arXiv:2601.11759v1 [math.CA] 16 Jan 2026

非自治线性系统：指数二分性及其应用

Álvaro Castañeda 与
Gonzalo Robledo

目录

序言 1 致谢 1 记号 2

第1章。 预备知识 5
1. 线性非自治系统 5 2. 有界增长 16 3. 运动相似性 19 4. 注释与参考文献 29 5. 习题 33

第2章。 指数二分性 37
1. 自治双曲性 37 2. 非自治双曲性 39 3. 全线上的指数二分性 50 4. 注释与参考文献 60 5. 习题 61

第3章 半轴上的指数二分性 6 5
1. 预备知识 65 2. 基本性质与等价刻画 65 3. 半轴上的有界解与指数二分性 75 4. 回到投影算子问题 77 5. 注释与参考文献 80 6. 习题 81

Chap章 4. 可约性 83
y 1. 预备知识 83 2. 指数二分性与可约性 87 3. 注释与参考文献 90 4. 习题 91

第5章. 指数二分谱 93 1. 引言 93 2. 定义与基本结果 94

3. 指数二分谱与预解式的性质 97 4. 谱流形与分块对角化 111 5. 评论与参考文献 119 6. 习题 121

第6章 全局线性化 123
1. 引言 123 2. Palmer 的同胚 124 3. 注释与参考文献 134 4. 习题 135

第7章 全局线性化的可微性 139
1. 动机 139 2. 整条实线上的第一种方法 140 3. 半直线上的第二种方法 144 4. 注释与参考文献 158 5. 习题 159

附录 A. 标量情形下的指数二分性（Pablo Amster）161 附录 B. 矩阵范数 169 B.1 基本事实 169 B.2 正定矩阵 169

附录. 附录 C 171 C.1 格朗沃尔引理 171

附录。参考文献 173

序言

本著作的第一个目的，是对非自治常微分方程线性系统理论、指数二分性及其相应的谱理论作出通俗易懂的介绍。本著作的第二个目的是传播作者在非自治框架下取得的线性化结果。

本书的实际结构源于作者为智利大学数学系本科生和研究生开设的多门选修课程（2014年、2016年、2019年、2021年和2023年）。本专著要求读者具备扎实的多元微积分、线性代数和常微分方程知识。

致谢

- 我们谨向学生 Bastián Nuñez、Karla Catalán、Néstor Jara、Valdo Lagos、Fernanda Torres、Ricardo Torres、Sebastián Rivera 和 David Urrutia 表达谢意。他们阅读了本书的初稿并提出了重要意见。
- 我们特别要感谢博士后团队中的欢乐伙伴 Ignacio Huerta、Claudio Gallegos 和 Heli Elorreaga，他们阅读了本书的多个中间版本。
- Pablo Monzón（共和国大学，蒙得维的亚——乌拉圭）、Christian Pötzsche（阿尔卑斯-亚得里亚大学，克拉根福——奥地利）和 Pablo Amster（布宜诺斯艾利斯大学——阿根廷）的热情款待，对本专著若干部分的写作至关重要。我们对各位同事深表感激。

记号

第1章。

J	一个时间区间，$J \subseteq \mathbb{R}$。
$M_n(\mathbb{R})$	$n \times n$ 实矩阵空间。
$\|x\|$	$x \in \mathbb{R}^n$的一个范数。
$\|A\|$	$A \in M_n(\mathbb{R})$由 $\|\cdot\|$诱导的算子范数。
det A	$A \in M_n(\mathbb{R})$的行列式。
$\mathrm{Tr}A$	$A \in M_n(\mathbb{R})$的迹。
I	$M_n(\mathbb{R})$中的单位矩阵。
$\mathfrak{M}_n$	连续且有界的集合 矩阵函数 $A(\cdot): J \to M_n(\mathbb{R})$.
$\dot{x} = A(t)x$	定义在 J 上的线性非自治系统。
$X(t)$	$\dot{x} = A(t)x$的一个基本矩阵。
$X(t, s)$	转移矩阵 $X(t,s) := X(t)X^{-1}(s)$，对于 $t, s \in J$。
K, α	增长/衰减估计中出现的正常数。

第2章。

$BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$	有界连续函数的空间 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$。
$C_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$	ω–周期连续函数的空间 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$。
$\|x\|$	$x \in \mathbb{R}^n$的一个范数。
$\|A\|$	$A \in M_n(\mathbb{R})$ 由 $\|\cdot\|$ 诱导的算子范数。
A 的秩	矩阵 A 的秩。
$\mathrm{Tr}A$	$A \in M_n(\mathbb{R})$ 的迹。
$\mathcal{B}, \mathcal{D}$	J 上容许性概念中使用的函数空间。
P	一个（常）投影，$P^2 = P$。
$P(t)$	投影族（时变投影算子）。
K, α	指数二分估计中的常数。
$\mathcal{V}(t_0)$	前向有界集：$\{\xi: t \mapsto \|X(t, t_0)\xi\|$ 在 $[t_0, +\infty$ 上有界$)\}$。
$\mathcal{W}(t_0)$	后向有界集：$\{\xi: t \mapsto \|X(t, t_0)\xi\|$ 在 $(-\infty, t_0]\}$ 上有界。
$\mathcal{G}(t, s)$	与指数二分性相关的格林函数。
E^s, E^u	双曲（自治）情形中的稳定子空间和不稳定子空间。

第 3 章。

$\mathbb{R}_0^+$	半直线 $[0,+\infty)$。
$\mathbb{R}_0^-$	半直线 $(-\infty,\ 0]$。
T,θ	一致非临界性条件中的常数。
$P_+,\ P_-$	与指数二分性相关的常值投影关于 $\mathbb{R}_0^+$ 和 $\mathbb{R}_0^-$。
$i(A)$	线性系统的指标（通过 P_+ 和 P_-定义）。
$\mathcal{V}$	前向有界集：$\{\xi:\sup_{t\geq 0}\lvert X(t,\ 0)\xi\rvert<+\infty\}$。
$\mathcal{W}$	后向有界集：$\{\xi:\sup_{t<0}\lvert X(t,\ 0)\xi\rvert<+\infty\}$。

第 4 章。

$\dot{x}=A(t)x$	J上的一个线性系统。
$\dot{y}=B(t)y$	一个线性系统 与 $\dot{x}$运动学相似 $=A(t)x$。
$S(t)$	一个可逆的（Lyapunov）变量代换连接两个系统。
A^*	复矩阵的厄米转置（共轭转置）。复矩阵。
A^T	实矩阵的转置。
$A>0$ （分别为 $A\geq 0$）	正定（分别为半正定）矩-阵。

第5章。

λ 平移系统中的谱参数。$\Sigma(A)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的指数二分谱。$\Sigma^+(A)$ 在 $\mathbb{R}_0^+$ 上的未来指数二分谱。$\Sigma^-(A)$ 在 $\mathbb{R}_0^-$ 上的过去指数二分谱。$\rho(A)$ 预解集 $\rho(A)=\mathbb{R}\setminus\Sigma(A)$。$\rho^+(A)$ 预解集 $\rho^+(A)=\mathbb{R}\setminus\Sigma^+(A)$。$\rho^-(A)$ 预解集 $\rho^-(A)=\mathbb{R}\setminus\Sigma^-(A)$。$P_\lambda$ 与系统在 λ 处的指数二分性相关的投影。C_λ 包含 λ 的预解集的最大开区间（连通分支）。$\mathcal{S}^\lambda$ 对于 λ 平移动力学的稳定集（带权重 $e^{-\lambda t}$ 向前有界）。$\mathcal{U}^\lambda$ 对于 λ 平移动力学的不稳定集（带权重 $e^{-\lambda t}$ 向后有界）。

第6章。

$H(t,\ u)$	定义拓扑等价的同胚（Palmer）。
$G(t,\ u)$	逆映射，$G(t,\cdot) = H(t,\cdot)^{-1}$。
$f(t,\ y)$	$y' = A(t)y + f(t,\ y)$中的非线性扰动。
M, c	有界增长中的常数：$\|X(t,\ s)\| \leq Me^{c\|t-s\|}$。
μ	扰动的界：$\|f(t,\ y)\| \leq \mu$。
γ	Lipschitz 常数：$\|f(t,\ y) - f(t,\ y')\| \leq \gamma\|y - y'\|$。

第7章。

J	a （通常 半直线) 区间 其中研究了拓扑等价。
C^r 拓扑等价	$H(t,\ \cdot)$ 是一个 C^r–微分同胚，且导数-数在（t, u）上连续。
$D^k H,\ D^k G$	关于空间变量的 $k \leq r$ 阶偏导数（关于空间变量）。

第1章

预备知识

1. 线性非自治系统

本章旨在简要回顾关于常微分方程线性系统的基本结果

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.1}$$

其中，x 是 $\mathbb{R}^n$的列向量，$J \ni t \mapsto A(t) \in M_n(\mathbb{R})$是取值于矩阵空间的连续矩阵函数，$J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间。通常但并非总是，我们将区间视为 $J = (-\infty, t_0]$，$J = [t_0, +\infty)$或 $J = \mathbb{R}$。

这一系统在铁幕两侧的众多经典冷战著作中都得到了深入研究，例如 [**1, 43, 45, 54, 62, 97**]和 [**15, 16, 14, 36, 39, 38, 44, 61, 64**]。此外，还有一些较新的专著，例如 [**19, 58, 66, 68, 77, 120**]。尽管如此，我们仍将简要回顾一系列重要主题和结果，以使本文内容自成一体。

1.1. 基本矩阵与转移矩阵。

定义 1.1. 基矩阵是(1.1)的一个矩阵值函数 $t \mapsto X(t) \in M_n(\mathbb{R})$，其列向量 $\{x_1(t) \ldots, x_n(t)\}$构成系统(1.1) 在任意 $t \in J$ 下的一个解的基。

研究基矩阵需要回顾矩阵值函数及其导数的相关知识。事实上，对于任意矩阵函数 $J \in t \mapsto U(t)$，不一定是基矩阵，如果且仅如果满足以下极限存在，我们称 U 在 t 处可导

$$\dot{U}(t) = \frac{d}{dt}U(t) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[U(t+h) - U(t)],$$

这应理解为逐分量极限。

引理 1.1. 若矩阵函数 $J \ni t \to U(t)$ 可导，并且对任意 $t \in J$ 都可逆，则其逆矩阵在 J 上可导，导数为

$$\frac{d}{dt}U^{-1}(t) = -U^{-1}(t)\dot{U}(t)U^{-1}(t). \tag{1.2}$$

证明。若 U 在 J上可导，则 U 在J上连续。结合 U的可逆性，也可推出 U^{-1}在 J上连续。现在可以看出，以下极限存在

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U^{-1}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[U^{-1}(t+h)-U^{-1}(t)\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}U^{-1}(t+h)\left[I-U(t+h)U^{-1}(t)\right]\\ &= \lim_{h\to 0}U^{-1}(t+h)\frac{1}{h}\left[U(t)-U(t+h)\right]U^{-1}(t)\end{aligned}$$

于是恒等式 (1.2) 得证。 □

注 1.1. 对任意 $t\in J$，可知，(1.1) 的任意基本矩阵$X(t)$ 都满足以下恒等式：

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t). \tag{1.3}$$

事实上，我们可以写成 $X(t)=[x_1(t)\ x_2(t)\cdots\ x_n(t)]$ 并注意到：

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= [\dot{x}_1(t)\,\dot{x}_2(t)\cdots\dot{x}_n(t)]\\ &= [A(t)x_1(t)\,A(t)x_2(t)\cdots A(t)x_n(t)]\\ &= A(t)[x_1(t)\,x_2(t)\cdots x_n(t)]\\ &= A(t)X(t).\end{aligned}$$

例如，考虑线性系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1+\frac{3}{2}\cos^2(t) & 1-\frac{3}{2}\cos(t)\sin(t)\\ -1-\frac{3}{2}\cos(t)\sin(t) & -1+\frac{3}{2}\sin^2(t)\end{bmatrix}x, \tag{1.4}$$

该系统已在 [89]中得到研究。直接验证可得

$$X(t)=\begin{bmatrix}e^{\frac{t}{2}}\cos(t) & e^{-t}\sin(t)\\ -e^{\frac{t}{2}}\sin(t) & e^{-t}\cos(t)\end{bmatrix}$$

是上述线性系统的一个基本矩阵。

在自治情形下，任何常微分方程课程都会介绍一种利用 A的特征值和特征向量来构造基本矩阵 $X(t)=e^{At}$的方法。然而，与自治情形相反，并不存在适用于每个线性系统 (1.1) 且能够求出解的基的算法。此外，系统 (1.4) 是一个典型例子，展示了非自治情形的微妙之处和技术难点。事实上，注意到其对应矩阵 $A(t)$的特征值实部均为负，但 $X(t)$的第一列却是不稳定解。

注 1.2. 若 $X(t)$是与 (1.1) 相关联的基本矩阵，则对任意 $t \in J$，以下事实很容易验证：

a) 如果 $C \in M_n(\mathbb{R})$ 非奇异，那么 $Y(t) = X(t)C$ 也是与 (1.1) 相关的基本矩阵。b) 我们总能选取一个满足$Y(0) = I$的基本矩阵 $Y(t)$。事实上，上述性质中可以使用 $C = X^{-1}(0)$。这个矩阵 $Y(t)$ 通常称为 规范化的 基本矩阵。c) 如果 $J = \mathbb{R}$ 且对任意 $t \in J$， $A(-t) = -A(t)$，那么 $Y(t) = X(-t)$ 也是与 (1.1) 相关的基本矩阵。d) 根据基本矩阵的定义，对于任意 $t \in J$，基本矩阵 $X(t)$ 都是可逆的，因为它的列是 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的向量。由于 $X(t)$ 可逆且可导，由引理 1.1 可知 $X^{-1}(t)$ 也可导，并且结合 (1.2) 和 (1.3) 可得恒等式：

$$\frac{d}{dt}X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)A(t). \tag{1.5}$$

下一个结果是恒等式 (1.5) 的直接推论：

引理 1.2. 映射 $J \ni t \mapsto X(t)X^{-1}(t_0)c$ 满足 $t_0 \in J$ 且$c \in \mathbb{R}^n$，是该初值问题的唯一解：

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x \\ x(t_0) &= c. \end{cases} \tag{1.6}$$

证明。直接验证可知， $t \mapsto X(t)X^{-1}(t_0)c$ 是初值问题 (1.6) 的一个解。为了证明其唯一性，设 $t \mapsto y(t)$ 也是上述问题的一个解。现在，定义辅助函数 $u(t) = X(t)X^{-1}(t_0)c - y(t)$，并注意到 $u(t)$ 满足：

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \quad \text{with } u(t_0) = 0.$$

首先，假设 $t \geq t_0$ 并对上述方程在 t_0 和 t 之间积分。利用 $u(t_0) = 0$ 这一事实，可得

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)u(s)\,ds,$$

因此

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} A(s)u(s)\,ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |A(s)u(s)|\,ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} ||A(s)||\,|u(s)|\,ds. \end{aligned}$$

其次，假设 $t \leq t_0$，并在 t 与 t_0 之间对上述方程积分。再次利用这一事实： $u(t_0) = 0$，可得：

$$-u(t) = \int_{t}^{t_0} A(s)u(s)\,ds,$$

因此

$$|u(t)| \leq \int_{t}^{t_0} ||A(s)||\,|u(s)|\,ds$$

因此，我们有

$$|u(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} ||A(s)||\,|u(s)|\,ds \right| \leq c_n + \left| \int_{t_0}^{t} ||A(s)||\,|u(s)|\,ds \right|$$

对于任意趋于零的正数列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。

根据 Gronwall 引理的变体（详见附录 C），我们有

$$|u(t)| \leq c_n \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} ||A(s)||\,ds \right| \right).$$

最后，令 $c_n \to 0$ 在 $n \to +\infty$时成立，即可得到唯一性。

□

定义 1.2. 设 $X(t)$ 是 (1.1) 的基本矩阵。与 $X(t)$ 相关联的转移矩阵 定义为

$$X(t,s) := X(t)X^{-1}(s) \quad where\ t,s \in J.$$

需要指出的是，在俄语文献中，转移矩阵也称为柯西算子 或矩阵解；而在偏微分方程和泛函分析研究中，它通常称为演化算子。

注 1.3. 利用注记 1.1 和 1.2，我们可以看出：

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t,s) = A(t)X(t,s) \quad \text{and} \quad \frac{\partial X}{\partial s}(t,s) = -X(t,s)A(s). \tag{1.7}$$

注 1.4. 与 (1.1) 相关的任意转移矩阵 $X(t,s)$ 都满足以下性质：

a) 对任意 $t, t_0, s \in J$，都有：

$$X(t,t) = I \quad \text{and} \quad X(t,t_0)X(t_0,s) = X(t,s).$$

b) 初值问题 (1.6) 的任意解 $t \mapsto x(t)$ 都可以写成 $x(t) = X(t, t_0)c$。利用 a)，可知对于任意 t，$s \in J$，恒等式 $x(t) = X(t, s)x(s)$ 成立，这也是“转移”一词的由来。

c) 如果 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是常矩阵，那么可以看出，当 $A(t)$ 对任意 $t \in J$ 都为常数时，e^{At} 是系统 (1.1) 的一个基本矩阵。利用引理 1.2，可得：

$$X(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

下一个结果给出了转移矩阵的估计，可见于 [68, 引理 3.3。4]:

引理 1.3。 给定 $t, t_0 \in J$，可得

$$\begin{cases} e^{-\left|\int_{t_0}^{t} ||A(s)||\, ds\right|} \le ||X(t,t_0)|| \quad \le e^{\left|\int_{t_0}^{t} ||A(s)||\, ds\right|}, \\ \\ e^{-\left|\int_{t_0}^{t} ||A(s)||\, ds\right|} \le ||X(t_0,t)||^{-1} \le e^{\left|\int_{t_0}^{t} ||A(s)||\, ds\right|}, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $||\cdot||$ 是满足 $||I|| = 1$ 的矩阵范数。

证明。由 (1.3) 可知

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t,t_0) = A(t)X(t,t_0) \quad \text{and} \quad \frac{\partial X}{\partial t}(t_0,t) = -X(t_0,t)A(t).$$

若 $t > t_0$，对上述方程积分，得到

$$X(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(s)X(s,t_0)\, ds, \quad X(t_0,t) = I - \int_{t_0}^{t} A(s)X(t_0,s)\, ds,$$

由此可得

$$||X(t,t_0)|| \le 1 + \int_{t_0}^{t} ||A(s)||\, ||X(s,t_0)||\, ds$$

and

$$||X(t_0,t)|| \le 1 + \int_{t_0}^{t} ||A(s)||\, ||X(t_0,s)||\, ds.$$

利用格朗沃尔引理（见附录 B），得到

$$||X(t,t_0)|| \le e^{\int_{t_0}^{t} ||A(s)||\, ds} \quad \text{and} \quad e^{-\int_{t_0}^{t} ||A(s)||\, ds} \le ||X(t_0,t)||^{-1}.$$

根据注 1.4 中的陈述 1，我们有

$$1 = ||I|| = ||X(t,t_0)X(t_0,t)|| \le ||X(t,t_0)||\, ||X(t_0,t)||,$$

利用上述估计，我们可以推得

$$e^{-\int_{t_0}^{t}||A(s)||\,ds} \leq ||X(t,t_0)|| \quad \text{and} \quad ||X(t_0,t)||^{-1} \leq e^{\int_{t_0}^{t}||A(s)||\,ds}$$

于是，对 $t > t_0$，引理得证。对于 $t < t_0$ 的情形，证明方法类似，留给读者完成。□

引理 1.4. 初值问题：

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A(t)x + f(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right. \tag{1.9}$$

其中 $J \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$, $t_0 \in J$，且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 有唯一解$t \mapsto x(t)$，由下式给出：

$$x(t) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)f(s)\,ds. \tag{1.10}$$

证明。设 $J \ni s \mapsto x(s)$ 是方程 (1.9) 的一个解，则将$\dot{x}(s)$ 乘以 $X^{-1}(s)$，得到

$$X^{-1}(s)\dot{x}(s) - X^{-1}(s)A(s)x(s) = X^{-1}(s)f(s).$$

于是，根据注 1.2 可知，上述恒等式等价于

$$\frac{d}{ds}\Big\{X^{-1}(s)x(s)\Big\} = X^{-1}(s)f(s),$$

随后，我们在 t_0 和 t 之间积分，便可推得

$$X^{-1}(t)x(t) = X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\,ds$$

并且可以很容易地推导出恒等式 (1.10)。

为证明唯一性，我们考虑解 $J \ni t \mapsto z(t)$，并定义 $u(t) = x(t) - z(t)$。于是可以看出，$t \mapsto u(t)$ 是满足初值条件 $u(t_0) = c = 0$ 的初值问题 (1.6) 的解。此后，利用引理 1.2 可得，对于任意 $t \in J$，$u(t) = 0$，由此可得唯一性。□

从基本矩阵和转移矩阵是诸如 (1.3) 这样的矩阵微分方程的解这一出发点，我们可以看出，研究将上述矩阵方程一般化的矩阵微分方程是可行的。以下结果改编自[**43**, 第 3] 章。

引理 1.5. 考虑连续矩阵值函数$J \ni t \mapsto A(t)\ B(t)\ F(t) \in M_n(\mathbb{R})$。矩阵微分方程

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)B(t) + F(t) \tag{1.11}$$

有如下形式的解

$$Q(t) = X(t,s)Q(s)Y(s,t) + \int_s^t X(t,\tau)F(\tau)Y(\tau,t)\,d\tau, \tag{1.12}$$

其中，$X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是与线性系统 $\dot{x} = A(t)\,x$ 和 $\dot{y} = B(t)\,y$ 相关的基矩阵。

证明。我们在左侧将（1.11）乘以 $X(s,\tau)$。然后利用（1.7）可得

$$\begin{aligned} X(s,\tau)F(\tau) &= X(s,\tau)\dot{Q}(\tau) - X(s,\tau)A(\tau)Q(\tau) + X(s,\tau)Q(\tau)B(\tau), \\ &= X(s,\tau)\dot{Q}(\tau) + \frac{d}{d\tau}\left\{X(s,\tau)\right\}Q(\tau) + X(s,\tau)Q(\tau)B(\tau), \\ &= \frac{d}{d\tau}\left\{X(s,\tau)Q(\tau)\right\} + X(s,\tau)Q(\tau)B(\tau). \end{aligned}$$

通过这种方式，我们在右侧将上述恒等式乘以 $Y(\tau,\ s)$，然后再次利用（1.7）可得

$$\begin{aligned} X(s,\tau)F(\tau)Y(\tau,s) &= \frac{d}{d\tau}\left\{X(s,\tau)Q(\tau)\right\}Y(\tau,s) + X(s,\tau)Q(\tau)B(\tau)Y(\tau,s), \\ &= \frac{d}{d\tau}\left\{X(s,\tau)Q(\tau)\right\}Y(\tau,s) + X(s,\tau)Q(\tau)\frac{d}{d\tau}\left\{Y(\tau,s)\right\}, \\ &= \frac{d}{d\tau}\left\{X(s,\tau)Q(\tau)Y(\tau,s)\right\}. \end{aligned}$$

在 s 与 t 之间积分可得

$$X(s,t)Q(t)Y(t,s) = Q(s) + \int_s^t X(s,\tau)F(\tau)Y(\tau,s)\,d\tau,$$

分别在左侧和右侧乘以 $X(t,\ s)$ 和 $Y(s,\ t)$，即可由上述恒等式推出（1.12）。□

上述结果具有极限情形，这些情形本身很重要:

推论 1.1. 矩阵微分方程

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) + F(t), \tag{1.13a}$$

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - B(t)Q(t), \tag{1.13b}$$

其中 $J \ni t \mapsto A(t)\ B(t)\ F(t) \in M_n(\mathbb{R})$ 的解分别为：

$$Q(t) = X(t,s)Q(s) + \int_s^t X(t,\tau)F(\tau)\,d\tau, \tag{1.14a}$$

$$Q(t) = X(t,s)Q(s)Y(s,t) \tag{1.14b}$$

其中，$X(t)$ 和 $Y(t)$ 是与线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 和 $\dot{y} = B(t)y$相对应的基本矩阵。

注 1.5. 带有初始条件 $Q(t_0) = I$且定义于 $t_0 \in J$ 处的方程 (1.13b) 有一个解 $Q(t) = X(t)Y^{-1}(t)$，其中这些基本矩阵满足 $X(t_0) = Y(t_0) = I$。此外，由于 $Q(t)$ 是非奇异的，因此可以写成 $Y(t) = Q^{-1}(t)X(t)$ 和 $X(t) = Q(t)Y(t)$。

下面的注记可视为前述结果的逆命题：

注 1.6. 若 $\dot{x} = A(t)x$ 的一个基本矩阵 $X(t)$ 可分解为 $X(t) = Q(t)V(t)$，其中 Q 和 V 可微且可逆，则 Q 满足矩阵微分方程

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)B(t) \quad \text{with} \quad B(t) = \dot{V}(t)V^{-1}(t).$$

1.2. 伴随系统。为了引入线性系统 (1.1) 的伴随系统，我们考虑矩阵微分方程 (1.13b) 的一个特例，其中 $B(t) = -A^T(t)$：

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t). \tag{1.15}$$

由推论 1.1 和注 1.5 可知，矩阵微分方程 (1.15) 在某个$t_0 \in J$处满足初始条件 $Q(t_0) = I$ 时，有一个解 $Q(t) = X(t)Y^{-1}(t)$，其中 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是 (1.1) 和

$$\dot{y} = -A^T(t)y, \tag{1.16}$$

这称为 (1.1) 的伴随系统。

为了研究 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 之间的关系，注意到：

$$Y^T(t)\dot{X}(t) = Y^T(t)A(t)X(t).$$

此外，我们在 t_0 和 t 之间对 $t, t_0 \in J$ 进行分部积分，并利用恒等式 $\frac{d}{dt}[U(t)]^T = \left[\frac{d}{dt}U(t)\right]^T$,可以推得

$$Y^T(t)X(t) = I + \int_{t_0}^t [\dot{Y}^T(\tau) + Y(\tau)^T A(\tau)]X(\tau)\,d\tau = I,$$

由于 $Y(t)$ 验证了 $\dot{Y}^T(t) + Y(t)A(t) = 0$ 对于任意 $t \in J$，我们得出：

定理 1.1。 如果 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是 (1.1)及其伴随系统的基矩阵，且都在 t_0 处归一化，则有

$$Y(t) = [X^{-1}(t)]^T \quad \text{for any } t \in J.$$

我们强调，上述结果可以通过直接计算得到，只需使用注 1.2 中的 d) 条。尽管如此，注 1.5 提供了一个互补的视角：将 (1.16) 的基本矩阵视为 $Y(t) = Q^{-1}(t)X(t)$，其中 $Q(\cdot)$ 是 (1.15) 的一个解，且 $Q(t_0) = X(t_0) = Y(t_0) = I$。

下面的结果是定理 1.1 的直接推论：

推论 1.2。 设 $X(t)$ 是系统(1.1)的一个基本矩阵。那么，当且仅当下列恒等式成立时， $Y(t)$ 是其伴随系统 (1.16)的一个基本矩阵

$$Y^T(t)X(t) = C \quad \text{for any } t \in J, \text{ where } C \text{ is invertible.} \tag{1.17}$$

证明。首先假设 $X(t)$ 是 (1.1) 的一个基本矩阵，则 $X(t)X^{-1}(t_0)$ 也是一个在 $t_0 \in J$ 处归一化的基本矩阵。根据定理 1.1，我们知道

$$Y(t) = [X(t_0)X^{-1}(t)]^T = [X^{-1}(t)]^T X^T(t_0),$$

这意味着 $Y^T(t)X(t) = X(t_0)$，并且恒等式 (1.17) 通过 $C = X^T(t_0)$ 得到验证。

现在，假设恒等式 (1.17) 已得到验证。给定 $t_0 \in J$，我们有 $C = Y^T(t_0)X(t_0)$，并且

$$\tilde{X}(t) = X(t)X^{-1}(t_0) = [Y^T(t)]^{-1}CX^{-1}(t_0) = [Y^T(t)]^{-1}Y^T(t_0)$$

是 (1.1) 的一个在 $t_0 \in J$ 处归一化的基本矩阵。应用定理 1.1，我们可以推出

$$[\tilde{X}^{-1}(t)]^T = Y(t)Y^{-1}(t_0)$$

也是 (1.16) 的一个在 t_0 处归一化的基本矩阵。最后，由于根据注 1.1，$Y(t_0)$ 是可逆的，我们可以得出 $Y(t)$ 是 (1.16) 的一个基本矩阵，结论得证。□

上述定理的一个特殊但有趣的情形由以下结果给出：

推论 1.3. 若线性系统 (1.1) 满足 $A(t)$ 对任意 $t \in J$ 都是反对称的，则任意基本矩阵 $X(t)$ 对任意 J 都是正交的。

证明。设 $X(t)$ 是系统 (1.1) 的一个基本矩阵。由于对任意 $t \in J$, $A(t) = -A^T(t)$，因此系统 (1.1) 和 (1.16) 重合，这意味着 $X(t) = [X^{-1}(t)]^T$，由此可得 $X(t)$ 的正交性。□

注 1.7. 上述推论的一个有趣例子由以下线性系统给出

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & e^t \\ -e^t & 0 \end{bmatrix} x \quad \text{and} \quad \dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} y$$

它们的基本矩阵为

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos(e^t) & \sin(e^t) \\ -\sin(e^t) & \cos(e^t) \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad Y(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

我们很容易看出，$X^T(t) = X^{-1}(t)$ 且 $Y^{-1}(t) = Y^T(t)$。另请注意，对于任意 $t \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \det X(t)$ 和 $t \mapsto \det Y(t)$ 均等于 1。最后，由于任意反对称矩阵的迹为零，上述例子很好地说明了下一小节的主题。

1.3. 刘维尔公式。给定一个线性系统 (1.1)，刘维尔公式将任意基本矩阵$X(t)$的行列式与其对应矩阵的迹联系起来，如下所示：

定理1.2。对于任意 $t, t_0 \in J$，*(1.1)* 的任意基本矩阵 $X(t)$ 都满足以下恒等式：

$$\det X(t) = \det X(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)\, ds}. \tag{1.18}$$

证明。注意到

$$\frac{d}{dt}\left(\det X(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)\, ds} \right) = \operatorname{Tr} A(t) \det X(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)\, ds}$$

并且我们可以验证，$t \mapsto \det X(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)\, ds}$ 是该标量初值问题的解

$$\begin{cases} \dot{u} &= \operatorname{Tr} A(t) u \\ u(t_0) &= \det X(t_0). \end{cases} \tag{1.19}$$

现在，让我们计算 (1.18) 右侧的导数：

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\left[\det X(t)\right] &= \lim_{h\to 0}\frac{\det X(t+h)-\det X(t)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\det[X(t+h)X^{-1}(t)X(t)]-\det X(t)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\det[X(t+h)X^{-1}(t)]\det X(t)-\det X(t)}{h}\\
&= \left(\lim_{h\to 0}\frac{\det[X(t+h)X^{-1}(t)]-\det I}{h}\right)\det X(t).
\end{aligned}$$

现在，注意到

$$\begin{aligned}
X(t+h)X^{-1}(t) &= I+\int_t^{t+h} A(s)X(s)X^{-1}(t)\,ds\\
&= I+h\theta(t,h) \quad \text{with} \quad \theta(t,h)=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} A(s)X(s,t)\,ds.
\end{aligned}$$

根据上述恒等式，$\det X(t+h)X^{-1}(t)$ 的计算可以采用与计算矩阵特征多项式相似的方法。事实上，注意到

$$\begin{aligned}
\det X(t+h)X^{-1}(t) &= \det\left(hh^{-1}I+h\theta(t,h)\right)\\
&= h^n\det\left(h^{-1}I+\theta(t,h)\right)\\
&= h^n\det\left(h^{-1}I-\sigma(t,h)\right) \ \text{with } \sigma(t,h)=-\theta(t,h).
\end{aligned}$$

使用 Leverrier–Faddeev算法 [70], ，我们有

$$\det\left(h^{-1}I-\sigma(t,h)\right) = h^{-n}-h^{1-n}\mathrm{Tr}(\sigma_0)-\sum_{k=2}^{n}\mathrm{Tr}(\sigma_{k-1})\tfrac{h^{k-n}}{k},$$

其中 σ_k（其中 $k=0$，.....，$n-1$）递归定义为

$$\begin{cases}
\sigma_0 &= -\theta(t,h)\\
\sigma_k &= -\theta(t,h)\left(\sigma_{k-1}-\frac{1}{k}\mathrm{Tr}(\sigma_{k-1}I)\right).
\end{cases}$$

于是可得

$$\det X(t+h)X^{-1}(t)=1+h\,\mathrm{Tr}[\theta(t,h)]+\sum_{k=2}^{n}\frac{h^k}{k}\mathrm{Tr}(\sigma_{k-1}).$$

结合上述恒等式与 $\det I = 1$，即可完成计算：

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\det X(t) &= \lim_{h\to 0}\Big(\mathrm{Tr}(\theta(t,h)) + \sum_{k=2}^{n}\tfrac{h^{k-1}}{k}\mathrm{Tr}(\sigma_{k-1})\Big)\det X(t)\\ &= \lim_{h\to 0}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} A(s)X(s)X^{-1}(t)\right]\det X(t)\\ &= \mathrm{Tr}A(t)\det X(t),\end{aligned}$$

这意味着 $t \mapsto \det X(t)$ 也是初值问题 (1.19) 的解，而恒等式 (1.18) 则由引理 1.2 得出。□

刘维尔公式在文献中也称为阿贝尔–雅可比–刘维尔公式，详情请参阅 [**1**] 。

2. 有界增长

据我们所知，有界增长这一性质由 W.A. Coppel 在 [**41**, 第 8–9]页首次引入。不过，我们将采用 K.J. Palmer 在 [**102**, 第172]页提出的一对定义：

定义 2.1。 系统 (1.1) 在 J 上具有有界增长，当且仅当存在常数 $K > 0$和 $\alpha \geq 0$，使其转移矩阵满足

$$||X(t,s)|| \leq Ke^{\alpha(t-s)} \quad \text{for any } t \geq s \text{ with } t, s \in J. \tag{2.1}$$

定义 2.2。 系统 (1.1) 在 J 上具有有界衰减，当且仅当存在常数 $K > 0$ 和 $\alpha \geq 0$，使其转移矩阵满足

$$||X(t,s)|| \leq Ke^{\alpha(s-t)} \quad \text{for any } s \geq t \text{ with } t, s \in J.$$

显然可以看出，上述定义描述的性质都包含在 S. Siegmund 于 [**121**,p.253] 中给出的以下定义里：

定义 2.3. 系统 (1.1) 在 J 上具有有界增长 & 衰减，当且仅当存在常数 $K > 0$ 和 $\alpha \geq 0$，使其转移矩阵满足

$$||X(t,s)|| \leq Ke^{\alpha|t-s|} \quad \text{for any } t, s \in J.$$

W. Coppel 在 [**41**] 中给出了关于 J 上有界增长性质的另一种刻画：

命题 2.1。 系统 (1.1)在 J 上具有有界增长，当且仅当对每个 $h > 0$ ，都存在 $C_h \geq 1$ ，使得 (1.1) 的任意解$t \mapsto x(t)$ 满足

$$|x(t)| \leq C_h |x(s)| \quad \text{for any } t \in [s, s+h] \cap J. \tag{2.2}$$

证明。首先，假设 (2.1) 得到验证。那么，给定 $h > 0$ 和 $0 \leq t - s \leq h$ ，容易验证 (2.2) 在$C_h = \max\{1, Ke^{\alpha h}\}$的情况下成立。

其次，假设对于给定的 $h > 0$ ，(2.2) 得到验证，并考虑将 J划分为长度较大的区间，使得 $t \in [s + (n-1)h, s + nh] \cap J$。容易推出 $|x(t)| \leq C_h^n |x(s)|$。另一方面，容易推出 $n - 1 \leq \frac{t-s}{h} \leq n$ ，并且

$$|x(t)| = |X(t,s)x(s)| = C_h^n |x(s)| \leq C_h \, e^{\frac{\ln(C_h)}{h}(t-s)} |x(s)|,$$

并且 (2.1) 在 $K = C_h$ 和 $\alpha = \frac{\ln(C_h)}{h}$ 的情况下得到验证。 □

下一个结果可以用类似的方法证明，其证明留作练习。

命题 2.2。系统(1.1) 具有：

a)当且仅当对于每个 $h > 0$，存在 $C_h \geq 1$ ，使得 J 上的任意解 $t \mapsto x(t)$ 满足 (1.1) 中的条件：

$$|x(t)| \leq C_h |x(s)| \quad \text{for any } t \in [s-h, s] \cap J,$$

b) 当且仅当对于每个 $h > 0$，存在 $C_h \geq 1$ ，使得 J 上的任意解 $t \mapsto x(t)$ 满足 (1.1)中的条件：

$$|x(t)| \leq C_h |x(s)| \quad \text{for any } t \in [s-h, s+h] \cap J.$$

注 2.1. 正如 W.A. Coppel 在 [41, 第 9], 页指出的，仔细阅读 (2.1) 的证明可知，若 (2.1) 成立，则对任意 $h > 0$，性质 (2.2) 均成立。也就是说，有界增长这一性质与 h 的选择无关。这一事实同样适用于有界衰减以及有界增长与衰减的性质。

从实际角度来看，了解确保线性系统具有有界增长性质的充分条件将很有用。引理 1.3 给出了一组充分条件，即当 $A(t)$ 有界或积分有界时：

推论 2.1。 若 $t \mapsto A(t)$ 满足 $\sup_{t \in J} ||A(t)|| = M$，则该系统 (1.1) 在 J 上具有有界增长& 与衰减。

证明。利用引理 1.3 中的不等式 (1.8)，可得

$$||X(t,s)|| \le ||I||e^{M|t-s|}$$

结果即可得出。

推论 2.2。 如果 $t \mapsto A(t)$ 满足以下性质：

$$A_h := \sup_{t\in J} \int_t^{t+h} ||A(r)||\, dr < +\infty,$$

对于某个 $h > 0$，则系统 (1.1) 在 J 上具有有界增长。

证明。设 $s \in J$ 和 $t \mapsto x(t)$ 是（1.1）的一个解。注意到

$$|x(t)| \le |x(s)| + \int_s^t ||A(\tau)||\, |x(\tau)|\, d\tau,$$

对于任意 $t > s$。根据格朗沃尔引理（见附录 B），我们有

$$|x(t)| \le |x(s)|e^{\int_s^t ||A(\tau)||\, d\tau} < |x(s)|e^{\int_s^{s+h} ||A(\tau)||\, d\tau} \quad \text{for any } t \in [s, s+h]$$

因此可以得出，（2.2）在 $C_h = e^{A_h}$ 下成立。 □

下面给出一个有趣的微分方程例子，它在 $\mathbb{R}$ 上不具有有界增长与衰减的性质，即 $\dot{x} = 2tx$。事实上，注意到其基本矩阵由 $X(t) = e^{t^2}$ 给出，因此有 $X(t, s) = e^{(t-s)(t+s)}$，很容易看出性质 (2.1) 无法得到验证。

下面的结果可见于 [41, 121]，它描述了有界增长性质的一个有趣推论：

命题2.3。如果系统 (1.1) 在 J 上具有有界增长 & 衰减的性质，且 $\alpha > 0$，那么方程 (1.1) 的解在包含于 J 中的任意紧区间上，都具有关于初始条件的一致连续依赖性。

证明。设 $t \mapsto x_1(t)$ 和 $t \mapsto x_2(t)$ 分别是方程 (1.1) 的两个解，它们分别在 $t = t_0$ 处经过 ξ_1 和 ξ_2，则对任意 $t \in [t_0 - h, t_0 + h] \subset J$，有

$$|x_1(t) - x_2(t)| = |X(t, t_0)\xi_1 - X(t, t_0)\xi_2| \le |\xi_1 - \xi_2|Ke^{\alpha|t-t_0|}$$

