 蕴含 $N_K < N_{K+1}$；又因为 $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递增，所以 $n_K < n_{K+1}$。因此，我们得到了一个严格小于 1 的正整数 $n_{K+1} - n_K = |n_{K+1} - n_K|$。↯

（**博尔查诺-魏尔施特拉斯性质**）$\Longrightarrow$（**CCC**）。根据命题 5，柯西序列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界；根据（**博尔查诺-魏尔施特拉斯性质**），它有一个收敛子列 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$。根据引理 11，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $\lim_{k\to\infty} c_{N_k}$。□

4 第二圆：连通性

连通这一拓扑概念，是闭有界区间所具有的一种性质，而介值定理正是依赖于此性质；介值定理也是实函数论中最重要的定理之一。实分析原理的第二个定理圈讨论的是连通性。理解下文定理 79 的证明所需的预备知识可见第 2.2 节。我们也是在第 2.2 节引入了 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑，这反映出有关拓扑的论证有多么复杂。以下等价命题列表中的第一条和最后一条也属于定理 78 所述的前一个实分析原理定理圈，这表明前两个定理圈中的所有定理彼此等价。事实上，这五个定理圈并非两两不相交；出现在多个定理圈中的定理旨在将所有这些定理在逻辑上联系起来，其结果是，列表中的每个定理都等价于戴德金完备性公理（通常用作初等实分析的主要完备性公理）。

定理 79. 以下命题等价。

*(*阿基米德性质*) & (NIP$_w$)* [阿基米德原理与弱套区间原理这两个命题的合取。*](ES)* 上确界存在性。每个有上界的非空实数集合都有最小上界。*(I1)* 单位区间 $[0,1]$ 是连通的。[9] *(I2)* 集合 $\mathbb{R}$ 不是全不连通的。*(I3)* 所有区间都是连通的。*(IVT)* 介值定理。给定一个连续函数 $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$，若 $f(a) < k < f(b)$，则存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = k$。*(I4)* 集合 $\mathbb{R}$ 是连通的。

[9] 在 [10], 中，$[0,1]$ 的连通性已被证明与每个路径连通度量空间的连通性等价（证明很简短），因此后者也是构成第二圆的命题列表中的一项。看来，为了将这条额外命题纳入第二圆而在本文的预备知识中引入度量空间，实在有些过度；况且，它与（**I1**）等价的证明本来也很简短。因此，本文不再纳入第二圆中的命题“路径连通度量空间是连通的”。

（**柯西公理**）戴德金分割公理。实数集的每个戴德金分割都不是空隙。（**MCP**）单调收敛原理。有上界的单调递增数列是收敛的。

证明。**(阿基米德性质)&(NIP$_{\mathrm{w}}$)** $\Longrightarrow$ **(确界性质)**。设 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$，并假设 b_1 是 $\mathcal{S}$的上界。根据引理 17，有两种情况，其中第一种情况已经是我们所要的结论。因此，剩下需要证明的是，从第二种情况也能得出所要的结论；第二种情况是，存在一个嵌套区间数列 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$，I_k 的左端点 a_k 属于 $\mathcal{S}$，I_k 的右端点 b_k 是一个上界，但不属于 $\mathcal{S}$，并且 $\ell(I_k) \underline{= \frac{b_1-a_1}{2^{k-1}}}$。

根据引理 73，（**阿基米德性质**）可推出 $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$，并且根据引理 8（$i$），我们有：

$\lim_{k\to\infty} \ell(I_k) = 2(b_1 - a_1) \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$，因此根据（**NIP**$_{\mathrm{w}}$），存在 $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$。由于对于每个$k \in \mathbb{N}$，$I_k$的端点 a_k和 b_k都属于 I_k，我们进一步有 a_k，b_k，$c \in I_k$ 以及 $\lim_{k\to\infty} \ell(I_k) = 0$。根据绝对值的非负性和命题 12，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $0 \leq |a_k - c| \leq \ell(I_k)$、$0 \leq |b_k - c| \leq \ell(I_k)$ 以及 $\lim_{k\to\infty} \ell(I_k) = 0$。根据引理 8，这些条件推出 $\lim_{k\to\infty} a_k = c = \lim_{k\to\infty} b_k$。

由于所涉及的区间是嵌套的，对每个 $k \in \mathbb{N}$，我们都有 $b_{k+1} \in [a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$，这意味着 $b_{k+1} \leq b_k$。因此，$(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是单调递减的。若 $x \in \mathcal{S}$，由于 $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 中的每一项都是 $\mathcal{S}$ 的上界，我们有 $x \leq b_k$。根据推论 15，我们有 $x \leq c$，这证明 c 是 $\mathcal{S}$ 的上界。

假设 $\mathcal{S}$ 有一个上界 b，使得 $b < c$。因此，$c-b > 0$；又因为我们先前已经证明 $\lim_{k\to\infty} a_k = c$，所以存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对所有指标 $k \geq K$，都有 $|c - a_k| = |a_k - c| < c - b$。特别地，这在 $k = K$ 处也成立。因此，$|c - a_K| < c - b$，其中左边至少为 $c - a_K$，所以 $c - a_K < c - b$，这意味着 $a_K > b$；但如先前所证，$a_K \in \mathcal{S}$。由此我们证明了 b 不是 $\mathcal{S}$ 的上界。↯ 因此，$\mathcal{S}$ 的任何上界 b 都满足 $c \leq b$，这就完成了 $c = \sup \mathcal{S}$ 的证明。

(确界性质) $\Longrightarrow$ **(I1)**。设 U是 $[0,1]$ 的一个子集，且包含 0，并且相对于 $[0,1]$既开又闭。我们的目标是证明 $U = [0,1]$，这样根据引理 26，$[0,1]$ 是连通的。由于 U 已经是 $[0,1]$,的子集，只需证明 $[0,1] \subseteq U$ 即可。

定义 $\mathcal{S} := \{x \in [0,1] \colon [0,x] \subseteq U\}$。由于 $0 \in U$，我们有 $[0,0] = \{0\} \subseteq U$，并且还有 $0 \in [0,1]$。因此，$0 \in \mathcal{S}$，所以 $\mathcal{S}$ 非空。每个 $x \in \mathcal{S}$ 都满足 $x \in [0,1]$，这意味着 $x \leq 1$。因此，1 是 $\mathcal{S}$的一个上界。根据（确界性质），存在 $c \in \mathbb{R}$，使得 $c = \sup \mathcal{S}$。每个 $x \in \mathcal{S}$ 都满足 $[0,x] \subseteq U$，其中左侧的集合包含 x，所以 $x \in U$，这就证明了 $\mathcal{S} \subseteq U$。根据命题 20，$c \in S^- \subseteq U^-$。由于 U 相对于 $[0,1]$,是闭的，存在一个闭集 F，使得 $U = F \cap [0,1]$，因此 U是闭集的交集，因而是闭的。因此，$U^- = U$，而且 $c \in U^-$进一步变为 $c \in U$。由于 U 相对于 I是开集，存在一个开集 G，使得 $U = G \cap [0,1]$，所以 $c \in U = G \cap [0,1] \subseteq G$。由于 G 是开集，存在一个区间（a，b），使得 $c \in$（a，b）$\subseteq G$。由 $c \in$（a，b），我们得到 $a < c$；根据命题 19，存在 $\xi \in \mathcal{S}$，使得 $a < \xi \leq c$。由 $\xi \in \mathcal{S}$，我们得到 $[0,\xi] \subseteq U$ 和 $\xi \in [0,1]$；由 $c \in$（a，b）$\subseteq G$，我们得到（a，c]$\subseteq G$。根据命题 18，我们还有 $c \in [0,1]$。

令 $x \in [\xi, c]$，或者令 $\xi \leq x \leq c$。此前我们已经证明了 ξ，$c \in [0,1]$，因此 $0 \leq \xi \leq x \leq c \leq 1$，这意味着 $x \in [0,1]$，并且我们已经证明了 $[\xi,c] \subseteq [0,1]$。由 $x \in [\xi,c]$、$a < \xi \leq c$ 和 $\xi \leq x \leq c$，我们得到 $a < x \leq c$，因此 $x \in$(a，c] $\subseteq G$。这证明了 $[\xi,c] \subseteq G$。将其与 $[\xi,c] \subseteq [0,1]$结合，我们得到 $[\xi,c] \subseteq G \cap [0,1] = U$。至此，我们已经得到 $[0,\xi] \subseteq U$和 $[\xi,c] \subseteq U$，因此 $[0,c] = [0,\xi] \cup [\xi,c] \subseteq U$。

既然我们已有 $[0,c] \subseteq U$，接下来需要证明的是 $c = 1$。此前我们证明了 $c \in [0,1]$，这意味着 $c \leq 1$，因此为了完成证明，我们要说明 $c < 1$ 的情形会导致矛盾。此前，

我们已经证明存在一个区间（a, b），使得 $c \in (a,\ b) \subseteq G$。由于 $a < c < \frac{c+b}{2} < b$，我们进一步得到 $c \in \left[c, \frac{c+b}{2}\right] \subseteq G$。由于 $c \in [0,1]$，我们进一步得到 $c \in \left[c, \frac{c+b}{2}\right] \cap [0,1] \subseteq G \cap [0,1] = U$。如果 $y := \min\left\{\frac{c+b}{2}, 1\right\}$，那么 $0 \leq c < y \leq 1$（这意味着 $y \in [0,1]$），并且任意 $x \in [c,y]$ 都满足 $c \leq x \leq \frac{c+b}{2}$ 和 $0 \leq c \leq x \leq 1$。这就证明了 $[c,y] \subseteq \left[c, \frac{c+b}{2}\right] \cap [0,1] \subseteq U$。此前我们证明了 $[0,c] \subseteq U$，因此 $[0,y] = [0,c] \cup [c,y] \subseteq U$，且 $y \in [0,1]$ 和 $y > c$。也就是说，我们找到了一个属于 $\mathcal{S}$ 的元素 y，它大于 $\mathcal{S}$ 的上界 c。↯ 因此，$c = 1$，包含关系 $[0,c] \subseteq U$ 变为 $[0,1] \subseteq U$，由此完成了 $[0,1]$ 是连通的证明。

(I1) $\Longrightarrow$ **(I2)**。根据（**I1**），存在 $\mathbb{R}$ 的一个子集 $[0,1]$,，它是连通的且不是单点集。因此，$\mathbb{R}$ 不是全不连通的。

(I2) $\Longrightarrow$ **(I3)**。根据（**I2**），存在一个包含多个元素的连通集 $I_0 \subseteq \mathbb{R}$。因此，存在 a_0，$b_0 \in I_0$，不失一般性，我们进一步假设 $a_0 < b_0$。根据命题 28，$[a_0, b_0] \subseteq I$；根据命题36，区间 $[a_0, b_0]$ 是连通的。

设 $[a,b]$ 是任意一个闭有界区间。由于 $a_0 < b_0$，根据命题 34，存在一个连续函数 $f\colon [a_0, b_0] \longrightarrow [a,b]$，使得 $[a_0, b_0]$ 在 f 下的像等于 $[a,b]$，因此根据命题 33，$[a,b]$ 是连通的。也就是说，我们现在已经证明任何闭有界区间都是连通的。如果存在一个不连通的区间 I，那么根据命题29，存在一个包含于 I 的闭有界区间，它是不连通的。↯ 因此，任何区间都是连通的。