并且对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon, h) = \varepsilon/Ke^h$，使得若 $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$，则 $|x_1(t) - x_2(t)| < \varepsilon$ 对任意 $|t - t_0| \le h$均成立。□

我们指出，使用“均匀”一词是为了强调 δ不依赖于 t_0。

□

下面的结果表明，如果线性系统 (1.1) 具有有界增长性质，那么有界扰动系统也保留这一性质

$$\dot{z} = [A(t) + B(t)]z. \tag{2.3}$$

定理 2.1. 如果 (1.1) 在 J 和 $B(\cdot)$ 上具有有界增长，并且满足$||B(t)|| \leq M$ 对任意 $t \in J$均成立，那么系统 (2.3)也满足这一性质。

证明。(2.3) 的任意基本矩阵都满足矩阵微分方程

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t) + B(t)Z(t)$$

并利用推论 1.1 以及 $F(t) = B(t)Z(t)$，我们可以推导出

$$Z(t) = X(t,s)Z(s) + \int_s^t X(t,\tau)B(\tau)Z(\tau)\,d\tau,$$

其中 $X(t,s)$ 是与 (1.1) 相关联的转移矩阵。(1.1) 的有界增长结合命题 2.1 表明，存在常数 $K > 0$ 和 $\alpha \geq 0$，使得

$$||X(t,s)|| \leq Ke^{\alpha(t-s)} \quad \text{for any } t \geq s \text{ such that } t,s \in J.$$

设 $t \mapsto z(t) = Z(t,s)\xi$ 是 (2.3) 的一个解，它在$t = s$时经过 $\xi \neq 0$，且 $\sup_{t\in J} ||B(t)|| \leq M$，注意到

$$|z(t)| \leq Ke^{\alpha(t-s)}|z(s)| + \int_s^t Ke^{\alpha(t-\tau)}M|z(\tau)|\,d\tau \quad \text{for any } t \geq s \text{ with } t,s \in J.$$

利用格朗沃尔引理（见附录 B），我们可以推导出

$$|z(t)| \leq K|z(s)|e^{(KM+\alpha)(t-s)} \quad \text{for any } t \geq s \text{ such that } t,s \in J$$

或者等价地

$$\frac{|Z(t,s)z(s)|}{|z(s)|} \leq Ke^{(KM+\alpha)(t-s)} \quad \text{for any } t \geq s \text{ such that } t,s \in J,$$

这直接推出，对于任意满足 $t,\ s \in J$ 的 $t \geq s$，都有 $||Z(t,\ s)|| \leq Ke^{(KM+\alpha)(t-s)}$，并且有界增长性质得以验证。

□

3. 运动相似

为了陈述运动相似性的性质，我们将复值方阵函数集合 $\mathfrak{M}_n$ 定义如下：

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ A\colon J \to M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ is continuous and } \sup_{t\in J} ||A(t)|| < \infty \right\}.$$

定义 3.1. 矩阵函数 $t \mapsto Q(t) \in M_n(\mathbb{C})$ 称为李雅普诺夫变换，当且仅当它满足以下性质：

(i) $t \mapsto Q(t)$ 对任意 $t \in J$ 都可逆，(ii) $t \mapsto Q(t)$ 对任意 $t \in J$ 都可微，(iii) Q, Q^{-1}, $\dot{Q} \in \mathfrak{M}_n$，即：

$$\sup_{t \in J} \left[||Q(t)|| + ||Q^{-1}(t)|| + ||\dot{Q}(t)|| \right] < +\infty.$$

运动相似的经典定义由 L.Markusin [88]提出，并考察如下两个具有有界矩阵的线性系统之间的关系：

定义 3.2. 假设 $A, B \in \mathfrak{M}_n$。系统

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{for any } t \in J, \tag{3.1a}$$

$$\dot{y} = B(t)y \quad \text{for any } t \in J \tag{3.1b}$$

如果存在一个李雅普诺夫变换$Q(t)$ 使得下式成立，则称它们运动学相似：

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)B(t) \quad \text{for any } t \in J. \tag{3.2}$$

此外，如果 A,B 和 Q 均为实值，则称(3.1a) 和(3.1b) 在实数域上运动学相似。

注 3.1. 在 [88], 中，Markus 考虑情形 $J = [0, +\infty)$。情形 $J = \mathbb{R}$ 在 [63], 中讨论，该情形也称为完全运动相似。

注记 3.2. 容易验证，运动相似这一性质定义了一种等价关系。

注 3.3. 利用恒等式 (3.2)，可以很容易验证：

i) 坐标变换 $y = Q^{-1}(t)x$ 将线性系统 (3.1a) 变换为 (3.1 b)。ii) 根据前述性质，如果 $X(t)$ 是 (3.1a) 的基本矩阵，那么 $Y(t) = Q^{-1}(t)X(t)$ 就是 (3.1b) 的基本矩阵。iii) 推论 1.1 提供了一种求解矩阵微分方程 (3.2) 的方法。若 $0 \in J$ 且 $Q(0) = I$, 我们便得到前一结论中的恒等式。

在某些著作中，例如 [**43**, p.158] 和 [**41, 99, 100**] ，作者采用了另一种更一般的运动学相似定义，该定义不要求 Q[1] 的导数具有有界性:

定义 3.3. 给定两个连续矩阵值函数 $J \ni t \mapsto A(t)\ B(t)\ \in M_n(\mathbb{C})$，线性系统

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{for any } t \in J, \tag{3.3a}$$

$$\dot{y} = B(t)y \quad \text{for any } t \in J \tag{3.3b}$$

若存在一个可逆可微变换 $t \mapsto Q(t)$ ，使得 Q、Q^{-1} 和 $\dot{Q}$在 J上连续，则称它们是广义运动学相似 的，

$$\sup_{t\in J}\Big[||Q(t)|| + ||Q^{-1}(t)||\Big] < +\infty,$$

并且满足(3.2) 。此外，若 A、B 和 Q均为实值函数，则称(3.3a) 和 (3.3b) 在实数域上广义运动学相似。

本专著中，将定义 3.2 意义下的运动相似称为经典 运动相似。我们提出定义 3.3，是因为后续各节将用到它。

在假设 $A, B \in \mathfrak{M}_n$ 成立的条件下，经典运动相似和一般运动相似的两种定义是等价的；再结合 $Q(t)$和 $Q^{-1}(t)$在 J 上的有界性，这是因为矩阵微分方程 (3.2) 意味着 $Q(t)$在 J上也有界。

另一方面，在处理无界矩阵 A和 B时，一般定义 3.3 很有用。

无论是经典的还是一般的运动相似，都可以看作是将自治线性系统约化为标准形这一经典方法在非自治框架下的推广。事实上，当 A和 B 是 $M_n(\mathbb{C})$中的常矩阵时，系统 (3.1a) 和 (3.1b) 变为

$$\dot{x} = Ax, \tag{3.4a}$$

$$\dot{y} = By \tag{3.4b}$$

并且，如果存在一个非奇异常矩阵 $Q \in M_n(\mathbb{C})$使得 $Q^{-1}AQ = B$，则它们相似 或静态相似 。注意

[1]例如：在《数学百科全书》中定义 Lyapunov 变换时，指出在许多情况下可以省去$\sup_{t\in J} ||Q(t)|| < +\infty$ 这一要求。参见链接。

这个恒等式等价于 $AQ - QB = 0$，于是 Q 是方程（3.2）的解。静态相似是线性代数中的经典主题，它可以得到具有尽可能简单结构的系统（3.4b），即对角形式或三角形式。

注 3.4. $Q(t)$ 和 $Q^{-1}(t)$ 的有界性在运动相似理论中至关重要。事实上，由推论 1.1 可知

$$Q(t) = X(t,0)Q(0)Y(0,t)$$

满足矩阵微分方程 (3.2)，并且 $y = Q^{-1}(t)x$ 将 (3.3a) 变换为 (3.3b)。因此，如果我们去掉 $Q(t)$ 和 $Q^{-1}(t)$ 有界性的假设，就会得到任意线性系统都与另一个线性系统相似。

为了指出上述注记的重要性，我们陈述如下结果:

引理 3.1. 如果线性系统 $(3.3\mathrm{a})$ 和 $(3.3\mathrm{b})$ 的一对基矩阵 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 及其逆矩阵在 J 上有界，则这些系统广义运动学相似。

证明。我们可以考虑归一化矩阵，即 $X(0) = Y(0) = I$，由推论 1.1 可知，$Q(t) = X(t)Y^{-1}(t)$ 满足定义 3.3 的假设，因而引理得证。□

推论 3.1。若线性系统$(3.3\mathrm{a})$ 的基本矩阵 $X(t)$及其逆矩阵在 J 上有界，则系统$(3.3\mathrm{a})$ 与

$$\dot{y} = 0,$$

广义运动学相似。

证明。由引理 3.1 可知，$Q(t) = X(t)$ 满足定义 3.3 的假设，因此可得广义运动相似。

此外，若 $A(t)$ 在 J 上有界，则可得 $Q(t)$ 是李雅普诺夫变换，从而可得经典运动相似。□

推论 3.2。任意一对反对称线性系统$(3.3\mathrm{a})$与$(3.3\mathrm{b})$ 在 J 上都广义运动学相似。

证明。设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是 (3.3a) 和 (3.3b) 的基矩阵。由推论 1.3 可得 $X^T(t) = X^{-1}(t)$ 和 $Y^T(t) = Y^{-1}(t)$，这意味着

$$||X(t)||_2 = \sigma_{\max}(X(t)) = \sqrt{\lambda_{\max}(X^T(t)X(t))} = 1$$

类似地，我们可以推得 $Y(t)$ $X^{-1}(t)$ 和 $Y^{-1}(t)$ 的欧几里得范数相同，结论得证。□

上述推论的一个有趣例子由以下线性系统给出

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & e^t \\ -e^t & 0 \end{bmatrix} x \quad \text{and} \quad \dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} y,$$

它们通过变换 $y = Q^{-1}(t)x$运动学相似，其中 $Q(t) = X(t)Y^T(t)$，且 $X(t)$和 $Y(t)$如注 1.7 所述。

定理 3.1。 有界增长、有界衰减以及在 J 上的有界&衰减等性质在经典或一般运动学相似下均保持不变。

证明。无损一般性地，设 (3.3a) 和 (3.3b) 通过变换 $y = Q^{-1}x$ 一般运动学相似，其中

$$\max\left\{\sup_{t\in J}||Q(t)||, \sup_{t\in J}||Q^{-1}(t)||\right\} \leq M.$$

设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是 (3.3a) 和 (3.3b) 的基矩阵。如果 (3.3a) 在 J 上具有有界增长与衰减，则根据定义 2.3，存在 $K > 0$ 和 $\alpha \geq 0$ 使得

$$||X(t,s)|| \leq Ke^{\alpha|t-s|} \quad \text{for any } t, s \in J.$$

根据注 3.3，我们还知道，一般运动学相似意味着 $Y(t) = Q^{-1}(t)X(t)$，并且

$$||Y(t,s)|| = ||Q^{-1}(t)X(t)X^{-1}(s)Q(s)|| \leq M^2||X(t,s)|| \leq KM^2e^{\alpha|t-s|},$$

并验证了 (3.3b) 在 J 上的有界增长与衰减。注意，有界增长和有界衰减的性质是前述估计的结果。□

在本节余下部分，我们将研究两个具有代表性的运动相似例子，其中基本矩阵 $X(t)$ 具有分解 $X(t) = Q(t)V(t)$，且 V 具有特殊性质。由注 1.6 可知，在这种情况下可以推出

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)\dot{V}(t)V^{-1}(t)$$

在 Q 和 V 满足适当条件的前提下。首先，我们将研究弗洛凯理论的一个简化版本，该版本考虑 ω–周期情形 $A(t+\omega) = A(t)$，其中任意 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。其次，我们将研究将 (3.1a) 变换为上三角线性系统，这项工作最初由 O. Perron 和 S.P. Diliberto 开展。

3.1. 弗洛凯理论。 考虑满足 $\mathbb{R}$ 上连续性假设的线性非自治系统 (3.1a)，并且：

$$A(t+\omega) = A(t) \quad \text{for any } t \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

关于这一主题的开创性研究由法国数学家 G. Floquet 于 [56] 完成。不过，我们将采用多项研究所发展出的现代方法，如 [1]。

引理 3.2. 若验证了 (3.5)，则与系统 (1.1) 相关联的转移矩阵满足如下 ω–双周期性性质：

$$X(t+\omega, s+\omega) = X(t,s) \quad \text{for any } t, s \in \mathbb{R}.$$

证明。设 $X(t)$ 是 (1.1) 的一个基矩阵。首先，可以证明 $X(t+\omega)$ 也是 (1.1) 的一个基矩阵。事实上，注意到 (3.5) 意味着

$$\dot{X}(t+\omega) = A(t+\omega)X(t+\omega) = A(t)X(t+\omega),$$

并且我们可以看到，$X(t+\omega)$ 的各列都是 (1.1) 的解。

由于 $X(t)$ 的各列线性无关，因此有 $\det X(t+\omega) \neq 0$，并且 $X(t+\omega)$ 的各列也是 (1.1) 的解的一个基。

由于 $X(t)$ 和 $X(t+\omega)$ 都是基矩阵，因此存在一个可逆矩阵 B，使得

$$X(t+\omega) = X(t)B \quad \text{and} \quad X^{-1}(t+\omega) = B^{-1}X^{-1}(t). \tag{3.6}$$

根据转移矩阵的定义，我们有

$$\begin{aligned} X(t+\omega, s+\omega) &= X(t)BB^{-1}X^{-1}(s) \\ &= X(t)X^{-1}(s) \\ &= X(t,s) \end{aligned}$$

引理得证。 □

定义 3.4. 方程(3.6) 中的矩阵 B 称为系统(1.1)的单值矩阵。 B 的特征值称为系统(1.1)的弗洛凯乘子。

请注意，若考虑归一化基本矩阵，则方程 (3.6) 和 $t = 0$ 蕴含

$$X(\omega) = B \quad \text{and consequently} \quad X(t+\omega) = X(t)X(\omega). \tag{3.7}$$

引理 3.3. </style}数 是系统(1.1) 的弗洛凯乘子，当且仅当存在一个非平凡解 $t \mapsto x(t)$ 使得

$$x(t+\omega) = \rho\, x(t). \tag{3.8}$$

证明. 不失一般性，可假设 $X(0) = I$。在这种情况下，由方程 (3.7) 可得 $X(\omega) = B$。

首先，我们假设 ρ 是单值矩阵 $X(\omega) = B$ 的特征值。于是，存在一个向量 $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$，使得$X(\omega)v = \rho v$。现在，考虑经过 v 且在 $t = 0$ 处取值的方程 (1.1) 的解 $t \mapsto x(t)$，那么根据引理 1.2、$X(0) = I$ 以及 (3.7) 的右侧方程可知，$x(t) = X(t)v$，因此我们可以看到

$$x(t + \omega) = X(t + \omega)v = X(t)X(\omega)v = \rho\, x(t)$$

并且恒等式 (3.8) 得证。

其次，假设 (3.8) 成立。将此恒等式代入 $t = 0$，得到

$$x(\omega) = \rho\, x(0).$$

此外，根据引理 1.2，我们知道任意非平凡解$t \mapsto x(t)$ 均可表示为 $x(t) = X(t)x(0)$。于是，我们可以看到

$$x(\omega) = X(\omega)\, x(0).$$

现在，考察上述恒等式的右侧部分，可得

$$X(\omega)x(0) = \rho\, x(0)$$

并且有，ρ 是 $B = X(\omega)$的一个特征值。 □

注 3.5. 由弗洛凯乘子的定义可直接推出，连续的 ω–周期系统 (1.1) 存在非平凡的 ω–周期解，当且仅当 $\rho = 1$ 是 (1.1) 的一个弗洛凯乘子，或者等价地，$X(\omega, 0) - I$ 是非奇异的。

我们指出，由于弗洛凯的原始著作使用了过时的语言，因此难以阅读；在我们看来，尽管已有 [**117, 126**]作出的贡献，对其进行仔细研读仍有待完成。下面的结果是对其的现代诠释：

定理 3.2。 若 $X(t)$ 是 ***(1.1)*** 的一个基本矩阵，则存在一个连续且 ω–周期的矩阵 $Q(t)$ 以及一个常矩阵$D \in M_n(\mathbb{C})$，使得：

$$X(t, 0) = Q(t)e^{Dt} \quad \text{where} \quad D = \frac{1}{\omega} \ln X(\omega, 0). \tag{3.9}$$

证明。由于 $X(t,0)$ 是一个可逆矩阵，我们知道 D 有明确定义；详情请参阅 [**14**, 附录 3]。于是我们有

$$X(\omega, 0) = e^{D\omega} \quad \text{and} \quad X(0, \omega) = e^{-D\omega}.$$

现在，定义 $Q(t) = X(t,0)e^{-Dt}$，并注意到

$$X(t,0) = X(t,0)e^{-Dt}e^{Dt} = Q(t)e^{Dt}.$$

为完成证明，我们需要验证 $Q(t)$ 是连续且ω–周期的。由于连续性显然成立，我们将仅利用上述恒等式结合 ω–双周期性来验证 ω–周期性：

$$\begin{aligned} Q(t+\omega) &= X(t+\omega,0)e^{-D\omega}e^{-Dt} \\ &= X(t+\omega,0)X(0,\omega)e^{-Dt} \\ &= X(t+\omega,\omega)e^{-Dt} \\ &= X(t,0)e^{-Dt} = Q(t). \end{aligned}$$

□

不妨始终取一个基本矩阵 $X(t)$，使得 $X(0) = I$。于是根据 Floquet 定理，有

$$X(t) = Q(t)e^{Dt} \quad \text{and} \quad Q(t) = X(t)e^{-Dt},$$

其中， D 与单值矩阵有关。

引理 3.4。 ***Floquet*** 定理中所述的矩阵 $Q(t) = X(t)e^{-Dt}$ 是一个李雅普诺夫变换

证明。一方面，定义 3.1 的性质 (i) 和 (ii) 是 $X(t)$ 与 e^{-Dt} 的可逆性和可导性的结果。另一方面，由于 $Q(t)$ 是连续且 ω–周期的，可以证明 $Q^{-1}(t)$ 和 $\dot{Q}(t)$ 具有相同的性质，这意味着

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left[||Q(t)|| + ||Q^{-1}(t)|| + ||\dot{Q}(t)||\right] = \max_{t\in[0,\omega]} \left[||Q(t)|| + ||Q^{-1}(t)|| + ||\dot{Q}(t)||\right]$$

性质 (iii) 随即得证。 □

定理 3.3. ω–周期连续系统 (3.1a) 与自治线性系统

$$\dot{y} = Dy$$

在经典意义下运动学相似。

证明。由于 $Q(t) = X(t)e^{-Dt}$，注意到

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= \dot{X}(t)e^{-Dt} - X(t)De^{-Dt}, \\ &= A(t)X(t)e^{-Dt} - X(t)e^{-Dt}D, \\ &= A(t)Q(t) - Q(t)D. \end{aligned}$$

现在，若 $t \mapsto x(t)$ 是线性系统 (3.1a) 的解，则很容易验证， $y = Q^{-1}(t)x$ 将 (3.1a) 变换为 $\dot{y} = Dy$，定理由此得证，因为 $Q(t)$ 是李雅普诺夫变换。□

3.2. 线性系统三角化。以下结果由 O. Perron 在 [106] 中证明，是文献中的经典结果。尽管如此，S.P. Diliberto 在 [49,Th.1] 中以及 L.Y. Adrianova 在 [1, Th.3.3.1] 中给出了更简单的证明。

定理 3.4（佩龙三角化定理）。 任意线性系统（3.3a）都可通过线性变换 $y = Q^{-1}（t）x$在实数域上广义运动学相似，其中 $Q（t）$为正交矩阵，从而化为一个上三角系统

$$\dot{y} = B(t)y, \tag{3.10}$$

其对角系数为实数。此外，若 $||A（t）||_2 \leq M$ 系统（3.1a）和（3.10） 经典运动学相似，且 $||B（t）||_2 \leq（1 + n）M$。

证明。设 $X(t) = [x_1(t) \ldots x_n(t)]$ 为（3.1a）的一个基本矩阵。利用 QR分解可得，该基本矩阵可分解如下

$$X(t) = Q(t)R(t), \tag{3.11}$$

其中 $Q(t) \in M_n(\mathbb{R})$ 是正交矩阵:

$$Q(t) = [e_1(t) \ldots e_n(t)] \quad \text{with } e_i(t) = \frac{\xi_i(t)}{||\xi_i(t)||_2} \text{ for } i = 1, \ldots, n$$

且 $\{\xi_i(t)\}_{i=1}^n$ 是将 Gram– Schmidt 过程应用于$\{x_1(t) \ldots, \ x_n(t)\}$后得到的正交集，即

$$\begin{array}{rcl} \xi_1 & = & x_1 \\ \xi_2 & = & x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_n & = & x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, e_j\rangle e_j. \end{array}$$

我们可以看到，$\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ 是（3.1a）的解的标准正交基。

另一方面， $R(t)$ 是上三角矩阵

$$R(t) = \begin{bmatrix} ||\xi_1(t)||_2 & \langle x_2(t), e_1(t)\rangle & \ldots & \langle x_n(t), e_1(t)\rangle \\ 0 & ||\xi_2(t)||_2 & \ldots & \langle x_n(t), e_2(t)\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & ||\xi_n(t)||_2 \end{bmatrix}.$$

关于 [1] 中的 $Q(t)$和 $R(t)$的详细计算，请参阅引理 3.3.1。此外，注意到$R(t)$的对角项满足

$$r_{ii}(t) = ||\xi_i(t)||_2.$$

我们将证明， $y = Q^{-1}(t)x = Q^T(t)x$ 将（3.1a）变换为上三角系统 $\dot{y} = B(t)y$ ，其中

$$B(t) = \dot{R}(t)R^{-1}(t).$$

为了证明 $B(t)$ 定义良好，我们指出，由 (3.11) 可直接得到以下恒等式：

$$X^{-1}(t) = R^{-1}(t)Q^T(t), \tag{3.12a}$$

$$Q(t) = X(t)R^{-1}(t), \tag{3.12b}$$

$$Q^T(t) = R(t)X^{-1}(t). \tag{3.12c}$$

注意， $X(t)$ 可导，因为它是 (3.1a) 的基本矩阵；而 $Q(t)$ 也可导，因为它的列是由 $X(t)$ 的列构造而成的。此外，注 1.2 表明， $X^{-1}(t)$ 和 $Q^{-1}(t)$ 也可导。结合恒等式，利用这一事实可得

$$R(t) = Q^{-1}(t)X(t) = Q^T(t)X(t). \tag{3.13}$$

由此可知， $R(t)$ 可导；再利用引理 1.1，可知 $R^{-1}(t)$ 是一个可导的上三角矩阵，且 $B(t)$ 定义良好。

容易验证， $B(t)$ 是上三角矩阵，其实对角项如下所示：

$$b_{ii}(t) = \frac{r'_{ii}(t)}{r_{ii}(t)} = \frac{\langle \xi'_i(t), \xi_i(t) \rangle}{\langle \xi_i(t), \xi_i(t) \rangle}.$$

结合 (3.12c)、注 1.2 和恒等式 (3.12a)，可得：

$$\begin{aligned} \dot{Q}^T(t) &= \dot{R}(t)X^{-1}(t) - R(t)X^{-1}(t)A(t) \\ &= \dot{R}(t)X^{-1}(t) - Q^T(t)A(t) \\ &= \dot{R}(t)R^{-1}(t)Q^T(t) - Q^T(t)A(t) \\ &= B(t)Q^T(t) - Q^T(t)A(t). \end{aligned}$$

此外，恒等式 $\dot{Q}^T(t) = -Q^T(t)\,\dot{Q}(t)Q^T(t)$ 等价于

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)B(t)$$

并且我们可以看到， $y = Q^{-1}(t)x = Q^T(t)x$ 将 (3.1a) 变换为上三角系统 $\dot{y} = B(t)y$。此外，由于 $Q(t)$ 是正交的，因此我们有

$$||Q(t)||_2 = ||Q^T(t)||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(I_n)} = 1 \quad \text{for any } t \in J$$

一般的运动相似性得到了验证。

从现在起，我们假设对于任意 $t \in J$， $||A(t)||_2 \leq M$。利用 (3.13)，我们可以注意到

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{d}{dt}\left\{Q^T(t)X(t)\right\}R^{-1}(t) \\ &= \left\{\frac{d}{dt}Q^T(t)\right\}X(t)R^{-1}(t) + Q^T(t)A(t)X(t)R^{-1}(t) \\ &= \underbrace{\dot{Q}^T(t)Q(t)}_{=V(t)} + \underbrace{Q^T(t)A(t)Q(t)}_{=W(t)}. \end{aligned}$$

由于 Q^T 是正交的，通过简单计算可得 $V(t)$ 是反对称的。此外，很容易看出

$$||W(t)||_2 \leq ||Q^T(t)||_2||A(t)||_2||Q(t)||_2 \leq ||A(t)||_2 \leq M.$$

那么，结合上述性质可得:

- 由于 $B(t)$ 是上三角的，因此对于 $i > j$，有 $B_{ij}(t) = 0$，这意味着

$$V_{ij}(t) = -W_{ij}(t) \quad \text{for any } i > j.$$

- 由于 $V(t)$ 是反对称的，我们有

$$V_{ii}(t) = 0 \quad \text{for any } i = 1, \ldots, n \text{ and } V_{ij}(t) = -V_{ji}(t) = W_{ji}(t) \text{ for any } i < j.$$

我们可以看到

$$||V(t)||_2 \leq \sqrt{n}||V(t)||_1 \leq \sqrt{n}||W(t)||_1 \leq n||W(t)||_2$$

由此我们得出 $||B(t)||_2 \leq ||V||_2 + ||W||_2 \leq M(1+n)$

最后，由于 $Q(t)$是一个李雅普诺夫变换，因此经典运动学相似成立。事实上，我们已经知道 $||Q(t)||_2 = ||Q^T||_2 = 1$，而恒等式 $\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)B(t)$结合 $A(t)$和 $B(t)$的有界性，推出了$Q(t)$的有界性。□

4. 注释与参考文献

1) 基本矩阵和转移矩阵都是线性矩阵微分方程的解。在这一框架下，我们在小节**1.1)**中补充介绍了受常数变易法启发的矩阵微分方程相关结果。对这一主题感兴趣的读者可参阅 [**37, 101, 124, 127**]。

2) 有界增长有多种定义，为了加以区分，我们决定采用 Palmer 对有界增长和有界衰减的定义。有界增长的定义最早由 W.A. Coppel 在其专著 [**41**]中提出。据我们所知，

有界增长与衰减这一性质首次用于 [**121**] ，其中也称为有界增长，并用于证明方程 (1.1) 的解关于初始条件的一致连续性。

我们还补充了定理 2.1 的更多细节，并阐述了与一般 Bohl 指数的联系。

有界增长这一性质已通过多种方式加以推广：第一种方法考虑是否存在常数 $L > 0$ and$\beta \geq 0$ ，使得

$$||X(t,s)|| \leq L \left(\frac{h(t)}{h(s)} \right)^{\beta} \quad \text{for any } t \geq s \text{ with } t, s \in J_0 := (a, +\infty),$$

其中 h: $J_0 \to (0, +\infty)$ 是一个包含指数增长的递增同胚。关于这种方法的深入讨论，请读者参阅 [**53**, 第3]节。

第二种方法通过非一致有界增长 这一性质给出：若存在正常数 K, α 和 ε ，使得

$$||X(t,s)|| \leq K e^{\alpha|t-s|+\varepsilon|s|} \quad \text{for } t, s \in J$$

详情请参阅 [**35**] 。我们指出，系统 (1.1) 的解关于初始条件的一致连续性并未保留，而且它取决于初始时间。

3) 尽管伴随系统和刘维尔公式是文献中的标准内容，我们仍指出，我们对刘维尔公式的证明具有原创性。此外，T. Burton 在 [**22**], 中对推论 1.3 作了一个很好的应用，其中证明了：如果 $A(t)$ 是反对称且 ω周期的，那么系统 (1.1) 的解是几乎周期的。

4) 关于运动相似，我们指出了运动相似定义中的细微差异，并区分了经典定义和一般定义。俄语文献中此前也注意到了这一差异（例如，参见 [**1**, 第**43**页–44]中展开的讨论），其中经典运动相似的性质被称为可约性，并指出无需进行李雅普诺夫变换也能实现某种约化。

注 3.4、引理 3.1 和推论 3.1 均以专著 [**1**]为基础。最后，关于运动相似及其结果的详细综述可见 [**63**,第4]章。

5) 在 [**25**] （另见 [**1**, 第37]页）中，B.F. Bylov 创造了“几乎可约性 ”一词，用来表示与任意受扰系统经典运动学相似的性质。

也就是说，这些系统

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{and} \quad \dot{y} = B(t)y \quad \text{for any } t \geq 0,$$

如果对于任意 $\delta > 0$，都存在一个 Lyapunov 变换 $L_\delta(t)$，使得变量代换 $y = L_\delta^{-1}(t)x$ 将第一个系统变换为

$$y' = [B(t) + \Phi(t)]y, \quad \text{where } ||\Phi(t)|| < \delta \text{ for any } t \geq 0.$$

6) 关于弗洛凯理论的基本概述可参见 [**1, 19, 64,97**] ，而线性 ω–周期系统的深入研究见 [**129**]。定理 3.2 的证明假定读者具备复矩阵函数的基础知识，并请读者参阅 [**1**, 第1] 章和 [**17**, 第6]章。

弗洛凯理论已成功应用于马丢方程的研究

$$x'' + (a - 2q\cos(2t))x = 0 \quad \text{where } a \text{ and } q \text{ are real parameters,}$$

该方程源于天文学和物理学问题，详情请参阅 [**87, 129**] 。另一方面，人们一直在努力拓展弗洛凯理论，下面列举其中一些方向:

• 为线性非自治方程构建一种弗洛凯类型的理论，其中 $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t)$ 在 Bohr–Bochner 意义下几乎周期。在这一背景下，我们指出 J. Lillo [**81**] 关于线性几乎周期系统的研究，该研究引入了如下性质:

定义 4.1。如果对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个李雅普诺夫变换矩阵 $Q(t, \varepsilon)$ 使得几乎周期线性系统(3.1a) 和(3.1b) 近似相似

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} ||Q^{-1}(t, \varepsilon)\{A(t)Q(t, \varepsilon) - \dot{Q}(t, \varepsilon)\} - B(t)|| < \varepsilon,$$

并且注意，如果 $\varepsilon = 0$，我们就得到带有 $J = \mathbb{R}$ 的 (3.2)。

在 [**40**] 中，W.A. Coppel 考虑了一个几乎周期线性系统 (3.1a)，并尝试证明：如果 (3.1a) 在 $J = \mathbb{R}$ 上具有指数二分性，则它与 (3.1b) 运动学相似，且相似变换由一个几乎周期李雅普诺夫变换 $Q(t)$ 给出，但未能成功。不过，沿着 Lillo 的思路，可以证明 $t \mapsto X(t)PX^{-1}(t)$ 是几乎周期的。

J. Ben Slimene 和 J. Blot [**20**] 研究了一个几乎周期系统 (3.1a)，并证明如果其基本矩阵由 n几乎周期解构成，那么通过一个几乎周期 Lyapunov 变换，该系统与一个几乎周期三角系统 (3.1b) 运动学相似。

另一方面，D. Berkey [18] 和 M. Pinto [108]的研究并未采用基于运动相似的方法，而是着重于在几乎周期情形下构造一个模拟 (3.9) 结构的基本矩阵。

- 将 Floquet 定理推广到由这些系统描述的非线性框架

$$\dot{x} = f(t,x) \quad \text{for any } t \in \mathbb{R}, \tag{4.1a}$$

$$\dot{y} = g(t,y) \quad \text{for any } t \in \mathbb{R} \tag{4.1b}$$

其中 f, g: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足解的存在性与唯一性得到保证，且对于任意 t, $f(t+\omega, x) = f(t, x)$，并且 $g(t+\omega, y) = g(t, y)$。这项工作由福州学派的研究人员完成。在 [134], C. Zou 和 J. Shi 给出了确保存在非线性连续变换 H: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的必要条件，使其满足：

i) 对任意 $t \in \mathbb{R}$, $H(t, \cdot)$ 是一个同胚；ii) 对任意 $(t, x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $H(t+\omega, x) = H(t, x)$；iii) 若 $t \mapsto x(t)$ 是 (4.1a) 的解，则 $t \mapsto H(t, x(t))$ 是 (4.1b) 的解。

$H(t, x)$ 也可以看作将运动学相似性推广到非线性框架的一种特殊情形

定义 4.2。 给定两个非线性系统

$$\dot{x} = f(t,x) \quad \text{for any } t \in \mathbb{R}, \tag{4.2a}$$

$$\dot{y} = g(t,y) \quad \text{for any } t \in \mathbb{R} \tag{4.2b}$$

其中 f、g: $J \to \mathbb{R}^n$ 满足解的存在唯一性得以保证的条件。若存在一个连续可微的可逆矩阵 $Q(t)$ 使得，则称(4.2a)和(4.2b)运动学相似

$$G(t,x) = \dot{Q}(t)Q^{-1}(t)x + Q(t)F(t, Q^{-1}(t)x).$$

据我们所知，上述定义已在 F. Lin 的著作 [83] 中提出。

- Floquet 理论的另一种推广由 T.A. Burton 和 J.S. Muldowney 在 [23] 中提出，并在 [24, 57], 中扩展。他们指出，若满足以下条件，则 (1.1) 关于 f （GFS–f）是一个广义 Floquet 系统

$$f'(t)A(f(t)) = A(t). \tag{4.3}$$

其中 f: $(\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ 绝对连续，且 $f(t) > t$。

注意，$f(t) = t + \omega$ 满足上述关于 f 的性质，且 (4.3) 变为 $A(t + \omega) = A(t)$，这推广了 ω–周期情形。此外，恒等式 (4.3) 表明，矩阵$Y(t) = X(f(t))$ 满足 $Y\prime(t) = A(t)Y(t)$。

5. 习题

1.- 证明：如果矩阵值函数 $t \mapsto U(t)$ 在 J 上连续且可逆，那么 $t \mapsto U^{-1}(t)$ 在 J 上也连续。2.- 证明注 1.2 中的 a) 至 d) 各项。3.- 证明任意转移矩阵都满足矩阵微分方程 (1.7)。4.- 证明任意转移矩阵都验证注 1.4 中的各项。5.- 证明：如果 $X(t) \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $Y(t) \in M_m(\mathbb{R})$ 是以下线性系统的基本矩阵

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{and} \quad \dot{y} = B(t)y,$$

那么 $n + m$ 维系统

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & B(t) \end{bmatrix} z$$

具有如下转移矩阵

$$\begin{bmatrix} X(t,t_0) & W(t,t_0) \\ 0 & Y(t,t_0) \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad W(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)C(\tau)Y(\tau,t_0)\,d\tau.$$

6.- 线性系统 $\dot{x} = A(t)x$，其中 $t \mapsto A(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有界且连续，当且仅当存在 $K > 0$ 和 $\alpha > 0$，使其转移矩阵满足一致指数稳定

$$||X(t,s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad \text{for any } t \geq t_0.$$

证明一致指数稳定性在运动相似下保持不变。

7.- 如果引理 1.4 中的非齐次系统 (1.9) 有一个函数 f，使得 $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$，且相应的线性系统一致指数稳定，那么证明任意解 $t \mapsto x(t)$ 都满足 $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$。

8.- 如果 $X(t,s)$ 是某个线性系统的转移矩阵，证明 $[X(t,s)^{-1}]^T$ 是其伴随系统的转移矩阵。

9.- 在假设

$$A(t)\int_{\tau}^{t} A(s)\,ds = \left[\int_{\tau}^{t} A(s)\,ds\right] A(t),$$

的条件下证明

$$X(t,\tau) = e^{\int_\tau^t A(s)\,ds}$$

是 $\dot{x} = A(t)x$ 的转移矩阵。

10.- 证明命题 2.2。

11.- 假设对于任意 $t \in \mathbb{R}$， $t \mapsto A(t)$ 连续且反对称，证明线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 的任意基本矩阵都满足：对于任意 $t \in \mathbb{R}$，$\det X(t) = \det X(0)$。

12.- 证明经典运动学相似是一种等价关系。

13.- 证明注 3.3 中的陈述。

14.- 假设线性系统

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{and} \quad \dot{y} = B(t)y$$

在 J 上通过变换 $Q(t)$ 经典地运动学相似，证明伴随系统

$$\dot{x} = -A^T(t)x \quad \text{and} \quad \dot{y} = -B^T(t)y$$

在 J 上也运动学相似。注意，相应的变换与 $Q(t)$ 密切相关。

15.- 在线性系统满足以下假设的条件下

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{and} \quad \dot{y} = B(t)y$$

在 J 上通过变换 $Q(t)$ 经典地运动学相似，证明

$$\det Q(t) = \frac{\det X(t_0)}{\det Y(t_0)} e^{\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}[A(s)-B(s)]\,ds}.$$

16.- 设 $\dot{x} = A(t)x$ 是一个解在整个实数轴上都有定义的系统，且 $\dot{y} = -A^T(t)y$ 是它的伴随系统。若初始系统的任意解 $t \mapsto x(t)$ 都满足 $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$，证明伴随系统的任意解 $t \mapsto y(t)$ 都满足极限 $\lim_{t\to+\infty} |y(t)|$ 发散。

17.- 自治系统 $\dot{y} = Dy$ 是 双曲的，当且仅当 D 的所有特征值的实部均不为零。证明：若 $\dot{x} = A(t)x$ 中的 $t \mapsto A(t)$ 连续且以 ω 为周期，则它经典地运动学相似于一个双曲系统，当且仅当它的弗洛凯乘子均不为 1。

18.- 证明：如果 A 连续、 ω–周期且反对称，那么 $\dot{x} = A(t)x$ 的任意 Floquet乘子都是 $\rho = 1$。

19.- 在引理 3.4 的背景下，证明 $Q^{-1}(t)$ 和 $\dot{Q}(t)$ 是ω–周期的。

20.- 证明这个 $n+m$ 维系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & C(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

其中 $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $C(t) \in M_m(\mathbb{R})$ 广义运动学相似于

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & C(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

通过变换

$$Q(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

其中 $Q_1(t) \in M_n(\mathbb{R})$ 且 I_m 是 $\in M_m(\mathbb{R})$ 上的恒等映射，当且仅当

$$\dot{x}_1 = A(t)x_1 \quad \text{and} \quad \dot{y}_1 = B(t)y_1,$$

通过变换 Q_1 广义运动学相似。21.- 设 $X_A(t)$ 和 $X_B(t)$ 分别为 $\dot{x} = A(t)x$ 和 $\dot{y} = B(t)y$ 的基矩阵。证明，若

$$B(t)X_A(t) = X_A(t)B(t),$$

则 $X_A(t)X_B(t)$ 是 $\dot{z} = [A(t) + B(t)]z$ 的基矩阵。22.- 设 $X_A(t)$ 和 $X_B(t)$ 分别为 $\dot{x} = A(t)x$ 和 $\dot{y} = B(t)y$ 的基矩阵。证明，若

$$A(t)X_B(t) = X_B(t)A(t)$$

则 $X_B(t)X_A(t)$ 是 $\dot{z} = [A(t) + B(t)]z$ 的基矩阵。23.- 证明，若在定义 4.2 中考虑 $F(t, x) = A(t)x$ 和 $G(t, x) = B(t)x$，则可以得到线性系统的广义运动相似定义。

24.- 一个线性控制系统描述如下

$$x' = A(t)x + B(t)u \quad \text{for any } t \in J, \tag{5.1}$$

其中，$t \mapsto u(t)$称为系统的输入 或控制 。此外，非受控部分为:

$$x' = A(t)x \quad \text{for any } t \in J,$$

这通常称为 (5.1) 的被控对象 ，而基本矩阵记作 $X_A(t)$。

与(5.1)相关的可控性格拉姆矩阵定义如下:

$$W(a,b) = \int_a^b X_A(a,s)B(s)B^T(s)X_A^T(a,s)\, ds$$

and

$$K(a,b) = \int_a^b X_A(b,s)B(s)B^T(s)X_A^T(b,s)\ ds.$$

23.1）证明上述可控性格拉姆矩阵满足以下关系：

$$\begin{cases} K(a,b) &= X_A(b,a)W(a,b)X_A^T(b,a) \\ W(a,b) &= X_A(a,b)K(a,b)X_A^T(a,b). \end{cases}$$

第2章

指数二分性

双曲性是动力系统的一项基本性质，它使相空间能够分裂为在映射 f，下分别收缩和扩张的子空间。当相空间是有限维光滑流形，且所考虑的函数是光滑的、决定时间演化时，初始点x 的演化可通过求解常微分方程系统得到。如果系统是自治系统，则平衡点x_0 的双曲性由 f 在 x_0处的雅可比矩阵的特征值实部决定；然而，如 [**89**, 第 310] 页所述，这一条件无法在非自治系统中复现。为了在该背景下有效研究双曲性，可以考察指数二分性及其相关的谱，它们在非自治框架中发挥着类似于特征值的作用。

1. 自治双曲性

定义 1.1。 给定矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$，自治常微分方程系

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.1}$$

若 A 没有实部为零的特征值，则称其为双曲的 。

双曲性条件在微分方程定性理论中有着显著的影响和应用，我们将重点介绍其中最相关的几项:

a) 稳定空间与不稳定空间的分裂。设 $\lambda_j = a_j + ib_j$是 A 的一个（可能是重）特征值，其广义特征向量为$W_j = \mathbf{u_j} + \mathbf{iv_j}$。那么我们可以看出

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}, \mathbf{u_{k+1}}, \mathbf{v_{k+1}}, \ldots, \mathbf{u_m}, \mathbf{v_m}\}$$

其中 $n = 2m - k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，使得 $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$，其中 E^u和 E^s 分别是由下式定义的稳定 空间和不稳定 空间

$$E^s = \mathrm{Span}\{\mathbf{u_j}, \mathbf{v_j} \mid a_j < 0\} \quad \text{and} \quad E^u = \mathrm{Span}\{\mathbf{u_j}, \mathbf{v_j} \mid a_j > 0\}.$$

回顾一下，方程 (1.1) 的任意解 $t \mapsto x(t)$若在 $t = 0$ 时经过x_0，都可写成 $x(t) = e^{At}x_0$，因此可得；例如参见 [**105**, 第55]页；子空间 E^s 和 E^u 在方程 (1.1) 所诱导的流下是不变的，即，若 $x_0 \in E^s$ (分别 $x_0 \in E^u$)，则$x(t) \in E^s$ (分别 $x(t) \in E^u$)。

上述不变性的一个推论是：若 $x_0 = x_s + x_u$ 满足 $x_s \in E^s$ 和 $x_u \in E^u$，那么不难验证，任意解 $x(t) = e^{At}x_0$ 都可以分解为 $x(t) = x_s(t) + x_u(t)$，其中

$$x_s(t) = e^{At}x_s \in E^s \quad \text{and} \quad x_u(t) = e^{At}x_u \in E^u \quad \text{for any } t \in \mathbb{R}.$$

b) 可容许性。双曲性条件的另一个推论是以下结果，详见例如 [**43**, 第81] 页：

命题 1.1。若(1.1) 是双曲的，那么对于任意 $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$，非齐次系统存在唯一解 $t \mapsto y_f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$\dot{y} = Ay + f(t)$$

使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |y_f(t)| \le \alpha(A) \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|,$$

其中 $\alpha(A)$ 是一个依赖于 A 的常数。

c) 线性化结果。经典线性化定理如今称为 Hartman–Grobman定理，由 P. Hartman [**65**] 和 D.M. Grobman [**59**] 分别得到。它在常微分方程定性理论中占有重要地位，而双曲性条件起着至关重要的作用。

为陈述上述结果，我们考虑非线性系统

$$\dot{y} = g(y), \tag{1.2}$$

其中 $g \in C^1(\Omega\ \mathbb{R}^n)$，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个包含原点的开集，满足 $g(0) = 0$，且 $Dg(0)$ 是 g 在原点处的导数。经过 $t = 0$ 时刻通过 $y_0 \in \Omega$ 的（1.2）的解记为$\phi_t(y_0)$，并假设其局部存在唯一性成立。

命题1.2（Hartman–Grobman定理）。如果线性系统

$$\dot{x} = Dg(0)x \tag{1.3}$$

是双曲的，则存在一个同胚 $H\colon U \to V$，使得

a) 集合 U 和 V 在 $\mathbb{R}^n$ 中是开集，并且包含原点。

b) 对于任意 $y_0 \in U$，都存在一个包含零的开区间 $I_{y_0} \subset \mathbb{R}$，使得

$$H \circ \phi_t(y_0) = e^{At} H(y_0) \quad \text{for any } t \in I_{y_0}.$$

Hartman–Grobman同胚可以看作一个字典，它将非线性系统 (1.2) 的解映射为线性系统 (1.3) 的解，反之亦然，对任意 $t \in I_{y_0}$，如下所示:

i) 若 $t \mapsto \phi_t(y_0)$ 是 (1.2) 的一个解，且在 $t = 0$ 时经过 y_0，则 $t \mapsto H(\phi_t(y_0))$ 是 (1.3) 的一个解，且在 $t = 0$ 时经过 $H(y_0)$。
ii) 若 $t \mapsto e^{At} z_0$ 是 (1.3) 的一个解，且在 $t = 0$ 时经过 z_0，则 $H^{-1}(e^{At} z_0)$ 是 (1.2) 的一个解，且在 $t = 0$ 时经过 $H^{-1}(z_0)$。
iii) 结合解的唯一性，i) 和 ii) 可直接推出 $H(0) = 0$。

我们指出，当 A 不是常数时，以上三个问题无法直接推广，因为特征值既不能提供关于系统的定性信息，也不能提供准确的信息，这使得将双曲性这一性质简单地推广到非自治框架中成为不可能。

2. 非自治双曲性

我们强调，在非自治情形下，双曲性并没有一个普遍适用的定义。具体而言，无法通过时变矩阵的特征值来讨论上述主题（分裂、容许性和线性化）。

尽管存在这些细微差别，二分性这一概念仍发挥着重要作用，其中 O. Perron 在 30 年代引入的指数二分性 [**41**, **84**, **93**]最为重要 [**106**]。

2.1. 指数二分性。下面考虑常微分方程的非自治系统

$$x' = A(t)x, \tag{2.1}$$

其中 $A(t)$ 是一个局部可积矩阵。

定义2.1. 如果存在基本矩阵 $X(t)$，则称系统 (2.1) 在区间 $J \subseteq \mathbb{R}$ 上具有指数二分性，即存在正数 $K > 0$、$\alpha > 0$ 以及一个投影 $P^2 = P$，使得

$$\begin{cases} ||X(t)PX^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & \text{if} \quad t \geq s, \quad t, s \in J \\ ||X(t)(I-P)X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & \text{if} \quad t \leq s, \quad t, s \in J. \end{cases} \tag{2.2}$$

值得强调的是，常数 K 和 α 称为指数二分性的常数。不过，我们指出，上述记号并不唯一，若干参考文献分别在第一和第二个不等式中使用数对 (K_1, α_1) 和 (K_2, α_2)。

此外，我们通常会考虑无界区间

$$J = (-\infty, 0] = \mathbb{R}_0^-, \quad J = [0, +\infty) = \mathbb{R}_0^+ \quad \text{or} \quad J = \mathbb{R}.$$

如果在 $\mathbb{R}$ 上验证了指数二分性，通常会说该线性系统在整条实线上具有二分性。类似地，如果在 $\mathbb{R}_0^+$ 或 $\mathbb{R}_0^-$ 上验证了指数二分性，则分别称该系统在右半实线或左半实线上具有二分性。

如果上述矩阵范数是酉的，即 $||I|| = 1$，则极限情形 $P = I$ 和 $t = s$ 允许在定义 2.1 中考虑 $K \geq 1$。

为了说明这一性质，我们将重新考察前一章中 L. Markus 和 H. Yamabe 提出的例子 [89]：

例 1。该系统

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2}\cos(t)\sin(t) \\ -1 - \frac{3}{2}\cos(t)\sin(t) & -1 + \frac{3}{2}\sin^2(t) \end{pmatrix} x$$

有一个归一化基本矩阵

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}}\cos(t) & e^{-t}\sin(t) \\ -e^{\frac{t}{2}}\sin(t) & e^{-t}\cos(t) \end{bmatrix}.$$

可以验证，该系统在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其投影为 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，常数为 $K = 1$ 和 $\alpha = 1/2$。

注 2.1。注意，单位矩阵 $P = I$ 和零矩阵 $P = 0$ 都是投影，称为平凡投影。如果P 是 $\mathbb{R}^n$中的非平凡投影，回顾以下 [69, p. 210]将很有用：

(1) $0 <$ 秩 $P < n$，(2) 任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 都有分解 $\xi = P\xi +$ $(I - P)\xi$，(3) $v \in$ 像空间 P当且仅当 $Pv = v$，(4) $\mathbb{R}^n =$ 核 $P \oplus$ 像空间 P。

注 2.2. 在线性代数中，投影算子 P 与分解 $\mathbb{R}^n$ 为直和 $\mathbb{R}^n = U \oplus W$ 密切相关，其中 U 在 P下是不变的。由此引出以下问题：如果在 J中验证了指数二分性的性质，那么 $\mathbb{R}^n$中哪个子空间在投影算子 P下是不变的？我们将在下一节和下一章中回到这个问题。

仔细阅读定义 2.1 可知，投影 P 与满足 (2.2) 的基本矩阵 $X(t)$ 密切相关。注意，如果 $Y(t)$ 是另一个基本矩阵，则存在一个换基矩阵 V，使得 $Y(t) = X(t)V$；详情请参阅第1章注 1.1 的 a) 项。现在，我们将方程 (2.2) 改写如下

$$\begin{cases} ||X(t)VV^{-1}PVV^{-1}X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & \text{if} \quad t \geq s, \quad t,s \in J \\ ||X(t)VV^{-1}[I-P]VV^{-1}X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & \text{if} \quad t \leq s, \quad t,s \in J. \end{cases}$$

此外，由于 V是非奇异矩阵，因此可得 $\tilde{P} = VPV^{-1}$也是一个投影，且 $I - \tilde{P} = V[I-P]V^{-1}$。那么，上述不等式等价于

$$\begin{cases} ||Y(t)\tilde{P}Y^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & \text{if} \quad t \geq s, \quad t,s \in J \\ ||Y(t)[I-\tilde{P}]Y^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & \text{if} \quad t \leq s, \quad t,s \in J. \end{cases} \tag{2.3}$$

总之，上述估计使我们可以陈述如下注记：

注 2.3. 假设线性系统 (2.1) 在 J 上具有指数二分性，其常数为 $K > 0$和 $\alpha > 0$。如果 $X(t)$ 和$Y(t)$ 是 (2.1) 的基矩阵，那么不等式 (2.2) 和 (2.3) 等价。也就是说，存在一个非奇异矩阵 V，使得

$$Y(t) = X(t)V \quad \text{and} \quad \tilde{P} = VPV^{-1}$$

因此，投影并不唯一，但它们彼此相似。

注记 2.4. 由于任意投影 P 都是幂等的，可以证明，任意非平凡投影 P 在 $\mathbb{R}^n$ 中的特征值不是 0 就是 1，这意味着它可对角化。因此，对于任意投影 P，存在一个非奇异矩阵 V，使得

$$V^{-1}PV = P_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad V^{-1}[I-P]V = I - P_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{r-1} \end{bmatrix}$$

其中，r 是 P的秩。此外，由（参见例如 [**17**, 第67]页）可知，P 是半正定的。从现在起，将 P_r 称为**典范投影**。

注记2.3和2.4的一个有用推论是下面的结果，该结果将在后续章节中发挥关键作用：

引理 2.1. 如果系统 (2.1)在区间 $J \subseteq \mathbb{R}$ 常数 $K > 0$, $\alpha > 0$上具有指数二分性，那么存在一个基本矩阵 $Y(t)$ 和一个典范投影 P_r，使得

$$\begin{cases} ||Y(t)P_rY^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & \text{if} \quad t \geq s, \quad t,s \in J \\ ||Y(t)[I-P_r]Y^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & \text{if} \quad t \leq s, \quad t,s \in J. \end{cases}$$

下一个结果只是对指数二分性这一性质的另一种刻画。不过，其中间的计算和估计在后文中会很有用。

命题 2.1. 设 $X(t)$ 是线性系统 (2.1)的一个基本矩阵。当且仅当对任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$，均有：该系统在 J 上具有指数二分性，且相应的正常数为 K_1、K_2、α，投影为 $P^2 = P$

$$(2.4)\quad \begin{cases} |X(t)P\xi| \leq K_1 e^{-\alpha(t-s)}|X(s)P\xi| & if\ t \geq s, \\ |X(t)(I-P)\xi| \leq K_2 e^{-\alpha(s-t)}|X(s)(I-P)\xi| & if\ s \geq t, \\ ||X(t)PX^{-1}(t)|| \leq M & for\ any\ t, \end{cases}$$

其中 t、$s \in J$。

证明。首先，假设 (2.1) 具有指数二分性，且 (2.2) 成立。注意，若 $t \geq s$，则由 (2.2) 的第一个不等式可推出：

$$\begin{aligned} |X(t)P\xi| &= |X(t)PX^{-1}(s)X(s)P\xi| \\ &\leq ||X(t)PX^{-1}(s)||\,|X(s)P\xi| \\ &\leq K_1 e^{-\alpha(t-s)}|X(s)P\xi|, \end{aligned}$$

由此，结合 $K_1 = K$，可得 (2.4) 的第一个不等式。结合 $K_2 = K$，可用类似方法证明第二个不等式，而第三个不等式则可直接由 (2.2) 中的 $t = s$ 得出（结合 $M = K$）。

其次，假设不等式 (2.4) 成立。当$t \geq s$ 时，我们可以考虑 $\xi = X^{-1}(s)\eta$，其中 $\eta \neq 0$。由 (2.4) 的第一个不等式可知

$$\begin{aligned} |X(t)P\xi| = |X(t)PX^{-1}(s)\eta| &\leq K_1 e^{-\alpha(t-s)}|X(s)PX^{-1}(s)\eta| \\ &\leq MK_1 e^{-\alpha(t-s)}|\eta|, \end{aligned}$$

那么，对于任意的 $t \geq s$，我们可以推导出：

$$\sup_{\eta \neq 0} \frac{|X(t)PX^{-1}(s)\eta|}{|\eta|} = ||X(t)PX^{-1}(s)|| \leq MK_1 e^{-\alpha(t-s)}.$$

同样地，如果 $t \leq s$并考虑 $\xi = X^{-1}(s)\eta$，则（2.4）中的第二个不等式意味着

$$\begin{aligned} |X(t)[I-P]X^{-1}(s)\eta| &\leq K_2 e^{-\alpha(s-t)}|X(s)[I-P]X^{-1}(s)\eta| \\ &\leq MK_2 e^{-\alpha(t-s)}|\eta|, \end{aligned}$$

对于任意 $t \le s$，我们可以推导出：

$$\sup_{\eta\neq 0}\frac{|X(t)[I-P]X^{-1}(s)\eta|}{|\eta|} = ||X(t)[I-P]X^{-1}(s)|| \le MK_2e^{-\alpha(s-t)},$$

则可验证该指数二分性，其投影算子为 P，常数为（K， α），其中 $K = \max\{MK_1,\ MK_2\}$。□

上述结果在 [**41**, 第11], 页中未给出证明。为填补这一空缺，我们沿用 [**21**, 命题 **3.4**]的思路。正如 [**41**], 所指出的，（**2.4**）的第三个不等式并不能由前两个不等式推出。事实上，它给出了这样一个线性系统的例子：该系统唯一满足（**2.4**）的前两个不等式，但不具有指数二分性。这个例子在习题节中进行了描述。

然而，如果验证了有界增长这一性质，那么正如下面的结果所述，（**2.4**）的第三个不等式可由前两个不等式推出：

引理 2.2。 如果线性系统（**2.1**）在 J 上具有一致有界增长，并且存在一个非零投影算子 P 以及正常数K_1、 K_2 和 α ，使得（**2.4**）的前两个不等式成立，那么存在 $M > 0$ ，使第三个不等式也成立。

证明。首先，我们定义任意 $t \in J$ 的正映射：

$$\sigma(t) = ||X(t)PX^{-1}(t)|| \quad \text{and} \quad \rho(t) = ||X(t)[I-P]X^{-1}(t)||.$$

利用三角不等式，可以证明

$$\rho(t) - \sigma(t) \le ||I|| \quad \text{and} \quad \sigma(t) - \rho(t) \le ||I||,$$

这意味着

$$|\sigma(t) - \rho(t)| \le ||I|| \quad \text{for any } t \in J. \tag{2.5}$$

现在，考虑 $T > 0$ 和 $\eta \neq 0$。利用 **(2.4)** 中的第一个和第二个不等式以及 $\xi = X^{-1}(t)\eta$，可得

$$|X(t+T)PX^{-1}(t)\eta| \ \le \ K_1e^{-\alpha T}|X(t)PX^{-1}(t)\eta|,$$

and

$$|X(t)[I-P]X^{-1}(t)\eta| \ \le \ K_2e^{-\alpha T}|X(t+T)[I-P]X^{-1}(t)\eta|,$$

由此得到

$$||X(t+T)PX^{-1}(t)|| \le K_1e^{-\alpha T}\sigma(t),$$

and

$$K_2^{-1}e^{\alpha T}\rho(t) \le ||X(t+T)[I-P]X^{-1}(t)||.$$

我们来构造严格递增映射

$$T \mapsto \gamma(T) = K_2^{-1}e^{\alpha T} - K_1e^{-\alpha T}$$

并选择足够大的 T，使得 $\gamma(T) > 0$。现在注意到，上述估计意味着：

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &\leq ||\rho^{-1}(t)X(t+T)[I-P]X^{-1}(t)|| - ||\sigma^{-1}(t)X(t+T)PX^{-1}(t)|| \\
&\leq ||\rho^{-1}(t)X(t+T)[I-P]X^{-1}(t) + \sigma^{-1}(t)X(t+T)PX^{-1}(t)|| \\
&\leq ||\rho^{-1}(t)X(t+T,t)\Phi(t)[I-P]X^{-1}(t) + \sigma^{-1}(t)X(t+T,t)X(t)PX^{-1}(t)|| \\
&\leq ||X(t+T,t)||\,||\rho^{-1}(t)X(t)[I-P]X^{-1}(t) + \sigma^{-1}(t)X(t)PX^{-1}(t)||.
\end{aligned}$$

此外，根据假设，我们知道 (2.1) 在 J 上具有有界增长。也就是说，根据第1章中的定义 2.3，存在$K_0 \geq 1$ 和 $\beta \geq 0$，使得：

$$||X(t+T,t)|| \leq K_0 e^{\beta T}.$$

现在，由上述不等式结合 (2.5)，可得：

$$\begin{aligned}
\gamma(T)K_0^{-1}e^{-\beta T} &\leq ||\rho^{-1}(t)X(t)[I-P]X^{-1}(t) + \sigma^{-1}(t)X(t)PX^{-1}(t)|| \\
&= ||\rho^{-1}(t)I + (\sigma^{-1}(t) - \rho^{-1}(t))X(t)PX^{-1}(t)|| \\
&\leq \rho^{-1}(t)||I|| + |\sigma^{-1}(t) - \rho^{-1}(t)|\sigma(t) \\
&= \rho^{-1}(t)\left(||I|| + |\rho(t) - \sigma(t)|\right) \\
&\leq 2||I||\rho^{-1}(t),
\end{aligned}$$

并且我们有

$$\rho(t) \leq \frac{2||I||K_0 e^{\beta T}}{\gamma(T)}.$$

最后，由 (2.5) 可得

$$||X(t)PX^{-1}(t)|| \leq ||I||\left(1 + \frac{2K_0 e^{\beta T}}{\gamma(T)}\right),$$

由于上述估计对任意$t \in J$都成立，引理得证。□

2.2. 指数二分性的典型例子。

引理 2.3. 若 $A(t) = A \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个常矩阵，且其任意特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的实部均非零，则自治系统 $\dot{x} = Ax$ 在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性。

证明。首先，我们假设 A 是一个可对角化矩阵，其特征值为 $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}$，且 $j = 1 \ldots, n$ 的实部满足

$$\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_k < 0 < \alpha_{k+1} \ldots \leq \alpha_n. \tag{2.6}$$

于是，存在一个可逆矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

并且 $y = Q^{-1}x$ 将 $\dot{x} = Ax$ 变换为对角系统

$$\dot{y} = Dy, \tag{2.7}$$

该系统具有如下基本矩阵

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) & 0 \\ 0 & Y_2(t) \end{bmatrix},$$

其中，矩阵 $Y_1(t) \in M_k(\mathbb{C})$ 和 $Y_2(t) \in M_{n-k}(\mathbb{C})$ 分别定义为

$$Y_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad Y_2(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_{k+1} t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

令 I_k 为 $M_k(\mathbb{C})$的单位矩阵，并考虑典范投影

$$P_k = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

利用矩阵范数 $||\cdot||_1$ 并结合（2.6）可知，如果 $t \geq s$，那么

$$\begin{aligned} ||Y(t)P_kY^{-1}(s)||_1 &= \max\{e^{-|\alpha_1|(t-s)}, \ldots, e^{-|\alpha_k|(t-s)}\} \\ &= e^{-|\alpha_k|(t-s)} \quad \text{if } t \geq s \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

同理，如果 $t \leq s$，我们可以看到

$$\begin{aligned} ||Y(t)[I - P_k]Y^{-1}(s)||_1 &= \max\{e^{\alpha_{k+1}(t-s)}, \ldots, e^{\alpha_n(t-s)}\} \\ &= \max\{e^{-\alpha_{k+1}(s-t)}, \ldots, e^{-\alpha_n(s-t)}\} \\ &= e^{-|\alpha_{k+1}|(s-t)} \quad \text{if } s \geq t \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

令 $\alpha = \text{最小}\{|\alpha_k|, \alpha_{k+1}\}$，并注意到

$$\begin{cases} ||Y(t)P_kY^{-1}(s)||_1 \leq e^{-\alpha(t-s)} & \text{if} \quad t \geq s, \quad t, s \in \mathbb{R} \\ ||Y(t)(I - P_k)Y^{-1}(s)||_1 \leq e^{-\alpha(s-t)} & \text{if} \quad t \leq s, \quad t, s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

那么我们可以得出结论：对角系统 (2.7) 在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性。

不难证明， $X(t) = QY(t)$ 是 $\dot{x} = Ax$ 的基本矩阵。由此我们可以推导出

$$\begin{aligned} ||X(t)P_kX^{-1}(s)||_1 &= ||QY(t)P_kY^{-1}(s)Q^{-1}||_1 \\ &\leq ||Q||_1\,||Q^{-1}||_1\,||X(t)P_kX^{-1}(s)||_1 \\ &\leq ||Q||_1||Q^{-1}||_1 e^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s, \end{aligned}$$

类似地

$$||X(t)[I-P_k]X^{-1}(s)||_1 \leq ||Q||_1||Q^{-1}||_1 e^{-\alpha(s-t)} \quad s \geq t,$$

可概括为

$$\begin{cases} ||X(\quad t\ P_kX^{-1}\ s\ ||_1 \leq ||Q||_1||Q^{-1}||_1 e^{-\alpha(t-s)} & t \geq s \quad t\ s \in \mathbb{R}) \text{ ( ) 若,,} \\ t \quad ||X \quad I-P_k\ X^{-1}\ s\ ||_1 \leq ||Q||_1||Q^{-1}||_1 e^{-\alpha(s-t)} & t \leq s \quad t\ s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

0( ) ( ) 若,,

由此可得 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性。

当矩阵不可对角化时，请读者参阅 [**42**,第 214–215] 页，其中的证明采用了一种基于黎曼投影的较不具构造性的方法。

□

上述引理的证明方法（在可对角化的情形下）展示了以下结果的一个特例:

定理 2.1。 若线性系统 (2.1) 在 J 上具有指数二分性，且与

$$y' = B(t)y \quad \text{with } t \in J, \tag{2.8}$$

那么(2.8) 在 J 上具有指数二分性，且具有相同的投影 P 和速率 α。

证明。若 (2.1) 和 (2.8) 通过变换 $Q(t)$ 广义运动学相似。容易验证，若 $X(t)$ 是 (2.1) 的基本矩阵，则 $Y(t) = Q^{-1}(t)X(t)$ 是 (2.8) 的基本矩阵。

现在，假设 $t \geq s$, $t, s \in J$ 和 P 是定义 2.1 中的投影。利用 Q 和 Q^{-1} 的有界性，我们可以看到

$$\begin{aligned} ||Y(t)PY^{-1}(s)|| &= ||Q^{-1}(t)X(t)PX^{-1}(s)Q(s)|| \\ &\leq ||Q(s)||\,||Q^{-1}(t)||\,||X(t)PX^{-1}(s)|| \\ &\leq ||Q||_\infty||Q^{-1}||_\infty K e^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s. \end{aligned}$$

对于 $t \leq s$ 的情形，不等式也可以用类似的方法证明。 □

推论 2.1。若 $t \mapsto A(t)$ 连续，且对任意 $t \in \mathbb{R}$， $A(t+\omega) = A(t)$，那么如果 *Floquet* 乘子不在单位圆上，系统 $\dot{x} = A(t)x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性。

证明. 不失一般性，假设基本矩阵已归一化，即， $X(0) = I$。那么根据弗洛凯理论，我们知道 $X(t) = Q(t)e^{Dt}$，其中 $t \mapsto Q(t)$ 是 ω–周期的，且$D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$D = \frac{1}{\omega} \ln X(\omega).$$

由于弗洛凯乘子是 $X(\omega)$ 的特征值，证明 D 的特征值不能是纯虚数只是一个关于矩阵函数的技术性练习。根据引理 2.3，我们有自治系统

$$\dot{y} = Dy$$

在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性。

最后，根据第1章中的定理 3.3，我们知道上述系统在经典意义上与 $\dot{x} = A(t)x$ 运动学相似。定理 2.1 表明，该 ω–周期系统在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，结论得证。□

2.3. 指数二分性的另一种刻画。

定理 2.2. 设 $X(t)$ 是线性系统 (2.1)的基本矩阵。该系统在 J 上具有指数二分性，投影为 $P(\cdot)$，正常数为 K、α，当且仅当

$$\begin{cases} ||X(t,s)P(s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & \text{if} \quad t \geq s, \quad t,s \in J \\ ||X(t,s)[I-P(s)]|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & \text{if} \quad t \leq s, \quad t,s \in J, \end{cases} \tag{2.9}$$

其中，对于任意满足以下条件的 $t \in J$， $t \mapsto P(t)$ 也是一个投影：

$$P(t)X(t,s) = X(t,s)P(s) \tag{2.10}$$

并且对于任意 $t \in J$， $P(t)$与 P的秩相同。

证明。(⇒假设线性系统 (2.1) 在 J 上具有由 (2.2) 描述的指数二分性。现在，我们构造矩阵

$$P(t) = X(t)PX^{-1}(t) \quad \text{for any } t \in J.$$

首先，容易验证，对于任意 $t \in J$， $P(t)$ 都是一个投影，而且

$$\begin{aligned} P(t)X(t,s) &= X(t)PX^{-1}(s) \\ &= X(t,s)X(s)PX^{-1}(s) \\ &= X(t,s)P(s), \end{aligned}$$

并且（2.10）成立。

上述恒等式的一个直接推论是

$$X(t)PX^{-1}(s) = X(t,s)P(s) \quad \text{and} \quad X(t)[I-P]X^{-1}(s) = X(t,s)[I-P(s)],$$

那么，不等式（2.2）推出（2.9）。

最后，由（2.10）可直接得出：若 $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d\}$ 是 ker $P(s)$ 的一组基，那么 $\{X(t,s)\xi_i\}_{i=1}^d$ 是 ker $P(t)$ 的一组基。这意味着，对于任意 $t \in J$，Rank$P(t)$ 不变，因此等于 Rank $P(0)$ =Rank $X(0)PX^{-1}(0)$ =Rank$P$，因为 $X(0)$ 可逆。

⇐) 另一方面，假设线性系统（2.1）的转移矩阵满足不等式（2.9），且投影 $P(\cdot)$ 满足（2.10）。

不失一般性，我们考虑一个规范化的基本矩阵 $X(t)$，于是可见

$$\begin{aligned} X(t,s)P(s) &= X(t,0)X(0,s)P(s) \\ &= X(t,0)P(0)X(0,s) \\ &= X(t)P(0)X^{-1}(s), \end{aligned}$$

而恒等式 $X(t,s)[I - P(s)] = X(t)[I - P(0)]X^{-1}(s)$ 可以用类似的方法推导出来，不等式 (2.9) 则推出带有投影 $P(0)$ 的 (2.2)。□

注 2.5. 由于对于任意 $t \in J$， $t \mapsto$秩$P(t)$ 都是常数，文献中称满足 (2.10) 的 $P(\cdot)$ 为不变投影。

注 2.6. 上述定理引出了投影算子唯一性问题：给定一个在线性系统 (2.1) 的基本矩阵 $X(t)$，且该系统在 J 上具有指数二分性，定理 2.2 只能保证投影算子 $P(\cdot)$ 的存在。这个投影算子是否唯一？答案取决于区间 J。

尽管上述通过变投影刻画指数二分性的结果已为人所知，但文献中对此鲜有详细说明。其中，我们特别指出 [**28**, 命题**7.4**]和 [**35**]。

我们强调，在 [**28**], 中，采用常投影的指数二分性称为*Coppel*二分性。

这种对指数二分性的另一种刻画，使得我们能够对以下结果给出一个简单的证明:

引理 2.4. 如果线性系统 (2.1) 具有在 J 上有界增长 & 衰减的性质:

$$||X(t,s)|| \leq K_0 e^{M|t-s|} \quad \text{where } J = [t_0, +\infty)$$

并且在区间 J 上具有指数二分性，其常数为 K 和 α，那么可得 $\alpha \leq M$。

证明。利用矩阵范数的性质验证 $||I|| = 1$，结合不变性性质 **(2.10)**，我们可以推导出

$$\begin{aligned} 1 &= ||X(t,s)X(s,t)|| \\ &= ||X(t,s)[P(s) + I - P(s)]X(s,t)|| \\ &\leq ||X(t,s)P(s)||\,||X(s,t)|| + ||X(t,s)||\,||X(s,t)[I - P(t)]||. \end{aligned}$$

现在，不失一般性，我们假设 $t \geq s$。利用指数二分性的性质并结合有界增长性质，我们可以推导出，对于任意满足 t 的 $t \geq s$，$s \in J$，有:

$$\begin{aligned} 1 &\leq K_0 e^{M(t-s)}||X(t,s)P(s)|| + K_0 e^{M(t-s)}\,||X(s,t)[I - P(t)]|| \\ &\leq K K_0 e^{M(t-s)} e^{-\alpha(t-s)} + K K_0 e^{M(t-s)} e^{-\alpha(t-s)} \end{aligned}$$

由此我们得出

$$1 \leq 2K K_0 e^{(M-\alpha)(t-s)} \quad \text{for any } t \geq s \text{ with } t, s \in J.$$

我们有 $M \geq \alpha$ 或 $M < \alpha$；如果最后一个不等式成立，令 $t \to +\infty$，则可得到 $1 \leq 0$，从而产生矛盾，结论得证。□

尽管上述结果相当直观，但在文献中很难找到形式化的证明。在某些情况下，例如 [**119**,**p.**823],，这一结果在没有证明的情况下被陈述。

最后，我们指出，这一替代刻画使我们能够重新审视定理 **2.1**。该定理指出，运动相似保持指数二分性，且投影和速率不变。

定理2.3。若线性系统(2.1)广义运动学相似于

$$y' = B(t)y \quad \text{with } t \in J, \tag{2.11}$$

通过变换 $y = Q^{-1}(t)x$，且在 J 上具有指数二分性，其常数为(K, α)，不变投影算子为 $P(t)$，那么(2.11)在 J 上具有指数二分性，其投影为 $\tilde{P}(t) = Q^{-1}(t)P(t)Q(t)$，常数为$(K||Q||_\infty||Q^{-1}||_\infty, \alpha)$。

证明。注意到 $\tilde{P}^2(t) = \tilde{P}(t)$ 可以直接推导得出。此外，若 $X(t)$ 是方程 (2.1) 的一个基本矩阵，则我们知道 $Y(t) = Q^{-1}(t)X(t)$ 是方程 (2.11) 的一个基本矩阵，并且恒等式 $X(t, s) = Q(t)Y(t, s)Q^{-1}(s)$ 成立。

利用上述恒等式，并结合由 (2.10) 描述的投影算子 $P(t)$ 的不变性，我们可以推导出

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t)Y(t,s) &= Q^{-1}(t)P(t)Q(t)Y(t,s)Q^{-1}(s)Q(s)\\ &= Q^{-1}(t)P(t)X(t,s)Q(s)\\ &= Q^{-1}(t)X(t,s)P(s)Q(s)\\ &= Y(t,s)Q^{-1}(s)P(s)Q(s)\\ &= Y(t,s)\tilde{P}(s),\end{aligned}$$

˜并且 $P(s)$ 的不变性得以证得。

若 $t \geq s$，上述估计结合 (2.9) 的第一个不等式，可以推导出

$$\begin{aligned}||Y(t,s)\tilde{P}(s)|| &= ||Y(t,s)Q(s)P(s)Q^{-1}(s)||\\ &= ||Q(s)X(t,s)P(s)Q^{-1}(s)||\\ &\leq K||Q||_\infty||Q^{-1}||_\infty||X(t,s)P(s)||\\ &\leq K||Q||_\infty||Q^{-1}||_\infty e^{-\alpha(t-s)}\end{aligned}$$

而

$$||Y(t,s)[I - \tilde{P}(s)]|| \leq K||Q||_\infty||Q^{-1}||_\infty e^{-\alpha(s-t)}$$

当 $t \leq s$ 时，也可以用类似的方法推导得出。 □

3. 整条实线上的指数二分性

本节将考虑 $J = \mathbb{R}$，研究定义 2.1 中的指数二分性。这种情形将使我们能够考察双曲性的两个推论，即从非自治视角看解的分裂性质和容许性。

3.1. 解的分裂。

定理 3.1。 如果 $\dot{x} = A(t)x$ 在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性，其投影算子为 $P(\cdot)$，且 K 和 α为正常数，则任意解

$t \mapsto x(t、\ t_0、\ \xi)\colon = X(t,\ t_0)\xi$ 在 $t = t_0$ 时经过 ξ，可作如下直和分解：

$$x(t,t_0,\xi) = \underbrace{X(t,t_0)P(t_0)\xi}_{:=x^+(t,t_0,\xi)} + \underbrace{X(t,t_0)[I-P(t_0)]\xi}_{:=x^-(t,t_0,\xi)} \tag{3.1}$$

使得对于任意 $t \geq t_0$，可得

$$|x^+(t,t_0,\xi)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|P(t_0)\xi|, \tag{3.2a}$$

$$\frac{|Q(t_0)\xi|}{K}e^{\alpha(t-t_0)} \leq |x^-(t,t_0,\xi)|, \tag{3.2b}$$

其中 $Q(t_0) = I - P(t_0)$。此外，对于任意 $t \leq t_0$，可得

$$\frac{|P(t_0)\xi|}{K}e^{\alpha(t_0-t)} \leq |x^+(t,t_0,\xi)|, \tag{3.3a}$$

$$|x^-(t,t_0,\xi)| \leq Ke^{\alpha(t-t_0)}|Q(t_0)\xi|. \tag{3.3b}$$

证明。首先注意到，利用 $\xi = P(t_0)\xi + [I - P(t_0)]\xi$，可以直接推出分解 $x(t,t_0,\xi) = x^+(t,t_0,\xi) + x^-(t,t_0,\xi)$。

假设 $t \geq t_0$。那么，利用矩阵范数的定义，结合 $P(t_0)\xi = P^2(t_0)\xi$ 以及 (2.9) 中取 $s = t_0$ 和 $J = \mathbb{R}$ 时的第一个不等式，可得

$$|x^+(t,t_0,\xi)| \leq ||X(t,t_0)P(t_0)||\,|P(t_0)\xi| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|P(t_0)\xi|,$$

由此推出 (3.2a)。另一方面，由于 $Q(\cdot)$ 是不变投影，注意到

$$\begin{aligned} Q(t_0)\xi &= X(t_0,t)X(t,t_0)Q(t_0)\xi \\ &= X(t_0,t)X(t,t_0)Q(t_0)Q(t_0)\xi \\ &= X(t_0,t)Q(t)X(t,t_0)Q(t_0)\xi \\ &= X(t_0,t)Q(t)x^-(t,t_0,\xi) \end{aligned}$$

现在，利用矩阵范数的定义以及 (2.9) 中的第二个不等式，并用 (t_0, t) 替代 (t,s)，可得

$$|Q(t_0)\xi| \leq ||X(t_0,t)Q(t)||\,|x^-(t,t_0,\xi)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x^-(t,t_0,\xi)|$$

并且可轻易推导出（3.2b）。

不等式 (3.3a)–(3.3b) 的证明可仿照前一个证明进行，留给读者完成。□

注 3.1. 尽管上述定理将 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性作为假设，但仔细阅读证明会发现，若考虑 $\mathbb{R}_0^+$ 或 $\mathbb{R}_0^-$ 上的指数二分性，也可以得到类似的解分裂。

由于定理 3.1 保证了实数轴上具有指数二分性性质的系统 (2.1) 的任意非平凡解 $t \mapsto x(t,\ t_0,\ \xi) := X(t,\ t_0)\xi$ 的分解，我们将看到一些推论：

•这些解

$$x^+(t,t_0,\xi) = X(t,t_0)P(t_0)\xi \quad \text{and} \quad x^-(t,t_0,\xi) = X(t,t_0)Q(t_0)\xi$$

的渐近行为取决于任意初始条件的直和分解：注意，当 $t \to +\infty$ 时，$t \mapsto x^+(t,\ t_0,\ \xi)$ 以指数衰减（速率为 α）趋于原点；而当 $t \mapsto +\infty$ 时，$t \mapsto x^-(t,\ t_0,\ \xi)$ 则呈指数增长（速率为 α）。这种具有指数速率的二分性渐近行为促使人们使用“指数二分性”这一名称。

• 当 $t \to -\infty$ 时，上述行为会反转。
• 上述任意解的指数增长或衰减——速率为 α——取决于差值 $t - t_0$，但与初始时间 t_0 无关。鉴于此，许多作者使用一致指数二分性 这一概念，以强调其相对于初始时间的一致性。

• 最后但同样重要的是，定理 3.1 的一个重要推论如下：

推论 3.1. 如果系统 $\dot{x} = A(t)x$ 在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性，那么在 $\mathbb{R}$ 上有界的唯一解就是平凡解。

证明。设 $t \mapsto x(t, t_0, \xi)$ 是该线性系统的一个非平凡解。那么，根据上述讨论，$t \mapsto x^+(t, t_0, \xi)$ 和 $t \mapsto x^-(t, t_0, \xi)$ 分别在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 处必定无界，这意味着任何非平凡解在 $\mathbb{R}$上都不可能有界。□

上述具有指数二分性的线性系统$\dot{x} = A(t)x$ 在 $\mathbb{R}$ 上的解的分裂，也将初始条件分解为两个子空间的直和，这让人联想到自治情形下对双曲性条件的描述。事实上，对于任意初始时间 t_0，我们可以如下定义 $\mathbb{R}$–向量子空间 $\mathcal{V}(t_0)$ 和 $\mathcal{W}(t_0)$：

$$\mathcal{V}(t_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : t \mapsto |X(t,t_0)\xi| \quad \text{is bounded in } [t_0, +\infty)\}$$

and

$$\mathcal{W}(t_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon t \mapsto |X(t,t_0)\xi| \quad \text{is bounded in } (-\infty, t_0]\}\,.$$