(I3) $\Longrightarrow$ **(介值定理)**。反设结论不成立，假设对于任意 $c \in I := [a,b]$，都有 $f(c) \neq k$。根据三歧律，$f(c) < k$ 或 $k < f(c)$，因此现在有 $f[I] \subseteq (-\infty,\ k) \cup (k,\ \infty)$。

对两边与 $f[I]$ 取交集，得到 $f[I] \subseteq A \cup B$，其中 $A := (-\infty, k) \cap f[I] \subseteq f[I]$ 且 $B := f[I] \cap (k, \infty) \subseteq f[I]$，因此 A 和 B 都是 $f[I]$ 中的相对开集。此外，$A \cap B = ((-\infty, k) \cap (k, \infty)) \cap f[I] = \emptyset \cap f[I] = \emptyset$。由于 $f[I] \subseteq A \cup B$ 的右侧是 $f[I]$ 的子集之并，该并也必为 $f[I]$ 的子集。因此，$f[I] = A \cup B$。由 $f(a) \in f[I]$ 和 $f(a) < k$，可知 $f(a) \in (-\infty, k) \cap f[I] = A$；而 $k < f(b)$ 和 $f(b) \in f[I]$ 则推出 $f(b) \in f[I] \cap (k, \infty)$。于是，$A$ 和 B 均非空。至此，我们已证明 $f[I]$ 不连通。但根据 **(I3)**，I 连通；又由命题 33，$f[I]$ 也连通。↯ 因此，存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = k$。

(介值定理) $\Longrightarrow$ **(I4)**。假设 $\mathbb{R}$ 不连通。这意味着存在非空且不相交的开集 X 和 Y，它们属于 $\mathbb{R}$，并满足 $\mathbb{R} = X \cup Y$。由于 X 和 Y 非空，存在 $a \in X$ 和 $b \in Y$；又因为 X 和 Y 不相交，我们进一步得到 $a \neq b$。不失一般性，假设 $a < b$。

若 $I := [a,b]$，则集合 $A := X \cap I$ 和 $B := Y \cap I$ 都是 I 中的相对开集。将等式 $\mathbb{R} = X \cup Y$ 两边与 I 取交集，得到 $I = A \cup B$，这意味着 $A = I \backslash B$ 和 $B = I \backslash A$。根据推论 23，A 和 B 是 I 中的相对闭集。此外，$A \cap B = (X \cap Y) \cap I = \emptyset \cap I = \emptyset$。根据例 30，由 $x \mapsto 0$ 定义的常值函数 $A \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 A 上连续，而由 $x \mapsto 1$ 给出的常值函数 $B \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 B 上连续。根据粘贴引理，函数 $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \in B, \end{cases}$$

在 $A \cup B = I$ 上连续。此外，$f[I] = \{0,1\}$。

条件 $a \in X$ 和 $a \in [a,b] = I$ 推出 $a \in X \cap I = A$，而 $b \in Y$ 和 $b \in [a,b] = I$ 推出 $b \in B$。因此，$f(a) = 0 < \frac{1}{2} < 1 = f(b)$。根据（**介值定理**），存在 $c \in [a,b]$ 使得 $\frac{1}{2} = f(c) \in f[I] = \{0,1\}$。↯ 因此，$\mathbb{R}$ 是连通的。

（**I4**） $\Longrightarrow$（**柯西公理**）。假设（**I4**）成立，但（**柯西公理**）不成立，这意味着 $\mathbb{R}$ 有一个空隙为 A 的戴德金分割。因此， $A=\bigcup_{a\in A}(-\infty,\ a)$ 和 $A^c=\bigcup_{b\in A^c}(b,\ \infty)$ 均为开集（相对于 $\mathbb{R}$ 开）。根据割的定义，戴德金分割 A 非空，且是 $\mathbb{R}$ 的真子集，所以 A^c 非空。此外， A 和 A^c 不相交，且满足 $\mathbb{R}=A\cup A^c$。因此， $\mathbb{R}$ 不连通，这与（**I4**）矛盾。因此，$\mathbb{R}$ 的任何戴德金分割都不是空隙。

（**柯西公理**） $\Longrightarrow$（**MCP**）。假设（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有上界 M 的单调递增数列。令 $A:=\{x\in\mathbb{R}:\ \exists n\in\mathbb{N}\quad x\le c_n\}$。由于（$c_n$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 有上界 M，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $c_n\le M<M+1$。这证明了 $M+1\notin A$，也就是说， A 是 $\mathbb{R}$ 的真子集。由于（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 是单调递增的，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $c_n\le c_{n+1}$，其中 $n+1\in\mathbb{N}$。因此， （c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 的所有项都属于 A，所以 A 非空。由于 $A^c:=\{x\in\mathbb{R}:\ \forall n\in\mathbb{N}\quad x>c_n\}$，对于任意 $a\in A$ 和任意 $b\in A$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $a\le c_N<b$，这意味着 $a\le c_N<b$。因此， A 是 $\mathbb{R}$ 的戴德金分割。根据（**柯西公理**）， A 不是空隙，因此有一个分割点 c。

设 $\varepsilon>0$。如果对于任意 $n\in\mathbb{N}$，都有 $c_n\le c-\varepsilon$，那么利用 $c-\varepsilon<c-\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=c-\frac{1}{2}\varepsilon$ 这一事实，我们得到 $n\in\mathbb{N}$ 蕴含 $c_n<c-\frac{1}{2}\varepsilon$。这意味着 $c-\frac{1}{2}\varepsilon\in A^c$。但由于 c 是 A 的分割点，这意味着 $c\le c-\frac{1}{2}\varepsilon$，进而推出 $0\le\varepsilon$。↯ 因此，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $c-\varepsilon<c_N$。给定任意整数 $n\ge N$，由于 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是单调递增的， $c-\varepsilon<c_N\le c_n$。由于 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的所有项都在 A 中，并且 c 是 A 的分割点，我们进一步得到 $c-\varepsilon<c_n\le c$，其中最右侧的成员小于 $c+\varepsilon$。现在我们有 $c-\varepsilon<c_n<c+\varepsilon$，这意味着 $-\varepsilon<c_n-c<\varepsilon$，因此 $|c_n-c|<\varepsilon$。所以，$\lim_{n\to\infty}c_n=c$，这就证明了（**MCP**）。

(MCP) $\Longrightarrow$ **(阿基米德性质)&(NIP$_w$)**。参见定理 78。 □

5 第三圆：可微性

在实分析定理的第三圆中，我们将考察那些直接涉及微分学的定理。导数是一个极限；在本文中，我们决定用滤子基这一拓扑概念来引入极限。有关这一实分析定理圆所需的全部预备知识，请参见第 2.3 节。与前一圆中的原理类似，以下列表中的第一个和最后一个实分析原理也属于前面的圆，这表明迄今为止我们考察的所有定理彼此等价。

定理 80。 以下命题等价。

(BWP) & (ES) [博尔查诺-魏尔斯特拉斯性质与上确界存在性的陈述的合取。]*(EVT)* 极值定理。给定连续函数 $f:\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$，存在$c\in[a,b]$，使得对于所有 $x\in[a,b]$，都有 $f(x)\le f(c)$。*(RT)* 罗尔定理。若 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，且 $f(a)=0=f(b)$，则存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=0$。*(eMVT)* 扩展中值定理。若 $f,g:\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，且 g' 在 (a,b) 上不为零，则存在 $c\in(a,b)$，使得 $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。*(MVT)* 中值定理。若 $f:\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上可微，则存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

($\mathbf{TT_L}$) 泰勒定理（含拉格朗日余项）。设 n 为非负整数，且f为一个函数 $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$。假设 $f^{(0)}$, $f_{(1)}$、 $f_{(2)}$、……、 $f_{(n)}$都在$[a,b]$上连续，并且 $f^{(n)}$ 在 (a,b) 上可微。对于任意 $x \in (a,b]$，存在 $c \in (a,x)$，使得

$$f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

（*PCP*）多项式刻画性质。设 n 为一个非负整数，且 f 为函数 $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$。假设 $f(0)$、 $f(1)$、 $f(2)$、……、 $f^{(n)}$ 都在 $[a,b]$ 上连续，且 $f^{(n)}$ 在（a， b）上可微。如果 $f_{(n+1)}$ 在（a， b）上为零，那么 f 是次数至多为 n 的多项式。（*CFT*）凸函数定理。如果 f'' 在（a， b）上非负，那么 $a < c < x < b$ 意味着对于所有 $t \in [c,x]$，都有 $f(t) \leq f(c) + (t-c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ [，或者 f 在（a， b）上为凸函数]。（*IFT*）递增函数定理。如果 f' 在（a， b）上非负，那么 $a < c < x < b$ 意味着 $f(c) \leq f(x)$ [，或者 f 在（a， b）上单调递增]。（*CVT*）常值定理。如果 f' 在（a， b）上为零，那么 f 在（a， b）上为常数。（*I1*）单位区间 $[0,1]$ 是连通的。

证明。 (BWP)&(ES) $\Longrightarrow$ (EVT)。设 $I := [a,b]$。为导出矛盾，假设 $f[I]$没有上界。因此，1 不是 $f[I]$ 的上界，所以存在 $x_1 \in f[I]$ 使得 $1 < x_1$。同样，$\max\{2, x_1\}$ 不是 $f[I]$ 的上界，所以存在 $x_2 \in f[I]$ 使得 $\max\{2, x_1\} < x_2$。假设对于某个至少为 2 的 $n \in \mathbb{N}$，我们已找到 $x_n \in f[I]$ 使得 $\max\{n, x_{n-1}\} < x_n$。由于 $\max\{n+1, x_n\}$ 不是 $f[I]$的上界，因此存在 $x_{n+1} \in f[I]$ 使得 $\max\{n+1, x_n\} < x_{n+1}$。由归纳法，我们已找到一个数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其元素属于 $f[I]$，且对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\max\{n, x_{n-1}\} < x_n$。这一性质在 $n+1$处也成立，因此 $\max\{n+1, x_n\} < x_{n+1}$，这意味着 $x_n < x_{n+1}$。于是，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$严格递增。此外，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $n < x_n$。由定理 78，(BWP) 推出阿基米德性质；根据引理 72，阿基米德性质又推出 ($\mathrm{AP}_{\mathbb{N}}$)。也就是说，$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ 没有上界。给定 $M > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $M < n < x_n$。因此，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 也没有上界。

由于 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$是 $f[I]$中的一个数列，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $t_n \in I$使得 $x_n = f(t_n)$。数列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $I = [a,b]$ 中的一个数列，或者说是一个有界数列。根据博尔查诺-魏尔施特拉斯性质，它有一个收敛子列 $(t_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$。这同样是 $I = [a,b]$中的一个数列，因此 $(t_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$有上界 b。此外，由于 $(t_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$是闭集 $[a,b]$中的一个数列，根据命题 21，可知$t := \lim_{k\to\infty} t_{N_k} \in [a,b]^- = [a,b]$。由于 f在 I上连续，根据命题 32，数列 $(f(t_{N_k}))_{k\in\mathbb{N}} = (x_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$收敛，因而必然有界，且还有上界。由于 $(t_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$的子序列，根据子序列定义，对指标 N_k 的条件也适用于将这些指标用于数列 $(x_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$的情形。因此，$(x_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$是 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列。至此，我们得到 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个有上界的子序列。然而，前面我们已经证明 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$严格递增且无上界，因此根据命题 7，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的任何子序列都无上界。↯