下述结果描述了这些子空间与投影算子 $P(t_0)$ 之间的关系：

引理 3.1. 设 $X(t)$ 是(2.1)的基本矩阵。若该系统在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其投影为 $P(\cdot)$ ，且正常数为 K 和 α，则上述定义的子空间 $\mathcal{V}(t_0)$ 和$\mathcal{W}(t_0)$ 满足

$$\mathrm{Im}P(t_0) = \mathcal{V}(t_0), \quad \ker P(t_0) = \mathcal{W}(t_0) \quad \text{and} \quad \mathbb{R}^n = \mathcal{V}(t_0) \oplus \mathcal{W}(t_0).$$

此外，相应的子空间 $\mathcal{V}(t)$ 和 $\mathcal{W}(t)$对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都有良好定义，并且满足

对任意 $t \in \mathbb{R}$., $\dim\ \mathcal{V}(t)\ = \dim \mathcal{V}(t_0)$，且$\dim \mathcal{W}(t)\ = \dim\ \mathcal{W}(t_0)$

证明. 设 $\xi \in$像空间$P(t_0)$，则 $P(t_0)\xi = \xi$，并假设 $t \geq t_0$。利用不等式（3.2a），可得

$$|X(t,t_0)\xi| = |X(t,t_0)P(t_0)\xi| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|\xi| \leq K|\xi|,$$

并且 $t \mapsto X(t,\ t_0)\xi$ 在 $[t_0, +\infty$上的有界性），于是得到 $\xi \in \mathcal{V}(t_0)$，并验证了像空间$P(t_0)\ \subseteq \mathcal{V}(t_0)$。

现在令 $\xi \in \mathcal{V}(t_0)$，并假设 $t \geq t_0$。下面用反证法证明 $\xi \in \mathrm{Im}P(t_0)$。事实上，若 $\xi \notin \mathrm{Im}P(t_0)$，则可推出性质 $[I - P(t_0)]\xi \neq 0$，并利用三角不等式可得：

$$|X(t,t_0)[I - P(t_0)]\xi| \leq |X(t,t_0)\xi| + |X(t,t_0)P(t_0)\xi|.$$

注意，由于 (3.2b)，左侧项在 $[t_0, +\infty)$ 上无界；而右侧各项在 $[t_0, +\infty)$ 上有界：第一项根据假设有界，第二项则由 (3.2a) 有界，从而得出矛盾。因此 $\mathcal{V}(t_0)\ \subseteq \mathrm{Im}P(t_0)$，两个集合相等这一恒等式便得证。

为了证明 $\ker\ P(t_0)\ = \mathcal{W}(t_0)$，令 $\xi \in \ker\ P(t_0)$，则$\xi = [I - P(t_0)]\xi$。由于我们假设 $t \leq t_0$，不等式 (3.3a) 推出

$$|X(t,t_0)\xi| = |X(t,t_0)[I - P(t_0)]\xi| \leq Ke^{-\alpha(t_0-t)}|\xi| \leq K|\xi|,$$

于是，$t \mapsto X(t,\ t_0)\xi$ 在 $(-\infty,\ t_0]$ 上有界，并且 $\xi \in \mathcal{W}(t_0)$，这意味着 $\ker\ P(t_0)\ \subseteq \mathcal{W}(t_0)$。

现在令 $\xi \in \mathcal{W}(t_0)$，并假设 $t \leq t_0$。与之前一样，$\xi \in \ker\ P(t_0)$ 的证明将通过反证法进行。事实上，如果 $\xi \notin \ker\ P(t_0)$，则

可得性质 $P(t_0)\xi \neq 0$，并利用三角不等式，我们有：

$$|X(t,t_0)P(t_0)\xi| \leq |X(t,t_0)\xi| + |X(t,t_0)[I-P(t_0)]\xi|$$

注意，由于（3.3a），左侧项在（$-\infty$，t_0] 上无界，而右侧各项在（$-\infty$，t_0]上有界：第一项是因为 $\xi \in \mathcal{W}(t_0)$，第二项则是由（3.3b）可知，因此得到矛盾。于是 $\mathcal{W}(t_0)$ $\subseteq$像空间$P(t_0)$，且两集合相等这一恒等式随之成立。

注意，$\mathcal{V}(t_0) \cap \mathcal{W}(t_0) = \{0\}$。事实上，若 $\xi \in \mathcal{V}(t_0) \cap \mathcal{W}(t_0)$，则有 $t \mapsto X(t,\ t_0)\xi$ 是线性系统的解，且在 $\mathbb{R}$ 上有界；那么由推论 3.1 可得 $\xi = 0$。结合秩-零化度定理可知，$\mathbb{R}^n = \mathcal{V}(t_0) \oplus \mathcal{W}(t_0)$。

最后，由定理 2.2 可知，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，dim 像空间$P(t)$均为常数，因此子空间$\mathcal{V}(t_0)$和 $\mathcal{W}(t_0)$的维数不依赖于初始时间 t_0。□

利用定理 2.2 可知，考虑常值投影算子时也能得到类似的结果。

引理 3.2. 设 $X(t)$ 是(2.1)的基本矩阵。若该系统在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，投影算子为 P，正常数为 K 和 α，则可得：

$$\mathrm{Im}P = \mathcal{V}, \quad \ker P = \mathcal{W} \quad \text{and} \quad \mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W},$$

其中

$$\mathcal{V} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon t \mapsto |X(t,0)\xi| \quad \text{is bounded in } [0,+\infty)\}$$

and

$$\mathcal{W} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon t \mapsto |X(t,0)\xi| \quad \text{is bounded in } (-\infty,0]\}\,.$$

上述结果回答了注 2.2 中提出的问题。

3.2. 容许性。 在整条实线上具有指数二分性这一性质，使我们能够将命题1.1推广到非自治框架中。为此，我们需要引入与该二分性相对应的格林函数：

定义 3.1。 设 $X(t)$ 是 (2.1) 的基本矩阵。若该系统在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其投影算子为 $P(\cdot)$，则其格林函数 定义为

$$\mathcal{G}(t,s) = \begin{cases} X(t)PX^{-1}(s) & \text{if} \quad t \geq s, \\ -X(t)(I-P)X^{-1}(s) & \text{if} \quad t \leq s. \end{cases}$$

显然，若采用小节 2.2 中给出的指数二分性的另一种刻画方式，则格林函数为

$$\mathcal{G}(t,s)=\begin{cases} X(t,s)P(s) & \text{if} \quad t\geq s,\\ -X(t,s)[I-P(s)] & \text{if} \quad t\leq s.\end{cases}$$

推论 3.1 的一个重要推论，因而也是 $\mathbb{R}$ 上指数二分性的一个重要推论，是以下结果：

命题 3.1. 若线性系统 (2.1)在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，常数为 K、α，投影算子为 $P(\cdot)$，则对每个有界连续函数 $t\mapsto g(t)$，非齐次系统

$$z'=A(t)z+g(t) \tag{3.4}$$

存在唯一解 $x_g^*\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$，其定义如下：

$$x_g^*(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(t,s)g(s)\,ds.$$

此外，映射 $g\mapsto x_g^*$ 是利普希茨的，并且满足：

$$|x_g^*|_\infty\leq\frac{2K}{\alpha}|g|_\infty.$$

证明。步骤 *1*： 容易证明

$$x_g^*(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(t,s)g(s)\,ds$$

是 (3.4) 的一个有界解。此外，给定一对函数 $g_1,g_2\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$，仔细阅读定义 3.1，并结合 $\mathbb{R}$ 上指数二分性的性质可知

$$|x_{g_1}^*(t)-x_{g_2}^*(t)| \quad\leq\quad \frac{2K}{\alpha}|g_1(t)-g_2(t)|_\infty.$$

步骤 *2*： 我们将证明，$x_g^*(t)$ 是 (3.4) 的唯一有界解。事实上，设 $t\mapsto x(t)$ 是一个有界解。由常数变易法可得

$$x(t) \quad=\quad X(t,0)x(0)+\int_0^t X(t,s)g(s)\,ds$$

这可以写成

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t,0)x(0) + \int_0^t \{X(t)PX^{-1}(s)g(s) + X(t)(I-P)X^{-1}(s)g(s)\}\,ds \\ &= X(t,0)x(0) - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} X(t)PX^{-1}(s)g(s)\,ds}_{:=x_1} + \int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)g(s)\,ds \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)g(s)\,ds}_{:=x_2} - \int_t^{\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)g(s)\,ds \end{aligned}$$

并且我们可以看到，有界解 $t \mapsto x(t)$ 可以写成如下形式

$$x(t) = X(t,0)\{x(0) - x_1 + x_2\} + x_g^*(t).$$

由于 $t \mapsto x_g^*(t)$ 是非齐次系统 (3.4) 的有界解，因此 $t \mapsto x(t) - x_g^*(t)$ 是线性系统 (2.1) 的有界解。最后，由推论 3.1 可知 $x(t) = x_g^*(t)$，唯一性得证。□

尽管这一结果在文献中广为人知且随处可见，但除了 Coppel 的专著 [**41**] 中略述的证明之外，鲜有证明，这令人惊讶。上述证明遵循了 X. Chen 和 Y. Xia [**34**], 论文中的思路，其显著特点是简洁。

命题 3.1 有许多推论和应用。特别是，前述容许性结果可以推广到巴拿赫空间 $(BC(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^n)\ |\cdot\ |_\infty)$ 的闭子空间，例如几乎周期函数和 ω–周期函数。这里我们将考虑 f 为 ω–周期的情形，也将考虑有界非线性利普希茨扰动的情形。

推论 3.2. 若线性连续 ω–周期系统(2.1) 在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性，那么对每个连续ω–周期函数 $t \mapsto g(t)$，该系统

$$z' = A(t)z + g(t) \tag{3.5}$$

有唯一的连续 ω–周期解 $t \mapsto x^*(t)$ 满足

$$x^*(0) = [I - X(\omega,0)]^{-1}\int_0^{\omega} X(\omega,s)g(s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(0,s)g(s)\,ds. \tag{3.6}$$

证明。证明将从两个角度运用指数二分性的性质。首先，回顾一下， $\mathbb{R}$ 上的指数二分性等价于线性连续 $\mathbb{R}$ –周期系统的弗洛凯乘子不在单位圆上。

根据第1章的注 3.5，我们有，基本矩阵 $X(t)$ 满足： $X(\omega, 0) - I$ 是非奇异的，并且向量

$$x^*(0) = [I - X(\omega, 0)]^{-1} \int_0^\omega X(\omega, s) g(s)\, ds \tag{3.7}$$

定义良好。现在，上述恒等式的一个直接推论是，$t \mapsto x(t) = X(t, 0)x(0)$ 是方程 (3.5) 的连续 ω–周期解，当且仅当 $x(0) = x^*(0)$。事实上，注意到

$$x(\omega) = X(\omega, 0)x(0) + \int_0^\omega X(\omega, s) g(s)\, ds = x(0)$$

等价于

$$x(0) = [I - X(\omega, 0)]^{-1} \int_0^\omega X(\omega, s) g(s)\, ds,$$

并且连续 ω–周期解 $t \mapsto x^*(t)$ 的存在性得以保证。

由于连续的 ω–周期函数在 $\mathbb{R}$ 上有界，我们将从指数二分性这一性质的另一个角度出发：命题 3.1 表明，唯一的有界解由格林函数定义，而该函数必定与此前得到的 ω–周期解相同，即

$$t \mapsto x^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t, s) g(s)\, ds = X(t, 0)x^*(0) + \int_0^t X(t, s) g(s)\, ds,$$

通过在 $t = 0$ 处取值并利用(3.7)，即可容易地得到恒等式 (3.6)。□

上述结果的证明是在考察恒等式 $x(0) = x(\omega)$ 的基础上进行的，但也可以通过考察$x(0) = x(-\omega)$ 来推导证明，从而得到恒等式

$$[I - X(\omega, 0)]^{-1} \int_0^\omega X(\omega, s) g(s)\, ds = [I - X(-\omega, 0)]^{-1} \int_0^{-\omega} X(-\omega, s)\, ds. \tag{3.8}$$

此外，恒等式 (3.6) 是由有界解的唯一性推导得出的。不过，也可以将命题 3.1 应用于 ω–周期情形，直接推导出该恒等式。事实上，

注意:
(3.9)

$$\begin{aligned} x^*(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(0,s)g(s)\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{0} X(0,s)P(s)g(s)\,ds - \int_{0}^{\infty} X(0,s)[I-P(s)]g(s)\,ds \\ &= P(0)\int_{-\infty}^{0} X(0,s)g(s)\,ds - [I-P(0)]\int_{0}^{\infty} X(0,s)g(s)\,ds. \end{aligned}$$

此外，通过进行自然的变量代换，并结合第1章中的恒等式 (3.2)，我们可以推导出

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} X(0,s)g(s)\,ds &= \int_{0}^{\omega} X(0,s)g(s)\,ds + \int_{\omega}^{\infty} X(0,s)g(s)\,ds \\ &= \int_{0}^{\omega} X(0,s)g(s)\,ds + \int_{0}^{\infty} X(0,s+\omega)g(s)\,ds \\ &= \int_{0}^{\omega} X(0,s)g(s)\,ds + X(0,\omega)\int_{0}^{\infty} X(\omega,s+\omega)g(s)\,ds \\ &= \int_{0}^{\omega} X(0,s)g(s)\,ds + X(0,\omega)\int_{0}^{\infty} X(0,s)g(s)\,ds. \end{aligned}$$

我们将上面的恒等式乘以 $X(\omega, 0)$，即可轻易验证

$$\int_{0}^{\infty} X(0,s)g(s) = [X(\omega,0)-I]^{-1}\int_{0}^{\omega} X(\omega,s)g(s)\,ds.$$

由此我们推导出

$$-[I-P(0)]\int_{0}^{\infty} X(0,s)g(s) = [I-P(0)][I-X(\omega,0)]^{-1}\int_{0}^{\omega} X(\omega,s)g(s)\,ds.$$

与前一种情形类似，通过进行变量代换并结合第1章中的恒等式 (3.2)，我们可以推导出

$$\int_{-\infty}^{0} X(0,s)g(s)\,ds = \int_{-\omega}^{0} X(0,s)g(s)\,ds + X(0,-\omega)\int_{0}^{\infty} X(0,s)g(s)\,ds.$$

将两边乘以 $X(-\omega, 0)$，并利用 (3.8)，我们可以推导出

$$P(0)\int_{-\infty}^{0} X(0,s)g(s)\,ds = P(0)[I-X(\omega,0)]^{-1}\int_{0}^{\omega} X(\omega,s)g(s)\,ds$$

并且，将（3.9）与上文得到的积分项 $\int_{-\infty}^{0} X(0, s)g(s)\,ds$以及 $-[I-P(0)]\int_{0}^{\infty} X(0, s)g(s)$的恒等式结合，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(0,s)g(s)\,ds = [I-X(\omega,0)]^{-1}\int_{0}^{\omega} X(\omega,s)g(s)\,ds.$$

命题 3.2。 若系统 （2.1）在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其常数为 K、α ，投影为 P。此外，若非线性系统:

$$w' = A(t)w + h(t,w) \tag{3.10}$$

具有连续扰动 $t \mapsto h(t,w)$ ，满足:

$$|h(t,w_1) - h(t,w_2)| \le \gamma |w_1 - w_2| \quad \text{and} \quad |h(t,w)| \le \mu \tag{3.11}$$

对于任意 $t \in \mathbb{R}$ 和 $w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ ，其中 γ 满足

$$2K\gamma < \alpha,$$

则系统 (3.10) 有唯一的有界函数 $t \mapsto w^*(t)$ 满足不动点性质:

$$w^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t,s) h(s, w^*(s))\, ds. \tag{3.12}$$

证明。令 φ_1 属于巴拿赫空间 $(BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\ |\cdot|_\infty)$，并构造序列 $\{\varphi_k\}_k \subset BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$，其中 $t \mapsto \varphi_k(t)$ 是非齐次系统的唯一有界解

$$w' = A(t)w + h(t, \varphi_{k-1}(t)) \quad \text{for any} \quad k \ge 2.$$

事实上，注意到 $t \mapsto h(t, \varphi_{k-1}(t)) \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$；因此，命题 3.1 表明序列 $\{\varphi_k\}_k$ 存在，并满足递推关系:

$$\varphi_k(t) = \int_{\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t,s) h(s, \varphi_{k-1}(s))\, ds \quad \text{for any } t \in \mathbb{R}.$$

最后，注意到由于 $h(t,z)$ 满足 (3.11)，可得

$$\begin{aligned} |\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)| &\le \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(t,s)|\, |h(s,\varphi_{k-1}(s)) - h(s,\varphi_{k-2}(s))|\, ds \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} K e^{-\alpha|t-s|} \gamma |\varphi_{k-1} - \varphi_{k-2}|_\infty\, ds \\ &\le \frac{2K\gamma}{\alpha} |\varphi_{k-1} - \varphi_{k-2}|_\infty \end{aligned}$$

并且我们有 $\{\varphi_k\}_k$ 是一个柯西序列。由于 $(BC(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^n)\ |\cdot|_\infty)$ 是一个巴拿赫空间，因此 φ_k 一致地收敛到 (3.12)。□

我们将以关于指数二分性性质的两点评论结束本节 y 在 $\mathbb{R}$ 上。

•首先，定义 2.1 的一个直接推论是：如果线性系统 (2.1) 在区间 J 上具有指数二分性，那么在任意区间 $J \subset J$ 上也满足这一˜性质。因此，

在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性 $\mathbb{R}_0^-$意味着在 $\mathbb{R}_0^+$和 上也具有这一性质。

• 其次，需要强调的是，线性系统 (2.1) 可以同时在 $\mathbb{R}_0^-$ 和 $\mathbb{R}_0^+$ 上具有指数二分性，但这并不必然意味着其在 $\mathbb{R}$ 上存在指数二分性。当半轴上的指数二分性同时成立时，寻找确保 $\mathbb{R}$ 上指数二分性的补充条件是一个有趣的问题。为了解决这一问题，研究半轴上的指数二分性将十分有用，这正是下一章的主题。

4. 注释与参考文献

1) Császár 和 Kovács 的文章 [42] 对 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性作了很好的描述，将其视为一种模拟双曲性及其推论的性质。我们还要特别指出 Elaydi 和 Hajek [52] 撰写的精彩综述。

2) J 上的指数二分性可推广为以下性质：存在一个不变投影 $P(\cdot)$、一对正常数 (α, K) 以及一个递增同胚 $h\colon (a_0, +\infty) \to (0, +\infty)$，使得 (2.1) 的转移矩阵 $X(t, s)$ 满足：

$$
(4.1)\quad \begin{cases} \|X(t,s)P(s)\| \le K\left(h(t)h^{-1}(s)\right)^{-\alpha} & \text{if} \quad t \ge s \ge a_0, \\ \\ \|X(t,s)[I-P(s)]\| \le K\left(h(s)h^{-1}(t)\right)^{-\alpha} & \text{if} \quad s \ge t \ge a_0. \end{cases}
$$

上述性质称为 h–二分性，由 Naulin 和 Pinto 在 [94, 95], 中引入；它涵盖了指数二分性以及广义指数二分性，后者由 Martin [90]引入，并由 Jiang [75], 、Xia [34, 125] 及其合作者进行了深入研究。 h–二分性最近在 [53] 中被重新研究，其中从群论的角度研究了扩张和压缩。

h–二分性的一种推广，是将（4.1）的第二个不等式中的映射 h 替换为另一个递增同胚 $k\colon (a_0, +\infty) \to (0, +\infty)$，该同胚由 Naulin 和 Pinto 在 [95, 107]中引入。

考虑对任意 $s \in J$ 取映射 $s \mapsto K(s)$ 而非常数的情形，对应于非一致 h–二分性；对于 $h(t) = e^t$ 的情形，Barreira、Valls 和 Dragičević 在 [11, 12] 及其中的参考文献中对其进行了深入研究。

我们指出，存在一大类二分性，它们可以视为前述二分性的推广；详细总结请参阅 [131, 表 1] 。

3) 上述广义二分性描述使我们能够在非自治情形下对渐近稳定性进行分类；如果我们考虑$J = [t_0, +\infty)$以及投影 $P(s) = I$，上述构造就变成了非一致压缩

$$||X(t,s)|| \leq K(s)\,(h(t))^{-\alpha} \quad \text{for} \quad t \geq s > t_0,$$

其中 $K:\ [0,+\infty[\to (0,\ +\infty)$, $\alpha > 0$。

最受关注且研究最深入的情形是一致渐近稳定性 或一致指数稳定性，这对应于对任意 $s \geq t_0$ 和 $h(t) = e^t$，均有 $K(s) = K > 0$。

非一致渐近稳定性 对应于对任意满足 $K,\ \varepsilon > 0$ 和 $h(t) = e^t$ 的 $s \geq t_0$，均有 $K(s) = Ke^{\varepsilon|s|}$。

一致 h–稳定性 对应于满足上述性质的 $K(s) = K > 0$ 和 h。该概念由 Naulin 和 Pinto 在 [**95, 107**] 中提出。近期，Peña 和 Rivera–Villagrán 从群论的角度在 [**104**] 中重新研究了这种稳定性。

4) 据我们所知，容许性的概念由 Massera 和 Schäffer 在 [**91**] 中提出。

定义 4.1。给定两个函数空间 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{D}$，它们由从 $J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 出发的映射构成，若对于每个 $t \mapsto g(t) \in \mathcal{B}$，都存在一个解 $t \mapsto y(t) \in \mathcal{D}$，则称数对$(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ 对于线性系统 $\dot{y} = A(t)y + g(t)$ 是可容许的。

容许性与 $\mathbb{R}$上的指数二分性密切相关。事实上，命题 3.1 和推论 3.2 可视为针对 $\mathcal{B} = BC(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^n)$和 $\mathcal{B} = C_\omega(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^n)$的$(\mathcal{B},\ \mathcal{B})$–容许性结果，前提是 a_{ij} 和 g 是 $\mathcal{B}$ 的元素，且 $\dot{x} = A(t)x$在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性。针对几乎周期函数 [**55**, Ch.7], 、伪几乎周期函数 [**2, 130**]和远程几乎周期函数 [**92**]的巴拿赫空间，也存在相应的推广。

5)已有用于检测实数轴上指数二分性的数值方法，相关工作可参阅 L. Dieci、C. Elia 和 E. Van Vleck 在 [**47, 48**]中的研究。

5. 习题

1.- 详细证明注记 2.4。2.- 证明如果 P 是投影且 V 是非奇异矩阵，那么 $\tilde{P} = V^{-1}PV$ 也是投影。3.- 证明如果 P 是非平凡投影，那么它的特征值为 0 和 1。

4.- 证明如果 $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个收敛于 Q 的投影序列，那么 Q 也是投影。

5.- 若线性系统 (2.1) 在 J上具有投影为 P 的指数二分性，则证明其伴随系统具有投影为 $I - P^T$ 的指数二分性。

6.- 在 [**41**,第12], 页，作者考虑线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + e^{2t}x_2\\ \dot{x}_2 &= x_2,\end{aligned}$$

其基本矩阵为

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & (e^{3t} - e^{-t})/4 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

6.1) 证明上述系统不具有有界增长性质。

6.2) 证明 (2.4) 的前两个不等式对投影算子成立

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.3) 证明 $||X(t)PX^{-1}(t)||$ 无界。

7.- 证明定理 3.1 中的不等式 (3.3a)–(3.3b)。

8.- 若线性系统 (2.1) 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都是反对称的，则证明它在 $\mathbb{R}$ 上不可能具有指数二分性。

9.- 设 $[0, +\infty) \ni t \mapsto a(t)$ 是一个有界的局部可积函数。证明，若

$$\limsup_{t-s\to+\infty} \frac{1}{t-s}\int_s^t a(\tau)\,d\tau < -\alpha < 0,$$

则标量微分方程 $\dot{x} = a(t)x$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上具有指数二分性，其投影为 $p = 1$。

10.- 类似地，设 $[0, +\infty) \ni t \mapsto a(t)$ 是一个有界的局部可积函数。证明，若

$$\liminf_{t-s\to+\infty} \frac{1}{t-s}\int_s^t a(\tau)\,d\tau > \alpha > 0,$$

则标量方程 $\dot{x} = a(t)x$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上具有指数二分性，其投影为 $p = 0$。

11.- 证明下列线性标量微分方程在 $\mathbb{R}$ 上不具有指数二分性:

$$\dot{x} = \frac{1}{1+t^2}x, \quad \dot{x} = e^{-t^2}x \quad \text{and} \quad \dot{x} = a(t)x$$

其中 $a(t) > 0$，对于任意满足 $\int_{\mathbb{R}} a(t)\,dt < \infty$ 的 $t \in \mathbb{R}$。

12.- ω–周期连续函数 f 的平均值定义为

$$\mathcal{M}(f) := \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)\,dt.$$

证明标量线性方程 $\dot{x} = f(t)x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，当且仅当 $\mathcal{M}(f) \neq 0$。确定相应投影与 $\mathcal{M}(f)$ 符号之间的关系。

13.- 考虑线性系统 $\dot{x} = A(t)x$，其中 $t \mapsto A(t)$ 连续且为 ω–周期函数。若该系统在 $[0, +\infty)$ 上具有指数二分性，我们能否断言该系统在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，且投影和常数 α相同?

14.- 举例说明推论 3.1 不能推广到在 $[0, +\infty)$ 上具有指数二分性的系统。

15.- 证明引理 3.2。

16.- 在更具体的假设下考虑命题 3.1：线性系统 (2.1) 在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性，且投影为恒等映射。证明，对每个有界函数 $t \mapsto g(t)$，系统 (3.4) 都有一个在 $\mathbb{R}$ 上有界的唯一解 $t \mapsto x_g^*(t)$，使得任何其他解 $t \mapsto x(t)$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t) - x^*(t)] = 0.$$

17.- 类似地，在更具体的假设下考虑命题 3.1：线性系统 (2.1) 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，且其零投影为 $P = 0$。那么，对于每个有界函数 $t \mapsto g(t)$，证明系统 (3.4) 存在唯一解 $t \mapsto x_g^*(t)$，该解在 $\mathbb{R}$ 上有界，并且任何其他解 $t \mapsto x(t)$ 都满足

$$\lim_{t\to-\infty}[x(t) - x^*(t)] = 0.$$

18.- 设 $t \mapsto x(t)$ 是 $\dot{x} = A(t)x$ 的一个解，并定义

$$x_1(t) = X(t)PX^{-1}(t)x(t) \quad \text{and} \quad x_2(t) = X(t)(I-P)X^{-1}(t)x(t),$$

其中 P 是一个投影。证明 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 满足以下性质:

a) $X(t)PX^{-1}(t)x_1(t) = x_1(t)$,
b) $X(t)(I-P)X^{-1}(t)x_2(t) = x_2(t)$,
c) $x(t) = X(t)PX^{-1}(s)x_1(s) + X(t)(I-P)X^{-1}(s)x_2(s)$,

d) $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. 19.- 在命题 3.2 的背景下，如果线性部分具有平凡投影的指数二分性，我们能否进一步了解不动点?

20.- 能否推广命题 3.2，并证明当 $A(t)$ 是 ω–周期连续函数，且对于任意 $w \in \mathbb{R}^n$， $t \mapsto h(t, w)$ 都是 ω–周期时，方程 (3.10) 存在 ω–周期解?

21.- 考虑一个在 $[0, +\infty)$ 上具有指数二分性的线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ ，其投影为非平凡投影 P。证明，若 $t \mapsto A(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界，则可推出

$$X(t)PX^{-1}(t) = I + \int_0^{+\infty} \mathcal{G}(t, s)A(s)\, ds,$$

其中， $X(t)$ 是基本矩阵， $\mathcal{G}(t, s)$ 是定义 3.1 中引入的格林函数在 $t, s \geq 0$ 上的限制。

第 3 章

半轴上的指数二分性

1. 预备知识

本章将考虑线性系统

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.1}$$

我们将研究重点放在半轴 $\mathbb{R}_0^-$ 或 $\mathbb{R}_0^+$上的指数二分性，因为与情形 $J = \mathbb{R}$相比，这些情况更为微妙。例如，第2章中的命题 3.1及其推论不再成立，因为线性系统 (1.1) 的任何解，只要在 $\mathbb{R}_0^+$ 上具有指数二分性且投影为 $P = I$ ，就会在该半轴上有界。然而，正如我们将看到的，将范围限制在半轴上，可以对二分性给出替代且更精确的刻画。

2. 基本性质与替代刻画

与上一章一样，根据 J 上指数二分性的定义，我们可以直接推得：若线性系统 (1.1) 在区间 J上具有指数二分性，则它在任意区间 $J \subset J$ 上也具有这一性质 ˜。因此，对于任意 $t_0 \geq 0$，在 $\mathbb{R}_0^+$ 上的指数二分性意味着在 $[t_0, +\infty)$上的二分性。W. Coppel [41, 第13] 页的以下结果给出了一个逆命题

引理 2.1。 如果线性系统 (1.1) 在 $[t_0, +\infty)$ 上具有指数二分性，且满足 $t_0 > 0$ ，那么它在$\mathbb{R}_0^+$上也具有指数二分性，并保持相同的投影 P和常数 $\alpha > 0$。

证明。不失一般性，我们考虑酉范数。然后注意到，对于给定的酉范数，数

$$N = \exp\left(\int_0^{t_0} ||A(u)||\, du\right) > 1$$

定义良好。现在，设 t 和 s 满足 $0 \leq s, t \leq t_0$ ，并注意到

$$||X(t)X^{-1}(s)|| \leq N \quad \text{for } 0 \leq s, t \leq t_0. \tag{2.1}$$

当 $s < t$ 时，我们将验证 (2.1)，但另一种情形可以用类似的方法证明。事实上，利用第1章中的不等式 (1.8)，可知对于任意满足 $0, \leq s, t \leq t_0$ 的 $s \leq t$，有

$$||X(t)X^{-1}(s)|| \leq \exp\left(\int_s^t |A(u)|\, du\right) \leq \exp\left(\int_0^{t_0} |A(u)|\, du\right) = N$$

并且（2.1）得以验证。

利用（2.1）并结合 $[t_0, +\infty$ 上指数二分性的性质，我们可以推出以下估计：

- 当 $0 \leq s \leq t_0 \leq t$ 时，可得：

$$\begin{aligned} ||X(t)PX^{-1}(s)|| &= ||X(t)PX^{-1}(t_0)X(t_0)X^{-1}(s)|| \\ &\leq ||X(t)PX^{-1}(t_0)||\, ||X(t_0)X^{-1}(s)|| \\ &= N||X(t)PX^{-1}(t_0)|| \\ &\leq NKe^{-\alpha(t-t_0)} \\ &\leq NKe^{\alpha t_0}e^{-\alpha(t-s)}. \end{aligned}$$

- 当 $0 \leq s \leq t \leq t_0$ 时，可得

$$\begin{aligned} ||X(t)PX^{-1}(s)|| &= ||X(t)PX^{-1}(t_0)X(t_0)X^{-1}(s)|| \\ &\leq ||X(t)PX^{-1}(t_0)||\, ||X(t_0)X^{-1}(s)|| \\ &= N||X(t)PX^{-1}(t_0)|| \\ &= N||X(t)X^{-1}(t_0)X(t_0)PX^{-1}(t_0)|| \\ &\leq N^2||X(t_0)PX^{-1}(t_0)|| \\ &\leq N^2K = N^2Ke^{\alpha t_0}e^{-\alpha t_0} \\ &\leq N^2e^{\alpha t_0}Ke^{-\alpha(t-s)}. \end{aligned}$$

令 $K_1 = \max\{N^2e^{\alpha t_0}K, NK\}$，则有

$$||X(t)PX^{-1}(s)|| \leq K_1e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{for any } 0 \leq s \leq t,$$

而另一个不等式可用类似的方法证明，引理得证。□

下一个结果与前一个结果对称，其证明留给读者：

引理 2.2。 如果线性系统 (1.1) 在 $(-\infty, -t_0]$ *with* $t_0 > 0$ 上具有指数二分性，那么它在$\mathbb{R}_0^-$上也具有指数二分性，并保持相同的投影 P和常数 $\alpha > 0$。

2.1. 在半轴上具有指数二分性但在 $\mathbb{R}$ 上不具有指数二分性的方程。K.J. Palmer 在 [**102**] 提出了以下示例，它简单地展示了一个线性系统在两个半轴（$-\infty, 0]$ 和 $[0, +\infty$）上具有指数二分性，但在 $\mathbb{R}$ 上不具有指数二分性：考虑标量方程

$$x' = a(t)x, \tag{2.2}$$

其中 a: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \le -T \\ \phi(t) & \text{if } t \in [-T, T] \\ -1 & \text{if } t \ge T, \end{cases}$$

其中 $T > 0$和 ϕ: $[-T, T] \to \mathbb{R}$是满足$\phi(-T) = 1$和 $\phi(T) = -1$的连续函数。

易知，(2.2) 在 $[T, +\infty)$ 上具有指数二分性，其中 $P = 1$、 $K = 1$ 和 $\alpha = 1$ ，并且在 $(-\infty, -T]$ 上也具有指数二分性，其中 $P = 0$、 $K = 1$和 $\alpha = 1$。现在，由引理 2.1–2.2 可知， $x' = a(t)x$ 在 $(-\infty, 0]$ 和 $[0, +\infty)$ 上具有指数二分性。然而，利用第2章中的推论 3.1 可知，该方程在 $(-\infty, +\infty)$ 上不具有指数二分性，因为任意解在 $\mathbb{R}$上都有界。

2.2. 非临界一致性。 非临界一致性这一性质由 N.N. Krasovskii 提出，作为非自治系统存在以原点为平衡点的 Lyapunov 函数的充要条件。以下针对线性系统给出的定义，W.A. Coppel 在 [**39**, 第14] 页中曾使用，但未明确提及；而 K.J. Palmer 则在 [**98**,定义4]中明确提出了该定义：

定义 2.1. 若存在 $T > 0$ 和 $\theta \in (0,1)$ ，使得线性系统 (1.1) 在 $J \subseteq \mathbb{R}$ 上一致非临界，则系统 (1.1) 的任意解$t \mapsto x(t)$ 均满足

$$|x(t)| \le \theta \sup_{|u-t| \le T} |x(u)| \quad \text{for any } t \text{ such that } [t-T, t+T] \subset J. \tag{2.3}$$

重新考察上述定义在特定区间J上的情形会很有用。若 $J = [0, +\infty)$ ，性质（2.3）变为

$$|x(t)| \le \theta \sup_{|u-t| \le T} |x(u)| \quad \text{for any } t \ge T,$$

而若 $J = (-\infty,\ 0]$，性质（2.3）变为

$$|x(t)| \le \theta \sup_{|u-t|\le T} |x(u)| \quad \text{for any } t \le -T.$$

Coppel [39, 第13–14] 页中的以下结果表明，$[0, +\infty$上的指数二分性蕴含非临界一致性:

定理 2.1. 若系统 (2.1) 在 $\mathbb{R}_0^+$ 上具有指数二分性，且其非平凡投影算子为 P，常数为 $K \ge 1$ 和 $\alpha > 0$，则该系统在 $\mathbb{R}_0^+$上具有非临界一致性。

证明。假设 (2.1) 在 $[0, +\infty)$ 上具有指数二分性，常数为 K 和 α。对于 (2.1) 的任意解 $t \mapsto x(t)$，定义辅助函数:

$$x_1(t) := \Phi(t, s)P(s)x(s) \quad \text{and} \quad x_2(t) := \Phi(t, s)Q(s)x(s). \tag{2.4}$$

现在可以很容易地验证，$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 满足以下性质:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \tag{2.5a}$$
$$x_1(s) = P(s)x(s) \quad \text{and} \quad x_2(s) = Q(s)x(s), \tag{2.5b}$$
$$P(t)x_1(t) = x_1(t) \quad \text{and} \quad Q(t)x_2(t) = x_2(t). \tag{2.5c}$$

根据指数二分性，结合 (2.4)、(2.5b) 和 (2.5c)，当 $t \ge s$ 时可推得以下估计:

$$\begin{cases} |x_1(t)| &= |P(t)\Phi(t, s)x_1(s)| = |\Phi(t, s)P(s)x_1(s)| \le Ke^{-\alpha(t-s)}|x_1(s)|, \\ |x_2(s)| &= |\Phi(s, t)Q(t)\Phi(t, s)Q(s)x_2(s)| \le Ke^{-\alpha(t-s)}|x_2(t)|. \end{cases}$$

同样，如果 $t \le s$ 我们可以推导出以下估计:

$$\begin{cases} |x_2(t)| &= |\Phi(t, s)Q(s)x(s)| = |\Phi(t, s)Q(s)x_2(s)| \le Ke^{-\alpha(s-t)}|x_2(s)|, \\ |x_1(s)| &= |\Phi(s, t)P(t)\Phi(t, s)P(s)x_1(s)| \le Ke^{-\alpha(s-t)}|x_1(t)|. \end{cases}$$

上述不等式可总结如下:

$|x_1(t)| \le Ke^{-\alpha(t-s)}|x_1(s)|$ 且 $|x_2(t)| \ge K^{-1}e^{\alpha(t-s)}|x_2(s)|$ 如果 $t \ge s$ 且

$$|x_2(t)| \le Ke^{-\alpha(s-t)}|x_2(s)| \quad \text{and} \quad |x_1(t)| \ge K^{-1}e^{\alpha(s-t)}|x_1(s)| \text{ if } t \le s.$$

现在，我们假设 $|x_2(s)| \ge |x_1(s)|$，那么若 $t \ge s$，上述不等式和 (2.5a) 推出

$$\begin{aligned}|x(t)| &\geq |x_2(t)| - |x_1(t)| \\ &\geq K^{-1}e^{\alpha(t-s)}|x_2(s)| - Ke^{-\alpha(t-s)}|x_1(s)| \\ &\geq \left\{K^{-1}e^{\alpha(t-s)} - Ke^{-\alpha(t-s)}\right\}|x_2(s)|.\end{aligned}$$

类似地，若 $|x_2(s)| < |x_1(s)|$，那么对于 $s \geq t$,

$$\begin{aligned}|x(t)| &\geq |x_1(t)| - |x_2(t)| \\ &\geq K^{-1}e^{\alpha(s-t)}|x_1(s)| - Ke^{-\alpha(s-t)}|x_2(s)| \\ &\geq \left\{K^{-1}e^{\alpha(s-t)} - Ke^{-\alpha(s-t)}\right\}|x_1(s)|.\end{aligned}$$

定义辅助函数

$$\Psi(t) := K^{-1}e^{\alpha t} - Ke^{-\alpha t},$$

由此可得

$$|x(t)| \geq \Psi(t-s)|x_2(s)| \quad \text{if } t \geq s, \tag{2.6}$$

and

$$|x(t)| \geq \Psi(s-t)|x_1(s)| \quad \text{if } t \leq s. \tag{2.7}$$

对于函数 Ψ，我们可以推导出

- $\Psi(0) = \dfrac{1}{K} - K \leq 0$
- Notice that:
$$\Psi'(t) = K^{-1}\alpha e^{\alpha t} + K\alpha e^{-\alpha t} > 0$$
- $\Psi(t_0) = 0$, where $t_0 = \frac{1}{\alpha}\ln(K) \geq 0$.