从此，集合 $f[I]$有一个上界。它非空，因为它包含 $f(a)$。根据 **(确界性质)**，存在 $y \in \mathbb{R}$使得 $y = \sup f[I]$。根据引理 74，存在一个数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$属于 $f[I]$，使得 $\lim_{n\to\infty} s_n = y$。由于 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$是 $f[I]$中的一个数列，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $c_n \in I = [a,b]$使得 $s_n = f(c_n)$。因此，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，根据（**博尔查诺-魏尔施特拉斯性质**），它有一个收敛子列

$(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$。令 $c = \lim_{k\to\infty} c_{N_k}$。由于 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $[a,b]$中的一个数列，而 $[a,b]$是闭集，根据命题 21，$c \in [a,b]^- = [a,b]$。根据命题 32，我们有 $\lim_{k\to\infty} f(c_{N_k}) = f(c)$。由于对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都有$s_{N_k} = f(c_{N_k})$，我们刚刚证明了 $(s_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$也收敛，且:

$\lim_{k\to\infty} s_{N_k} = \lim_{k\to\infty} f(c_{N_k}) = f(c)$。指标$N_k$（根据子序列的定义）满足的条件同时适用于 $(s_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $(c_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$，因此 $(s_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$的子序列，并且根据引理 9，$f(c) = \lim_{k\to\infty} s_{N_k} = \lim_{n\to\infty} s_n = y = \sup f[I]$。至此，我们得到了 $c \in I$，使得$f(c) = \sup f[I]$，它是 $f[I]$的上界；也就是说，对于任意 $x \in I$，都有 $f(x) \le f(c)$。

(极值定理) $\Longrightarrow$**(罗尔定理)**。如果 f在 $[a,b]$上恒为零（因此是常数），那么根据命题 44*(i)*，f'在$[a,b]$上为零，特别是在 $(a,\ b) \subseteq [a,b]$上为零，这就得到了所需结论。

对于 f在某个 $\xi \in [a,b]$处取非零值的情形，$\xi = a$ 或 $\xi = b$不可能成立。否则，由于 f是一个函数，我们有 $f(\xi) = f(a)$ 或 $f(\xi) = f(b)$；根据假设，等式右边均为零，这与 $f(\xi) \neq 0$矛盾。因此，$\xi \in (a,\ b)$。

由于 f在 $[a,b]$上连续，根据（**极值定理**），存在 $c \in [a,b]$ 使得

对于任意 $x \in [a,b]$，$(\star)$，我们有 $f(x) \le f(c)$。

对于 $f(\xi) > 0$的情形，我们有 $0 < f(\xi) \le f(c)$，因此 $f(c) > 0$。若 $c = a$或 $c = b$，则：$0 < f(c) = f(a) = 0$↯ 或 $0 < f(c) = f(b) = 0$↯。因此，c不可能是 $[a,b]$的端点，并且我们还得到 $c \in (a,b)$；在此区间上，假设 f可微。也就是说，f在 c处可微。由（$\star$）可知，任意 $x \in (a,b) \subseteq [a,b]$ 都满足 $f(x) \le f(c)$，或者等价地，$f[(a,b)] \subseteq (-\infty, f(c)]$。根据引理 47，$f'(c) = 0$。

剩下的情形是 $f(\xi) < 0$，此时 $(-f)(\xi) > 0$，其中 $-f$ 根据引理 45 在$[a,b]$ 上连续，并且在 (a,b) 上可微。因此，前一种情形的所有前提都由函数 $-f$ 满足，所以 $(-f)'(c) = 0$。利用命题 44*(v)*，$-1 \cdot f'(c) = 0$，这意味着 $f'(c) = 0$。

$(\mathbf{RT})$ $\Longrightarrow$（**扩展中值定理**）。定义 $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$F(x) = [g(b)-g(a)]\,[f(x)-f(a)] - [g(x)-g(a)]\,[f(b)-f(a)], \tag{37}$$
$$= c_1 f(x) + c_2 g(x) + c_3, \tag{38}$$

其中 $c_1 = g(b) - g(a)$，$c_2 = f(a) - f(b)$，且 $c_3 = f(b)g(a) - f(a)g(b)$。由于 f、g 和常函数 $\mapsto c_3$ 在 $[a,b]$ 上都连续，并且在 (a,b) 上可微，根据命题 41(i)、(v) 和 44(i)、(ii)、(v)，F 也具有这些性质，其中 F' 利用 (38) 可表示为 $F' = c_1 f' + c_2 g'$。在 (37) 中，令 $x = a$ 可使右端为 $0-0$，而令 $x = b$ 可使右端成为两个相等量之差。因此，$F(a) = 0 = F(b)$。根据罗尔定理，存在 $c \in (a,b)$ 使得 $F'(c) = 0$，或者说 $c_1 f'(c) + c_2 g'(c) = 0$。由假设，$g'(c) \neq 0$，所以进一步有 $c_1 \frac{f'(c)}{g'(c)} = -c_2$。代入 c_1 和 c_2 的定义，得到 $[g(b)-g(a)]\frac{f'(c)}{g'(c)} = f(b) - f(a)$。为完成证明，我们说明为何可以将该等式两边除以 $g(b) - g(a)$，或者等价地，说明 $g(b) - g(a) \neq 0$。

为导出矛盾，假设 $g(b) - g(a) = 0$。定义 $G\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$，由方程$G(x) = g(x) - g(a) = g(x) - g(b)$ 给出。由于 g和常值函数 $x \mapsto g(a)$ 在$[a,b]$ 上连续，并在 (a,b) 上可微，根据命题 41(i)、(v) 和 44(i)、(ii)、(v)，G 也满足这些性质，其导数为$G'(x) = g'(x) - 0 = g'(x)$，也就是说 $G' = g'$。此外，$G(a) = 0 = G(b)$。根据罗尔定理，存在 $k \in (a,b)$，使得 $g'(k) = G'(k) = 0$，这与假设 g' 在 (a,b) 上不为零相矛盾。证明完毕。

（扩展中值定理） $\Longrightarrow$（中值定理）。根据命题 41(ii) 和 44(iii)，由 $g(x) = x$ 定义的函数 g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，且其导数为 $g'(x) = 1$。根据扩展中值定理，存在 $c \in (a,b)$，使得 $\frac{f'(c)}{1} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，也就是说 $f'(c) = f(b)-f(a)\ b-a$。

(中值定理) $\Longrightarrow$ **($\mathbf{TT_L}$)** 根据引理 46，给定 $x \in (a,\ b]$，存在唯一的 $\rho(x) \in \mathbb{R}$，使得由下式定义的函数 $F\colon [a,x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \rho(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{39}$$

在 $[a,x]$ 上连续，在 $(a,\ x)$ 上可微。此外，$F(a) = 0$ 并且

$$F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}\left[\rho(x) - f^{(n+1)}(t)\right]. \tag{40}$$

由 (39) 还可得，在 $x = t$ 处，有 $F(x) = f(x) - f(x) + 0 = 0$。根据 (MVT)，存在$c \in (a,x)$，使得 $F'(c) = \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{0-0}{x-a} = 0$。~~在 (40) 的左边~~代入 0，并在右边代入 c，$0 = (x-c)^n[\rho(x) - f^{(n+1)(c)}]$。由于 $c \in (a,x)$，我们有 $c < x$，因此 $x - c \neq 0$，并且$0 = (x-c)^n[\rho(x) - f^{(n+1)(c)}]$进一步变为 $\rho(x) = f^{(n+1)}(c)$，将其与 $t = a$ 一起代入 (39)。所得左边变为 $F(a)$，如前所述，它等于零。重新整理各项后，

$$f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

($\mathbf{TT_L}$) $\Longrightarrow$**(多项式判定性质)&(柯西中值定理)&(中值定理)**。在（$\mathbf{TT_L}$）的陈述中，如果增加 $f^{(n+1)}$ 为零这一假设，那么可以在方程中代入 $f^{(n+1)}(c) = 0$，得到 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(a)(x-a)^k$，因此 f 是次数至多为 n 的多项式，这就证明了（**多项式判定性质**）。

对于（凹函数定理）和（中值定理）的证明，在（$\mathbf{TT_L}$）的陈述中，令 $n \in \{0,1\}$。凹函数定理和中值定理的假设可以推广为“$f^{(n+1)}$ 在（a，b）上非负”，其中中值定理对应 $n = 0$，凹函数定理对应 $n = 1$。因此，对于所有 $k \in \{0,\ldots,n\}$，函数 $f^{(k)}$ 在（a，b）上可微；根据命题 44(iv)，它在（a，b）上连续。特别地，若 $a < c < \tau < x < b$，则 $f(k)$ 在（a，b）的子集 $[c,x]$、$[c,\tau]$ 和 $[\tau,x]$ 上连续。此外，$f^{(k)}$ 在（a，b）上的可微性也意味着它在（a，b）的子集（c，x）、（c，τ）和（τ，x）上可微。根据命题 44(v)，对于 $n = 1$ 的情形，函数 $(-f)^{(0)} = -f$、$(-f)^{(1)} = -f'$ 在 $[c,x]$、$[c,\tau]$ 和 $[\tau,x]$ 上连续，并且在（c，x）、（c，τ）和（τ，x）上可微。现在我们按照下文所述使用（$\mathbf{TT_L}$）。

($\star$) If $n = 0$, then by ($\mathbf{TT_L}$), for any $t \in (c,x]$, there exists $\xi \in (c,t)$ such that $\frac{f(t)-f(c)}{t-c} = f'(\xi)$.

($\star\star$) 若 $n = 1$，则对函数 $-f$ 使用（$\mathbf{TT_L}$），对于任意 $t \in (c,\ \tau]$，都存在 $\xi \in (c,\ \tau)$，使得
$$(-f)(t) - (-f)(c) - (t-c)(-f)'(c) = \frac{(-f)''(\xi)}{2}(t-c)^2 = \frac{f''(\xi)}{2}(t-c)^2.$$

($\star\star\star$) 此外，对于 $n = 1$，对 f 使用（$\mathbf{TT_L}$），对于任意 $t \in (\tau,\ x]$，都存在 $\zeta \in (\tau,\ x)$，使得
$$f(t) - f(\tau) - (t-\tau)f'(\tau) = \frac{f''(\zeta)}{2}(t-\tau)^2.$$

若 $n = 0$，那么将 $f^{(n+1)} = f'$ 的非负性应用于 ($\star$)，意味着 $\frac{f(t)-f(c)}{t-c} \geq 0$，这显然在 $t = x \in (c,x]$ 处成立。也就是说，$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$，将等式两边乘以 $x - c$，它是

正的，因为 $a < c < x < b$。我们得到 $f(x) - f(c) \geq 0$，即 $f(c) \leq f(x)$，由此证明了（**中值定理**）。

对于 $n = 1$ 的情况，我们设 $t = \tau \in (\star\star)$ 且 $t = x \in (\star\star\star)$，从而推得存在 $\xi \in (c, \tau)$ 和 $\zeta \in (\tau, x)$，使得

$$(-f)(\tau) - (-f)(c) - (\tau - c)(-f)'(c) = \frac{f''(\xi)}{2}(\tau - c)^2, \tag{41}$$

$$f(x) - f(\tau) - (x - \tau)f'(\tau) = \frac{f''(\zeta)}{2}(x - \tau)^2. \tag{42}$$