对于任意 $\theta \in (0, 1)$，我们可以选取 $T > \frac{1}{\alpha}\ln(K)$，使得 $\Psi(T) \geq \frac{2}{\theta}$。于是，如果 $t - s \geq T > 0$，由（2.6）可得

$$|x(t)| > \Psi(T)|x_2(s)| \geq \frac{2}{\theta}|x_2(s)|$$

又由于 $|x_1(s)| \leq |x_2(s)|$，我们得到

$$|x(s)| \leq |x_1(s)| + |x_2(s)| \leq 2|x_2(s)| \leq \theta|x(t)|.$$

类似地，如果 $s - t \geq T > 0$，由（2.7）和不等式$|x_2(s)| < |x_1(s)|$，可得

$$|x(t)| > \frac{2}{\theta}|x_1(s)| > \frac{1}{\theta}|x(s)|.$$

因此，我们可以得出结论：

$$|x(s)| < \theta|x(t)|, \quad \text{if} \quad |s-t| \geq T.$$

接下来，对于固定的 $s \geq T$，我们选取 $t = T + s \geq s$，于是

$$\begin{aligned} |x(s)| &\leq \theta |x(T+s)| \\ &\leq \theta \sup_{s \leq u \leq s+T} |x(u)| = \theta \sup_{0 \leq u-s \leq T} |x(u)|. \end{aligned} \tag{2.8}$$

对于固定的 $s \geq T$，现在我们选择 $t = s - T < s$，于是

$$\begin{aligned} |x(s)| &\leq \theta |x(s-T)| \\ &\leq \theta \sup_{s-T \leq u \leq s} |x(u)| = \theta \sup\{|x(u)| : -T \leq u - s \leq 0\}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

最后，由 (2.8) 和 (2.9) 可得

$$|x(s)| \leq \theta \sup_{|u-s| \leq T} |x(u)| \quad \text{for } s \geq T,$$

由此完成证明。 □

若再满足第1章中所述的有界增长性质，则可得到一个逆向结果。

定理 2.2. 若线性系统 (1.1) 具有有界增长和非临界一致性性质于 $[0, +\infty)$，则它在 $[0, +\infty)$上也具有指数二分性。

由于线性系统 (1.1) 在 $[0, +\infty)$ 上非临界一致，因此存在常数 $T > 0$ 和 $0 < \theta < 1$，使得每个解 $t \mapsto x(t)$ 都满足性质

$$|x(t)| \leq \theta \sup_{|u-t| \leq T} |x(u)| \quad \text{for every } t \geq T. \tag{2.10}$$

此外，考虑上述常数 $T > 0$，有界增长性质意味着存在 $C > 1$，使得线性系统 (1.1) 的每个解$t \mapsto x(t)$ 都满足该性质

$$|x(t)| \leq C|x(s)| \quad \text{for } 0 \leq s \leq t \leq s + T. \tag{2.11}$$

证明将由若干引理得出。首先注意，(1.1) 的任何非平凡解 $t \mapsto x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上要么有界，要么无界。证明的思路是，说明有界解和无界解具有相同的定性性质，这些性质与前一章 (3.1) 中解的分解所描述的函数具有的性质相同。

引理 2.3。 在定理 *2.2* 的假设下，存在$K \geq 1$ 和 $\alpha > 0$，使得任意在 $[0, +\infty)$ 上有界的非平凡解 $t \mapsto x(t)$ 都满足：

$$|x(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|x(s)| \quad \text{for any } t \geq s \geq 0. \tag{2.12}$$

证明。步骤 *1*：初步估计。由于 (2.11) 给出了关于解 $x(\cdot)$ 在 $[s, s+T]$ 上的信息，我们将研究它在$t \geq s+T$时的性质。为此，我们定义映射 μ: $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 如下：

$$\mu(s) := \sup_{u \geq s} |x(u)|.$$

注意到 $t \geq s+T$ 等价于 $t-T \geq s$，并且由于 $s \geq 0$，还可推出 $t \geq T$。结合这些事实与 (2.10)，可得：

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \theta \sup_{|u-t| \leq T} |x(u)| \\ &= \theta \sup\{|x(u)| : t-T \leq u \leq t+T\} \\ &\leq \theta \sup_{s \leq u \leq t+T} |x(u)| \\ &\leq \theta \sup_{u \geq s} |x(u)| = \theta \mu(s). \end{aligned} \tag{2.13}$$

上述估计推出

$$\mu(s) = \sup_{s \leq u \leq s+T} |x(u)|. \tag{2.14}$$

事实上，利用 $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ 以及估计 (2.13)，我们可以推得

$$\mu(s) = \max\left\{ \sup_{s \leq u \leq s+T} |x(u)|, \sup_{s+T \leq u} |x(u)| \right\} \leq \max\left\{ \sup_{s \leq u \leq s+T} |x(u)|, \theta\mu(s) \right\},$$

由此得到

$$\mu(s) \leq \sup_{s \leq u \leq s+T} |x(u)|,$$

而逆向不等式显然成立，因此 (2.14) 得证。

因此，利用 (2.11)、(2.13)、(2.14)，并回想 $t \geq s+T$，可推得

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \theta\mu(s) \\ &= \theta \sup_{s \leq u \leq s+T} |x(u)| \\ &\leq \theta C |x(s)|, \end{aligned}$$

结合式 (2.11) 可得

$$|x(t)| \leq C|x(s)| \quad \text{for} \quad 0 \leq s \leq t.$$

步骤 *2*：一个有用的不等式。在这一步中，我们假设 $t \geq s+nT$对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。此外，回想一下 nT严格递增，

我们有 $t \geq T$和 $t - T \geq s + (n-1)T$。这些不等式与 (2.10) 表明:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \theta \sup_{|u-t|\leq T} |x(u)| \\ &\leq \theta \sup_{u \geq s+(n-1)T} |x(u)| = \theta\mu(s+(n-1)T). \end{aligned} \tag{2.15}$$

由于 $t \geq s + nT$，并注意到 $n \in \mathbb{N}$ 是任意的，上述估计意味着

$$\mu(s+nT) \leq \theta\mu(s+(n-1)T). \tag{2.16}$$

步骤 *3*: $t \mapsto |x(t)|$ 是指数收缩。

在此步骤中，我们将假设 $t \geq s$。注意，总存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $s + nT \leq t \leq s + (n+1)T$，于是估计式 (2.15)–(2.16) 允许我们推出:

$$|x(t)| \leq \theta\mu(s+nT) \leq \theta^2\mu(s+(n-2)T) \leq \cdots \leq \theta^n\mu(s),$$

并利用 (2.11) 和 (2.14)，可得

$$|x(t)| \leq \theta^n \sup_{s\leq u\leq s+T} |x(u)| \leq \theta^n C|x(s)|. \tag{2.17}$$

另一方面，由于 $nT \leq t - s \leq (n+1)T$，我们可以看到

$$\theta^{n+1} \leq \theta^{\frac{t-s}{T}} \leq \theta^n.$$

上述估计结合 (2.17) 意味着:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \theta^{-1}C\theta^{n+1}|x(s)| \\ &\leq \theta^{-1}Ce^{\frac{\ln(\theta)}{T}(t-s)}|x(s)|. \end{aligned}$$

取 $K = \theta^{-1}C \geq 1$和 $\alpha = -\ln(\theta)/T > 0$，由于 $\theta \in (0,\ 1)$ 和$T > 0$, 我们得到 (2.12)，引理得证。□

引理 2.4。在定理 *2.2* 的假设下，存在$K \geq 1$, $\alpha > 0$ 和 $T_1 > 0$，使得任何在 $[0, +\infty)$ 上无界的解 $t \mapsto x(t)$ 满足:

$$|x(t)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}|x(s)| \quad \textit{for} \quad s \geq t \geq T_1 > 0. \tag{2.18}$$

证明。步骤 *1*: 预备知识。设 $t \mapsto x(t)$ 是一个无界解，且 $|x(0)| = 1$。由于 $x(\cdot)$ 也是连续的，我们可以取一个序列 $\{t_n\}$，使得 $t_n > 0$，从而

$$|x(t_n)| = \theta^{-n}C \quad \text{and} \quad |x(t)| < \theta^{-n}C \quad \text{for} \quad 0 \leq t < t_n, \tag{2.19}$$

这意味着该序列严格递增且无上界。另一方面，由一致有界增长 (2.11) 以及 $s = 0$ ，我们有：

$$|x(t)| \leq C|x(0)| = C < \theta^{-1}C \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq T,$$

这使我们能够看出 $T < t_1$。

步骤 *2*： $t_{n+1} \leq t_n + T$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$。否则，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$使得 $t_{n_0+1} > t_{n_0} + T$，结合回顾 $t_{n_0} > T$和（2.10）这一事实可得：

$$|x(t_{n_0})| \leq \theta \sup_{|u-t_{n_0}|\leq T} |x(u)| \leq \theta \sup_{0\leq u\leq t_{n_0}+T} |x(u)| \leq \theta \sup_{0\leq u\leq t_{n_0+1}} |x(u)|.$$

此外，（2.19）的一个直接推论是

$$\sup_{0\leq u\leq t_{n_0+1}} |x(u)| = C\theta^{-(n_0+1)} = \theta^{-1}|x(t_{n_0})|.$$

综合上述估计，我们得到

$$|x(t_{n_0})| \leq \theta \sup_{0\leq u\leq t_{n_0+1}} |x(u)| \leq |x(t_{n_0})|,$$

这就产生了矛盾。

步骤 *3*：证明结束。设 $0 \leq t \leq s$ 且 $t_m \leq t < t_{m+1}$、$t_n \leq s < t_{n+1}$ 满足 $1 \leq m < n$。根据（2.19）以及$\{t_n\}_n$ 的定性性质，我们有：

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \theta^{-m-1}C \\ &= \theta^{n-m}|x(t_{n+1})| \\ &\leq \theta^{-1}C\theta^{n-m+1}|x(s)|, \end{aligned} \tag{2.20}$$

其中，最后一个估计由 $t_{n+1} \leq t_n + T$ 结合（2.11）得到。

为了对（2.20）进行更好的估计，我们有

$$s - t \leq t_{n+1} - t_m \leq (t_n + T) - t_m = (t_n - t_m) + T.$$

此外，

$$t_n \leq t_{n-1} + T \leq t_{n-2} + 2T \leq \cdots \leq t_m + (n - m)T,$$

这意味着

$$e^{s-t} \leq e^{(n-m+1)T} = (e^T)^{n-m+1}$$

因此 $(s - t)/T \leq n - m + 1$，从而得到：

$$\theta^{n-m+1} \leq \theta^{\frac{s-t}{T}}.$$

接下来，将上述估计代入（2.20），可得

$$\begin{aligned}|x(t)| &\le \theta^{-1}C_T\theta^{\frac{s-t}{T}}|x(s)| \\ &= \theta^{-1}C_T e^{(s-t)\frac{\ln(\theta)}{T}}|x(s)|,\end{aligned}$$

于是，取 $K=\theta^{-1}C\ge 1$、 $\alpha=-\ln(\theta)/T>0$ 和$T_1=t_1$即可得到 (2.18)。 □

2.3. 一致指数二分性与一致非临界性：定理 2.2 的证明。考虑如下子空间:

$$V_1:=\left\{\xi\in\mathbb{R}^n:\sup_{t\ge 0}|X(t,0)\xi|<+\infty\right\}$$

并设 V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，使得 $\mathbb{R}^n=V_1\oplus V_2$。对于任意 $\xi\in V_2$, 满足 $|\xi|=1$，令 $t\mapsto x(t)=x(t,\ \xi)$ 为方程 (1.1) 的解，其初始条件为 $x(0)=\xi$。则 $t\mapsto x(t,\ \xi)$ 无界，因此存在一个值 $t_1:=t_1(\xi)$，使得

$$|x(t,\xi)|<\theta^{-1}C \quad \text{for any } 0\le t<t_1(\xi) \quad \text{and} \quad |x(t_1,\xi)|=\theta^{-1}C.$$

我们将证明集合 $B:=\{t_1(\xi):\ \xi\in V_2 \text{ 且} |\xi|=1\}$ 是有界的。事实上，如果 B 无界，则存在一个序列 $\{\xi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}\subset V_2$，满足 $|\xi_\nu|=1$，并且当 $\nu\to+\infty$ 时， $t_1^{(\nu)}=t_1(\xi_\nu)\to+\infty$。由于 V_2 中单位球面的紧致性，不妨设当 $\nu\to+\infty$ 时， $\xi_\nu\to\xi_0$，其中 $\xi_0\in V_2$ 为某个单位向量。因此，根据第1章的命题 2.3，有界增长性质意味着

$$x(t,\xi_\nu)\to x(t,\xi) \quad \text{as} \quad \nu\to+\infty,$$

对所有 $t\ge 0$。由于 $|x(t,\ \xi_\nu)|<\theta^{-1}C$对 $0\le t<t_1^{(\nu)}$成立，因此

$$|x(t,\xi_0)|\le\theta^{-1}C \quad \text{for} \quad 0\le t<+\infty,$$

这与 $\xi_0\in V_2$的事实矛盾。于是存在$T_1>0$，使得对所有单位向量 $\xi\in V_2$, $t_1(\xi)\le T_1$。接下来，对所有$\xi\in V_2$，其中 $\xi\ne 0$，由引理 2.4 可知

$$|x(t,\xi)|\le|\xi|Ke^{-\alpha(s-t)}|x(s,\frac{\xi}{|\xi|})|=Ke^{-\alpha(s-t)}|x(s,\xi)|,$$

对 $s\ge t\ge T_1>0$。

现在，令 P 为从 $\mathbb{R}^n=V_1\oplus V_2$ 到子空间 V_1 上的投影。那么对于每个 $\xi\in\mathbb{R}^n$，根据引理 2.3 和 2.4，有

$$|X(t)P\xi|\le Ke^{-\alpha(t-s)}|X(s)P\xi| \quad \text{for} \quad t\ge s\ge T_1$$

and

$$|X(t)(I-P)\xi|\le Ke^{-\alpha(s-t)}|X(s)(I-P)\xi| \quad \text{for} \quad s\ge t\ge T_1.$$

一致有界增长性质与引理 2.2 一起表明，存在一个正常数 M，使得

$$||X(t)PX^{-1}(t)|| \leq M \quad \text{for any } t \geq T_1.$$

因此，根据第2章的命题 2.1，我们知道 (1.1) 在区间 $[T_1, +\infty)$ 上具有一致指数二分性；根据引理 2.1，它在 $[0, +\infty)$ 上也具有一致指数二分性。

3. 半直线上的有界解与指数二分性

正如我们在本章开头的一个例子中所展示的，如果线性系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}_0^-$ 和 $\mathbb{R}_0^+$ 上同时具有指数二分性，并不总是意味着它在 $\mathbb{R}$ 上也具有指数二分性。现在，本节将给出确保 $\mathbb{R}$ 上存在指数二分性的充要条件。在此背景下，我们回顾以下定义。

定义 3.1. 具有指数二分性的 n 维线性系统 $\dot{x} = A(t)x$，若其在 $\mathbb{R}_0^+$ 和 $\mathbb{R}_0^-$ 上分别具有常值投影 P_+ 和 P_-，则其指标为

$$i(A) = \dim \operatorname{Im} P_+ + \dim \ker P_- - n.$$

此外，我们将考虑基本矩阵为 $X(t)$ 的线性系统(1.1)，并重新定义子空间

$$\mathcal{V} := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \sup_{t \geq 0} |X(t,0)\xi| < +\infty \right\}, \tag{3.1a}$$

$$\mathcal{W} := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \sup_{t \leq 0} |X(t,0)\xi| < +\infty \right\}. \tag{3.1b}$$

接下来的两个结果讨论不同的投影，但其证明与前一章中的引理 3.1 类似。

引理 3.1。 如果线性系统 (1.1) 在 $[0, +\infty)$ 上具有指数二分性，其投影算子为 P_+，常数为 (K, α)，那么可得$\mathcal{V}$ = 像空间P_+。

引理 3.2。 如果线性系统 (1.1) 在 $(-\infty, 0]$ 上具有指数二分性，其投影算子为 P_-，常数为 (K, α)，那么可得$\mathcal{W}$ = 核 P_-。

以下结果已在 [**102**, 引理 1] 中陈述。

引理 3.3. 假设线性系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}_0^+$ 和 $\mathbb{R}_0^-$ 上均具有指数二分性，其投影分别为 P_+ 和 P_-，则以下性质等价：

i) 线性系统 (1.1) 的唯一有界解是平凡解，ii) 投影算子 P_+ 和 P_- 满足恒等式

$$P_+P_- = P_-P_+ = P_+.$$

证明。利用引理 (3.1)–(3.2)，可得：

$$\mathrm{Im}P_+ = \mathcal{V} \quad \text{and} \quad \ker P_- = \mathcal{W}.$$

假设命题 i) 成立，可以直接证明 $\ker P_- \cap \mathrm{Im}P_+ = \{0\}$。现在，对于任意非零向量 $\xi \in \ker P_-$，可知 ξ 必须属于 $\mathrm{Im}P_+$ 的一个补子空间，由此可得

$$\ker P_- \subseteq \ker P_+, \tag{3.2}$$

由此可推出 $\ker P_- \oplus \mathrm{Im}P_+ \subset \ker P_+ \oplus \mathrm{Im}P_+ = \mathbb{R}^n$。我们可以推出存在一个补子空间 V，使得：

$$\ker P_- \oplus V \oplus \mathrm{Im}P_+ = \mathbb{R}^n,$$

于是 $V \oplus \mathrm{Im}P_+ = \mathrm{Im}P_-$，由此可得

$$\mathrm{Im}P_+ \subseteq \mathrm{Im}P_-. \tag{3.3}$$

对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$，可知 $P_+\xi \in \mathrm{Im}P_+ \subset \mathrm{Im}P_-$，这意味着 $P_-P_+\xi = P_+\xi$，且恒等式 $P_-P_+ = P_+$ 成立。

现在，对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$，有 $\xi = \eta + \lambda$，其中 $\eta \in \ker P_-$ 且 $\lambda \in \mathrm{Im}P_-$。我们有 $P_-\xi = \lambda$，并且由于 $\ker P_- \subset \ker P_+$，还有 $P_+\eta = 0$，因此可以得出 $P_+P_-\xi = P_+\lambda = P_+(\eta + \lambda) = P_+\xi$，于是 $P_+P_- = P_+$，命题 (ii) 得证。

反向推论留作读者练习，另请参阅 [**102**,p.S176]。

□

命题 3.1. 线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，当且仅当：

a) 该系统在 $\mathbb{R}_0^+$ 和 $\mathbb{R}_0^-$ 上分别具有指数二分性，其投影分别为 P_+ 和 P_-，b) 该系统没有非平凡有界解，c) 线性系统的指标为 $i(A) = 0$。

证明。首先，如果该线性系统在 $\mathbb{R}$ 上具有投影算子为 P 的指数二分性，则利用 $P = P_- = P_+$ 可直接验证性质 a) 和 c)。此外，性质 b) 可由第2章的推论 3.1 得出。

其次，假设性质 a)、b) 和 c) 均成立。现在，根据引理 3.3 可以证明，断言 (3.2)–(3.3) 中的不等式不能是严格的，即：

$$\ker P_- = \ker P_+ \quad \text{and} \quad \mathrm{Im}P_+ = \mathrm{Im}P_-.$$

事实上，否则，若 $\ker P_- \subset \ker P_+$，则有 $\dim\ker P_- < \dim\ker P_+$；结合 $i(A) = 0$，可得

$$\begin{aligned} n &= \dim\ker P_+ + \dim\mathrm{Im}P_+ \\ &> \dim\ker P_- + \dim\mathrm{Im}P_+ = n, \end{aligned}$$

从而得到矛盾。恒等式 $\mathrm{Im}P_+ = \mathrm{Im}P_-$ 可用类似的方法证明。

设 $\xi \in \mathbb{R}^n$。由于 $P_-\xi \in$ 像空间$P_- =$ 像空间P_+，可知 $P_+P_-\xi = P_-\xi$。另一方面，利用引理 3.3 的 ii) 条陈述，我们还可得 $P_+P_-\xi = P_+\xi$，这意味着

$$P_-\xi = P_+\xi \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

并且恒等式 $P_+ = P_-$ 成立，由此可知，该线性系统在 $\mathbb{R}$ 上具有投影算子为 $P = P_+ = P_-$ 的指数二分性。

□

4. 回到投影算子问题

在注 2.6 中，我们将以下问题称为投影算子问题：若一个线性系统 (2.1) 的基本矩阵为 $X(t)$，且它在 J 上具有投影算子为 P 的指数二分性，那么这个投影算子是否唯一?

上一节的结果将使我们能够针对 $J = \mathbb{R}_0^-$、$J = \mathbb{R}_0^+$ 和 $J = \mathbb{R}$ 给出答案。对于半轴的情形，我们将给出确保存在其他投影算子的充分条件；而对于 $J = \mathbb{R}$ 的情形，则证明其唯一性。

如果线性系统 (2.1) 在 $\mathbb{R}_0^-$ 上具有投影算子为 P 的指数二分性，那么正如我们在第2章的注 3.1 中所见，(2.1) 的任意解 $x(t) = \Phi(t,0)\xi$ 都可以在 $t \to -\infty$ 时分解为指数膨胀 $t \mapsto \Phi(t,0)P\xi$ 和指数收缩 $t \mapsto \Phi(t,0)[I-P]\xi$。现在，如果存在另一个投影算子 P，使得 $\ker P = \ker \overline{P}$，则引理 3.2 表明

$$\ker\overline{P} = \mathcal{W} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \colon \sup_{t\le 0}|X(t,0)\xi| < +\infty\right\}.$$

由于方程 (2.1) 的解也可以分解为 $t \mapsto x(t) = \Phi(t,0)\xi = \Phi(t,0)P\xi + \Phi(t,0)[I-P]\xi$，其中 $t \mapsto \Phi(t,0)[I-P]\xi$ 在 $t \to -\infty$时是指数收缩。一个自然的问题是：为了确保存在.....,对 P 还需要哪些附加假设

在 $\mathbb{R}_0^-$ 上具有投影算子 P的指数二分性。以下结果给出了答案。

引理 4.1. 若线性系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}_0^-$ 上具有指数二分性，投影为 P，且存在另一个投影 P 满足以下性质

i) 存在 $K > 0$ 使得

$$\tilde{K} = \sup_{t\in(-\infty,0]} \|X(t)(I-\overline{P})X^{-1}(t)\|, \tag{4.1}$$

ii) 核 $P =$核 $\overline{P}$,

那么系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}_0^-$ 上也具有指数二分性，投影为 P。

证明。性质 核 $P =$核 P蕴含以下恒等式，其证明留作练习:

$$(I-\overline{P}) = (I-P)(I-\overline{P}) \text{ and } \overline{P} = (I-P+\overline{P})P.$$

利用上述对 $(I-P)$ 的刻画并考虑$t \le s \le 0$, 可得

$$\begin{aligned}
\|X(t)(I-\overline{P})X^{-1}(s)\| &= \|X(t)(I-P)(I-\overline{P})X^{-1}(s)\| \\
&= \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)X(s)(I-\overline{P})X^{-1}(s)\| \\
&\le \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\|\|X(s)(I-\overline{P})X^{-1}(s)\| \\
&\le Ke^{-\alpha(s-t)}\|X(s)(I-\overline{P})X^{-1}(s)\| \\
&\le K\tilde{K}e^{-\alpha(s-t)}.
\end{aligned}$$

利用上述对 P的刻画并考虑 $s \le t \le 0$, 可得

$$\begin{aligned}
\|X(t)\overline{P}X^{-1}(s)\| &= \|X(t)(I-P+\overline{P})PX^{-1}(s)\| \\
&= \|X(t)(I-P+\overline{P})X^{-1}(t)X(t)PX^{-1}(s)\| \\
&\le \|X(t)(I-P+\overline{P})X^{-1}(t)\|\|X(t)PX^{-1}(s)\| \\
&\le Ke^{-\alpha(t-s)}\|X(t)(I-P+\overline{P})X^{-1}(t)\| \\
&\le Ke^{-\alpha(t-s)}\{\|X(t)(I-P)X^{-1}(t)\| + \|X(t)\overline{P}X^{-1}(t)||\} \\
&\le K(K+K\tilde{K}+||I||)e^{-\alpha(t-s)}
\end{aligned}$$

其中，最后一个估计是通过使用

$$||X(t)\overline{P}X^{-1}(t)|| - ||I|| \le ||X(t)(I-\overline{P})X^{-1}(t)|| \le K\tilde{K}$$

由此即可得出结论。 □

考虑 $\mathbb{R}_0^+$ 上的指数二分性时，上述结果有一个对称版本。

引理 4.2。 若线性系统 (1.1)在 $\mathbb{R}_0^+$ 上具有指数二分性，投影为 P，且存在另一个满足以下性质的投影 P'

i) 存在 $K' > 0$，使得

$$K' = \sup_{t\in[0,+\infty)} \|X(t)P'X^{-1}(t)\|, \tag{4.2}$$

ii) $P=$ 的像空间 P' 的像空间，

则系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}_0^+$ 上也具有指数二分性，投影为 P'。

证明。由 $P=$ 的像空间 P' 的像空间可知，该性质蕴含以下恒等式

$$P'P = P \quad \text{and} \quad PP' = P', \tag{4.3}$$

由此可得:

$$P-P' = P(P-P') = (P-P')(I-P) \quad \text{and} \quad I-P' = [I+P-P'](I-P).$$

利用 $P\prime = PP'$并考虑 $0 \le s \le t$，可得

$$\begin{aligned}\|X(t)P'X^{-1}(s)\| &= \|X(t)PP'X^{-1}(s)\| \\ &= \|X(t)PX^{-1}(s)X(s)P'X^{-1}(s)\| \\ &\le \|X(t)PX^{-1}(s)\|\|X(s)P'X^{-1}(s)\| \\ &\le KK'e^{-\alpha(t-s)}.\end{aligned}$$

利用上述对 $(I-P')$ 的刻画并考虑$0 \le t \le s$，可得

$$\begin{aligned}\|X(t)(I-P')X^{-1}(s)\| &= \|X(t)(I+P-P')(I-P)X^{-1}(s)\| \\ &= \|X(t)(I+P-P')X^{-1}(t)X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| \\ &\le \|X(t)(I+P-P')X^{-1}(t)\|\|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| \\ &\le Ke^{-\alpha(s-t)}\|X(t)(I-P'+P)X^{-1}(t)\| \\ &\le Ke^{-\alpha(s-t)}\left(\|X(t)[I-P']X^{-1}(t)\| + \|X(t)PX^{-1}(t)\|\right) \\ &\le K(\|I\| + K + KK')e^{-\alpha(s-t)},\end{aligned}$$

其中，最后一个估计由.....得出

$$\|X(t)P'X^{-1}(t)\| - \|I\| \le \|X(t)[I-P']X^{-1}(t)\| \le KK'$$

由此即可得出结果。 □

最后，正如本节开头所述，我们以对 $J=\mathbb{R}$ 时投影算子问题的肯定回答作为结尾。

引理 4.3。若线性系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性，且投影为 P ，则该投影是唯一的。

证明。假设还存在另一个投影算子 P'。此外，由于系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}_0^-$ 和 $\mathbb{R}_0^+$ 上也具有指数二分性，根据引理 3.1 和引理 3.2，我们得到

$$\ker P = \ker P' \quad \text{and} \quad \operatorname{Im} P = \operatorname{Im} P'.$$

根据引理 3.3，我们有 $PP\prime = P\prime P$，结合引理 4.2 中的恒等式 (4.3)，可得 $P=P'$。□

5. 注释与参考文献

1) 本节陈述的大多数结果均出自 Coppel 的著作，即引理 2.1、定理 2.1 和定理 2.2。我们仅补充了中间计算和解释，以使内容更加清晰。

2) K.J. Palmer 在 [102,Th.1] 中重新讨论并改进了定理 2.2，其中证明了：若系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}_0^+$ 上连续且具有一致有界增长性质，则在 $\mathbb{R}_0^+$ 上的指数二分性、一致非临界性和指数扩张性等性质彼此等价。

回顾一下，如果存在正常数 L 和 β，使得对于 (1.1) 的任意解 $t\mapsto x(t)$ 及紧区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}_0^+$，都有：

$$|x(t)| \le L\left\{e^{-\beta(t-a)}|x(a)| + e^{-\beta(b-t)}|x(b)|\right\} \quad \text{for any } t\in[a,b].$$

3) 引理 3.3 出自 K.J. Palmer [102]，使得命题 3.1 的证明变得简单。

4) 关于投影算子问题的引理 4.1 和 4.2 改编自 Kloeden 和 Rasmussen 的著作 [78, 第 83] 页。注意，考察第2章的 2.3 节后，我们可以构造投影算子$P(t) = X(t)PX^{-1}(t)$ 和 $P'(t) = X(t)P\prime X^{-1}(t)$，使其满足性质 (4.1) 和 (4.2)：

$$\tilde{K} = \sup_{t\in(-\infty,0]} \|[I-\overline{P}(t)]\|, \quad \text{and} \quad K' = \sup_{t\in[0,+\infty)} \|P'(t)\|.$$

最后但同样重要的是，引理 4.1 和引理 4.2 使我们能够轻松证明引理 4.3。

6. 习题

1.- 证明引理 2.2。
2.- 证明引理 3.2。
3.- 证明引理 3.3 中 ii) 蕴含 i)。
4.- 在引理 4.1 的假设下，证明这些恒等式

$$(I-\overline{P}) = (I-P)(I-\overline{P}) \text{ and } \overline{P} = (I-P+\overline{P})P.$$

5.- 在引理 4.2 的假设下，证明这些恒等式

$$P-\overline{P} = P(P-\overline{P}) = (P-\overline{P})(I-P)$$

and

$$I-\overline{P} = [I+P-\overline{P}](I-P).$$

6.- 通过考虑变投影算子，证明引理 4.1 和引理 4.2。
7.- 证明定理 2.2 的对称版本：如果线性系统 (1.1) 在 $(-\infty, 0]$ 上具有有界衰减和非临界一致性的性质，那么它在 $(-\infty, 0]$ 上也具有指数二分性。

第 4 章

可约性

本节的主要结果指出，任何在 J 上具有指数二分性且投影非平凡的线性系统，都广义运动学相似于一个分块对角系统。

1. 预备知识

1.1. 定义。 可约性是 W. Coppel 在 [40] 中引入、并在 [41, 第 38] 页重新讨论的一般运动相似的一个特例。

定义 1.1. 线性 n 维系统

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{with } t \in J \subseteq \mathbb{R} \tag{1.1}$$

其中 $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ 在 J 上连续，可约化为

$$\dot{y} = B(t)y \quad \text{with } t \in J \subseteq \mathbb{R} \tag{1.2}$$

当系统 (1.1) 和(1.2) 在 J 上广义运动学相似时。此外，矩阵 $B(t)$ 具有如下分块形式:

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & B_2(t) \end{bmatrix},$$

其中 $B_1(t) \in M_{n_1}(\mathbb{C})$ 和 $B_2(t) \in M_{n_2}(\mathbb{C})$ ， $n_1 + n_2 = n$ 且n_1、 $n_2 < n$。

为避免混淆，正如 W. Coppel 在 [40], 中指出的，有必要说明，在大量参考文献中，可约性指的是另一种性质，即与自治系统的运动相似性。这一概念由 A. Lyapunov 提出，并对数学文献产生了深远影响。此外，W. Cop- pel 指出，定义 1.1 与线性代数中对可约性的定义一致。

1.2. 技术结果。

引理 1.1。 设 P为一个正交投影（即 $P^* = P$），且X 为一个可逆矩阵，则存在一个可逆矩阵 S，使得

$$SPS^{-1} = XPX^{-1}.$$

此外，矩阵 S 满足以下性质：

$$||S||_2 \leq \sqrt{2} \quad \text{and} \quad ||S^{-1}||_2 \leq \sqrt{||XPX^{-1}||_2^2 + ||X(I-P)X^{-1}||_2^2}.$$

证明。在此证明中，我们将用 $||\cdot||$代替 $||\cdot||_2$。此外，我们将把证明分为几个步骤。

步骤 *1*： 矩阵

$$U = PX^*XP + (I-P)X^*X(I-P), \tag{1.3}$$

是厄米正定矩阵。

恒等式 $U = U^*$是 $P = P^*$的直接推论。为了证明 U 是正定的，令 $\xi \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$，并注意到

$$\begin{aligned} \xi^*U\xi &= \xi^*PX^*XP\xi + \xi^*(I-P)X^*X(I-P)\xi \\ &= ||XP\xi||^2 + ||X(I-P)\xi||^2 \geq 0 \end{aligned}$$

并且我们将看到该不等式是严格的。事实上，否则若 $\xi^*U\xi$ =0，则它等价于

$$XP\xi = 0 \quad \text{and} \quad X(I-P)\xi = 0,$$

这意味着 $XP\xi + X(I-P)\xi = X\xi = 0$，且 $\xi = 0$，因为 X 可逆，从而得到矛盾。

步骤 *2*： U 的正定性意味着存在唯一的矩阵 $R = R^* > 0$，使得 $R^2 = U$。详情请参阅附录 A 及相关参考文献。

步骤 *3*：矩阵 R 和 P 可交换。

由于 $P^2 = P$ 和 $R^2 = U$，利用 (1.3) 易知

$$R^2P = PR^2 = PX^*XP.$$

由于 R^2 和 P 是厄米矩阵，因此它们可对角化。此外，由于它们可交换，众所周知它们可以同时对角化（参见例如 [**71**, 第 69–72],[**113**] 页），也就是说，存在一个可逆矩阵 Q，使得

$$R^2 = Q^{-1}AQ \quad \text{and} \quad P = Q^{-1}BQ,$$

其中， A 和 B 是对角矩阵，分别包含 R^2和 P 的特征值。

由于对角矩阵 A 的所有项均为正定，我们可以考虑$A = DD$，其中 D 是对角矩阵 $D =$ Diag$\{d_{11}$，……， $d_{nn}\}$，满足$a_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$。由此可得

$$R^2 = Q^{-1}DDQ = (Q^{-1}DQ)(Q^{-1}DQ)$$

并且我们有 $R = Q^{-1}DQ$。

由于 $BD = DB$ 是对角矩阵，我们有

$$Q^{-1}BDQ = Q^{-1}DBQ,$$

这等价于

$$(Q^{-1}BQ)(Q^{-1}DQ) = (Q^{-1}DQ)(Q^{-1}BQ),$$

这也等价于 $PR = RP$，并且还意味着

$$R(I - P) = R - RP = R - PR = (I - P)R.$$

步骤 *4*：考虑变换 $S = XR^{-1}$。现在注意到，$PR = RP$ 意味着：

$$\begin{aligned} SPS^{-1} &= XR^{-1}PRX^{-1} \\ &= XR^{-1}RPX^{-1} \\ &= XPX^{-1}, \end{aligned}$$

由此我们推导出引理中陈述的第一个恒等式。

步骤*5*：利用 $SR = X$、 $R^* = R$并回顾 $PR = RP$，其中$R^2 = U$，我们得到

$$\begin{aligned} R^2 &= PX^*XP + (I - P)X^*X(I - P) \\ &= PR^*S^*SRP + (I - P)R^*S^*SR(I - P) \\ &= PRS^*SRP + (I - P)RS^*SR(I - P) \\ &= RPS^*SPR + R(I - P)S^*S(I - P)R. \end{aligned}$$

我们将上述恒等式的右侧和左侧分别乘以 R^{-1}，得到

$$I = PS^*SP + (I - P)S^*S(I - P).$$

现在，令 $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，并注意到

$$\begin{aligned} ||S\xi||^2 &= ||SP\xi + S(I-P)\xi||^2 \\ &\leq \{||SP\xi|| + ||S(I-P)\xi||\}^2 \\ &\leq 2\{||SP\xi||^2 + ||S(I-P)\xi||^2\} \\ &\leq 2\{\xi^* PS^* SP\xi + \xi^*(I-P)S^* S(I-P)\xi\} \\ &\leq 2\xi^*\{PS^* SP + (I-P)S^* S(I-P)\}\xi \\ &\leq 2\xi^*\xi = 2||\xi||^2 \end{aligned}$$

那么我们可以得出结论：$||S|| \leq \sqrt{2}$。

步骤6：最后，由于 $S = XR^{-1}$，我们有 $S^{-1} = RX^{-1}$ 并且

$$\begin{aligned} (S^{-1})^* S^{-1} &= (X^{-1})^* R^* RX^{-1} \\ &= (X^{-1})^* R^2 X^{-1} \\ &= (X^{-1})^*[PX^* XP + (I-P)X^* X(I-P)]X^{-1} \\ &= (X^{-1})^* PX^* XPX^{-1} + (X^{-1})^*(I-P)X^* X(I-P)X^{-1} \end{aligned}$$

那么我们可以像前一步那样推得，

$$||S^{-1}||^2 \leq ||XPX^{-1}||^2 + ||X(I-P)X^{-1}||^2$$

结果由此得出。 □

仔细阅读引理 1.1 的陈述可知，给定一个固定的正交投影 P 和任意一个取值于可逆矩阵集的函数 $t \mapsto X(t)$，都存在一族矩阵 $t \mapsto S(t)$，满足上述恒等式和估计。这引出了以下推论：

推论 1.1. 设 $J \ni t \mapsto X(t)$ 是线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 的一个基本矩阵，且 P 是一个正交投影（即 $P^* = P$），那么存在一个可逆且可微（其逆矩阵也可微）的矩阵 $J \ni t \mapsto S(t)$，使得

$$S(t)PS^{-1}(t) = X(t)PX^{-1}(t).$$

此外，$S(t)$ 满足以下性质：

$$||S(t)||_2 \leq \sqrt{2} \text{ and } ||S^{-1}(t)||_2 \leq \sqrt{||X(t)PX^{-1}(t)||_2^2 + ||X(t)(I-P)X^{-1}(t)||_2^2}$$

and

$$\dot{S}(t) = A(t)S(t) - S(t)\dot{R}(t)R^{-1}(t). \tag{1.4}$$

证明。根据引理 1.1，对于任意 $t \in J$，存在一个矩阵值函数 $t \mapsto S(t)$，满足上述恒等式和不等式。此外，沿用前一个证明的思路，我们知道 $S(t) = X(t)R^{-1}(t)$，其中 $R^2(t)P = PR^2(t)$ 和 $R^2(t)$ 定义如下：

$$R^2(t) = PX^*(t)X(t)P + [I-P]X^*(t)X(t)[I-P] > 0. \tag{1.5}$$

$X(t)$ 的可导性结合 (1.5) 表明，$R^2(t)$ 在 J 上可导。现在，我们将证明 $R(t)$ 在 J 上可导。首先，回顾一下，由于 P 是厄米的，因此它是可对角化的，并且存在一个非奇异常矩阵 Z，使得 $Z^{-1}PZ = D_P$。

另一方面，由于 $R^2(t)P = PR^2(t)$，我们知道 $R^2(t)$ 和 P 可以同时对角化，因此可以假设

$$Z^{-1}R^2(t)Z = \mathrm{Diag}\{a_1(t), \ldots, a_n(t)\},$$

也就是说，$R^2(t)$ 可由一个常基对角化。由于我们知道 $R^2(t)$ 在 J 上可导，因此对任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$t \mapsto a_i(t)$ 都是可导的。

性质 $R(t) > 0$ 表明

$$R(t) = Z\,\mathrm{Diag}\{\sqrt{a_1(t)}, \ldots, \sqrt{a_n(t)}\}Z^{-1}$$

在 J 上有良好定义且可导。现在，根据第1章的引理 1.1，我们有 $\dot{R}^{-1}(t) = -R^{-1}(t)\dot{R}(t)R^{-1}(t)$。于是，$S(t) = X(t)R^{-1}(t)$ 的可导性随即得到，并且可以容易地推出恒等式 (1.4)。□

注意，方程 (1.4) 与第1章中给出的运动学相似定义有关。事实上，只要矩阵值函数 $t \mapsto S(t)$和 $t \mapsto S^{-1}(t)$在 J上有界，线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 和 $\dot{y} = \dot{R}(t)R^{-1}(t)y$ 就广义运动学相似。这是下一节的主题。

2. 指数二分性与可约性

本节的主要结果指出，任何具有指数二分性性质的线性系统都是可约的。这使我们能够重新审视这样一个事实：线性系统的任何解若在 J 上具有指数二分性，就可以分解为一个渐近稳定分量和一个渐近不稳定分量，因为可约性意味着该系统可解耦为两个具有相同渐近行为的系统。