由于 $c < \tau < x$，我们发现 $\frac{(\tau - c)}{2}^2$ 和 $\frac{(x - \tau)}{2}^2$ 为正数。结合（**CFT**）的假设，即 f'' 为非负数，这意味着 $f''(\xi)$ 和 $f''(\zeta)$ 均为非负数，因此我们发现（41）–（42）的右端均为非负数。因此，

$$(-f)(\tau) - (-f)(c) - (\tau - c)(-f)'(c) \geq 0, \tag{43}$$

$$f(x) - f(\tau) - (x - \tau)f'(\tau) \geq 0. \tag{44}$$

我们将（43）的两边乘以 -1，并整理出 $f'(c)$。我们还在（44）中整理出 $f'(\tau)$。由此得到

$$\frac{f(\tau) - f(c)}{\tau - c} \leq f'(c), \tag{45}$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq f'(\tau). \tag{46}$$

由于（**IFT**）已被证明成立，f'' 为非负数这一条件意味着 f' 单调递增，因此由 $c < \tau < x$ 可得 $f'(c) \leq f'(\tau)$，结合（45）–（46），得到

$$\frac{f(\tau) - f(c)}{\tau - c} \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \qquad \text{如果} c < \tau < x, \tag{47}$$

其中，条件 $c < \tau < x$ 表示 $\tau - c$ 为正数。将其乘到（47）中的主不等式两边后，即可得到所需的不等式。

为了完成（**柯西中值定理**）的证明，剩下的情形是 $\tau = c$ 和 $\tau = x$。如果 $\tau = c$，则平凡方程 $f(c) = f(c)$ 导出 $f(c) \leq f(c) + 0 = f(c) + (c - c)\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$，从而得到所需的不等式。如果 $\tau = x$，则可以改用 $f(x) = f(x) = f(c) + f(x) - f(c)$，以得到$f(x) \leq f(c) + (x - c)\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$。至此，（**柯西中值定理**）得证。 ———

(多项式判定性质) $\Longrightarrow$**(常值定理)**。若 $f' = f_{(1)}$ 在 (a, b) 上为零，那么在 **(多项式判定性质)** 的陈述中令 $n = 0$，则 f 是次数至多为零的多项式，也就是一个常数。

(柯西中值定理) $\Longrightarrow$**(常值定理)**。假设 f' 在 (a, b) 上为零。根据命题 44，f'' 和 $(-f)'' = -1 \cdot f''$ 在 (a, b) 上也为零。因此，f'' 和 $(-f)''$ 在 (a, b) 上非负。根据 **(柯西中值定理)**，

$$f(t) \leq f(c) + (t - c)\frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \tag{48}$$

$$-f(t) \leq -f(c) + (t - c)\frac{-f(x) - [-f(c)]}{x - c}, \qquad \text{if } a < c < x < b,\ t \in [c, x]. \tag{49}$$

给定任意 $c, x \in (a, b)$，若 $c = x$，由于 f是一个函数 $f(c) = f(x)$。若 $c \neq x$，不失一般性，我们假设 $c < x$，因此对于任意 $t \in [c, x]$，我们可以使用 (48)–(49)。将 (49) 两边乘以 -1 并与

(48) 结合，得到 $f(t) = f(c) + (t-c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$。因此，$f(t) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$。根据命题 44，$f'(t) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$，其中左边根据假设为零。也就是说，$0 = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$。解出 $f(c)$，得到 $f(c) = f(x)$。也就是说，对于任意 $c, x \in (a,b)$，我们证明了 $f(c) = f(x)$。因此，f 在 (a, b) 上为常数。

(中值定理) $\Longrightarrow$**(常值定理)**。若 f' 在（a，b）上为零，则根据命题 44，f' 和（$-f$）$' = -1 \cdot f'$ 也为零，因此它们在（a，b）上非负；由（**中值定理**），

$$f(x) \le f(c), \tag{50}$$
$$-f(x) \le -f(c), \quad \text{if } a < c < x < b. \tag{51}$$

任取 c，$x \in$（a，b），由于 f 是函数，这意味着若 $c = x$，则 f（c）$= f$（x）；而若 $c \neq x$，不失一般性，可进一步假设 $c < x$。由（50）–（51），有 f（x）$\le f$（c）且 f（x）$\ge f$（c），因此 f（x）$= f$（c）。所以，f 在（a，b）上为常数。

(常值定理) $\Longrightarrow$ **(I1)**。为导出矛盾，假设 $[0,1]$ 不连通。由于 $[0,1] \subseteq$（-1，2），存在一个包含于（-1，2）中的闭有界区间，它不连通。由命题36的逆否命题可知，（-1，2）不连通。因此，存在（-1，2）中的非空不相交子集 A 和 B，它们都相对于（-1，2）开，且（-1，2）$= A \cup B$。由于 A 和 B 非空，存在 $a \in A$ 和 $b \in B$，并且函数 f:（-1，2）$\longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \in B, \end{cases}$$

满足这样的性质：$f(a) = 0$ 且 $f(b) = 1$。由于 A 和 B 都是相对于 $(-1, 2)$ 相对开的，因此存在开集 G_1 和 G_2，使得 $A = G_1 \cap (-1, 2)$ 且 $B = G_2 \cap (-1, 2)$。但这些开集的有限并仍为开集，也就是说，A 和 B 都是开集，因此 $A = A^o$ 和 $B = B^o$。这分别意味着 a [、b] 以及 A [中的任意其他元素 B]，分别都是 A [、B]的元素和内点。因此，根据我们对可微性的定义，只要所需的极限存在，就可以在 A 上定义 f'，并在 B 上定义；该极限确实存在，因为 f 在 A 上以及在 B 上都是常数。此外，根据命题 44(ii)，f' 在 A 上以及在 B 上为零，也就是说，它在 $A \cup B = (-1, 2)$ 上为零。根据常值定理，函数 f 在 $(-1, 2)$ 上为常数，因此它在 a 和 b 处的值必相同。也就是说，$0 = f(a) = f(b) = 1$。↯ 因此，$[0,1]$ 是连通的。

(I1) $\Longrightarrow$ **(博尔查诺-魏尔施特拉斯性质)&(确界性质)**。由定理 79，**(I1)** $\Longleftrightarrow$ **(确界性质)** 且 **(I1)** $\Longrightarrow$ **(MCP)**；但由定理 78，**(MCP)** $\Longrightarrow$ **(博尔查诺-魏尔施特拉斯性质)**。证毕。 □

6 第四圆：紧致性

拓扑紧致性概念据说难以形成直观的图像，但它却很有用 [3, 第 36] 页。也许这是因为，在微积分中可以略去、但在初级分析课程中必须完成的定理证明，需要用到“紧致性论证” [13, 第 470], 页；这类论证会援引“紧致性定理”，例如前几个圆环中的定理：**(确界性质)**、**(柯西公理)**、**(博尔查诺-魏尔施特拉斯性质)**和 **(NIP$_w$)**；或者援引海涅–博雷尔定理，它在下文伪装成单位区间紧致性的陈述 $[0,1]$。由于本文五个圆环中的所有定理最终都等价于戴德金完备性，因此每个这样的定理本质上都是紧致性定理，在证明实分析定理时使用其中任一定理，都是一种紧致性论证。这正是紧致性概念有用之处。不过，紧致性也可能被称为“把关主题”，意思是，如果一名本科数学

学生不理解紧致性，那么他很可能无法学习高等数学 [9, 第 619] 页。

本节的定理圈将涉及以下内容。

> **(LCL)** 勒贝格覆盖引理。 闭有界区间的每个开覆盖都有一个勒贝格数。 **(UCT)** 一致连续定理。 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续，那么 f 一致连续。**(BVT)** 有界值定理。 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续，那么存在 $M \in \mathbb{R}$，使得 $a \leq x \leq b$ 蕴含 $f(x) \leq M$。

与定理 78 中的第一圈类似，下面的列表中还有另外两个新定理。它们之所以有所区别，是因为每个定理都必须与（**阿基米德性质**）或（**柯西收敛准则**）结合，才能与该圈中的其他任一命题等价。此外，定理 81 列表中的第一个和最后一个命题属于其他定理圈；同样，这意味着迄今为止的所有定理彼此等价。这个第四圈定理的预备知识见第 2.4 节。

定理 81。 以下命题等价：

(AP) & (NIP$_w$) 阿基米德原理与弱套区间原理的合取。*(I5)* 单位区间 $[0,1]$ 是紧致的。 *(AP) & (LCL)* 阿基米德原理与勒贝格覆盖引理的合取。*(AP) & (UCT)* 阿基米德原理与一致连续定理的合取。*(UAS)* 阶梯函数的一致逼近。若 f 在 $[a,b]$上连续，则对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个阶梯函数 $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$，使得对任意 $x \in [a,b]$，都有$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$。 *(CC) & (BVT)* $\mathbb{R}$ 的可数共尾性与有界值定理的合取。*(MCP)* 单调收敛原理。有上界的单调递增数列是收敛的。

证明。阿基米德性质与（NIP$_w$） $\implies$ (I5)。设 $\mathscr{C}$ 是 $[0,1]$的一个开覆盖。为导出矛盾，假设 $[0,1]$ 不紧致。因此， $I_1 := [0,1]$ 无法由 $\mathscr{C}$中的有限多个集合覆盖。假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$，已找到闭有界区间 $[a_{k-1}, b_{k-1}] = I_{k-1} \subseteq I_{k-2} \subseteq \cdots \subseteq I_1$，使得对于所有正整数 $n < k$，集合 I_n 无法由 $\mathscr{C}$ 中的有限多个集合覆盖，并且 $\ell(I_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$。 若 $L_{k-1} := \left[a_{k-1}, \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right]$ 且 $R_{k-1} := \left[\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, b_{k-1}\right]$，则 $I_{k-1} = \overline{L_{k-1} \cup R_{k-1}}$。 如果 L_{k-1} 和 R_{k-1} 各自都能由 $\mathscr{C}$中的有限多个集合覆盖，那么根据命题 48， $L_{k-1} \cup R_{k-1} = I_{k-1}$也能如此覆盖。↯ 因此，存在 $I_k = [a_k, b_k] \in \{L_{k-1}, R_{k-1}\}$（其中 $I_k \subseteq I_{k-1}$），使得 I_k 无法由 $\mathscr{C}$中的有限多个集合覆盖，其长度为：$\ell(\overline{I_k}) = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{1}{2}\ell(\overline{I_{k-1}}) = \frac{1}{2^k}$。 根据归纳法，我们构造出了一个嵌套区间数列 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\ell(I_k) = \frac{1}{2^{k-1}}$，$\overline{\text{并}}$且 I_k无法由$\mathscr{C}$中的有限个集合覆盖。根据引理 73，阿基米德性质推出 $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$；根据引理 8(i)，$\lim_{k\to\infty} \ell(I_k) = 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$。$\overline{\text{根据}}$

（**NIP**$_{\mathrm{w}}$），存在 $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$，其中右侧的集合是数列 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$中任一区间的子集，而该数列是 $I_1 = [0,1] \subseteq \bigcup_{U\in\mathscr{C}} U$的子集。也就是说，$c \in \bigcup_{U\in\mathscr{C}} U$。由于 $\mathscr{C}$仅由开集组成，因此存在一个开集 G，使得 $c \in G \in \mathscr{C}$。由于 G 是开集，存在 $\delta > 0$，使得

$(\star)$ $|x - c| < \delta$ implies $x \in G$.