定理 2.1. 设 $X(t)$ 是 $\dot{x} = A(t)x$的一个基本矩阵，其中 $t \mapsto A(t)$ 在 J 上连续。此外，假设存在一个秩为 r 的正交非平凡投影 P，使得$t \mapsto ||X(t)PX^{-1}(t)||_2$在 J 上有界。那么，该线性系统可约为对角分块系统

$$\dot{y} = \dot{R}(t)R^{-1}(t)y = \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & B_2(t) \end{bmatrix} y, \tag{2.1}$$

其中 $B_1(t)$ 的秩为 r，而 $B_2(t)$ 的秩为 $n-r$，对任意 $t \in J$均成立。

证明. 不失一般性，根据第 2 章中的引理 2.1，我们可以考虑如下的基本矩阵 $X(t)$ 和秩为 $0 < r < n$ 的典范投影 P_r：

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_{11}(t) & X_{12}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad P_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $X_{11} \in M_r(\mathbb{C})$、$X_{12} \in M_{r,n-r}(\mathbb{C})$、$X_{21} \in M_{n-r,r}(\mathbb{C})$ 以及 $X_{22} \in M_{n-r}(\mathbb{C})$。

$t \mapsto ||X(t)P_rX^{-1}(t)||_2$ 在 J 上的有界性意味着 $t \mapsto ||X(t)[I - P_r]X^{-1}(t)||_2$ 的有界性，进而由推论 1.1 可知，存在满足 (1.4) 的 $S(t) = X(t)R^{-1}(t)$，使得 $S(t)$ 和 $S^{-1}(t)$ 在 J 上有界且可导。

其次，容易看出，J 上 (1.1) 与 (2.1) 之间的一般运动相似性，是由 (1.4) 与变换 $y = S^{-1}(t)x$ 共同推出的。因此，只要证明 $\dot{R}(t)R^{-1}(t)$ 是分块对角的，定理便得证。

为了验证 $\dot{R}(t)R^{-1}(t)$ 是分块对角的，我们回顾一下，恒等式 (1.5) 对任意正交投影P均成立；特别地，我们可以使用 P_r。此外，注意到 $R^2(t)$ 可表示如下：

$$R^2(t) = \begin{bmatrix} X_{11}^*(t)X_{11}(t) + X_{21}^*(t)X_{21}(t) & 0 \\ 0 & X_{12}^*(t)X_{12}(t) + X_{22}^*(t)X_{22}(t) \end{bmatrix},$$

其各块的维数分别为 r 和 $n-r$。

利用性质 $R^2(t) > 0$ 和 $R(t) > 0$，再结合 $R^2(t)$ 的子矩阵也均为正定这一事实（见 [**72**, 第13]页），容易看出，$R(t)$ 也是分块对角的，且其各块维数与 $R^2(t)$ 相同。随后，这种分块对角性质在 $R^{-1}(t)$ 和 $\dot{R}(t)$ 下也得以保持，从而得到可约性。□

下一个结果针对（2.1）的子系统，即

$$\dot{y}_1 = B_1(t)y_1 \quad \text{and} \quad \dot{y}_2 = B_2(t)y_2 \tag{2.2}$$

并描述它与（1.1）的关系。

推论 2.1。 若线性系统 (1.1) 在 J 上具有指数二分性，其常数为 K、$\alpha > 0$，且投影 P 的秩等于 r，其中 $0 < r < n$，则

a) 若 $Y_i(t)$ 是 $\dot{y}_i = B_i(t)y_i$ 的基本矩阵，且 $i = 1,2$，则~存在 $K > 0$，使得：

$$\begin{cases} ||Y_1(t,s)||_2 \leq \tilde{K}e^{-\alpha(t-s)} & \text{for } t \geq s \text{ with } t,s \in J \\ ||Y_2(t,s)||_2 \leq \tilde{K}e^{-\alpha(s-t)} & \text{for } t \leq s \text{ with } t,s \in J. \end{cases}$$

b) 子系统 (2.2) 在 J 上分别具有指数二分性，其平凡投影为 $P_1 = I_r \in M_r(\mathbb{R})$ 和 $P_2 = 0 \in M_{n-r}(\mathbb{R})$。

证明。由于 (1.1) 在 J上具有指数二分性，因此我们有$t \mapsto ||X(t)PX^{-1}(t)||$在 J上有界。于是，由定理 2.1 可知，(1.1) 可约为 (1.2)，后者可写为

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & B_2(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

另一方面，由于可约性是运动相似性的一个特例，并且如同前一个结果的证明中一样，我们假设（1.1）的指数二分性具有正定常数 K，α 以及一个典范投影 P_r，利用第2章中的定理 2.1，我们得到（2.3）存在一个基本矩阵 $Y(t)$~和 $K > 0$，使得

$$\begin{cases} ||Y(t)P_rY^{-1}(s)||_2 \leq \tilde{K}e^{-\alpha(t-s)} & \text{for } t \geq s \text{ with } t,s \in J \\ ||Y(t)[I-P_r]Y^{-1}(s)||_2 \leq \tilde{K}e^{-\alpha(s-t)} & \text{for } t \leq s \text{ with } t,s \in J, \end{cases}$$

其中，$Y(t)$ 是（2.3）的一个基本矩阵，使得 $Y(t) = S^{-1}(t)X(t)$。

回顾一下，若 $S(t) = X(t)R^{-1}(t)$，则可推出 $Y(t) = R(t)$，这是一个对角块矩阵，正如我们在定理 2.1 的证明中所看到的。因此，$Y(t)$ 必须具有如下形式

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) & 0 \\ 0 & Y_2(t) \end{bmatrix},$$

其中，$Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 分别是子系统(2.2)的一对基矩阵。

然后，通过考察典范投影 P_r 的结构，很容易推出

$$Y(t)P_rY^{-1}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(t,s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } Y(t)[I-P_r]Y^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_2(t,s) \end{bmatrix}$$

并且我们有

$$||Y(t)P_rY^{-1}(s)||_2 = ||Y_1(t,s)||_2 \quad \text{and} \quad ||Y(t)[I-P_r]Y^{-1}(s)||_2 = ||Y_2(t,s)||_2$$

其中，左侧各项是 n 阶矩阵的范数，而右侧各项分别是 r 阶和 $n-r$ 阶矩阵的范数，由此证明了结论 a)。

最后，一个直接推论是，子系统 (2.2) 在 J 上具有指数二分性，其投影分别为 $P_1 = I_r \in M_r(\mathbb{R})$和$P_2 = 0 \in M_{n-r}(\mathbb{R})$。

□

仔细阅读上述结果可知，任何具有非平凡投影的指数二分性的线性系统都可约为一个分块系统，而该分块系统可分解为一个稳定系统和一个不稳定系统。

3. 注释与参考文献

1) 正如第 1.1 小节所指出的，Lyapunov 引入了另一种可约性。事实上，在 [**80**, 第 241–242], 页，Lyapunov 描述了如今所称的 Lyapunov 变换，并指出“.....所考虑的微分方程系统经过适当选择变换后，会变换为一个常系数系统。在这种情况下，我们将这类系统称为可约.....” [1]。另一方面，我们请读者参阅 [**26**] ，其中讨论了与分块系统的运动相似。

2) 引理 1.1 已在 [**41**, 引理 1，第 39], 页中陈述；我们仅提供中间计算和补充估计，以便于读者阅读。特别地，我们利用 R^2 和 P 可同时对角化这一事实，证明若 R^2 和 P 可交换，则 R 和 P 也可交换。

3) 推论 1.1 已在 [**40**, 引理 1，第39],页中部分陈述，其中通过使用 [**114**, 引理 3 中的一个结果证明了 $t \mapsto R(t)$ 的可导性；而我们的证明利用了 P 和 $R^2(t)$ 可以同时对角化这一事实。

[1]作者自由翻译。

4) 文献中有若干研究，例如 [35, 122, 123,132], ，提到了 [40, 引理 1，第39] 页，将其作为各自研究中解决不同问题的有用工具。我们强调， [122] 中的研究与 W. Coppel 的工作不同，因为 S. Siegmund 研究的是更一般的一类系统，其 t–依赖于局部可积函数，而非依赖于连续 t–的系统。

4. 习题

1.- 考虑线性系统 (1.1)，其中 $t \mapsto A(t)$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 上连续且为 ω–周期函数 (1.1)。证明：如果 (1.1) 的 Floquet乘子既有位于单位圆内的，也有位于单位圆外的，那么它可约为一个自治系统。

2.- 若 (1.1) 可约为 (1.2)，证明 $x' = -A^T(t)x$ 可约为

$$\dot{y} = -\begin{bmatrix} B_1^T(t) & 0 \\ \\ 0 & B_2^T(t) \end{bmatrix} y$$

3.- 证明第 2 章例 1 中讨论的系统是可约的，并求出一个显式表示。

第5章

指数二分谱

1. 引言

给定一个矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$，我们来考虑以下系统：

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.1a}$$

$$\dot{x} = Ax + f(t), \tag{1.1b}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \tag{1.1c}$$

其中 $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$，$B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$，且 $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ 是一个可测函数。

A 的特征值为上述系统的若干性质提供了重要信息。

我们知道，当且仅当 A的特征值实部非零时，(1.1a)才是双曲的。此外，当且仅当 A 的特征值实部为负时，(1.1a)才是一致渐近稳定的。

根据第2章的命题1.1，我们还知道，如果(1.1a)是双曲的，那么系统(1.1b)具有容许性性质，也就是说，对于任意 $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$，系统(1.1b)都有有界连续解。

如果对于任意非平凡初始条件 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，都存在有限时间 $t_1 > t_0$ 和函数$u_0\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^p$，使得满足 $u = u_0(\cdot)$的(1.1c)的解 $t \mapsto x(t, t_0, x_0, u_0)$验证 $x(t_1, t_0, x_0, u_0) = 0$，则系统(1.1c)在 t_0 处可控。一个漂亮的结果 [**133**, Th.3.1]指出，当且仅当对于任意由 n 任意点组成的 $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$，在模共轭意义下，都存在$F \in M_{p,n}(\mathbb{R})$，使得 $A - BF$ 的特征值恰好为 $\mathcal{S}$时，系统(1.1c)才是可控的。

众所周知，对于非自治系统，不存在基于特征值的方法能够重现上述结果。

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.2a}$$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{1.2b}$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \tag{1.2c}$$

其中 $A\colon\ J \subseteq \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$，区间 J 将假定为$\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_0^-$ 或 $\mathbb{R}_0^+$。

为弥补这一重要空缺，人们为线性系统 (1.2a) 建立了若干谱理论，而 Dieci & Van Vleck 在 [**46**, 第 267] 页提出的定义，在考虑 $J=[0,+\infty)$ 时涵盖了这些理论的基本性质：

定义 1.1. 子集 $\Sigma(A)\subset\mathbb{R}$ 是与(1.2a) 相关的谱，如果满足以下一个或多个性质：

(P1) 对于 $\Sigma(A)\cap(-\infty,0)\neq\varnothing$ 和 $0\notin\Sigma(A)$，*(1.2a)*存在非零有界解。*(P2)* 对于 $0\notin\Sigma(A)$，对于任意 $f\in BC(J,\mathbb{R})\setminus\{0\}$，*(1.2b)* 存在有界解。*(P3)* 对于 $\Sigma(A)\cap(-\infty,0)\neq\varnothing$ 和 $0\notin\Sigma(A)$，对于任意 $f\in BC(J,\mathbb{R})$，*(1.2b)*存在非零有界解。

我们必须指出，如果 $A(t)\equiv A$，则集合

$$\Sigma_{EIG}(A):=\{\lambda\in\mathbb{R}\colon \lambda \text{ is the real part of an eigenvalue of } A\}$$

满足(**P1**)–(**P3**)。性质 $0\notin\Sigma_{EIG}(A)$ 是双曲性条件；如果 $\Sigma_{EIG}(A)\subset(\{v11,0)$，则 A 是Hurwitz矩阵，这等价于一致渐近稳定性。

正如我们在第2章中所见，指数二分性可以视为一种非自治双曲性。本节将基于指数二分性构造一个谱 $\Sigma(A)$。

2. 定义与基本结果

2.1. 形式化定义。考虑以下线性平移系统族：

$$\dot{x}=[A(t)-\lambda I]x \tag{2.1}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R}$，并注意到它具有如下基本矩阵：

$$X_\lambda(t)=X(t)e^{-\lambda t},$$

其中 $X(t)$ 是 (1.2a) 的基本矩阵，因此可以直接引入以下性质：

定义 2.1. 系统(2.1) 在 J 上具有指数二分性，如果存在正数 K_λ、α_λ 和一个投影 $P_\lambda^2=P_\lambda$，使得(2.1) 的基本矩阵满足

$$\begin{cases} \|X(t)e^{-\lambda t}P_\lambda X^{-1}(s)e^{\lambda s}\|\le K_\lambda e^{-\alpha_\lambda(t-s)} & \text{if } t\ge s,\ \ t,s\in J\\ \|X(t)e^{-\lambda t}(I-P_\lambda)X^{-1}(s)e^{\lambda s}\|\le K_\lambda e^{-\alpha_\lambda(s-t)} & \text{if } t\le s,\ \ t,s\in J. \end{cases}$$

读者很容易推得，对于任意 t， $s \in J$，上述性质等价于

$$\begin{cases} \|X(t)P_\lambda X^{-1}(s)\| \le K_\lambda e^{\lambda(t-s)}e^{-\alpha_\lambda(t-s)} & \text{if } t \ge s, \\ \|X(t)(I-P_\lambda)X^{-1}(s)\| \le K_\lambda e^{\lambda(t-s)}e^{-\alpha_\lambda(s-t)} & \text{if } t \le s. \end{cases} \tag{2.2}$$

定义 2.2. 以下为指数二分谱 (1.2a)的定义：

$\Sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{R}$: (2.1) 在 $\mathbb{R}$ 上不具有指数二分性$\}$，$\Sigma^-(A) := \{\lambda \in \mathbb{R}$: (2.1) 在 $\mathbb{R}_0^-$ 上不具有指数二分性$\}$，$\Sigma^+(A) := \{\lambda \in \mathbb{R}$: (2.1) 在 $\mathbb{R}_0^+$ 上不具有指数二分性$\}$。

在一些著作中，上述谱 $\Sigma(A)$ 也称为 Sacker–Sell 谱，因为 R.J. Sacker 和 G. Sell 于1978年在 [118] 中，在更一般的非自治动力系统框架下对其进行了研究。正如 [78], 所述，谱 $\Sigma^-(A)$ 和 $\Sigma^+(A)$ 分别也称为过去二分谱和未来二分谱。另一方面，必须强调的是，一般而言，上述谱并不相同。

对上述谱的性质的研究与其补集的性质密切相关，补集定义如下：

定义 2.3。 与(1.2a) 相关的预解集为集合

$$\rho(A) = \mathbb{R} \setminus \Sigma(A), \quad \rho^-(A) = \mathbb{R} \setminus \Sigma^-(A) \quad \text{and} \quad \rho^+(A) = \mathbb{R} \setminus \Sigma^+(A).$$

注意，如果 $\lambda_0 \in \rho(A)$，则指数二分性性质 (2.2) 在 $\lambda = \lambda_0$ 和 $J = \mathbb{R}$ 下成立。考虑 $\lambda_0 \in \rho^\pm(A)$ 和 $J = \mathbb{R}_0^\pm$ 时同样可以验证这一点。

注 2.1。利用预解式的定义，可以直接验证

$$\Sigma^+(A) \subseteq \Sigma(A) \quad \text{and} \quad \Sigma^-(A) \subseteq \Sigma(A). \tag{2.3}$$

事实上，重新考察第 3 章中的方程 2.2，可以看出 $0 \notin \Sigma^+(a)$，而 $0 \in \Sigma(a)$。

2.2. 系统 (2.1) 的向后和向前有界解。研究平移线性系统 (2.1) 这一族，对于研究上述谱和预解集也至关重要。接着，按照我们在前几章中采用的方法，对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ ，我们将引入以下集合：

$$\mathcal{S}^\lambda := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \sup_{t \in \mathbb{R}_0^+} |X(t,0)\xi| e^{-\lambda t} < +\infty \right\}$$

and

$$\mathcal{U}^{\lambda} := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \sup_{t \in \mathbb{R}_0^-} |X(t,0)\xi| e^{-\lambda t} < +\infty \right\}.$$

注 2.2. 由于初始条件为 $x(0) = \xi$ 的系统 (2.1) 的解由 $t \mapsto X(t,\ 0)\ e^{-\lambda t}\xi$ 给出，因此显然， $\mathcal{S}^{\lambda}$ （分别为 $\mathcal{U}^{\lambda}$）是这样的初始条件 ξ 的集合：经过 ξ 且在 $t = 0$ 时刻的系统 (2.1) 的解在 $\mathbb{R}_0^+$（分别在 $\mathbb{R}_0^-$）上有界。

注 2.3。注意：

a) $\mathcal{S}^{\lambda}$ 和 $\mathcal{U}^{\lambda}$ 是 $\mathbb{R}$– $\mathbb{R}^n$的向量子空间，b) 若 $\lambda \leq \mu$，则 $\mathcal{S}^{\lambda} \subseteq \mathcal{S}^{\mu}$，c) 若 $\lambda \leq \mu$，则 $\mathcal{U}^{\mu} \subseteq \mathcal{U}^{\lambda}$，d) 若 $\lambda = 0$，则可得到第 3 章中由 (3.1a)–(3.1b) 定义的集合 $\mathcal{V} = \mathcal{S}^0$ 和 $\mathcal{W} = \mathcal{U}^0$ 。

若 λ 使得平移线性系统 (2.1) 具有指数二分性，则以下引理——其证明留作练习——描述了向量空间$\mathcal{S}^{\lambda}$ 和 $\mathcal{U}^{\lambda}$ 与投影 P_{λ}之间的密切关系。

引理 2.1。 如果平移线性系统 (2.1)在 $\mathbb{R}_0^+$ 上具有指数二分性，且投影为 P_{λ}，则 $\mathcal{S}^{\lambda}$ =像空间P_{λ}。

引理 2.2。 如果平移线性系统 (2.1) 在 $\mathbb{R}_0^-$ 上具有指数二分性，且投影为 P_{λ}，则 $\mathcal{U}^{\lambda}$ = 核 P_{λ}。

推论 2.1。 若线性系统 (2.1) 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，投影为 P_{λ}，则

$$\mathcal{U}^{\lambda} = \ker P_{\lambda} \quad \text{and} \quad \mathcal{S}^{\lambda} = \mathrm{Im} P_{\lambda}.$$

若平移线性系统 (2.1) 在$\mathbb{R}_0^+$ 上具有指数二分性，投影为 P_{λ}^+，且在 $\mathbb{R}_0^-$上也具有指数二分性，投影为 P_{λ}^-，则

$$\mathcal{U}^{\lambda} = \ker P_{\lambda}^+ \quad \text{and} \quad \mathcal{S}^{\lambda} = \mathrm{Im} P_{\lambda}^-.$$

正如我们在第 3 章第 4 节讨论投影算子问题时所看到的，投影算子 P_{λ}^+和 P_{λ}^-不一定相同。

引理 2.3。 若平移系统 (2.1) 在 $\mathbb{R}_0^-$ 上具有指数二分性，投影为 P_{λ} ，且存在另一个投影P 满足以下性质

i) 存在 $K_1 > 0$ 使得

$$K_1 = \sup_{t \in (-\infty, 0]} \| X_{\lambda}(t)(I - \overline{P}) X_{\lambda}^{-1}(t) \|,$$

ii) 核 $P_\lambda =$核 $\overline{P}$,
则系统 (2.1) 在 $\mathbb{R}_0^-$ 上也具有以 P为投影的指数二分性。

证明。证明与第 3 章引理 4.1 的证明相似。□

引理 2.4。 若平移系统 (2.1) 在 $\mathbb{R}_0^+$ 上具有以 P_λ 为投影的指数二分性，并且存在另一个投影 P' 满足以下性质

i) 存在 $K_2 > 0$ 使得
$$K_2 = \sup_{t\in[0,+\infty)} \|X_\lambda(t)P'X_\lambda^{-1}(t)\|,$$
ii) $P_\lambda =$ 像空间P',
则系统 (2.1) 在 $\mathbb{R}_0^+$ 上也具有以 P为投影的指数二分性。

证明。证明过程与第 3 章引理 4.2 的证明类似。□

3. 指数二分谱与预解集的性质

3.1. 拓扑性质。

命题 3.1. 线性系统 (1.2a) 的预解集 $\rho(A)$、$\rho^-(A)$和 $\rho^+(A)$是 $\mathbb{R}$中的开集。

证明。这里只证明 $\rho(A)$ 的情形，因为其他预解集也可用类似的方法处理。情形 $\rho(A) = \varnothing$ 和 $\rho(A) = \mathbb{R}$是显然的。现在，假设 $\rho(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 的真子集，且 $\lambda \in \rho(A)$。那么，根据定义 2.1，平移系统 $\dot{x} = [A(t) - \lambda I]x$ 在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性；也就是说，存在一个投影 P_λ 和两个正常数 K_λ 和 α_λ，使得:
$$\begin{cases} \|X(t)e^{-\lambda t}P_\lambda X^{-1}(s)e^{\lambda s}\| & \le K_\lambda e^{-\alpha_\lambda(t-s)} \quad \text{if} \quad t \ge s \\ \|X(t)e^{-\lambda t}(I-P_\lambda)X^{-1}(s)e^{\lambda s}\| & \le K_\lambda e^{-\alpha_\lambda(s-t)} \quad \text{if} \quad t \le s. \end{cases}$$
现在，考虑 $\mu \in (\lambda - \alpha_\lambda, \lambda + \alpha_\lambda)$ 时，我们将证明线性系统

$$\dot{x} = [A(t) - \mu I]x \tag{3.1}$$
在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性。事实上，上述不等式等价于

$$\begin{cases} \|X(t)P_\lambda X^{-1}(s)\| & \le K_\lambda e^{-(\alpha_\lambda-\lambda)(t-s)} \quad \text{if} \quad t \ge s \\ \|X(t)(I-P_\lambda)X^{-1}(s)\| & \le K_\lambda e^{-(\alpha_\lambda+\lambda)(s-t)} \quad \text{if} \quad t \le s, \end{cases}$$

或者等价地

$$\begin{cases} \|X(t)e^{-\mu t}P_\lambda X^{-1}(s)e^{\mu s}\| & \le K_\lambda e^{-(\alpha_\lambda-\lambda+\mu)(t-s)} \quad \text{if} \quad t\ge s \\ \|X(t)e^{-\mu t}(I-P_\lambda)X^{-1}(s)e^{\mu s}\| & \le K_\lambda e^{-(\alpha_\lambda+\lambda-\mu)(s-t)} \quad \text{if} \quad t\le s. \end{cases}$$

现在，令 $\beta=\min\{\alpha_\lambda-\lambda+\mu,\alpha_\lambda+\lambda-\mu\}>0$，我们可以推得

$$\begin{cases} \|X(t)e^{-\mu t}P_\lambda X^{-1}(s)e^{\mu s}\| & \le K_\lambda e^{-\beta(t-s)} \quad \text{if} \quad t\ge s \\ \|X(t)e^{-\mu t}(I-P_\lambda)X^{-1}(s)e^{\mu s}\| & \le K_\lambda e^{-\beta(s-t)} \quad \text{if} \quad t\le s, \end{cases}$$

并且我们可以看到，线性系统 (3.1) 在 $\mathbb{R}$ 上具有与 P_λ 相同的投影的指数二分性。

最后，我们可以推得 $(\lambda-\alpha_\lambda,\lambda+\alpha_\lambda)\subset\rho(A)$，命题得证。□

仔细阅读上述证明可以看出，我们使用了相同的投影 P_λ；这是预解集的一个更深层性质：

推论 3.1。对于任意 $\lambda\in\rho(A)$ $\rho^-(A)$ $\rho^+(A)$，存在 $\delta_\lambda>0$，使得对于任意 $\mu\in(\lambda-\delta_\lambda,\lambda+\delta_\lambda)$，系统

$$\dot{x}=[A(t)-\mu I]x$$

具有与 P_λ 相同的投影的指数二分性。

根据预解集定义可直接得出，谱 $\Sigma(A)$、$\Sigma^-(A)$ 和 $\Sigma^+(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的闭集。若线性系统具有第1章所述的有界增长与衰减性质，则可以得到更强的结论：

命题 3.2. 假设线性系统(1.2a) 在 $\mathbb{R}$（分别为 $\mathbb{R}_0^-$、$\mathbb{R}_0^+$）上具有有界增长& 与衰减性质，常数为 $K>0$ 和 $\alpha\ge0$。若谱 $\Sigma(A)$（分别为 $\Sigma^-(A)$、$\Sigma^+(A)$）非空，则当 $\alpha>0$ 时，$\Sigma(A)$ 是 $[-\alpha,\alpha]$ 的紧子集；当 $\alpha=0$ 时，$\Sigma(A)=\{0\}$。

证明。与前面一样，证明只针对谱$\Sigma(A)$，并考虑 $\alpha>0$。其余情形可用类似方法得到。

值得注意的是，$\Sigma(A)\subset[-\alpha,\alpha]$ 当且仅当

$$(-\infty,-\alpha)\cup(\alpha,+\infty)\subset\rho(A).$$

根据第1章中有界增长与衰减的定义 2.3，我们知道 (1.2a) 的转移矩阵满足

$$||X(t,s)||\le Ke^{\alpha|t-s|}\quad \text{for any } t,s\in\mathbb{R}.$$

情形 *a)*：如果 $t \geq s$，则有

$$||X(t,s)e^{-\lambda(t-s)}|| \leq Ke^{(\alpha-\lambda)(t-s)}$$

并且，我们可以看到，如果 $\lambda > \alpha$，存在 $\delta > 0$ 使得 $\lambda = \alpha + \delta$，那么我们有

$$\|X(t)e^{-\lambda t}X^{-1}(s)e^{\lambda s}\| \leq Ke^{-\delta(t-s)},$$

这意味着，对于任意 $\lambda > \alpha$，系统 $\dot{x} = [A(t) - \lambda I]x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，投影为 $P = I$。这等价于说 $(\alpha, +\infty) \subset \rho(A)$。

情形 *b)*：如果 $t \leq s$，则有

$$\|X(t)e^{-\lambda t}X^{-1}(s)e^{\lambda s}\| \leq Ke^{(\alpha+\lambda)(s-t)}$$

并且，我们可以看到，如果 $\lambda < -\alpha$，存在 $\delta > 0$ 使得 $\lambda = -(\alpha + \delta)$，那么我们可以推导出

$$\|X(t)e^{-\lambda t}X^{-1}(s)e^{\lambda s}\| \leq Ke^{-\delta(s-t)},$$

这意味着，对于任意 $\lambda < -\alpha$，系统 $\dot{x} = [A(t) - \lambda I]x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，投影为 $P = 0$。这等价于说 $(-\infty, -\alpha) \subset \rho(A)$。

综上，我们已证明 $(-\infty, -\alpha) \cup (\alpha, +\infty) \subset \rho(A)$，命题得证。□

注 3.1. 仿照上述结果的证明思路，我们可以推得：

a) 若 (1.2a) 在 $\mathbb{R}$ 上（分别在 $\mathbb{R}_0^-$、$\mathbb{R}_0^+$ 上）具有有界增长性质，常数为 $K > 0$ 和 $\alpha \geq 0$，且谱$\Sigma(A)$（分别为 $\Sigma^-(A)$、$\Sigma^+(A)$）非空，则

$$\Sigma(A) \subset (-\infty, \alpha].$$

b) 若 (1.2a) 在 $\mathbb{R}$ 上（分别在 $\mathbb{R}_0^-$、$\mathbb{R}_0^+$ 上）具有有界衰减性质，常数为 $K > 0$ 和 $\alpha \geq 0$，且谱 $\Sigma(A)$（分别为$\Sigma^-(A)$、$\Sigma^+(A)$）非空，则

$$\Sigma(A) \subset [-\alpha, +\infty).$$

请注意，我们明确假设谱 $\Sigma(A)$是一个非空集合。我们将看到，作为下述结果的推论，当满足有界增长与衰减性质时，谱不可能为空。

当指数二分谱有界时，我们将引入记号

$$\Sigma_{\min} = \min \Sigma(A) \quad \text{and} \quad \Sigma_{\max} = \max \Sigma(A). \tag{3.2}$$

$\Sigma(A)$ 的有界性直接推出，预解集 $\rho(A)$ 是满足以下条件的无界集

$$(-\infty, \Sigma_{\min}) \cup (\Sigma_{\max}, +\infty) \subset \rho(A).$$

特别地，若谱 $\Sigma(A)$ 有界，则预解集 $\rho(A)$ 不连通，并且有两个无界连通分支，即 $(-\infty, \Sigma_{\min})$ 和 $(\Sigma_{\max}, +\infty)$。有界连通分支的刻画将在下一小节中进行。

3.2. 预解集的基本性质。在上一小节中，我们已经看到:

• 推论 3.1 表明，对于任意 $\lambda \in \rho(A)$ $\rho^{-}(A)$ $\rho^{+}(A)$，存在 λ 的一个邻域 V_λ，使得对于任意 $\mu \in V_\lambda$，线性系统 $\dot{x} = [A(t) - \mu I]x$ 都具有相同投影的指数二分性。

• 如果线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 具有有界的指数二分 y
谱，我们可以推断预解集 $\rho(A)$ 和 $\rho^{\pm}(A)$ 既不连通也不有界。

在本小节中，我们将探讨上述性质的推论，以便根据预解集的连通分支来刻画谱。

命题 3.3。若 $\Sigma(A) \neq \varnothing$ 且 $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \rho(A)$，则平移系统

$$\dot{x} = [A(t) - \gamma_1 I]x \ and \ \dot{x} = [A(t) - \gamma_2 I]x$$

在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其投影为 P_{γ_1} 和 P_{γ_2}，且它们的秩相同。

证明。证明分为以下几个步骤:
步骤 *1*: 由于 $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \rho(A)$，根据定义可知，平移系统 $\dot{x} = [A(t) - \gamma_i I]x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其投影为 P_{γ_i}，且 $i = 1,2$。

步骤 *2*: 的覆盖 根据推论 3.1，我们知道，对于任意 $\lambda \in [\gamma_1, \gamma_2] \subset \rho(A)$，存在 $\delta_\lambda > 0$，使得 $(\lambda - \delta_\lambda, \lambda + \delta_\lambda) \subset \rho(A)$。这表明开集族 $\{(\lambda - \delta_\lambda, \lambda + \delta_\lambda) : \lambda \in [\gamma_1, \gamma_2]\}$ 是 $[\gamma_1, \gamma_2]$ 的一个开覆盖。

利用 $[\gamma_1, \gamma_2]$ 的紧致性，我们可以选取一个有限覆盖

$$[\gamma_1, \gamma_2] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (\lambda_i - \delta_{\lambda_i}, \lambda_i + \delta_{\lambda_i}),$$

使得 $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$ 且

$$(\lambda_i - \delta_{\lambda_i}, \lambda_i + \delta_{\lambda_i}) \cap (\lambda_{i+1} - \delta_{\lambda_{i+1}}, \lambda_{i+1} + \delta_{\lambda_{i+1}}) \neq \varnothing$$

对于任意 $i \in \{1, \ldots\ldots, m-1\}$，其中

$$\gamma_1 \in (\lambda_1 - \delta_{\lambda_1}, \lambda_1 + \delta_{\lambda_1}) \quad \text{and} \quad \gamma_2 \in (\lambda_m - \delta_{\lambda_m}, \lambda_m + \delta_{\lambda_m}).$$

步骤 *3*：研究覆盖的第一个区间。不失一般性，我们假设 $\lambda_1 - \delta_{\lambda_1} < \gamma_1 < \lambda_1$。由注 2.3 的 b) 项可知

$$\mathcal{S}^{\mu} \subseteq \mathcal{S}^{\gamma_1} \subseteq \mathcal{S}^{\lambda_1} \quad \text{for any } \lambda_1 - \delta_{\lambda_1} < \mu < \lambda_1.$$

由于 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性蕴含 $\mathbb{R}_0^+$ 上的指数二分性，因此我们可以使用引理 2.1，从而得到：

$$\dim \mathrm{Im} P_{\mu} \leq \dim \mathrm{Im} P_{\gamma_1} \leq \dim \mathrm{Im} P_{\lambda_1} \quad \text{for any } \lambda_1 - \delta_{\lambda_1} < \mu < \lambda_1.$$

由推论 3.1 可知 $P_{\mu} = P_{\lambda_1}$，这意味着 dim像空间P_{γ_1} = dim像空间P_{λ_1}，或者等价地，P_{λ_1} 和 P_{γ_1} 的秩相同。

步骤 *4*：研究覆盖的最后一个区间。按照上一步的思路，可以很容易地证明 P_{λ_m} 和 P_{γ_2} 的秩相同。

步骤*5*：证明结束。最后，在选择

$$\mu \in (\lambda_i - \delta_{\lambda_i}, \lambda_i + \delta_{\lambda_i}) \cap (\lambda_{i+1} - \delta_{\lambda_{i+1}}, \lambda_{i+1} + \delta_{\lambda_{i+1}}),$$

我们有 $\dot{x} = [A(t) - \mu I]x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其投影为 P_{λ_i} 和 $P_{\lambda_{i+1}}$。然后，与前面类似，我们得出，对于任意 $i \in \{1, \ldots, m-1\}$，Rank P_{λ_i} = Rank $P_{\lambda_{i+1}}$，因此

$$\mathrm{Rank}\, P_{\gamma_1} = \mathrm{Rank}\, P_{\lambda_1} = \ldots = \mathrm{Rank}\, P_{\lambda_m} = \mathrm{Rank} P_{\gamma_2},$$

由此即可得到结论。 □

注记 3.2. 如果 $\Sigma^+(A)$和 $\Sigma^-(A)$非空，且性质$[\gamma_1, \gamma_2] \subset \rho(A)$成立，那么平移系统

$$\dot{x} = [A(t) - \gamma_1 I]x \text{ and } \dot{x} = [A(t) - \gamma_2 I]x$$

在 $\mathbb{R}$ 上也具有指数二分性，其投影 P_{γ_1} 和 P_{γ_2}的秩相同。事实上：

a) 对于 $\Sigma^+(A)$的证明完全相同，因为仍可使用引理 2.1。b) 对于 $\Sigma^-(A)$的证明在步骤 3 处有所不同，在该步骤中可以推导出

$$\mathcal{U}^{\lambda_1} \subseteq \mathcal{U}^{\gamma_1} \subseteq \mathcal{U}^{\mu} \quad \text{for any } \lambda_1 - \delta_{\lambda_1} < \mu < \lambda_1.$$

现在，利用引理 2.2，可以类似地得出 dim ker P_{λ_1} = dim ker P_{γ_1}，再由秩-零化度定理

我们可以看出， P_{λ_1} 和 P_{γ_1} 的秩相同。证明的其余部分与之前相同。

下一个结果可以看作前一个结果的逆命题

命题 3.4。 如果 γ_1、 $\gamma_2 \in \rho\,(A)$ 满足

$$\gamma_1 < \gamma_2 \quad \text{with} \quad \operatorname{Rank}(P_{\gamma_1}) = \operatorname{Rank}(P_{\gamma_2}),$$

那么 $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \rho\,(A)$ 。

证明。证明分几个步骤进行:

步骤 *1*: 注意到，结合注 2.3， $\mathcal{U}^{\gamma_2} \subseteq \mathcal{U}^{\gamma_1}$ 是 $\gamma_1 < \gamma_2$ 的结果。现在，恒等式 Rank(P_{γ_1}) = Rank(P_{γ_2})意味着 dim ker(P_{γ_1}) =dim ker(P_{γ_2})，而引理 2.2说明 dim($\mathcal{U}^{\gamma_1}$) =dim($\mathcal{U}^{\gamma_2}$)。

由于 $\mathcal{U}^{\gamma_2}$ 是 $\mathcal{U}^{\gamma_1}$ 的子空间且具有相同的维数，因此可得 $\mathcal{U}^{\gamma_2} = \mathcal{U}^{\gamma_1}$ ，再次利用引理 2.2可知 ker P_{γ_1} =ker P_{γ_2}。

步骤 *2*: 由于 $\gamma_2 \in \rho(A)$，我们回顾一下，该系统

$$\dot{x} = [A(t) - \gamma_2 I]x$$

在 $\mathbb{R}_0^-$ 上具有指数二分性，即存在一个投影P_{γ_2} 和一对正常数 K_2 和 α_2 ，使得:

$$\begin{cases} \|X(t)P_{\gamma_2}X^{-1}(s)\| & \leq K_2 e^{\gamma_2(t-s)}e^{-\alpha_2(t-s)} \quad \text{if} \quad t \geq s \\ \|X(t)(I-P_{\gamma_2})X^{-1}(s)\| & \leq K_2 e^{\gamma_2(t-s)}e^{-\alpha_2(s-t)} \quad \text{if} \quad t \leq s. \end{cases} \tag{3.3}$$

步骤 *3*: 在步骤 1 中，我们验证了 ker(P_{γ_1}) =ker(P_{γ_2})。现在，利用引理 2.3，其中 $P_{\gamma_2} = \overline{P}$和 $P_\lambda = P_{\gamma_1}$，可知

$$\dot{x} = [A(t) - \gamma_1 I]x$$

在 $\mathbb{R}_0^-$ 上也具有指数二分性，其投影为 P_{γ_2}:

$$\begin{cases} \|X(t)P_{\gamma_2}X^{-1}(s)\| & \leq K_1 e^{\gamma_1(t-s)}e^{-\alpha_1(t-s)} \quad \text{if} \quad t \geq s \\ \|X(t)(I-P_{\gamma_2})X^{-1}(s)\| & \leq K_1 e^{\gamma_1(t-s)}e^{-\alpha_1(s-t)} \quad \text{if} \quad t \leq s. \end{cases} \tag{3.4}$$

步骤 *4*: 如果 $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$ ，很容易验证

$$e^{\gamma_1(t-s)} \leq e^{\gamma(t-s)} \text{ if } t \geq s$$

and

$$e^{\gamma_2(t-s)} \leq e^{\gamma(t-s)} \text{ if } s \geq t.$$

考虑 $K = \max\{K_1, K_2\}$ 和 $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$，将 (3.4) 的第一个不等式与 (3.3) 的第二个不等式配对:

$$\begin{cases} \|X(t)P_{\gamma_2}X^{-1}(s)\| & \leq Ke^{\gamma(t-s)}e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{if} \quad t \geq s \\ \|X(t)(I-P_{\gamma_2})X^{-1}(s)\| & \leq Ke^{\gamma(t-s)}e^{-\alpha(s-t)} \quad \text{if} \quad t \leq s, \end{cases}$$

并且我们有， $\dot{x} = [A(t) - \gamma I]x$ 在 $\mathbb{R}_0^-$ 上具有指数二分性，其投影为 P_{γ_2}，这意味着 $\gamma \in \rho^-(A)$ 和 $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \rho^-(A)$。

步骤*5*： 与步骤 1 中的做法类似，可以证明 $\mathcal{S}^{\gamma_1} = \mathcal{S}^{\gamma_2}$，而引理 2.1 推出恒等式 像空间$P_{\gamma_1}$ = 像空间P_{γ_2}。然后，利用引理 2.4，我们可以重复步骤 2、3 和 4，并推得，对于任意 $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$，平移系统在 $\mathbb{R}_0^+$ 上具有指数二分性，且具有相同的投影算子 P_{γ_2}。

步骤*6*： 我们已证明，对于任意 $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$，平移系统$\dot{x} = [A(t) - \gamma I]x$ 在两条半直线上都具有指数二分性，且具有相同的投影 P_{γ_2}。然后，利用第 3 章中的命题 3.1，可验证指数二分性在 $\mathbb{R}$ 上成立，结论得证。□

注 3.3. 仔细阅读上述结果可知，当考虑 $\rho^-(A)$ 和 $\rho^+(A)$ 时，该结果同样成立。

推论 3.2. 如果线性系统 (1.2a) 在 $\mathbb{R}$ 上具有有界增长 & 衰减性质（分别在 $\mathbb{R}_0^-$、$\mathbb{R}_0^+$ 上），且相应常数为 $K > 0$和 $\alpha \geq 0$，则其对应的谱 $\Sigma(A)$ （分别为 $\Sigma^-(A)$、$\Sigma^+(A)$）非空。