由于 $\delta > 0$ 且 $\lim_{k\to\infty} \ell(I_k) = 0$，因此存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $k \geq K$，特别是在 $k = K$ 处，都有 $\ell(I_K) = \frac{1}{2^{K-1}} = \left|\frac{1}{2^{K-1}}\right| = \left|\frac{1}{2^{K-1}} - 0\right| \leq \delta$。也就是说，$\ell(I_K) < \delta$。假设 $x \in [a_K, b_K] := I_K$。由于 $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \subseteq I_K = [a_K, b_K]$，根据命题 12，$|x - c| \leq \ell(I_K) < \delta$，因此由 $(\star)$ 可得 $x \in G$，我们已经证明了 $I_K = [a_K, b_K] \subseteq G \in \mathscr{C}$。也就是说，$I_K$可以由 $\mathscr{C}$ 中的一个集合覆盖（因此也可以由有限个集合覆盖），这与 $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的定义矛盾。因此，$[0,1]$ 是紧致的。

$(\mathbf{I5}) \Longrightarrow$（**阿基米德性质**）。为导出矛盾，假设（**阿基米德性质**）不成立。根据引理 72，所有正无穷小构成的集合$\mathbb{I} := \left\{\varepsilon > 0 \colon\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon \leq \frac{1}{n}\right\}$ 中存在一个元素 y。

设 $c \in [0,1]$。若 $c \in \mathbb{I}$，则由于 $y \in \mathbb{I}$，根据命题71，我们有 $\delta := c + y \in \mathbb{I}$。$\mathbb{I}$ 中的元素 c、y和 δ 都是正数，因此 $-\delta < 0 < c < c + y = \delta$，这意味着 $c \in (-\delta,\ \delta) \subseteq \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{I}} (-\varepsilon,\ \varepsilon)$。这也涵盖了 $c = 0$ 的情形；尤其是，即使它不属于 $\mathbb{I}$，它也属于 $(-\delta,\ \delta)$。若 $c \notin \mathbb{I}$，则存在$N \in \mathbb{N}$ 使得 $c \not\leq \frac{1}{N}$。由于 $c \in [0,1]$，我们进一步得到 $\frac{1}{N} < c \leq 1 < 2$，因此 $c \in \left(\frac{1}{N},\ 2\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n},\ 2\right)$。至此，我们已经证明

$$[0,1] \subseteq \left[\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{I}} (-\varepsilon, \varepsilon)\right] \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 2\right)\right], \tag{52}$$

其中，集合包含右侧并集中的区间全都是开集。因此，这些区间构成了$\mathscr{C}$的一个开覆盖。根据（**I5**），$[0,1]$ 是紧致的，所以存在 $\mathscr{C}$中的有限个区间覆盖 $[0,1]$。等价地，存在有限个正无穷小 ε 和有限个正整数 n，使得相应的区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 和 $\left(\frac{1}{n}, 2\right)$ 覆盖 $[0,1]$。不失一般性，我们可以将它们记为 $M + K$ 区间

$$(-\varepsilon_1, \varepsilon_1), \qquad (-\varepsilon_2, \varepsilon_2), \qquad \dots \qquad (-\varepsilon_M, \varepsilon_M), \tag{53}$$

$$\left(\frac{1}{N_1}, 2\right), \qquad \left(\frac{1}{N_2}, 2\right), \qquad \dots \qquad \left(\frac{1}{N_K}, 2\right), \tag{54}$$

其中，对于每个 $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ 和每个 $k \in \{1, 2, \dots, K\}$，都有 $\varepsilon_m \in \mathbb{I}$ 和 $N_k \in \mathbb{N}$。这是因为，如果（53）–（54）中的集合有少于 $M + K$ 个覆盖 $[0,1]$,，那么这些集合的并集仍是（53）–（54）中所有集合并集的子集。我们也不失一般性地假设 $N_1 < N_2 < \cdots < N_K$，或者 $\frac{1}{N_K} < \cdots < \frac{1}{N_2} < \frac{1}{N_1}$。否则，我们只需重新编排上述正整数的索引。由于这个序关系，正整数 $1 + N_K$ 大于所有 $N_1 < N_2 < \cdots < N_K$，因此，数 $\frac{1}{1+N_K}$ 严格小于（54）中各区间的左端点，所以 $\frac{1}{1+N_K}$ 不属于（54）中的任何区间。给定 $m \in \{1, 2, \dots, M\}$，由于 ε_m 是正无穷小，且 $1 + N_K$ 是正整数，因此有 $\varepsilon_m \leq \frac{1}{1+N_K}$，所以 $\frac{1}{1+N_K} \notin (-\varepsilon_m, \varepsilon_m)$。但是，由于 $1 + N_K$ 是正数且 $1 + N_K \geq 1$，因此有$0 < \frac{1}{1+N_K} \leq 1$，这意味着 $\frac{1}{1+N_K} \in [0,1]$。至此，我们得到了 $[0,1]$中的一个元素，它不属于（53）–（54）中各集合的并集。这与（53）–（54）中的集合覆盖$[0,1]$这一条件矛盾。证明完毕。

$(\mathbf{I5}) \Longrightarrow$（**LCL**）。令 $[a,b]$ 为任意闭有界区间。根据（**I5**），区间 $[0,1]$ 是紧致的，而根据引理 51，$[a,b]$ 也是紧致的。若 $[a,b]$ 为空集，则使用 $\delta = 1 > 0$，所需结论显然成立。以下假设 $[a,b]$ 非空。根据引理 52，$[a,b]$ 的任意开覆盖都有一个

勒贝格数。

（**阿基米德性质**）&（**LCL**） $\Longrightarrow$（**阿基米德性质**）&（**UCT**）。蕴含关系（**阿基米德性质**）&（**LCL**） $\Longrightarrow$（**阿基米德性质**）是显然的，因此我们证明（**阿基米德性质**）&（**LCL**）蕴含（**UCT**）。

假设 f 在 $[a,b]$上连续，并令 $\varepsilon > 0$。根据引理53，存在 $\mathscr{C}$的一个开覆盖 $[a,b]$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$，若 $x,\ c \in G$，则 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$。根据（**LCL**），开覆盖 $\mathscr{C}$有一个勒贝格数 $\delta > 0$，这意味着对于任意 $x,\ c \in [a,b]$，若 $|x-c| < \delta$，则存在 $G \in \mathscr{C}$使得 $x,\ c \in G$，由（$\star$）可得 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$。因此，$f$是一致连续的。

（**阿基米德性质**）&（**UCT**） $\Longrightarrow$（**一致有界性原理**）。假设 f 在 $[a,b]$上连续，并令 $\varepsilon > 0$。根据（**UCT**），f是一致连续的，因此存在 $\delta > 0$使得

($\star$) if $x, c \in [a,b]$ and $|x-c| < \delta$, then $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

根据引理 75，存在一个分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ of $[a,b]$，使得 t

$$x_k - x_{k-1} < \delta, \qquad \text{for each } k \in \{1,2,\ldots,n\}. \tag{55}$$

我们定义 $\varphi\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ by $\varphi(b) = \varphi(x_n) := f(x_n) = f(b)$，并且对每个 $k \in \{1,2,\ldots,n\}$，如果 $x \in [x_{k-1}, x_k)$，则 $\varphi(x) := f(x_{k-1})$。因此，对于每个 $k \in \{1,2,\ldots,n\}$，函数 φ 在 $[x_{k-1}, x_k)$ 上为常数，特别是在 $(x_{k-1}, x_k) \subseteq [x_{k-1}, x_k)$ 上为常数。这意味着 φ 是一个阶梯函数。令 $x \in [a,b]$。根据命题54，$x \in \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$，因此存在 $K \in \{1,2,\ldots,n\}$，使得$x \in [x_{K-1}, x_K]$。于是，$x_{K-1} \le x \le x_K$，这意味着 $0 \le x - x_{K-1} \le x_K - x_{K-1}$，所以根据 (55)，$0 \le x - x_{K-1} < \delta$，其中第一个不等式表示 $x - x_{K-1}$ 是非负的，因此等于其绝对值。也就是说，$|x - x_{K-1}| < \delta$。由于 $x,\ x_{K-1} \in [a,b]$，根据 ($\star$)，我们有 $|f(x) - f(x_{K-1})| < \varepsilon$；根据 φ 的定义，如果 $x \in [x_{K-1}, x_K)$，则可以用 $\varphi(x)$ 替换 $f(x_{K-1})$。也就是说，$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$。如果 $x = x_K$，那么若 $K = n]$，则为 $x = b$ [；若 $K < n$，则为 [，此时] x 是下一个区间$[x_K, x_{K+1})$的左端点。在这两种情况下，$f(x) = f(x_K) = \varphi(x_K) = \varphi(x)$，所以 $|f(x) - \varphi(x)| = 0 < \varepsilon$。总之，$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$，证明完毕。

(一致有界性原理) $\Longrightarrow$ **(柯西收敛准则)**。为导出矛盾，假设**(柯西收敛准则)**不成立。由引理 77 的逆否命题可知，**(阿基米德性质)**不成立；由引理 72，存在一个无穷小量 $\varepsilon > 0$。根据命题 41*(ii)*和命题 44*(i)*，函数 $f\colon\ x \mapsto x$ 在 $[0,1]$, 上连续；由**(一致有界性原理)**，存在一个阶梯函数$\varphi\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$，使得对任意 $x \in [0,1]$，都有 $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$。又由于 $f\colon\ x \mapsto x$，这进一步变为 $|x - \varphi(x)| < \varepsilon$。也就是说，

$$|x - \varphi(x)| < \varepsilon, \qquad \text{for all } x \in [0,1]. \tag{56}$$

根据命题 55，存在 $c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$，使得

$$\{\varphi(x) \,:\, x \in [0,1]\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}. \tag{57}$$

给定 $x \in [0,1]$，由(56)可得 $|x - \varphi(x)| < \varepsilon$，这意味着 $x \in (\varphi(x) - \varepsilon, \varphi(x) + \varepsilon)$；由(57)，存在 $K \in \{1,2,\ldots,N\}$ 使得 $\varphi(x) = c_K$，因此 $x \in (c_K - \varepsilon, c_K + \varepsilon)$。至此，我们已经证明

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon),$$

根据命题 49，这意味着 $1 = 1 - 0 < \sum_{k=1}^{n} 2\varepsilon = 2n\varepsilon$；根据命题71，$1 = 1 - 0 < \sum_{k=1}^{n} 2\varepsilon = 2n\varepsilon$ 是一个无穷小量，因此对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $1 < 2n\varepsilon \le \frac{1}{n}$，这意味着 $1 < \frac{1}{n}$，而这在 $n = 1$ 处是不成立的。

因此，**(柯西收敛准则)**成立。

（一致有界性原理） $\Longrightarrow$（介值定理）。如果 f 在 $[a,b]$ 上连续，那么对于 $1>0$，根据一致有界性原理，存在一个阶梯函数φ：$[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$，使得对于每个 $x\in[a,b]$，都有 $|f(x)-\varphi(x)|<1$。根据命题 55，存在c_1、c_2、.....、$c_N\in\mathbb{R}$，使得 $\{\varphi(x):\ x\in[0,1]\}=\{c_1,c_2,\ldots,c_N\}$。因此，给定 $x\in[a,b]$，存在 $K\in\{1,2,\ldots,N\}$，使得 $\varphi(x)=c_K$，于是 $|f(x)-\varphi(x)|<1$ 变为 $|f(x)-c_K|<1$，或等价地，$f(x)\in(c_K-1,\ c_K+1)$。因此，$f(x)<c_K+1\leq M:=\max\{c_k+1:\ k\in\{1,2,\ldots,N\}\}$。

(柯西收敛准则)&(介值定理) $\Longrightarrow$**(MCP)**。为导出矛盾，假设存在一个单调递增数列 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其取值属于 $\mathbb{R}$，且有上界 $b\in\mathbb{R}$，但不收敛。根据 **(柯西收敛准则)**，存在一个数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其取值属于 $\mathbb{R}$，且无上界。若 $I_1:=(-\infty,\ a_1]$，并且对每个整数 $n\geq 2$，定义 $I_n:=[a_{n-1},a_n]$，其中 $A:=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，那么根据引理 37，由下式定义的函数 $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}c_1, & x\in I_1,\\ c_{n-1}+\frac{x-a_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}(c_n-c_{n-1}), & x\in I_n, n\geq 2,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 上连续，其中 $\{c_n:\in\mathbb{N}\}\subseteq f[\{a_n:\ n\in\mathbb{N}\}]$。由于 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 单调递增且有上界 b，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $a:=a_1\leq a_n\leq b$。因此，$\{a_n:\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq I:=[a,b]$，所以 $\{c_n:\in\mathbb{N}\}\subseteq f[\{a_n:\ n\in\mathbb{N}\}]\subseteq f[I]$。由于 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 无上界，对于每个 $M\in\mathbb{R}$，都存在 $n\in\mathbb{N}$，进而存在 $c_n\in f[I]$，使得 $c_n>M$。因此，存在 $x\in I=[a,b]$，使得 $f(x)=c_n>M$。也就是说，我们已经证明：对于任意 $M\in\mathbb{R}$，都存在 x，使得 $a\leq x\leq b$，但 $f(x)\not\leq M$；其中 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，因此在 $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ 上连续。这与 **(介值定理)** 矛盾。因此，任何有上界的单调递增数列都收敛。

(MCP) $\Longrightarrow$**(阿基米德性质)&(NIP$_{\mathrm{w}}$)**。参见定理 78。 □

7 第五个圆：积分

研究与戴德金完备性等价的积分定理，更准确的做法是在任意有序域中进行，就像论文 [7] 或 [12, 附录 A2]中的做法一样。一个主要的技术问题在于两个概念之间的差异：在 $\mathbb{R}$ 中，这两个概念显然等价，但在任意有序域中，这种差异确实很重要：函数的可积性（即“上、下阶梯函数积分”有多接近）与作为积分的实际数值存在之间的区别。由于我们采用的是朴素方法，这里的可积性定理并未像该主题的标准参考资料 [2, 8, 12]中那样表述。 [此外，在达布积分定理的表述中， [10],使用的是“上积分”，而我们这里使用的是“下积分”。这主要是因为我们避免了下确界。] 我们的目标是尽可能保留 [10], 中证明的逻辑结构，因此本节也采用了相应的呈现方式和结构。不过，原来的 [10], 四个积分定理在这里变成了六个。在作者看来，额外增加的两个定理能让 [10] 中积分定理证明的逻辑结构更加清晰。另一个技术问题涉及微积分基本定理的一种形式（即关于积分的微分的那一形式）。在 [2, 第 273]页中使用了这一形式的修正版，只为使该定理符合列入清单的条件。为此引入了一个称为“一致可微性”的概念，但它似乎与我们的朴素方法并不相容。此外，仔细考察 [10] 中的逻辑可以发现，要使微积分基本定理的上述形式成为一个实分析原理循环的一环，只需将它与另一个定理 [合取；该定理既不是（**阿基米德性质**），也不是（**柯西收敛准则**）] 。

这种做法是否令人不快，我们并不予以考虑，因为其逻辑成立。

我们将关注的有关积分的实分析原理如下。

> **(定积分存在定理)** 达布积分定理。若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则下达布积分 $\int_a^b f$ 存在。**(罗尔定理)** 黎曼可积性定理。若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积。**(微积分基本定理第一部分)** 微积分基本定理第一形式。若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则由 $x \mapsto \int_a^x f$ 表示的函数 $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 f 的一个原函数。**(积分中值定理)** 递增原函数定理。若 f 在 $[a,b]$ 上连续且非负，则 f 的任一原函数在 $[a,b]$ 上单调递增。

与前面几组定理类似，必须先提及上述内容，再列出完整的等价关系，因为上述每个原理都必须与（**阿基米德性质**）或（**柯西收敛准则**）[结合；在此情形下，只有（**柯西收敛准则**）]才能将其纳入等价关系列表。积分理论的预备知识见第 2.5 节。

定理 82 的证明比前四个圆圈中的证明更多地依赖此前已证明的等价关系，这也是为什么（**介值定理**）和（**中值定理**）会被“插入”到等价关系列表中间的部分原因。

定理 82。以下各项等价。

(UAS) 阶梯函数的一致逼近。若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个阶梯函数 $\varphi\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$，使得对于任意 $x \in [a,b]$，我们有 $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$。*(CC) & (DIT)* [$\mathbb{R}$ 的可数共尾性与达布积分定理的陈述的合取。*](CC) & (RIT)* [$\mathbb{R}$ 的可数共尾性与黎曼积分定理的陈述的合取。*](CC) & (BVT)* [$\mathbb{R}$ 的可数共尾性与有界值定理的陈述的合取。*] (MVT)* 中值定理。若 $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 上可微，则存在 $c \in (a,b)$，使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。*(FTC1) & (IAT)* [微积分基本定理第一形式[10],与递增原函数定理的陈述的合取。*](FTC2)* 微积分基本定理第二形式[11]。若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 F 是 f 的一个原函数，则 $\int_a^b f = F(b) - F(a)$。*(ADT)* 原函数差定理。若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 F 和 G 是 f 的原函数，则 $F - G$ 是一个常值函数。*(CVT)* 常值定理。若 f' 在 (a,b) 上为零，则 f 在 (a,b) 上为常数。 ———

[10]微积分基本定理第一形式：“积分的微分”[11]微积分基本定理第二形式：“导数的积分”

证明。**(UAS)** $\Longrightarrow$ **(CC)&(DIT)**。使用定理 81，然后使用定理 79，可得

$$(\mathbf{UAS}) \implies (\mathbf{CC})\&(\mathbf{BVT}) \implies (\mathbf{MCP}) \implies (\mathbf{ES}). \tag{58}$$

特别地，**(一致有界性原理)** 蕴含 **(柯西收敛准则)**（正如所期望的），也蕴含 **(确界性质)**，后者将在以下证明 **(定积分存在定理)** 时用到。假设 f 在 $[a,b]$ 上连续。由引理 45，$-f$ 也连续。由于 $1>0$，根据 **(一致有界性原理)**，存在 $\phi,\theta\in\mathscr{S}[a,b]$，使得 $\phi\le f$ 且 $\theta\le -f$[，这意味着存在 $f\le -\theta$]，使得 $|f-\phi|<1$ 且 $|f-\theta|<1$。条件 $\phi\in\mathscr{S}[a,b]$ 和 $\phi\le f$ 表示 $\int_a^b\phi\in\mathcal{S}:=\left\{\int_a^b\varphi\colon\ \varphi\in\mathscr{S}[a,b],\,\varphi\le f\right\}$，因此 $\mathcal{S}$ 非空。由命题 57，$-\theta\in\mathscr{S}[a,b]$。若存在 $\varphi\in\mathscr{S}[a,b]$ 使得 $\varphi\le f$，那么，由于 $f\le-\theta$，我们有 $\varphi\le-\theta$；根据命题 58，$\int_a^b\varphi\le\int_a^b(-\theta)$，其中左侧可视为 $\mathcal{S}$ 的任意元素。因此，实数 $\int_a^b(-\theta)$ 是非空集合 $\mathcal{S}$ 的一个上界。根据 **(确界性质)**，$\int_a^b f=\sup\,\mathcal{S}$ 存在。这就证明了 **(定积分存在定理)**。

—

(一致有界性原理) $\Longrightarrow$ **(柯西收敛准则)&(罗尔定理)**。由（58）可知，**(一致有界性原理)**蕴含**(柯西收敛准则)**，如所需。此外，我们已证明**(一致有界性原理)**蕴含**(定积分存在定理)**，因此，假设 f 在 $[a,b]$上连续；根据引理 45，这蕴含 $-f$ 在 $[a,b]$上连续。由**(定积分存在定理)**可知，$\int_a^b f$和 $r:=\int_a^b(-f)$在 $\mathbb{R}$中存在。由（23），$-r=-\int_a^b(-f)=\int_a^b f$在 $\mathbb{R}$中存在。也就是说，**(一致有界性原理)**蕴含$\int_a^b f$和 $\int_a^b f$均存在，这将在下面的论证中用到。

设 $\varepsilon>0$。若 $[a,b]$ 是退化的 $[a=b]$，则根据命题 66，命题**(罗尔定理)**显然成立。以下假设 $a<b$，因此$\frac{\varepsilon}{4(b-a)}>0$。我们假设 f 在 $[a,b]$上连续；根据引理 45，$-f$也连续。由**(一致有界性原理)**，存在 φ，$\psi\in\mathscr{S}[a,b]$，使得$|f-\varphi|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$且 $|(-f)-\psi|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$，由此可得

$$\varphi-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<\quad f\quad<\varphi+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \tag{59}$$

$$\psi-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<\quad -f\quad<\psi+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{60}$$

（59）–（60）中的第一个不等式推出$\varphi-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\le f$以及$\psi-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\le -f$。根据命题 57，左端属于 $\mathscr{S}[a,b]$，而这些阶梯函数的积分也可以用命题 57 计算。至此，我们已经证明

$$\int_a^b\varphi-\frac{\varepsilon}{4}\ \in\ \mathcal{S}_1:=\left\{\int_a^b\phi\ :\ \phi\in\mathscr{S}[a,b],\,\phi\le f\right\},$$

$$\int_a^b\psi-\frac{\varepsilon}{4}\ \in\ \mathcal{S}_2:=\left\{\int_a^b\phi\ :\ \phi\in\mathscr{S}[a,b],\,\phi\le -f\right\}.$$

但是，由于 $\int_a^b f=\sup\,\mathcal{S}_1$和$-\int_a^b f=\sup\,\mathcal{S}_2$分别是 $\mathcal{S}_1$和 $\mathcal{S}_2$的上界，因此我们有 $\int_a^b\varphi-\frac{\varepsilon}{4}\le\int_a^b f$和 $\int_a^b\psi-\frac{\varepsilon}{4}\le-\int_a^b f$。将两个不等式的两边分别乘以 -1，再把结果相加，得到

$$\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f\le-\left[\int_a^b\varphi+\int_a^b\psi\right]+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{61}$$

我们将 (60) 乘以 -1 并重新整理，得到新的方程组

$$\varphi-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<\quad f\quad<\varphi+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \tag{62}$$

$$-\psi-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<\quad f\quad<-\psi+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{63}$$

由 (62) 中的第一个不等式和 (63) 中的第二个不等式，我们得到 $\varphi+\psi<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$；而由 (63) 中的第一个不等式和 (62) 中的第二个不等式，我们得到 $-\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<\varphi+\psi$。也就是说，

$$-\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<\varphi+\psi<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{64}$$

根据命题 57，(64) 中左边、中间和右边的项都属于 $\mathscr{S}[a,b]$。我们用命题 57 计算它们的积分，并由命题 58 得到 $-\frac{\varepsilon}{2}<\int_a^b\varphi+\int_a^b\psi<\frac{\varepsilon}{2}$，也就是说

$$\left|\int_a^b\varphi+\int_a^b\psi\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{65}$$