证明。我们只考虑情形 $\Sigma(A)$，因为其他情形可以用类似的方法处理。证明将采用反证法。事实上，若假设 $\Sigma(A) = \varnothing$，则可推出 $\rho(A) = \mathbb{R}$。于是，由命题 3.3 可知，对任意 $\gamma_1 < \gamma_2$，都有 Rank $P_{\gamma_1} =$ RankP_{γ_2}，因为 $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \rho(A)$。

另一方面，通过考察命题 3.2 的证明并考虑常数 $\gamma_1 < -\alpha$ 和 $\gamma_2 > \alpha$，可得 $P_{\gamma_1} = 0$和 $P_{\gamma_2} = I$，由此得到 Rank$P_{\gamma_1} = 0 < n =$ RankP_{γ_2}，从而导出矛盾。□

如果指数二分谱 $\Sigma(A)$具有有界增长与衰减性质，那么以下结果给出了 $\rho(A)$上无界连通子集的信息，即$(-\infty, \ \Sigma_{\min})$和$(\Sigma_{\max}, \ +\infty)$，其中 $\Sigma_{\min}$ 和 $\Sigma_{\max}$ 分别是(3.2)中所述谱的上界和下界。

定理 3.1。 如果线性系统 (1.2a) 在 $\mathbb{R}$ （分别在 $\mathbb{R}_0^+$、$\mathbb{R}_0^-$）上具有有界增长和衰减性质，则可得：

i) 对任意 $\lambda < \Sigma_{\min}$，平移系统 $\dot{x} = [A(t) - \lambda I]x$ 在 $\mathbb{R}$ （分别在 $\mathbb{R}_0^+$、$\mathbb{R}_0^-$）上具有指数二分性，其投影为$P_\lambda = 0$。也就是说，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\|X(t)e^{-\lambda t}X^{-1}(s)e^{\lambda s}\| \leq Ke^{-\delta(s-t)}, \ for\ any\ t \leq s. \tag{3.5}$$

ii) 对于任意 $\lambda > \Sigma_{\max}$，平移系统 $\dot{x} = [A(t) - \lambda I]x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，投影为 $P_\lambda = I$。也就是说，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\|X(t)e^{-\lambda t}X^{-1}(s)e^{\lambda s}\| \leq Ke^{-\delta(t-s)}, \ for\ any\ t \geq s.$$

证明。我们只考虑 $\mathbb{R}$ 的情形，因为其他情形可以类似处理。现在，由于线性系统 (1.2a) 在 $\mathbb{R}$ 上具有有界增长与衰减，根据命题 3.2，存在$\alpha \geq 0$，使得谱满足 $\Sigma(A) \subset [-\alpha, \alpha]$ 或 $\Sigma(A) = \{0\}$，视具体情况而定。

证明仅针对 $\lambda > \Sigma_{\max}$ 的情形，另一种情形留给读者。首先注意，若 $\lambda \geq \alpha + \varepsilon$，且 $\varepsilon > 0$ 任意小，则命题 3.2 证明中的情形 a) 表明 (3.5) 成立，也就是说，平移系统 $\dot{x} = [A(t) - \lambda I]x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，投影为 $P_\lambda = I$。

其次，令 $\lambda \in (\Sigma_{\max}, \alpha + \varepsilon)$ 并考虑 $\gamma > \alpha + \varepsilon$。注意，当 $[\lambda, \gamma] \subset (\Sigma_{\max}, +\infty) \subset \rho(A)$ 时，命题 3.3 意味着 P_λ和$P_\gamma = I$ 具有相同的秩，结论由此得到，因为 $P_\lambda = I$。□

上述结果有一个逆命题：

定理 3.2。 假设线性系统(1.2a)的谱 $\Sigma(A)$ 非空且有界。如果：

a）对于任意 $\lambda \in (\Sigma_{\max}, +\infty)$，平移系统 $\dot{x} = [A(t) - \lambda I]x$在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，投影算子为 $P_\lambda = I$，b）对于任意 $\gamma \in (-\infty, \Sigma_{\min})$，平移系统 $\dot{x} = [A(t) - \gamma I]x$在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，投影算子为 $P_\gamma = 0$,

那么该线性系统在 $\mathbb{R}$ 上有界增长& 衰减。

证明。考虑一个固定的 $\lambda > \Sigma_{\max}$，则存在正常数 K_λ 和 α_λ，使得

$$||X_\lambda(t,s)|| \leq K_\lambda e^{-\alpha_\lambda(t-s)} \quad \text{for any } t \geq s.$$

通过使用 $\alpha_\lambda > 0$并考虑 $\Delta > 0$，上述估计表明

$$\begin{array}{rcll} ||X(t,s)|| & \leq & K_\lambda e^{\lambda(t-s)} & \text{for any } t \geq s, \\ & \leq & K_\lambda e^{\max\{\Delta,\lambda\}|t-s|} & \text{for any } t \geq s. \end{array}$$

类似地，我们考虑一个固定的 $\gamma < \Sigma_{\min}$，那么存在正常数 K_γ 和 α_γ，使得

$$||X_\gamma(t,s)|| \leq K_\gamma e^{-\alpha_\gamma(s-t)} \quad \text{for any } t \leq s.$$

由于 $\alpha_\gamma > 0$，再次选择 $\Delta > 0$，上述估计可得

$$\begin{aligned} ||X(t,s)|| &\leq K_\gamma e^{\gamma(s-t)} && \text{for any } t \leq s, \\ &\leq K_\gamma e^{\max\{\Delta,\gamma\}|t-s|} && \text{for any } t \leq s. \end{aligned}$$

综合上述估计，我们得出

$$||X(t,s)|| \leq K e^{\beta|t-s|} \quad \text{for any } t, s \in \mathbb{R}$$

其中 $K = \max\{K_\lambda, K_\gamma\}$ 且 $\beta = \max\{\Delta,\gamma\} + \max\{\Delta,\lambda\}$，结论由此得证。□

注 3.4. 注意到，在上述结果中，如果仅满足假设 a)，则可推出 $\mathbb{R}$ 上的有界增长性质。类似地，如果仅满足 b)，则可推出 $\mathbb{R}$ 上的有界衰减性质。

3.3. 预解式与谱的结构。我们知道，预解集 $\rho(A)$、$\rho^+(A)$ 和 $\rho^-(A)$ 都是开集。利用上一小节的结果，我们将证明这些预解集是有限个开区间的并集。

定义 3.1。假设 $\rho(A)$（分别地，$\rho^\pm(A)$）是非空集。对于任意 $\lambda \in \rho(A)$（分别地，$\lambda \in \rho^\pm(A)$），集合$C_\lambda \subset \rho(A)$（分别地，$C_\lambda \subset \rho^\pm(A)$）表示包含 λ 的最大开区间。

我们可以从上述定义推导出若干结论：

(i) 由于命题 3.1 保证 $\rho(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个开集，因此我们知道 $C_\lambda \neq \varnothing$；(ii) $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} \neq \varnothing$ 当且仅当 $C_{\lambda_1} = C_{\lambda_2}$；(iii) 若 $C_{\lambda_1} = C_{\lambda_2}$，我们记 $\lambda_1 \sim \lambda_2$，并注意到这在 $\mathbb{R}$ 上定义了一个等价关系；(iv) 若 $\Sigma(A)$（分别地，$\Sigma^\pm(A)$）有下界，且 $\lambda < \Sigma_{\min}$，则可推出 $C_\lambda = (-\infty, \Sigma_{\min})$；(v) 若 $\Sigma(A)$（分别地，$\Sigma^\pm(A)$）有上界，且 $\lambda > \Sigma_{\max}$，则可推出 $C_\lambda = (\Sigma_{\max}, +\infty)$；(vi) 若 $\Sigma(A) = \varnothing$，则对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，可推出 $C_\lambda = (-\infty, +\infty)$。

陈述 (iii) 表明，$\rho(A)$ 可以按照与等价关系 $\sim$ 相关联的等价类进行划分。给定 $\lambda \in \rho(A)$ 是等价类，将记为

$$[\lambda] := \{\mu \in \rho(A) \colon \mu \sim \lambda\}$$

而等价类的集合将记为 $\rho(A)/\sim$。

引理 3.1. 设 $\lambda_1 \in \rho(A)$ 和 $\lambda_2 \in \rho(A)$ 满足 $\lambda_1 < \lambda_2$，则 秩$(P_{\lambda_1}) \leq$ 秩(P_{λ_2})。此外，若相应的集合 C_{λ_1} 和 C_{λ_2} 不相交，则不等式为严格不等式。

证明。利用注 2.3 中的 b) 和 c) 两项陈述，我们有$\mathcal{S}^{\lambda_1} \subseteq \mathcal{S}^{\lambda_2}$ 和 $\mathcal{U}^{\lambda_2} \subseteq \mathcal{U}^{\lambda_1}$。现在，利用引理 2.1 或引理 2.2，可得 dim 像空间$P_{\lambda_1} \leq$ dim 像空间P_{λ_2}或 dim 核 $P_{\lambda_2} \leq$dim 核 P_{λ_1}，这意味着秩$(P_{\lambda_1}) \leq$秩(P_{λ_2})。

首先，在假设 $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} \neq \varnothing$ 的情况下， C_λ 集合的上述性质意味着 $C_{\lambda_1} = C_{\lambda_2}$，于是我们有$[\lambda_1, \lambda_2] \subset C_{\lambda_1} \subseteq \rho(A)$。然后，利用命题 3.3，我们推得秩$(P_{\lambda_2}) =$ 秩(P_{λ_1})。

其次，在假设$C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} = \varnothing$的条件下，我们将证明 Rank$(P_{\lambda_1})$ $<$ Rank(P_{λ_2})。事实上，否则，若 Rank(P_{λ_1}) =Rank(P_{λ_2})，则命题 3.4 表明 $[\lambda_1, \lambda_2] \subset \rho(A)$，从而与 $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} = \varnothing$ 矛盾。□

请注意，在考虑 $\rho^+(A)$ 和 $\rho^-(A)$ 时，该结论仍然成立。事实上，预解式 $\rho^+(A)$ 和 $\rho^-(A)$ 分别可以通过使用 $\mathcal{S}^{\lambda_1} \subseteq \mathcal{S}^{\lambda_2}$ 和 $\mathcal{U}^{\lambda_2} \subseteq \mathcal{U}^{\lambda_1}$ 来处理。

定理 3.3. 如果线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 在 $\mathbb{R}$ （分别为 $\mathbb{R}_0^-$、$\mathbb{R}_0^+$）上具有有界增长与衰减的性质，那么预解集 $\rho(A)$是至多由 $n+1$ 个开区间组成的并，其中 n 是系统维数。

证明。根据定义 3.1，我们注意到

$$\rho(A) = \bigcup_{\lambda \in \rho(A)} C_\lambda = \bigcup_{[\lambda] \in \rho(A)/\sim} C_\lambda.$$

对于任意$\gamma < \Sigma_{\min}$ 和 $\mu > \Sigma_{\max}$，记 $C_{[\gamma]} = (-\infty, \Sigma_{\min})$ 和 $C_{[\mu]} = (\Sigma_{\max}, +\infty)$。

由此可以推导出 $\rho(A)$的若干性质。首先，考虑函数

$$\begin{aligned} \phi \quad : \quad & \rho(A) \to \{0, 1, \ldots, n\} \\ & \lambda \mapsto \phi(\lambda) = \operatorname{Rank} P_\lambda \end{aligned}$$

并且，根据引理 3.1，我们有 ϕ 是非递减的，并且在每个集合 $C_{[\lambda]} \subset \rho(A)$ 上为常数。

根据定理 3.1，结合 ϕ 的局部性质，我们可以看到

a) 定理 3.1 中的陈述 i) 表明，对于任意 $\gamma < \Sigma_{\min}$， $\phi(\gamma) = 0$ ，

b) 定理 3.1 中的陈述 ii) 表明，对于任意 $\mu > \Sigma_{\max}$， $\phi(\mu) = n$；

c) 由 a) 和 b) 可知， $\phi^{-1}(n)$ 和 $\phi^{-1}(0)$ 均为非空集。另一方面，对于任意 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$，要么$\phi^{-1}(k) = \varnothing$，要么存在一个等价类 $[\lambda] \in \rho(A)/\sim$，使得

$$\phi^{-1}(k) = C_\lambda,$$

根据引理 3.1，该对象是唯一的，

d) 根据引理 3.1，我们有：若 $\lambda_1 < \lambda_2$ 和 $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} = \varnothing$，则$\phi(\lambda_1) < \phi(\lambda_2)$。

总结这些性质后，我们可以得出

$$\rho(A) = \bigcup_{i=0}^{n} \phi^{-1}(i),$$

也就是说， $\rho(A)$ 是至多 $n+1$ 个开区间的并集。

考虑在 $\mathbb{R}_0^-$和$\mathbb{R}_0^+$上有界增长与衰减的情形时，证明可以用类似的方法完成，这里留给读者。□

上述证明中构造的集合 $\phi^{-1}(i)$ 是开区间，在文献中通常称为谱隙 。

定理 3.4（谱定理——特殊情形）。若线性系统(1.2a) 在 $\mathbb{R}$ 上具有有界增长& 衰减性质，则

$$\Sigma(A) = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_{\ell-1}, b_{\ell-1}] \cup [a_\ell, b_\ell],$$

其中 $a_1 \le b_1 < a_2 \le b_2 < \ldots < a_\ell \le b_\ell$，且 $1 \le \ell \le n$。

证明。由定理 3.3 可知， $\rho(A)$ 是至多由 $n+1$ 个开区间组成的并集，这些区间定义如下：

$$\rho(A) = \bigcup_{i=0}^{n} \phi^{-1}(i),$$

其中 $\phi^{-1}(i)$ 要么是 $\varnothing$，要么是一个开区间。于是，由于 $\Sigma(A) = \rho(A)^c$，很容易推出 $\Sigma(A)$ 是至多由 n 个闭区间组成的并集。

首先，假设对于所有 $i \in \{0, \ldots, n\}$，均有 $\phi^{-1}(i) \neq \varnothing$。那么， $\Sigma(A)$ 是由 n 个闭集组成的并集：

$$\Sigma(A) = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \quad \text{where } [a_i, b_i] = [\sup \phi^{-1}(i-1), \inf \phi^{-1}(i)].$$

其次，我们假设 $\phi^{-1}(i) = \varnothing$ 对至少一个指标$i \in \{0, 1, \ldots\ldots, n\}$成立。那么，使得 $\phi^{-1}(i) \neq \varnothing$ 成立的指标 $i \in \{0, 1, \ldots\ldots, n\}$ 的数量将为 $\ell < n$。因此，指标的数量

$i \in \{0, 1, \ldots\ldots, n\}$ 使得 $\phi^{-1}(i) = \varnothing$ 成立的指标数量将为 $k \geq 1$，其中 $k + \ell = n + 1$。于是我们有，$\Sigma(A)$ 是由 $\ell < n$ 个闭集组成的并集：

$$\Sigma(A) = \bigcup_{i=1}^{\ell} [a_i, b_i].$$

□

上述结果值得作一些注记：

a) 对于 $i = 1, \ldots\ldots, \ell$，区间 $[a_i, b_i]$ 称为谱区间。

b) 在接下来的例子中，我们将看到某些谱区间可能是退化的，也就是说，$a_i = b_i$ 由于恒等式 $\sup \phi^{-1}(i-1) = \inf \phi^{-1}(i)$ 是可能的。

c) 当 $\ell = n$ 时，称该系统具有全谱性质。

3.4. 说明性示例。为了说明上述结果，我们来看几个示例。

第一个示例：考虑如下标量线性微分方程

$$\dot{x} = a(t)x \quad \text{with} \quad a(t) = \frac{1}{1+t^2}, \tag{3.6}$$

并注意到 $X(t) = e^{\arctan(t)}$ 是一个基本矩阵。由于 $X(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，根据第2章的推论 3.1，上述方程在 $\mathbb{R}$ 上不具有指数二分性，因此 $0 \in \Sigma(a)$。此外，由于对于任意 $t \in \mathbb{R}$，$|a(t)| \leq 1$，根据第1章的推论 2.1，我们知道方程 (3.6) 具有有界增长与衰减性质，其常数为 $K = \alpha = 1$；而由命题 3.2 可知 $\Sigma(a) \subset [-1, 1]$。

为了研究

$$\dot{x} = [a(t) - \lambda]x \quad \text{with} \quad a(t) = \frac{1}{1+t^2}, \tag{3.7}$$

我们回顾一下，$X_\lambda(t) = e^{\arctan(t) - \lambda t}$。于是，对于任意 $\lambda > 0$ 和 $t \geq s$，可得

$$|X_\lambda(t) X_\lambda^{-1}(s)| = e^{\arctan(t)} e^{-\arctan(s)} e^{-\lambda(t-s)} \leq e^{\pi} e^{-\lambda(t-s)},$$

那么，对于任意 $\lambda > 0$，(3.7) 在 $\mathbb{R}$ 上具有投影为 $P_\lambda = 1$ 的指数二分性，这意味着 $(0, \infty) \subset \rho(a)$。

类似地，可以证明，对于任意 $\lambda < 0$ 和 $t \leq s$，

$$|X_\lambda(t) X_\lambda^{-1}(s)| \leq e^{\pi} e^{-|\lambda|(s-t)}$$

并且 (3.7) 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其投影为 $P_\lambda = 0$。这意味着 $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$，因此我们可以得出

$$\rho(a) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad \text{and} \quad \Sigma(a) = \{0\}.$$

此外，由注 2.1 可知，$\Sigma^+(a) \subseteq \Sigma(a) = \{0\}$，并且可以证明 $\Sigma^+(a) = \{0\}$。事实上，否则我们将得到 $0 \in \rho^+(a)$，且 (3.6) 在 $\mathbb{R}_0^+$ 上具有指数二分性。然后，由第2章中的定理 3.1 和注 3.1 可知，(3.6) 的任何非平凡解 $x(t) = x(0)e^{\arctan(t)}$ 都将呈指数增长或指数衰减，从而导致矛盾。

第二个例子：考虑自治系统

$$\dot{x} = Ax \quad \text{where} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

一方面，我们知道，指数二分性谱 $\Sigma(A)$ 由满足条件 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的数构成，其中 $\dot{x} = [A - \lambda I]x$不具有指数二分性。另一方面，由第2章的引理 2.3 可知，$\dot{x} = [A - \lambda I]x$ 具有指数二分性，当且仅当 $A - \lambda I$ 的特征值实部非零。最后，由于 $\Sigma(A - \lambda I) = \{1 - \lambda, \ -1 - \lambda\}$ 我们可以推得

$$\Sigma(A) = \{-1, 1\} \quad \text{and} \quad \rho(A) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

为了研究函数 ϕ: $\rho(A) \to \{0, 1, 2, 3\}$

a) 若 $\lambda > 1$。我们可以证明，$\dot{x} = [A - \lambda I]x$ 具有投影为 $P = I$ 的指数二分性。因此，对任意$\lambda > 1$，$\phi(\lambda) = 3$ 。b) 若 $\lambda < -1$。我们可以证明，$\dot{x} = [A - \lambda I]x$ 具有投影为 $P = 0$的指数二分性。因此，对任意$\lambda < -1$，$\phi(\lambda) = 0$ 。c) 若 $\lambda \in (-1, 1)$，易于验证，系统 $\dot{x} = [A - \lambda I]x$具有指数二分性，其投影为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

且对于任意 $\lambda \in (-1,1)$，$\phi(\lambda) = 1$

因此我们可以得出

$$\phi^{-1}(0) = (-\infty, -1), \quad \phi^{-1}(1) = (-1, 1), \quad \phi^{-1}(2) = \varnothing \quad \text{and} \quad \phi^{-1}(3) = (1, \infty).$$

第三个例子：我们将验证标量方程的谱

$$\dot{x} = a(t)x \quad \text{with } a(t) = t$$

验证了 $\Sigma(a) = \mathbb{R}$。事实上，注意到如果存在某个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $\lambda \in \rho(a)$，那么

$$\dot{x} = (t - \lambda)x$$

具有投影为 $P_\lambda = 1$ 或 $P_\lambda = 0$的指数二分性。

由于扰动方程的任意解都具有 $x_\lambda(t) = x_\lambda(0)e^{\frac{(t-\lambda)^2}{2}}$ 的形式，当 —— $t \to +\infty$ 时并不会指数衰减至零，因此我们可以看出，扰动方程不可能具有投影 $P_\lambda = 1$ 对应的指数二分性。

另一方面，如果该系统具有零投影 $P_\lambda = 0$ 对应的指数二分性，那么将存在 $K > 0$和 $\alpha > 0$ 使得

$$x_\lambda(t,s) \;=\; e^{\frac{(t-\lambda)^2-(s-\lambda)^2}{2}} = e^{\frac{(t-s)(t+s-2\lambda)}{2}} \le Ke^{-\alpha(s-t)} \quad \text{for } t \le s,$$

这等价于

$$(t-s)(t+s-\lambda) \le 2\ln(K) - \alpha(s-t) \quad \text{for } t < s$$

or

$$-(t+s-\lambda) \le \frac{2\ln(K)}{s-t} - \alpha \quad \text{for } t < s.$$

现在，令 $t \to -\infty$ ，我们将得到 $+\infty < -\alpha$，从而得到矛盾，并且对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，都有 $\lambda \notin \rho(a)$。

鉴于最后一个例子的重要性，我们将其表述为一个引理。

引理 3.2. 设 $a\colon\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ 是一个有界连续函数，使得

$$\beta^-(a) := \liminf_{L,s\to+\infty} \frac{1}{L}\int_s^{s+L} a(r)\,dr \quad \text{and} \quad \beta^+(a) := \limsup_{L,s\to+\infty} \frac{1}{L}\int_s^{s+L} a(r)\,dr,$$

那么，标量方程的谱

$$\dot{x} = a(t)x$$

可表示为 $\Sigma^+(a) = [\beta^-(a)\ \beta^+(a)]$。

证明。参见附录 A 中的命题 0.3。 □

3.5. 谱定理。定理 3.4 的一个关键假设是，系统 (1.2a) 具有有界增长与衰减的性质，这意味着 $\Sigma(A)$ 有界。若利用注 3.1 去掉这一假设，并遵循定理 3.4 的证明思路，我们可以证明以下结果：

定理 3.5. 假设线性系统 (1.2a) 的指数二分谱非空，则

a) 如果(1.2a) 在 $\mathbb{R}$ 上具有有界增长性质，那么

$$\Sigma(A) = \begin{cases} (-\infty, b_1) \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_\ell, b_\ell] \\ \text{or} \\ [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_\ell, b_\ell]. \end{cases}$$

b) 如果(1.2a) 在 $\mathbb{R}$ 上具有有界衰减性质，那么

$$\Sigma(A)=\begin{cases}[a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]\cup\cdots\cup[a_\ell,+\infty)\\ \text{or}\\ [a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]\cup\cdots\cup[a_\ell,b_\ell].\end{cases}$$

c) 如果(1.2a) 在 $\mathbb{R}$ 上既不具有有界增长性质，也不具有有界衰减性质，那么

$$\Sigma(A)=\begin{cases}(-\infty,b_1)\cup[a_2,b_2]\cup\cdots\cup[a_\ell,b_\ell],\\ [a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]\cup\cdots\cup[a_\ell,+\infty),\\ (-\infty,b_1]\cup[a_2,b_2]\cup\cdots\cup[a_\ell,+\infty),\\ \text{or}\\ [a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]\cup\cdots\cup[a_\ell,b_\ell].\end{cases}$$

证明。见习题列表。 □

4. 谱流形与块对角化

本小节的主要目标是证明，任何在 $\mathbb{R}$ 上（分别在 $\mathbb{R}_0^+$、$\mathbb{R}_0^-$上）具有有界增长与衰减的线性系统$\dot{x}=A(t)x$，一般都与一个分块对角系统运动学相似

$$\dot{y}=\begin{bmatrix}B_1(t)&&&\\&B_2(t)&&\\&&\ddots&\\&&&B_\ell(t)\end{bmatrix}y.$$

此外，请注意，上述系统可视为 ℓ 非耦合子系统 $\dot{z}=B_i(t)z$，其中任意 $i\in\{1,\ldots,\ell\}$均成立。在此背景下，还将证明 $\Sigma(B_i)$是 $\Sigma(A)$的第 i个谱区间。

4.1. 谱流形。 在开始研究谱之前，我们先回顾一下：如果 V_1 和 V_2 是 $\mathbb{R}^n$的向量子空间，我们将 uual 记作

$$V_1+V_2:=\{z\in\mathbb{R}^n\colon z=v_1+v_2\quad\text{where } v_1\in V_1 \text{ and } v_2\in V_2\}.$$

此外，下面的引理将有助于推导谱的一些有趣性质：

引理 4.1. 设 E、F 和 G 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，且满足 $G\subset E$，则

$$E\cap(F+G)=(E\cap F)+G.$$

证明。首先，我们将证明 $(E \cap F) + G \subseteq E \cap (F + G)$：若 $x \in (E \cap F) + G$，则

$$x = z + g, \text{ where } z \in E \cap F \text{ and } g \in G.$$

我们需要证明 $x \in F+G$和 $x \in E$。注意，由于 $z \in E \cap F \subset F$和 $g \in G$，$x \in F+G$可直接由上述恒等式推出。现在，由于 $g \in G \subset E$、$z \in E \cap F \subset E$，且 E 是一个子空间，我们有 $x = z + g \in E$，因此得出 $x \in E \cap (F + G)$。

其次，我们将证明 $E \cap (F + G) \subseteq (E \cap F) + G$:

若 $x \in E \cap (F + G)$，则可得 $x \in E$和 $x = f + g$，其中$f \in F$和 $g \in G$，这意味着 $x - g = f \in F$。由于 $g \in G \subset E$和 $x \in E$，我们还有 $x - g \in E \cap F$。这一事实结合 $g \in G$意味着 $x \in (E \cap F) + G$，引理得证。□

定理 4.1。 设线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 具有如下所描述的指数二分谱

$$\Sigma(A) = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_\ell, b_\ell],$$

其中 $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots < b_{\ell-1} < a_\ell \leq b_\ell$和 $\ell \leq n$。

考虑平凡投影 $P_{\gamma_0} = 0$ 和 $P_{\gamma_\ell} = I$，其中$\gamma_0 \in (-\infty, a_1)$以及 $\gamma_\ell = (b_\ell, +\infty)$。此外，对于 $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$，选取 $\gamma_i \in (b_i, a_{i+1})$ 和投影 P_{γ_i}。于是，这些集合

$$\mathcal{W}_i = \mathrm{Im}(P_{\gamma_i}) \cap \ker(P_{\gamma_{i-1}})$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，满足

$$\mathcal{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_\ell = \mathbb{R}^n.$$

证明。首先，我们将证明

$$\mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j = 0 \text{ for any } 1 \leq i \neq j \leq \ell \leq n.$$

由于 $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_\ell$，注 2.3 中的 c) 表明

$$\mathcal{U}^{\gamma_\ell} \subset \cdots \subset \mathcal{U}^{\gamma_2} \subset \mathcal{U}^{\gamma_1} \subset \mathcal{U}^{\gamma_0},$$

而引理 2.2 表明

$$\ker(P_{\gamma_\ell}) \subset \cdots \subset \ker(P_{\gamma_2}) \subset \ker(P_{\gamma_1}).$$

由于 $i \neq j$，我们有 either $i \geq j + 1$ or $i \leq j - 1$。不失一般性，假设 $i \leq j - 1$。注意到

$$\mathcal{W}_i = \mathrm{Im}(P_{\gamma_i}) \cap \ker(P_{\gamma_{i-1}}) \subseteq \mathrm{Im}(P_{\gamma_i})$$

且 $\ker(P_{\gamma_{j-1}}) \subset \ker(P_{\gamma_i})$，由此可推得

$$\mathcal{W}_j = \mathrm{Im}(P_{\gamma_j}) \cap \ker(P_{\gamma_{j-1}}) \subseteq \ker(P_{\gamma_{j-1}}) \subseteq \ker(P_{\gamma_i}).$$

上述性质意味着

$$\mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j \subseteq \ker(P_{\gamma_i}) \cap \mathrm{Im}(P_{\gamma_i}) = 0.$$

其次，我们将证明

$$\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_\ell = \mathbb{R}^n.$$

利用核$(P_{\gamma_0}) = \mathbb{R}^n$ 这一事实，我们注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \mathrm{Im}(P_{\gamma_1}) + \ker(P_{\gamma_1}) \\ &= [\mathrm{Im}(P_{\gamma_1}) \cap \ker(P_{\gamma_0})] + \ker(P_{\gamma_1}) \\ &= \mathcal{W}_1 + \ker(P_{\gamma_1}) \\ &= \mathcal{W}_1 + \{\ker P_{\gamma_1} \cap [\mathrm{Im}(P_{\gamma_2}) + \ker(P_{\gamma_2})]\}.\end{aligned}$$

利用引理 4.1 以及 $E =$ 核(P_{γ_1}) $F =$ 像空间(P_{γ_2}) 和 $G =$核(P_{γ_2}), 结合 $G =$ 核$(P_{\gamma_2}) \subset$ 核$(P_{\gamma_1}) = E$，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \mathcal{W}_1 + \{[\ker(P_{\gamma_1}) \cap \mathrm{Im}(P_{\gamma_2})] + \ker(P_{\gamma_2})\} \\ &= \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \ker(P_{\gamma_2}) \\ &= \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \ker(P_{\gamma_2}) \cap [\mathrm{Im}(P_{\gamma_3}) + \ker(P_{\gamma_3})]\end{aligned}$$

并且，利用恒等式 $\mathcal{W}_1 + \ldots + \mathcal{W}_\ell = \mathbb{R}^n$ 可以递归地证明。 □

注 4.1. 在定理 4.1 的假设下，并假设 $\dot{x} = A(t)x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，根据定义可知 $0 \notin \Sigma(A)$，因此 0 必须属于某个谱隙。根据定理 3.1，我们将考虑三种情形：a) 若 $0 \in (b_\ell, +\infty)$，或等价地，$\Sigma(A) \subset (-\infty, 0)$，则该线性系统具有平凡投影 $P = I$的指数二分性，并且

$$||X(t,s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad \text{with } t \geq s.$$

b) 如果 $0 \in (-\infty, a_1)$，或者等价地，$\Sigma(A) \subset (0, +\infty)$，则该线性系统具有平凡投影 $P = 0$ 的指数二分性，并且

$$||X(t,s)|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} \quad \text{with } s \geq t.$$

c) 如果对于某个 $i = 2, \ldots\ldots, \ell$，有 $0 \in (b_{i-1}, a_i)$，或者等价地

$$\bigcup_{j=1}^{i-1} [a_j, b_j] \subset (-\infty, 0) \quad \text{and} \quad \bigcup_{j=i}^{\ell} [a_j, b_j] \subset (0, \infty),$$

那么，对于任意 $\gamma \in (b_{i-1}, a_i)$，该线性系统都具有一个非平凡投影 P，其秩满足 Rank$(P) =$Rank(P_γ)。此外，0 的左侧存在 $i-1$ 个谱区间，右侧存在 $\ell - i + 1$ 个谱区间。

4.2. 分块对角化结果。以下引理将为分块对角化结果提供有用的工具。

引理 4.2. 如果系统 $\dot{x} = A(t)x$ 具有有界谱

$$\Sigma(A) = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_{\ell-1}, b_{\ell-1}] \cup [a_\ell, b_\ell],$$

并且 $\lambda \notin \Sigma(A)$，那么可得

$$\Sigma(A-\lambda I) = [a_1-\lambda, b_1-\lambda] \cup [a_2-\lambda, b_2-\lambda] \cup \ldots \cup [a_{\ell-1}-\lambda, a_{\ell-1}-\lambda] \cup [a_\ell-\lambda, b_\ell-\lambda].$$

证明。根据谱的定义，我们知道

$$\begin{aligned} \Sigma(A-\lambda I) &= \{\mu \in \mathbb{R} : \dot{x} = [A(t) - (\lambda+\mu)I]x \text{ has not an exponential dichotomy on } \mathbb{R}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{R} : \lambda + \mu \in \Sigma(A)\}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \mu \in \Sigma(A-\lambda I) &\Leftrightarrow (\mu+\lambda) \in \Sigma(A) \\ &\Leftrightarrow a_j \le \mu + \lambda \le b_j \text{ for some } j = 1, \ldots, \ell \\ &\Leftrightarrow a_j - \lambda \le \mu \le b_j - \lambda, \end{aligned}$$

并且结果随之得出。 □

引理 4.3. 如果这些系统

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{and} \quad \dot{y} = B(t)y \tag{4.1}$$

通常运动学相似，则这些系统

$$\dot{x} = [A(t) - \lambda I]x \quad \text{and} \quad \dot{y} = [B(t) - \lambda I]y \tag{4.2}$$

对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 也广义运动学相似。

证明。由于系统 (4.1) 广义运动学相似，根据第1章的定义 3.3，存在一个矩阵 $Q(t)$，它满足矩阵微分方程 $\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)B(t)$，并且变量代换 $y = Q^{-1}(t)x$ 将 (4.1) 中的第一个系统变换为第二个系统。

现在，注意到

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= A(t)Q(t) - \lambda Q(t)I - Q(t)B(t) + \lambda Q(t)I \\ &= \{A(t) - \lambda I\}Q(t) - Q(t)\{B(t) - \lambda I\} \end{aligned}$$

并且我们可以很容易地验证，变量代换 $y = Q^{-1}(t)x$ 将 (4.2) 中的第一个系统变换为第二个系统。□

引理 4.4。 如果系统 (4.1) 广义运动学相似，那么它们的谱相同，即 $\Sigma(A) = \Sigma(B)$。

证明。首先，根据假设并结合引理 4.3，我们知道系统 (4.2) 广义运动学相似。其次，由于运动相似是对称关系，第2章中的定理 2.1 表明，$\lambda \in \rho(A)$ 当且仅当 $\lambda \in \rho(B)$，这等价于 $\Sigma(A) = \Sigma(B)$，定理得证。□

若 $\dot{x} = A(t)x$ 具有非平凡投影的指数二分性，根据第 4 章的推论 2.1，我们知道该线性系统一般运动学相似于

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & B_2(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

其中 $B_1(t) \in M_{n_1}(\mathbb{R})$，$B_2(t) \in M_{n_2}(\mathbb{R})$，且 $n_1 + n_2 = n$。此外，引理 4.4 表明这两个系统具有相同的指数二分谱，即

$$\Sigma(A) = \Sigma \begin{pmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & B_2(t) \end{pmatrix}.$$

下一个结果根据子系统的谱 $\Sigma(B_1)$ 和 $\Sigma(B_2)$，对 $\Sigma(A)$ 给出了更精确的刻画

$$\dot{y}_1 = B_1(t)y_1 \quad \text{and} \quad \dot{y}_2 = B_2(t)y_2. \tag{4.4}$$

引理 4.5。若 $\dot{x} = A(t)x$ 具有有界谱

$$\Sigma(A) = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_\ell, b_\ell]$$

且还具有非平凡投影的指数二分性，则可得:

a) 指数二分谱 $\Sigma(A)$ 与系统 (4.3) 的指数二分谱满足

$$\Sigma(A) = \Sigma\left(\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\right) = \Sigma(B_1) \cup \Sigma(B_2); \tag{4.5}$$

b) 存在一个谱隙$(b_{j-1}, a_j) \subset \rho(A)$，其中包含$0$，使得

$$\Sigma(B_1) = [a_1, b_1] \cup \cdots \cup [a_{j-1}, b_{j-1}] \quad \text{and} \quad \Sigma(B_2) = [a_j, b_j] \cup \cdots \cup [a_\ell, b_\ell].$$

证明。如上所述，(4.5) 中的第一个恒等式由引理 4.4 与可约性共同推出。因此，我们只需证明

$$\Sigma\left(\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\right) = \Sigma(B_1) \cup \Sigma(B_2).$$

首先，性质

$$\Sigma\left(\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\right) \subset \Sigma(B_1) \cup \Sigma(B_2).$$

将通过反证法予以证明。事实上，若我们假设

$$\lambda \in \Sigma\left(\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\right) \quad \text{but} \quad \lambda \notin \Sigma(B_1) \cup \Sigma(B_2).$$

我们将有

$$\begin{aligned} \lambda \notin \Sigma(B_1) \cup \Sigma(B_2) \quad &\Rightarrow \quad \lambda \in [\Sigma(B_1) \cup \Sigma(B_2)]^c \\ &\Rightarrow \quad \lambda \in [\Sigma(B_1)]^c \cap [\Sigma(B_2)]^c \\ &\Rightarrow \quad \lambda \in \rho(B_1) \cap \rho(B_2) \end{aligned}$$

这意味着 λ 使得线性系统

$$\dot{y}_1 = [B_1(t) - \lambda I_{n_1}]y_1 \quad \text{and} \quad \dot{y}_2 = [B_2(t) - \lambda I_{n_2}]y_2$$

在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性，其中正常数为 K_i、 α_i（$i = 1$，2），投影分别为 $P_1 \in M_{n_1}(\mathbb{R})$ 和 $P_2 \in M_{n_2}(\mathbb{R})$ （$n_1 + n_2 = n$）。即

$$\text{(4.6)} \quad \begin{cases} ||Y_1(t)e^{-\lambda t}P_1Y_1^{-1}(s)e^{\lambda s}|| \le K_1e^{-\alpha_1(t-s)} & \text{for } t \ge s \\ ||Y_1(t)e^{-\lambda t}[I_{n_1} - P_1]Y_1^{-1}(s)e^{\lambda s}|| \le K_1e^{-\alpha_1(s-t)} & \text{for } s \ge t, \end{cases}$$

and

$$\text{(4.7)} \quad \begin{cases} ||Y_2(t)e^{-\lambda t}P_2Y_2^{-1}(s)e^{\lambda s}|| \le K_2e^{-\alpha_2(t-s)} & \text{for } t \ge s \\ ||Y_2(t)e^{-\lambda t}[I_{n_2} - P_2]Y_2^{-1}(s)e^{\lambda s}|| \le K_2e^{-\alpha_2(s-t)} & \text{for } s \ge t, \end{cases}$$

其中， Y_1 和 Y_2 分别是式（4.4）的基矩阵。现在，我们定义

$$Y_\lambda(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t)e^{-\lambda t} & 0 \\ 0 & Y_2(t)e^{-\lambda t} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad P_0 = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}.$$

采用与第 4 章推论 2.1证明中所采用的方法类似的思路，可以验证 $Y_\lambda(t)$ 是下列系统的基矩阵

$$\text{(4.8)} \qquad \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(t) - \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & B_2(t) - \lambda I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

此外，利用 (4.6)–(4.7) 可以推导出，上述系统具有指数二分性，其投影为 P_0，且常数为正定的

$K =$ 最大$\{K_1,\ K_2\}$ 和 $\alpha =$ 最小$\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$，这意味着

$$\lambda \notin \Sigma\left(\left[\begin{array}{cc} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{array}\right]\right),$$

从而得到矛盾，第一个断言得证。

其次，为了证明

$$\Sigma(B_1) \cup \Sigma(B_2) \subset \Sigma\left(\left[\begin{array}{cc} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{array}\right]\right),$$

我们将证明等价性质

$$\rho(A) = \rho\left(\left[\begin{array}{cc} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{array}\right]\right) \subset \rho(B_1) \cap \rho(B_2).$$

现在，若 $\lambda \in \rho(A)$，则它必属于某个谱隙。不失一般性，我们假设

$$\lambda \in (b_{i-1}, a_i) \subset \rho(A) = \rho\left(\left[\begin{array}{cc} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{array}\right]\right),$$

并且我们知道，(4.8) 具有指数二分性，且其投影非平凡，因为 $(b_{i-1} - \lambda,\ a_i - \lambda)$ 是 (4.8) 的一个包含 0 的谱隙。于是，我们可以将第 4 章的推论 2.1 应用于系统 (4.8)，取 $\lambda \in]b_{i-1},\ a_i[$，从而得到

$$\dot{y}_1 = [B_1(t) - \lambda I_{n_1}]y_1 \quad \text{and} \quad \dot{y}_2 = [B_2(t) - \lambda I_{n_2}]y_2$$