由命题 59，$\int_a^b f\le\int_a^b f$，这意味着 $0\le\int_a^b f-\int_a^b f$；再由 (61)、(65)，

$$0\le\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f\le-\left[\int_a^b\varphi+\int_a^b\psi\right]+\frac{\varepsilon}{2}\le\left|\int_a^b\varphi+\int_a^b\psi\right|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

也就是说，

$$0\le\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f<\varepsilon. \tag{66}$$

若 $\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f$ 不为零，则 (66) 中的第一个不等式意味着 $\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f$ 为正，因此我们可以将其代入 ε，得到 $\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f<\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f$，这与三歧律矛盾。因此，$\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f$ 为零，也就是说 $\int_a^b f=\int_a^b f$。由此，f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积。

(柯西收敛准则)&(⋆) ⟹ (柯西收敛准则)&(介值定理)，其中 (⋆) 是 **(定积分存在定理)** 或 **(罗尔定理)**。只需证明 (⋆) 蕴含 **(介值定理)**。(⋆) 中的假设是 f 在 $[a,b]$ 上连续，因此不妨假设这一点确实成立。

当 (⋆) 是 **(定积分存在定理)** 时，f 在 $[a,b]$ 上的连续性，结合引理 45（它蕴含 $-f$ 在 $[a,b]$ 上连续）、恒等式 (23) 以及 **(定积分存在定理)** 本身，可知 $-\int_a^b(-f)=\int_a^b f$ 在 $\mathbb{R}$ 中存在，因此我们可以使用引理 62 来证明 f 在 $[a,b]$ 上有上界。如果 (⋆) 是 **(罗尔定理)**，则使用引理 65，然后使用引理 64。

(柯西收敛准则)&(介值定理) ⟹ (中值定理)。我们得到以下蕴含关系

$$(\mathbf{CC})\&(\mathbf{BVT})\implies(\mathbf{MCP})\implies(\mathbf{I1})\iff(\mathbf{MVT}),$$

分别使用定理 81、定理 79、定理 80。

(中值定理) ⟹ (微积分基本定理第一部分)。先使用定理 80，再使用定理 79，最后使用定理 81，我们得到以下蕴含关系

$$(\mathbf{MVT})\iff(\mathbf{EVT})\iff(\mathbf{I1})\implies(\mathbf{IVT})\implies(\mathbf{MCP})\iff(\mathbf{UAS}). \tag{67}$$

也就是说，（**中值定理**）蕴含（**极值定理**）、（**介值定理**）和（**一致有界性原理**），我们将在以下证明中用到这些结论。

（**iMVT**）积分中值定理。若 f 在 $[a,b]$上连续，则存在$\xi\in[a,b]$ 使得（$b-a$）f（ξ）$=\int_a^b f$。

若 $a=b$，则所需等式即为 $0=0$。因此，以下假设 $a<b$，或者说 $b-a$ 为正。若 f在 $[a,b]$上连续，则根据引理 45，$-f$也连续；又由极值定理，存在c_1、$c_2\in[a,b]$，使得 $f\le f(c_1)$ 和 $-f\le -f(c_1)$ [，其中右侧是在$[a,b]$上的常数]。因此，$f(c_1)\le f\le f(c_2)$ 在 $[a,b]$上成立。由一致有界性原理，f在 $[a,b]$上黎曼可积，因此根据命题 69，$f(c_1)\,(b-a)\le\int_a^b f\le f(c_2)\,(b-a)$，将其中每一项都除以正数 $b-a$，得到 $f(c_1)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f\le f(c_2)$。若 $f(c_1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$或 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f=f(c_2)$，则可令 ξ取 c_1或 c_2，问题便得证。对于剩余情形 $f(c_1)<\frac{1}{b-a}\int_a^b f<f(c_2)$，我们分两种情况讨论：$c_1\le c_2$或 $c_2<c_1$。由于 c_1，$c_2\in[a,b]$，我们还可得出 $a\le c_1\le c_2\le b$或 $a\le c_2<c_1\le b$。在前一种情况下，f在 $[a,b]$上的连续性意味着 f在 $[c_1,c_2]\subseteq[a,b]$上连续，因此，利用$f(c_1)<\frac{1}{b-a}\int_a^b f<f(c_2)$和介值定理，存在 $\xi\in[c_1,c_2]\subseteq[a,b]$，使得 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$。若 $a\le c_2<c_1\le b$，则利用 $-f$ 在 $[a,b]$上的连续性，这意味着 $-f$在 $[c_2,c_1]\subseteq[a,b]$上连续；同时，前面的不等式可转化为 $-f(c_2)<\frac{-1}{b-a}\int_a^b f<-f(c_1)$，从而可利用介值定理得到一个 $\xi\in[c_2,c_1]\subseteq[a,b]$，使得 $-f(\xi)=\frac{-1}{b-a}\int_a^b f$，或者说 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$。至此，积分中值定理的证明完成。

现在证明（**微积分基本定理第一部分**）。设 f 在 $[a,b]$上连续，令 $c\in[a,b]$，并令 $x\in[a,b]$ 与 c不同。我们证明，无论是 $x<c$ 还是 $c<x$ [，它们分别蕴含 $a\le x<c\le b$ 或$a\le c<x\le b$]，等式

$$f(tx+(1-t)c)=\frac{\int_a^x f-\int_a^c f}{x-c},\qquad\text{（对某个 } t\in\mathbb{R}\text{）}\tag{68}$$

f 在 $[a,b]$ 上的连续性意味着 f 在 $[x,c]\subseteq[a,b]$ 或 $[c,x]\subseteq[a,b]$上连续。根据积分中值定理，要么存在 $\xi\in[x,c]$，要么存在 $\zeta\in[c,x]$，使得 $f(\xi)=\frac{\int_x^c f}{c-x}$，要么 $f(\zeta)=\frac{\int_c^x f}{x-c}$。若 $x<c$，我们使用 $t=\frac{c-\xi}{c-x}$；若 $c<x$，则使用 $t=\frac{\zeta-c}{x-c}$。因此，若 $x<c$，则有 $f(tx+(1-t)c)=\frac{\int_x^c f}{c-x}$；若 $c<x$，则有 $f(tx+(1-t)c)=\frac{\int_c^x f}{x-c}$。利用引理 70，若 $a\le x<c$，则有 $\int_a^c f=\int_a^x f+\int_x^c f$；若 $a\le x<c$，则有 $\int_a^x f=\int_a^c f+\int_c^x f$。因此，若 $a\le x<c$，则有 $\int_a^c f-\int_a^x f=\int_x^c f$；若 $a\le x<c$，则有 $\int_a^x f-\int_a^c f=\int_c^x f$。此时，我们有 $f(tx+(1-t)c)=\frac{\int_a^c f-\int_a^x f}{c-x}$或 $f(tx+(1-t)c)=\frac{\int_a^x f-\int_a^c f}{x-c}$，其中右侧两项由 $\frac{\int_a^x f-\int_a^c f}{x-c}=\frac{-1}{-1}\cdot\frac{\int_a^x f-\int_a^c f}{x-c}=\frac{\int_a^c f-\int_a^x f}{c-x}$ 联系起来。这就证明了（68）。对于任何趋近于 c 的滤子基$\mathscr{B}$，函数 $\varphi:\ x\mapsto tx+(1-t)c$ 根据命题 41 满足 $\lim_{\mathscr{B}\to c}\varphi=c$；在此极限值处，$f$ 连续，因此由命题 44(i)，$f\left(\lim_{\mathscr{B}\to c}\varphi\right)=f(c)=\lim_{x\to c}f(x)$。由命题 43，我们有 $f\left(\lim_{\mathscr{B}\to c}\varphi\right)=f(c)=\lim_{x\to c-}f(x)$，以及 $f\left(\lim_{\mathscr{B}\to c}\varphi\right)=f(c)=\lim_{x\to c+}f(x)$。对于前者，我们令 $\mathscr{B}$ 为 $x\longrightarrow c-$ 的滤子基；对于后者，令 $\mathscr{B}$ 为 $x\longrightarrow c+$ 的滤子基。也就是说，当 $x\longrightarrow c-$ 趋近于……以及当 $x\longrightarrow c+$ 趋近于……时，（68）左侧的极限都为 $f(c)$；现在我们有 $\lim_{x\to c-}\frac{\int_a^x f-\int_a^c f}{x-c}=f(c)=\lim_{x\to c+}\frac{\int_a^x f-\int_a^c f}{x-c}$。由命题 43，$\lim_{x\to c}\frac{\int_a^x f-\int_a^c f}{x-c}=f(c)$。因此，函数 $x\mapsto\int_a^x f$ 在 c处可微，其导数为 $c\mapsto f(c)$，或者为 f。所以，$x\mapsto\int_a^x f$是 f 的原函数。

(中值定理) $\Longrightarrow$ **(积分中值定理)**。设 $a\le c<x\le b$。若 F 是 $[a,b]$上 f 的原函数，则 F 在 $[a,b]$上可导，特别是在 $(c,x)\subseteq[a,b]$上可导。根据命题 44*(iv)*，F 在 $[a,b]$上连续，特别是在 $[c,x]\subseteq(a,b)$上连续。根据（**中值定理**），存在 $\xi\in(c,x)$，使得 $F'(\xi)=\frac{F(x)-F(c)}{x-c}$，

其中左边等于 $f(\xi)$，且根据假设，它是非负的。因此，$0 \leq {}^{F_{(x)-F(c)}}x-c$。由 $a \leq c < x \leq b$ 可知，$x-c$ 为正，因此进一步得到 $0 \leq F(x) - F(c)$，或者说 $F(c) \leq F(x)$。因此，$a \leq c < x \leq b$ 蕴含 $F(c) \leq F(x)$，也就是说，F 在 $[a,b]$ 上单调递增。

(中值定理) $\Longrightarrow$ **(微积分基本定理第二部分)**。令 φ，ψ：$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 为满足 $\varphi \leq f \leq \psi$ 的阶梯函数。根据命题 56，存在 $[a,b]$ 的一个分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$，以及实数 $m_0, m_1, \ldots, m_n, M_1, M_2, \ldots, M_n$，使得 $\int_a^b \varphi = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$ 且 $\int_a^b \psi = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$。令 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$。由于 $\varphi \leq f \leq \psi$，

$$m_k = \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) = M_k, \qquad \text{if } x \in (x_{k-1}, x_k),$$

又因为按照分割的记号，$x_k > x_{k-1}$，或者说 $x_k - x_{k-1} > 0$，我们进一步得到

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq (x_k - x_{k-1})f(x) \leq M_k(x_k - x_{k-1}), \qquad \text{if } x \in (x_{k-1}, x_k). \tag{69}$$

由于 F 是 $[a,b]$ 上的原函数，因此我们发现 F 在 $[a,b]$ 上可微，特别是在 $(x_{k-1}, x_k) \subseteq [a,b]$ 对任意 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 都成立。根据命题 44（*iv*），F 在 $[a,b]$ 上连续，特别是在 $(x_{k-1}, x_k) \subseteq [a,b]$ 对任意 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 都成立。根据（**中值定理**），存在 $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$，使得 $F(x_k) - F(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1})F'(\xi_k) = (x_k - x_{k-1})f(\xi_k)$，因此，如果我们在（69）中令 $x = \xi_k$，

$$\begin{aligned}
m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq F(x_k) - F(x_{k-1}) &&\leq M_k(x_k - x_{k-1}),\\
\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq \sum_{k=1}^n F(x_k) - \sum_{k=1}^n F(x_{k-1}) &&\leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}),\\
\int_a^b \varphi &\leq \sum_{k=1}^n F(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} F(x_k) &&\leq \int_a^b \psi,\\
\int_a^b \varphi &\leq F(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k) - \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k) - F(x_0) &&\leq \int_a^b \psi,\\
\int_a^b \varphi &\leq F(b) - F(a) &&\leq \int_a^b \psi.
\end{aligned} \tag{70}$$

至此，我们已经证明实数 $F(b) - F(a)$ 具有如下性质：对于任意阶梯函数 φ，ψ：$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$，若 $\varphi \leq f \leq \psi$，则 $\int_a^b \varphi \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^b \psi$。根据命题 68，具有此性质的唯一实数是 $\int_a^b f$。因此 $\int_a^b f = F(b) - F(a)$。

(FTC1)&(IAT) $\Longrightarrow$ **(反导数定理)**。由于 F 和 G 都是 f 的原函数，因此我们有 $F' = f = G'$。[根据 **(FTC1)**，至少存在一个这样的原函数。] 利用命题 44，我们有 $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ 和 $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$。因此，$F - G$ 和 $G - F$ 是零函数 0：$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 的原函数；该函数在 $[a,b]$ 上非负，并且根据例 30，在 $[a,b]$ 上连续。根据 **(IAT)**，$F - G$ 和 $G - F$ 在 $[a,b]$ 上都单调递增。也就是说，$a \leq c < x \leq b$ 意味着 $(F - G)(c) \leq (F - G)(x)$，并且 $(G - F)(c) \leq (G - F)(x)$；在后一式两边乘以 -1，得到 $(F - G)(c) \geq (F - G)(x)$。至此，只要 $a \leq c < x \leq b$，就有 $(F - G)(c) = (F - G)(x)$。因此，$F - G$ 是一个常值函数。

（**微积分基本定理第二部分**）$\Longrightarrow$（**反导数定理**）。设 $a \leq c < x \leq b$。f 在 $[a,b]$ 上的连续性意味着 f 在 $[c,x] \subseteq [a,b]$ 上的连续性。由于 F 和 G 都是 f 的原函数，根据（**微积分基本定理第二部分**），我们得到 $G(x) - G(c) = \int_c^x f = F(x) - F(c)$，因此 $G(x) - F(x) = G(c) - F(c)$，或者说 $(G - F)(x) = (G - F)(c)$。

因此， $F - G$ 是一个常值函数。

(反导数定理) $\Longrightarrow$ **(常值定理)**。设 $a < c < x < b$。在区间 $[c, x] \subseteq (a, b)$ 上， f 和零函数 0 的导数分别为 f' 和 0；对于前者，根据假设， $f' = 0$。也就是说，0 同时是 f 和 0 的导数。等价地， f 和 0 都是 0 的原函数，而根据例 30，0 在 $[c, x]$ 上连续。根据（**反导数定理**），差 $f - 0 = f$ 在 $[c, x]$ 上是常数。特别地， $f(c) = f(x)$。至此，我们已证明 $a < c < x < b$ 蕴含 $f(c) = f(x)$。因此， f 在 (a, b) 上是常数。

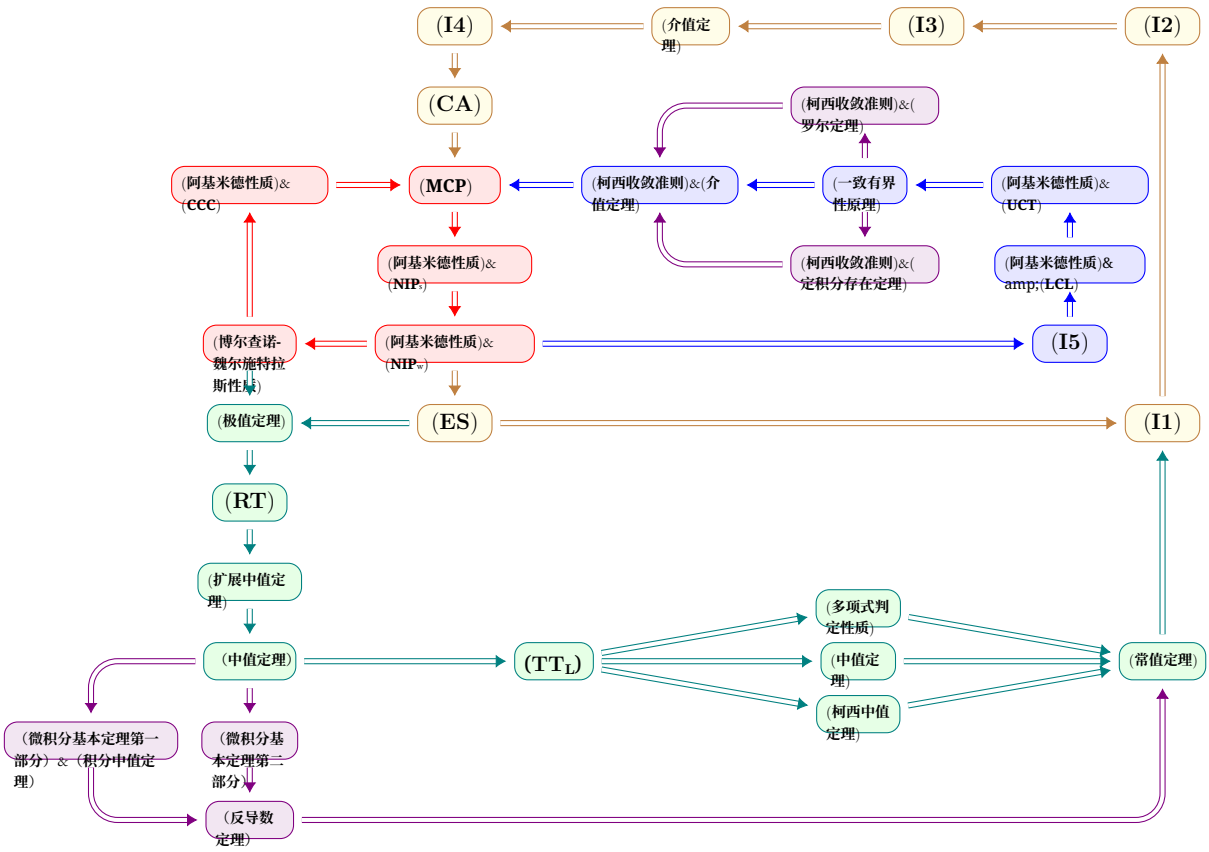
(常值定理) $\Longrightarrow$ **(一致有界性原理)**。我们有以下蕴含关系

$$(\mathbf{CVT}) \Longrightarrow (\mathbf{I1}) \Longrightarrow (\mathbf{MCP}) \Longleftrightarrow (\mathbf{UAS}),$$

分别来自定理 80、79、81。 □

实分析原理的逻辑关系

现在，我们汇总定理 78–82 的证明中所有的蕴含关系，并在下图中概括这些逻辑联系。



定理78、79、81中证明的第一圆、第二圆和第四圆，都可以很容易地在上图中追踪出来。定理 80 中的第三圆与第一圆和第二圆的联系更为复杂：从（EVT）开始，向下到（MVT），再向右到（CVT）；接着需要向上到（I2），向左到（I4），然后从那里沿着向下的路径到（BWP）和（ES），最终回到（EVT）。第五圆的情况则不那么简单，正如我们在定理 82 的证明中指出的，它对其他四个圆中先前确立的等价关系有更多依赖。对于第五圆，只需将（UAS）和（I1）视为等价；这一点已在先前的实分析原理圆环中确立。也就是说，即使上图中没有连接（UAS）和（I1）的双向箭头，基于先前的等价关系，这种联系仍然存在。现在，我们只需找到一条从（UAS）到（I1）的路径。忽略从（UAS）直接到（CC）&（BVT）的路径，从（UAS）到（CC）&（BVT）还有两条路径：一条经过（CC）&（RIT），另一条经过（CC）&（DIT）。 [在定理 82 的证明中，为了得到这些蕴含关系，我们需要（UAS）与（ES）等价；这基于先前的圆环是成立的，但为求简明，图中不再体现这一点。] 从（CC）&（BVT）出发，沿路径向下到（MVT），再从那里分出两条路径，但两条都通向（ADT）。 [从定理 82 的证明可以看出，为了证明（MVT）蕴含（FTC1），我们需要（MVT）与（IVT）及（EVT）等价。为求简明，上图也不再显示这一点。] 从（ADT）出发，到（CVT），再到（I1），正如所需。这就是第五圆。

补全实分析定理的五个圆环，似乎是一次很好的拓扑学之旅，也能让我们具体了解拓扑学如何成为本科阶段所学微积分的基础。 [10] 中关于五个圆环里的定理排列方式使得与（**确界性质**） [或（**柯西公理**）] 等价这一点可以“无需做太多额外工作”便看出来的说法，无法得到证明，或者至少很难证明；但五个圆环提供的概念框架，为实分析这片丛林提供了良好的组织原则。我们希望这能为任何打算阅读主要参考文献 [2, 8, 10, 12],的人，以及任何正在学习实分析的人，提供一份有益的补充。

参考文献

[1] R. R. S. Cantuba，《反向实分析中的 Littlewood 原理》，《实分析交流》，第49卷，第1期，111–122页，2024年，doi：10.14321/realanalexch.49.1.1677489725.[2] M. Deveau 和 H. Teismann，“$72+42$：有序域完备性与阿基米德性质的刻画”，《实分析交流》，第39卷，第2期，261–304页，2014年，doi：10.14321/realanalexch.39.2.0261.[3] J. Dixmier，《一般拓扑学》（法文译本），瑞士沙姆：施普林格，1984年。[4] C. H. C. Little、K. L. Teo 和 B. van Brunt，《通过数列与级数学习实分析》。美国纽约州纽约：施普林格，2015年。[5] M. Moniri 和 J. Eivazloo，“在戴德金完备、单调完备或 Scott 不完备的有序域中使用网及可定义性问题”，载于*Topology Atlas*，布拉格，2001年，195–203页。[6] M. Moniri 和 J. Eivazloo，“将内部映射到内部的有序域上一致连续的一一函数”，*Mashdad* 数学科学研究期刊，第1卷，59–65页，2008年。[7] J. M. H. Olmsted，“有序域上的黎曼积分”，《两年制学院数学杂志》，第4卷，第2期，34–40页，1973年，doi：10.2307/3026441。

[8] J. Propp，“逆向实分析”，《美国数学月刊》，第120卷，第5期，392–408页，2013年，doi：10.4169/amer.math.monthly.120.05.392.[9] M. Raman-Sundstr¨om，“紧致性的教学史”，《美国数学月刊》，第122卷，第7期，619–635页，2015年，doi：10.4169/amer.math.monthly.122.7.619.[10] O. Riemenschneider，“实数域的37种初等公理化刻画”，《汉堡数学学会通报》，第20卷，71–95页，2001年。 [在线]。网址：https://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/axiommit.pdf。（英文译本见： https://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/axioms.pdf）[11] A. J. Sieradski，《拓扑学与同伦论导论》，美国马萨诸塞州波士顿：PWS-Kent 出版公司，1992年。[12] H. Teismann，“迈向更完整的完备性公理列表”，《美国数学月刊》，第120卷，第2期，99–115页，2013年，doi：10.4169/amer.math.monthly.120.02.099.[13] B. S. Thomson，“重新思考初等实分析课程”，《美国数学月刊》，第114卷，第6期，469–490页，2007年，doi：10.1080/00029890.2007.11920437。