具有指数二分性，则 $\lambda \in \rho(B_1) \cap \rho(B_2)$，第二个断言得证，命题 a) 也得证。

为了证明命题 b)，由于我们知道 $\dot{x} = A(t)x$ 具有带非平凡投影的指数二分性，由注记 4.1-c) 可知，存在 $j < \ell$，使得 $0 \in (b_{j-1}, a_j)$，进而 $\Sigma(A)$ 满足

$$[a_1, b_1] \cup \cdots \cup [a_{j-1}, b_{j-1}] \subset (-\infty, 0).$$

此外，我们可以使用第 4 章推论 2.1 中的命题 b)，由此可知 $\dot{y}_1 = B_1(t)y_1$ 和 $\dot{y}_2 = B_2(t)y_2$ 分别具有平凡投影 I_{n_1} 和 0_{n_2} 的指数二分性。由注记 4.1-a) 和 4.1-b) 可知，$\Sigma(B_1) \subset (-\infty, 0)$，且 $\Sigma(B_2) \subset (0, +\infty)$。

最后，由于 $\Sigma(A) = \Sigma(B_1) \cup \Sigma(B_2)$，可得

$$[a_1, b_1] \cup \cdots \cup [a_{j-1}, b_{j-1}] = \Sigma(B_1) \subset (-\infty, 0)$$

且结论得证。 □

定理 4.2。 对于任意具有 ℓ 个有界谱区间 $\{[a_i,b_i]\}_{i=1}^{\ell}$ 的线性系统 (1.1)， 存在 ℓ 矩阵 $B_i(t)$，其中 $\Sigma(B_i)=[a_i,b_i]$，使得 (1.1) 与下述系统广义运动学相似

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} B_1(t) & & & \\ & B_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_\ell(t) \end{bmatrix} x.$$

证明。证明将分为几个步骤：步骤 *1*： 取 $\lambda_\ell \in (b_{\ell-1},\ a_\ell)$, 则线性系统

$$\dot{x}=[A(t)-\lambda_\ell I]x \tag{4.9}$$

具有投影为 P_{λ_ℓ} 且秩为 $\mathrm{Rank}(P_{\lambda_\ell})=m_\ell<n$ 的指数二分性。

此外，由于 $0\in(b_{\ell-1}-\lambda_\ell,\ a_\ell-\lambda_\ell)$，将引理 4.5 应用于系统 (4.9)，可知其可约化为

$$\dot{y}(t)=\begin{bmatrix} B_1^*(t) & 0 \\ 0 & B_\ell^*(t) \end{bmatrix} y(t), \tag{4.10}$$

其中 $B_1^*\in\mathbb{R}^{m_\ell\times m_\ell}$ 和 $B_\ell^*\in\mathbb{R}^{(n-m_\ell)\times(n-m_\ell)}$ 满足

$$\Sigma(A-\lambda_\ell I)=\bigcup_{i=1}^{\ell}[a_i-\lambda_\ell,b_i-\lambda_\ell]=\Sigma(B_1^*)\cup\Sigma(B_\ell^*),$$

并验证

$$\Sigma(B_1^*)=\bigcup_{i=1}^{\ell-1}\Big[a_i-\lambda_\ell,b_i-\lambda_\ell\Big]\quad\text{and}\quad\Sigma(B_\ell^*)=\Big[a_\ell-\lambda_\ell,b_\ell-\lambda_\ell\Big].$$

由于我们知道 (4.9) 可约化为 (4.10)，根据引理 4.3，还可推出线性系统 $\dot{x}=A(t)x$ 可约化为

$$\dot{y}=\begin{bmatrix} B_1^*(t)+\lambda_\ell I_{m_\ell} & 0 \\ 0 & B_\ell^*(t)+\lambda_\ell I_{n-m_\ell} \end{bmatrix} y.$$

现在我们定义 $B_\ell(t):=B_\ell^*(t)+\lambda_\ell I_{n-m_\ell}$，并再次利用引理 4.5 得到

$$\Sigma(A)=\Sigma(B_1^*(t)+\lambda_\ell I_{m_\ell})\cup\Sigma(B_\ell(t)),$$

其中

$$\Sigma(B_\ell)=[a_\ell,b_\ell]\quad\text{and}\quad\Sigma(B_1^*+\gamma_\ell I_{m_\ell})=\bigcup_{i=1}^{\ell-1}[a_i,b_i]=\Sigma(\hat{B}_1).$$

综上，我们已经证明线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 可约为

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{B}_1(t) & 0 \\ 0 & B_\ell(t) \end{bmatrix} y(t), \tag{4.11}$$

通过变换 $Q_\ell(t) \in M_n(\mathbb{R})$。
步骤 *2:* 注意到 (4.11) 可以解耦为

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \hat{B}_1(t)y \\ \dot{z} &= B_\ell(t)z \end{aligned}$$

其中

$$\Sigma(\hat{B}_1) = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_{\ell-2}, b_{\ell-2}] \cup [a_{\ell-1}, b_{\ell-1}].$$

现在，子系统 $\dot{y} = \hat{}B_1(t)y$ 可以通过选取 $\lambda_{\ell-1} \in (b_{\ell-2}, a_{\ell-1})$ 来按照前一步处理，或者等价地，选取 $0 \in (b_{\ell-2} - \lambda_{\ell-1}, a_{\ell-1} - \lambda_{\ell-1})$。

$\hat{}$ 按照步骤 1 的思路，我们可以证明 $\dot{y} = B_1 y$ 可约为

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \hat{B}_2(t) & 0 \\ 0 & B_{\ell-1}(t) \end{bmatrix} y,$$

$\tilde{}$通过变换 $Q_{\ell-1}(t) \in M_{m_\ell}(\mathbb{R})$，其中

$$\Sigma(\hat{B}_2) = \bigcup_{i=1}^{\ell-2} [a_i, b_i] \quad \text{and} \quad \Sigma(B_{\ell-1}) = [a_{\ell-1}, b_{\ell-2}]$$

并且我们可以看到，$\dot{x} = A(t)x$ 在运动学上相似于

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \hat{B}_2(t) & & \\ & B_{\ell-1}(t) & \\ & & B_\ell(t) \end{bmatrix}$$

通过复合

$$Q_{\ell-1}(t) = \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{\ell-1}(t) & 0 \\ 0 & I_{n-m_\ell} \end{bmatrix} \circ Q_\ell(t).$$

步骤 *3*： 证明的其余部分可以递归地完成。

□

5. 注释与参考文献

1) 指数二分谱也称为*Sacker*& *Sell* 的谱，这一名称源于 Sacker 和 Sell 于1978年发表的开创性论文。该论文为线性斜积动力系统构造了一个谱，其中涵盖了由线性非自治微分方程和差分方程产生的系统。世纪之初，研究又向前迈进了一步

Aulbach 和 Siegmund 的著作构建了聚焦于线性非自治微分方程和差分方程的谱理论 [**7, 8, 121**], , 为大量研究工作奠定了坚实的基。该主题的精简而精良的版本可见于 [**78**, 第5]章。

2) 本章的第 2 节和第 3 节仿照 [**78**] 中所呈现的结构和证明撰写。此外，命题 3.3 证明中的步骤 2 借鉴了 [**82**] 中的一个思路。

3) 本章开篇提到了几种谱理论。关于李雅普诺夫谱 和博尔谱 , 请读者参阅 [**50**, 第1]章，其中对此进行了研究。

4) 控制系统 **(1.2c)** 的可赋值性问题已结合指数二分谱进行研究，相关内容请参阅 [**5, 6**]。

5)分块系统的指数二分谱

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(t) & C(t) \\ \\ 0 & B_2(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

F. Battelli 和 K.J. Palmer 在 [**13**], 中对其进行了深入研究，并证明一般而言,

$$\Sigma \left(\begin{bmatrix} B_1(t) & C(t) \\ \\ 0 & B_2(t) \end{bmatrix} \right) \neq \Sigma(B_1) \cup \Sigma(B_2).$$

另一方面，他们还证明了

$$\Sigma^+ \left(\begin{bmatrix} B_1(t) & C(t) \\ \\ 0 & B_2(t) \end{bmatrix} \right) = \Sigma^+(B_1) \cup \Sigma^+(B_2),$$

前提是 $C(t)$ 在 $\mathbb{R}_+$上有界。

6) 由 C. Pötzsche 在 [**111**], 中提出的对角显著性这一性质，指的是分块系统的谱与对角谱并集之间的恒等关系。关于对角显著性的一些新结果已推广至 [**33**]中的非一致指数二分谱。

7) 据我们所知，定理 4.2 的首次证明由 S. Siegmund 在 [**122**, 定理3.2] 中给出。不过，我们强调指出，我们的证明存在若干差异，这些差异基于我们在第 4 章中的结果。

6. 习题

1-. 证明 $\Sigma_{EIG}(A)$ 满足定义 1.1 的性质$(\mathbf{P1})$–$(\mathbf{P3})$ 。2.- 证明性质（2.3）。3.- 证明第 3 章中的方程（2.2）满足以下性质: $0 \notin \Sigma^{+}(a)$，但 $0 \in \Sigma(a)$。4.- 证明注 2.2 中陈述的性质。此外，证明如果 $\dot{x} = [A(t) - \lambda I]x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有投影为 P_λ 的指数二分性，则 $\mathcal{U}^\lambda \oplus \mathcal{S}^\lambda = \mathbb{R}^n$。5.- 证明注 3.1。6.- 在定义 3.1 的背景下，证明 $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} \neq \varnothing$ 当且仅当 $C_{\lambda_1} = C_{\lambda_2}$。7.- 证明定理 3.1 中的性质（3.5）。8.- 对 $\Sigma^{\pm}$ 证明定理 3.2 的一个版本，以及 $\mathbb{R}_0^+$ 和 $\mathbb{R}_0^-$ 上的有界增长性质。9.- 证明当 $C_{\lambda_1} = C_{\lambda_2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义一个等价关系时，$\lambda_1 \sim \lambda_2$。10.- 通过考虑函数 $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ （其在 $\mathbb{R}$ 上有界且可积）推广第 3.3 小节中的例子。11.- 证明定理 3.5。

第6章

全局线性化

正如我们在第2章开篇所述，在自治方程的框架下，局部线性化问题最初由 D. Grobman [59]和 P. Hartman [65, 定理 I]研究；随后，C. Pugh [112] 研究了前述工作中涉及的这类方程中的一种特定类型，即线性系统和拟线性系统，以建立这些系统的解之间的全局同胚。本章将研究 K.J. Palmer [98] 在假设线性部分具有指数二分性的条件下，将 Pugh 的结果推广到非自治情形。

1. 引言

考虑线性系统

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.1}$$

以及拟线性系统族

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \tag{1.2}$$

其中 $t \mapsto A(t) \in M_n(\mathbb{R})$，且 $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 具有适当的性质。本章将重新讨论几个关于（1.2）全局线性化的结果。

非自治系统的拓扑等价概念由 K.J. Palmer 在 [98, 第754–755]页中引入：

定义 1.1。 若存在函数 $H\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，具有以下性质，则系统 （1.1） 和 （1.2） 是拓扑等价

(i) 对于每个固定的 $t \in \mathbb{R}$，$u \mapsto H(t,u)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个同胚，其逆矩阵为 $u \mapsto G(t,u)$；*(ii)* $G(t,u) - u$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中有界；*(iii)* 若 $t \mapsto x(t)$ 是 *(1.1)* 的一个解，则 $t \mapsto H[t, x(t)]$ 是 *(1.2)* 的一个解；*(iv)* 若 $t \mapsto y(t)$ 是 *(1.2)* 的一个解，则 $t \mapsto G[t, y(t)]$ 是 *(1.1)* 的一个解。

强拓扑等价这一概念由 Shi 和 Xiong [**119**], 提出，他们发现，在若干拓扑等价的例子中，映射 $u \mapsto H(t, u)$ 和 $u \mapsto G(t, u)$ 可能具有比连续性更强的性质。

定义 1.2。 如果系统 (1.1) 和 (1.2) 拓扑等价，并且对所有 $t \in \mathbb{R}$.，H 和 G 一致连续，则称它们强拓扑等价

2. Palmer同胚

定理 2.1。 [**98**] 假设 (1.1) 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其常数为 $K \geq 1$、 $\alpha > 0$ ，投影为 P。此外，我们还假设

(A1) 线性系统的矩阵 $A(\cdot)$ 有界，即

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||A(t)|| = M,$$

(A2) 存在正常数 μ ，使得

$$|f(t, y)| \leq \mu \quad \text{for any} \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

(A3) 存在正常数 γ ，使得

$$|f(t, y) - f(t, y')| \leq \gamma |y - y'| \quad \text{for any } t \in \mathbb{R} \text{ and } (y, y') \in \mathbb{R}^n.$$

若满足以下不等式

$$2K\gamma < \alpha, \tag{2.1}$$

则(1.1)和(1.2)强拓扑等价。

该定理的证明将由若干中间结果推导得出。

2.1. 关于初始条件的连续性。经过 ξ 且在 $t = \tau$ 时取值为 $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$的唯一解记为。类似地，经过 η 且在$t = \tau$ 时取值为 $t \mapsto y(t, \tau, \eta)$ 的唯一解记为。

命题 2.1. 在定理 *2.1* 的假设下，给定方程 (1.2) 的两个解 $t \mapsto y(t, \tau, \eta)$ 和 $t \mapsto y(t, \tau, \eta')$ ，可知

$$|y(t, \tau, \eta) - y(t, \tau, \eta')| \leq |\eta - \eta'| e^{(M+\gamma)|t-\tau|}. \tag{2.2}$$

证明。首先，假设 $t > \tau$。对系统积分可得

$$\begin{aligned} |y(t,\tau,\eta) - y(t,\tau,\eta')| &= |\eta - \eta'| + \int_\tau^t |A(s)y(s,\tau,\eta)) - A(s)y(s,\tau,\eta'))|\, ds \\ &\quad + \int_\tau^t |f(s,y(s,\tau,\eta)) - f(s,y(s,\tau,\eta'))|\, ds. \end{aligned}$$

现在，由（**A1**）和（**A3**），我们可以推得

$$|y(t,\tau,\eta) - y(t,\tau,\eta')| \le |\eta - \eta'| + (M+\gamma)\int_\tau^t |y(s,\tau,\eta) - y(s,\tau,\eta')|\, ds$$

而（2.2）是格朗沃尔引理的推论。

现在，若 $t < \tau$，我们可以使用积分表示

$$\begin{aligned} y(t,\tau,\eta) - y(t,\tau,\eta') &= \eta - \eta' - \int_\tau^t \{A(s)y(s,\tau,\eta) - A(s)y(s,\tau,\eta')\}\, ds \\ &\quad - \int_\tau^t \{f(s,y(s,\tau,\eta)) - f(s,y(s,\tau,\eta'))\}\, ds, \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} |y(t,\tau,\eta) - y(t,\tau,\eta')| &\le |\eta - \eta'| \\ &\quad + (M+\gamma)\int_\tau^t |y(s,\tau,\eta)) - y(s,\tau,\eta')|\, ds \end{aligned}$$

其余证明可以用类似的方式完成。 □

下面的结果是有界增长增长性质的直接推论

命题 2.2。 给定方程 (1.1) 的解 $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ 和 $t \mapsto x(t,\tau,\xi')$，可推出

$$|x(t,\tau,\xi) - x(t,\tau,\xi')| \le |\xi - \xi'| e^{M|t-\tau|}.$$

证明。见习题。 □

2.2. 一些中间引理。 以下结果是 K.J. Palmer 在其全局线性化结果中वि कसति的经典工具。

引理 2.1. 对于任意经过η且在 $t = \tau$处的解 $t \mapsto y(t,\tau,\eta)$，它是 (1.2) 的解，存在唯一的有界解 $t \mapsto \chi(t;(\tau,\eta))$ 满足

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) - f(t,y(t,\tau,\eta)). \tag{2.3}$$

证明. 利用第2章中的命题 3.1，取 $g(t) = -f(t, y(t,\tau,\eta))$，可得

$$\chi(t;(\tau,\eta)) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t,s) f(s, y(s,\tau,\eta))\, ds \tag{2.4}$$

是 (2.3) 的唯一有界解。此外，(**A2**) 蕴含 $|\chi(t;(\tau,\eta))| \le 2K\mu\alpha^{-1}$。□

注 2.1. 根据 (1.2) 的解的唯一性，我们知道

$$y\Big(t, r, y(r,\tau,\eta)\Big) = y\Big(t,\tau,\eta\Big) \quad \text{for any } r \in \mathbb{R},$$

这一事实意味着系统 (2.3) 可以写成

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) - f(t, y(t,r,y(r,\tau,\eta)))$$

而引理 2.1 蕴含恒等式

$$\chi(t;(\tau,\xi)) = \chi(t;(r, x(r,\tau,\xi))) \quad \text{for any } r \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

引理 2.2. 对于任意经过 $t=\tau$ 时刻的 (1.1) 的解 $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$，存在唯一的有界解 $t \mapsto \vartheta(t;(\tau,\xi))$，其满足

$$\dot{w} = A(t)w + f(t, x(t,\tau,\xi) + w). \tag{2.6}$$

证明。利用第2章中的命题 3.2，取 $h(t, w) = f(t, x(t,\tau,\xi)+w)$，我们知道存在唯一的有界解

$$\vartheta(t;(\tau,\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(t,s) f(s, x(s,\tau,\xi) + \vartheta(s;(\tau,\xi)))\, ds, \tag{2.7}$$

其中 $\mathcal{G}$ 是第2章定义 3.1 中所述的格林函数。□

注 2.2。与注 2.1 类似，读者可以验证恒等式

$$\vartheta(t;(\tau,\xi)) = \vartheta(t;(r, x(r,\tau,\xi))) \quad \text{for any } r \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

引理 2.3. 存在一个函数 $H\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，满足：

(i) $H(t,x) - x$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中有界，(ii) 对于 (1.1) 的任意解 $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$，我们有 $t \mapsto H[t, x(t,\tau,\xi)]$ 是非线性系统 (1.2) 的一个解，并满足

$$|H[t, x(t,\tau,\xi)] - x(t,\tau,\xi)| \le 2\mu K\alpha^{-1}, \tag{2.9a}$$

$$H[t, x(t,\tau,\xi)] = y(t,\tau,H(\tau,\xi)). \tag{2.9b}$$

证明。令 H: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 如下:

$$\begin{aligned} H(t,\xi) &= \xi+\vartheta(t;(t,\xi)) \\ &= \xi+\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(t,s)f(s,x(s,t,\xi)+\vartheta(s;(t,\xi)))\,ds. \end{aligned} \tag{2.10}$$

利用 (2.7) 和 (2.8)，我们可以推导出替代刻画

$$H[t,x(t,\tau,\xi)]=\begin{cases} x(t,\tau,\xi)+\vartheta(t;(t,x(t,\tau,\xi))) \\ x(t,\tau,\xi)+\vartheta(t;(\tau,\xi)) \\ x(t,\tau,\xi)+\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{G}(t,s)f(s,\underbrace{x(s,\tau,\xi)+\vartheta(s;(\tau,\xi))}_{=H[s,x(s,\tau,\xi)]})\,ds. \end{cases} \tag{2.11}$$

将 $H[t,x(t,\ \tau,\ \xi)]$ 描述如下会很有用

$$H[t,x(t,\tau,\xi)] = x(t,\tau,\xi)+\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(t,s)f(s,H[s,x(s,\tau,\xi)])\,ds, \tag{2.12}$$

而性质 (2.9a) 可由性质 (**A2**)结合对格林函数的标准估计以及指数二分常数推导得出。

另一方面，由于 $t\mapsto x(t,\ \tau,\ \xi)$ 是 (1.1) 的解，且 $t\mapsto\vartheta(t;(\tau,\ \xi))$ 是 (2.6) 的解，关于 $H[t,x(t,\ \tau,\ \xi)]$ 的替代刻画使我们能够推导出

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}H[t,x(t,\tau,\xi)] &= A(t)x(t,\tau,\xi)+\tfrac{d}{dt}\vartheta(t;(\tau,\xi)) \\ &= A(t)x(t,\tau,\xi)+A(t)\vartheta(t;(\tau,\xi))+f(t,x(t,\tau,\xi)+\vartheta(t;(\tau,\xi))) \\ &= A(t)\{x(t,\tau,\xi)+\vartheta(t;(\tau,\xi))\}+f(t,x(t,\tau,\xi)+\vartheta(t;(\tau,\xi))) \\ &= A(t)H[t,x(t,\tau,\xi)]+f(t,H[t,x(t,\tau,\xi)]). \end{aligned}$$

于是，$t\mapsto H[t,x(t,\ \tau,\ \xi)]$ 是 (1.2) 的一个解，它在 $t=\tau$ 时经过点 $H(\tau,\ \xi)$；根据解的唯一性，恒等式 (2.9b) 随即成立。□

引理 2.4. 存在一个函数 G: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，满足:

(i) $G(t,y)-y$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中有界，

(ii) 对于 (1.2) 的任意解 $t \mapsto y(t,\tau,\eta)$，$t \mapsto G[t, y(t,\tau,\eta)]$ 是满足以下条件的 (1.1) 的解

$$|G[t, y(t,\tau,\eta)] - y(t,\tau,\eta)| \le 2\mu K\alpha^{-1}, \tag{2.13a}$$

$$G[t, y(t,\tau,\eta)] = x(t,\tau,G(\tau,\eta)). \tag{2.13b}$$

证明。定义函数 $G\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 如下

$$\begin{aligned} G(t,\eta) &= \eta + \chi(t;(t,\eta)) \\ &= \eta - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t,s) f(s, y(s,t,\eta))\, ds, \end{aligned} \tag{2.14}$$

且(**A2**) 结合 (2.4) 可推出 $|G(t,\ \eta) - \eta| \le 2\mu K\alpha^{-1}$。

在 (2.14) 中用 $(t,\ y(t,\ \tau,\ \eta))$ 替换 $(t,\ \eta)$，并利用 (2.5)，可推出以下替代刻画

$$G[t, y(t,\tau,\eta)] = \begin{cases} y(t,\tau,\eta) + \chi(t;(t, y(t,\tau,\eta))) \\ y(t,\tau,\eta) + \chi(t;(\tau,\eta)) \\ y(t,\tau,\eta) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t,s) f(s, y(s,\tau,\eta))\, ds. \end{cases} \tag{2.15}$$

与前一个结果类似，性质 (2.13a) 可由性质(**A2**) 推出，再结合对格林函数的标准估计以及指数二分性常数。

最后，由于 $t \mapsto y(t,\ \tau,\ \eta)$ 是 (1.2) 的解，且 $t \mapsto \chi(t;(\tau,\ \eta))$ 是 (2.3) 的解，上述对 $G[t, y(t,\ \tau,\ \eta)]$ 的刻画使我们可以推出

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} G[t, y(t,\tau,\eta)] &= A(t) y(t,\tau,\eta) + f(t, y(t,\tau,\eta)) + \frac{d}{dt}\chi(t;(\tau,\eta)) \\ &= A(t)\{y(t,\tau,\eta) + \chi(t;(\tau,\eta))\} \\ &= A(t) G[t, y(t,\tau,\eta)], \end{aligned}$$

并且我们验证了 $t \mapsto G[t, y(t,\ \tau,\ \eta)]$ 是 (1.1) 的解，它经过 $G(\tau,\ \eta)$ 于 $t = \tau$，且 (2.13b) 得到验证。□

引理 2.5. 对于任意固定 t 的方程 (1.2) 的解 $t \mapsto y(t,\tau,\eta)$，可得

$$H[t, G[t, y(t,\tau,\eta)]] = y(t,\tau,\eta).$$

证明. 结合 (2.13b) 使用 (2.12)，可得

$$\begin{aligned} H[t, G[t, y(t,\tau,\eta)]] &= H[t, x(t,\tau, G(\tau,\eta))] \\ &= x(t,\tau,G(\tau,\eta)) + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s) f(s, H[s, x(s,\tau,G(s,\eta)]])\, ds \\ &= G[t, y(t,\tau,\eta)] + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s) f(s, H[s, G[s, y(s,\tau,\eta)]])\, ds. \end{aligned}$$

(2.15) 的第三种刻画以及上面的恒等式意味着

$$H[t, G[t, y(t,\tau,\eta)]] - y(t,\tau,\eta) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\{f(s, H[s, G[s, y(s,\tau,\eta)]]) - f(s, y(s,\tau,\eta))\}\, ds.$$

结合 (**A3**) 以及格林函数的标准估计，可以推得

$$|H[t, G[t, y(t,\tau,\eta)]] - y(t,\tau,\eta)| \le \frac{2K\gamma}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{R}} |H[t, G[t,\tau,\eta)] - y(t,\tau,\eta)|.$$

该引理是恒等式的直接推论

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |H[\cdot, G[\cdot,\tau,\eta)] - y(\cdot,\tau,\eta)| = 0.$$

事实上，上述项不可能是正定的，否则将与 (2.1) 矛盾。□

引理 2.6. 对于方程 (1.1) 的任意解 $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$，可得

$$G[t, H[t, x(t,\tau,\xi)]] = x(t,\tau,\xi).$$

证明。注意到，(2.9b)、(2.12) 和 (2.14) 意味着

$$\begin{aligned} G[t, H[t, x(t,\tau,\xi)]] &= H[t, x(t,\tau,\xi)] - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s) f(s, y(s,t, H[t, x(t,\tau,\xi)])\, ds \\ &= H[t, x(t,\tau,\xi)] - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s) f(s, y(s,t, y(t,\tau, H(\tau,\xi))))\, ds \\ &= H[t, x(t,\tau,\xi)] - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s) f(s, y(s,\tau, H(\tau,\xi)))\, ds \\ &= x(t,\tau,\xi) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\{f(s, H[s, x(s,\tau,\xi)]) - f(s, y(s,\tau, H(\tau,\xi)))\}\, ds \\ &= x(t,\tau,\xi), \end{aligned}$$

结论由此得出。 □

读者可以注意到（另见定义 1.1），记号$H[\cdot,\ \cdot]$和 $G[\cdot,\ \cdot]$专用于 H和 G分别定义在方程 (1.2) 和 (1.1) 的解上的情形。

引理 2.7. 对于任意固定的 t 以及任意一对$(\xi,\eta)\ \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$，可得

$$G(t,H(t,\xi))=\xi \tag{2.16}$$

and

$$H(t,G(t,\eta))=\eta. \tag{2.17}$$

证明。利用引理 2.5，可得

$$G[t,H[t,x(t,\tau,\xi)]]=x(t,\tau,\xi)\quad \text{for any}\quad t\in\mathbb{R}.$$

现在，考虑特殊情形 $\tau=t$，可得（2.16）。类似地，可以推出恒等式（2.17）。□

注 2.3。注意，映射 $\xi\mapsto H(t,\ \xi)$和 $\eta\mapsto G(t,\ \eta)$满足定义 1.1 中的性质 (ii) 和 (iii)，这是引理 2.4–2.5 的推论。此外，引理 2.7 表明，对于任意 $t\in\mathbb{R}$，$u\mapsto G(t,\ u)\ =H^{-1}(t,\ u)$。因此，最后一步是证明这些映射的一致连续性，这将在接下来的两节中完成。

2.3. 证明的结束：映射的连续性 H 和 G。我们采用 Shi 和 Xiong[119] 的优秀论文中提出的方法。

引理 2.8. 映射 $\eta\mapsto G(t,\eta)\ =\eta+\chi(t;(t,\eta))$ 对任意 $t\in\mathbb{R}$ 都是一致连续的。

证明。由于恒等映射是一致连续的，我们只需证明映射 $\eta\to\chi(t;\,(t,\eta))$ 是一致连续的。

设 η 和 η' 是 (1.2) 的两个初始条件。注意，(2.14) 表明

$$\begin{aligned}\chi(t;(t,\eta))-\chi(t;(t,\eta'))\ &=\ -\int_{-\infty}^{t}\mathcal{G}(t,s)\Big\{f(s,y(s,t,\eta))-f(s,y(s,t,\eta'))\Big\}\,ds\\&\quad+\int_{t}^{\infty}\mathcal{G}(t,s)\Big\{f(s,y(s,t,\eta))-f(s,y(s,t,\eta'))\Big\}\,ds\\&=\ -I_1+I_2.\end{aligned}$$

现在，我们将 I_1 和 I_2 划分如下：

$$I_1=\int_{-\infty}^{t-L}+\int_{t-L}^{t}=I_{11}+I_{12}\quad\text{and}\quad I_2=\int_{t}^{t+L}+\int_{t+L}^{\infty}=I_{21}+I_{22},$$

其中 L 是一个正常数。

结合**(A2)** 与指数二分性可知，积分 I_{11} 和 I_{22} 总是有限的，因为

$$|I_{11}| \le 2K\mu \int_{-\infty}^{t-L} e^{-\alpha(t-s)}\, ds = \frac{2K\mu}{\alpha} e^{-\alpha L}$$

and

$$|I_{22}| \le 2K\mu \int_{t+L}^{\infty} e^{-\alpha(s-t)}\, ds = \frac{2K\mu}{\alpha} e^{-\alpha L}.$$

现在，根据**(A3)**，可得

$$\begin{aligned} |I_{12}| &\le \int_{t-L}^{t} Ke^{-\alpha(t-s)}\gamma |y(s,t,\eta) - y(s,t,\eta')|\, ds \\ &\le \int_{0}^{L} Ke^{-\alpha u}\gamma |y(t-u,t,\eta) - y(t-u,t,\eta')|\, du. \end{aligned}$$

另一方面，根据命题 2.1，可得

$$0 \le |y(t-u,t,\eta) - y(t-u,t,\eta')| \le |\eta - \eta'| e^{(M+\gamma)u} \quad \text{for any} \quad u \in [0,L].$$

将此不等式代入对 $|I_{12}|$ 的前一个估计中，可得

$$\begin{aligned} |I_{12}| &\le \int_{0}^{L} Ke^{-\alpha u}\gamma |y(t-u,t,\eta) - y(t-u,t,\eta')|\, du \\ &\le K\gamma |\eta - \eta'| \int_{0}^{L} e^{-\alpha u} e^{(M+\gamma)u}\, du \\ &\le K\gamma |\eta - \eta'| e^{(M+\gamma)L} \int_{0}^{L} e^{-\alpha u}\, du \\ &= \frac{K\gamma e^{(M+\gamma)L}}{\alpha}(1 - e^{-\alpha L})|\eta - \eta'| \end{aligned}$$

读者可以推得，上述不等式意味着

$$|I_{12}| \le D|\eta - \eta'| \quad \text{with} \quad D = \frac{K\gamma e^{(M+\gamma)L}}{\alpha}(1 - e^{-\alpha L}). \tag{2.18}$$

类似地，我们可以推得

$$|I_{21}| \le D|\eta - \eta'|. \tag{2.19}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，我们都可以选择

$$L \ge \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{8K\mu}{\alpha\varepsilon}\right),$$

这意味着 $|I_{11}|+|I_{22}|<\varepsilon/2$。结合这一事实与 (2.18)–(2.19)，我们得到

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\frac{\varepsilon}{4D}>0 \text{ such that } |\eta-\eta'|<\delta\Rightarrow|\chi(t;(t,\eta))-\chi(t;(t,\eta'))|<\varepsilon$$

且一致连续性随即得证。 □

引理 2.9. 映射 $\xi\mapsto H(t,\xi)=\xi+\vartheta(t;(t,\xi))$ 对任意 $t\in\mathbb{R}$ 都一致连续。

证明。我们只需证明映射 $\xi\mapsto\vartheta(t;(t,\xi))$ 一致连续。为此，设 ξ 和 ξ' 是 (1.1) 的两个初始条件，并定义它们的差

$$\Delta\vartheta:=\vartheta(t;(t,\xi))-\vartheta(t;(t,\xi')),$$

and

$$\Delta f:=f(s,x(s,t,\xi)+\vartheta(s;(t,\xi)))-f(s,x(s,t,\xi')+\vartheta(s;(t,\xi'))).$$

利用 (2.7)，可知 $\Delta\vartheta$ 可写为:

$$\begin{aligned}\Delta\vartheta &= \underbrace{\int_{-\infty}^{t-\tilde{L}}\mathcal{G}(t,s)\Delta f\,ds}_{:=J_{11}}+\underbrace{\int_{t-\tilde{L}}^{t}\mathcal{G}(t,s)\Delta f\,ds}_{:=J_{12}}\\ &\quad+\underbrace{\int_{t}^{t+\tilde{L}}\mathcal{G}(t,s)\Delta f\,ds}_{:=J_{21}}+\underbrace{\int_{t+\tilde{L}}^{+\infty}\mathcal{G}(t,s)\Delta f\,ds}_{:=J_{22}}.\end{aligned}$$

根据 (**A2**) 和指数二分性性质，容易验证

$$|J_{11}|\le\frac{2K\mu}{\alpha}e^{-\alpha\tilde{L}}\quad\text{and}\quad|J_{22}|\le\frac{2K\mu}{\alpha}e^{-\alpha\tilde{L}}.$$

我们定义

$$||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty=\sup_{s\in\mathbb{R}}|\vartheta(s;(t,\xi))-\vartheta(s;(t,\xi'))|,$$

并注意到 **(A3)**意味着:

$$\begin{aligned}|J_{12}| &\leq \frac{K\gamma}{\alpha}||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty \\ &\quad +K\gamma\int_{t-\tilde{L}}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|x(s,t,\xi)-x(s,t,\xi')|\,ds \\ &\leq \frac{K\gamma}{\alpha}||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty \\ &\quad +K\gamma\int_{0}^{\tilde{L}} e^{-\alpha u}|x(t-u,t,\xi)-x(t-u,t,\xi')|\,du.\end{aligned}$$

利用命题 2.2，我们知道

$$|x(t-u,t,\xi)-x(t-u,t,\xi')|\leq|\xi-\xi'|e^{Mu}\quad\text{for any}\quad u\in[0,\tilde{L}].$$

将这个不等式代入 $|J_{12}|$ 后，我们得到

$$\begin{aligned}|J_{12}| &\leq \frac{K\gamma}{\alpha}||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty + K\gamma|\xi-\xi'|\int_0^{\tilde{L}} e^{-\alpha u}e^{M\tilde{L}}\,du \\ &\leq \frac{K\gamma}{\alpha}||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty + \frac{K\gamma}{\alpha}e^{M\tilde{L}}|\xi-\xi'|\end{aligned}$$

读者可以推导出

$$|J_{12}|\leq\frac{K\gamma}{\alpha}||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty+\tilde{D}|\xi-\xi'|\quad\text{with}\quad\tilde{D}=\frac{K\gamma}{\alpha}e^{M\tilde{L}}.$$

下一个不等式可以用类似的方法证明

$$|J_{21}|\leq\frac{K\gamma}{\alpha}||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty+\tilde{D}|\xi-\xi'|.$$

利用上述不等式并结合（2.1），可得

$$\begin{aligned}|\vartheta(t;(t,\xi))-\vartheta(t;(t,\xi'))| &\leq |J_{11}|+|J_{22}|+|J_{12}|+|J_{21}| \\ &\leq \frac{4K\mu}{\alpha}e^{-\alpha\tilde{L}}+2\tilde{D}|\xi-\xi'| \\ &\quad +\frac{2K\gamma}{\alpha}||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty.\end{aligned}$$

注意

$$||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty \leq \frac{4K\mu}{\alpha}e^{-\alpha\tilde{L}}+2\tilde{D}|\xi-\xi'| + \frac{2K\gamma}{\alpha}||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty.$$

通过定义 $\Gamma^* := \frac{2K\gamma}{\alpha} < 1$，并利用不等式

$$|\vartheta(t;(t,\xi))-\vartheta(t;(t,\xi'))| \leq ||\vartheta(\cdot;(t,\xi))-\vartheta(\cdot;(t,\xi'))||_\infty,$$

我们很容易推得

$$|\vartheta(t;(t,\xi))-\vartheta(t;(t,\xi'))| \leq \frac{4K\mu e^{-\alpha\tilde{L}}}{\alpha(1-\Gamma^*)}+\frac{2\tilde{D}}{1-\Gamma^*}|\xi-\xi'|.$$

最后，对于任意 $\varepsilon>0$，我们可以选择

$$\tilde{L} \geq \frac{1}{\alpha}\ln\Big(\frac{8K\mu}{\alpha\varepsilon(1-\Gamma^*)}\Big),$$

这意味着 $\frac{4K\rho^*\mu}{\alpha\ 1-\Gamma^*}()e^{-\alpha\tilde{L}} < \varepsilon/2$。利用这一事实，我们得到

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\frac{\varepsilon}{4\tilde{D}}(1-\Gamma^*)>0 \text{ 使得 } |\xi-\xi'|<\delta \Rightarrow |\vartheta(t;(t,\xi))-\vartheta(t;(t,\xi'))|<\varepsilon,$$

一致连续性由此得证。□

3. 注释与参考文献

1) 定理 2.1 的证明借鉴了 K.J. Palmer [98], 提出的全局线性化结果, 其中映射 H 和G 的构造十分巧妙，但关于它们对 t的连续性仅作了简要说明。此外，通过利用 $A(t)$的有界性，并改编 J. Shi 和 K. Xiong [119] 针对更一般族所作的全局线性化证明，得到了关于该时间变量的一致连续性。

另一方面，我们强调，证明过程中力求清晰地阐述引理 2.3 和 2.4 中若干复杂细节。我们还特别指出，式 (2.11) 和 (2.15) 分别给出了映射 $t \mapsto H[t,x(t,\tau,\xi)]$ 和 $t \mapsto G[t,y(t,\tau,\eta)]$ 的三重刻画。

2) K.J. Palmer 在 [98] 中提出的方法和思想已推广到若干类方程: 差分方程 [115],、分段常数时滞方程 [103], 、脉冲方程 [85] 以及时标方程 [67, 110]。关于指数之外的二分性，另请参阅 [116] 。

3) R. Naulin[**96**] 应用 Palmer 的全局线性化结果，研究拟线性系统的渐近性质

$$\dot{x} = Ax + f(t, x)$$

其中 A 具有纯虚特征值，且扰动满足

$$\lim_{x\to 0} f(t, x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 0} Df(t, x) = 0$$

关于 t一致地。

4) 非线性项的有界性在本章所进行的全局线性化中发挥了关键作用。我们指出，也存在不要求这一假设的其他全局线性化方法。在这方面，F. Lin 在 [**84**] 中得到了该方向上的首个结果。他证明，如果线性系统具有指数二分性，且其 $P = I$ 在 $\mathbb{R}$，那么线性化属于 C^0. 类。为得到这一结果，Lin 使用了几乎可约性这一概念，即线性系统可以写成一个线性对角系统加上有界线性项的形式，其中对角部分包含在指数二分性的谱中（见第5章）；此外，他还使用了相对于单位球面的穿越时刻 这一概念。I. Huerta 在 [**73**]中提出了第二种方法，将 Lin 之前的工作推广到了非一致框架；也就是说，他分两步构造了一个属于 C^0 类的线性化：第一步考虑将 $\mathbb{R}^+$ 上的线性系统写成 Lin 情形中的形式，其中对角部分位于非一致指数二分性的谱中（有关该谱的详情，见 [**35**] 和[**132**] ）；第二步则致力于构造一个合适的 Lyapunov 函数，使其发挥相对于单位球面的穿越时刻的作用。最近，M. Wu 和 Y. Xia 在 [**128**] 中将上述工作推广到考虑非平凡投影的情形。

4. 习题

1.- 若 $t \mapsto y(t, \tau, \eta)$ 是 (1.2) 的解，并且在 η at$t = \tau$ 处经过，证明:

$$G[t, y(t, \tau, \eta)] = X(t, \tau)G(\tau, \eta).$$

2.- 若 $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ 和 $t \mapsto y(t, \tau, \eta)$ 分别是方程 (1.1) 和 (1.2) 的解，且分别在 $t = \tau$ 时经过 ξ 和 η ，利用引理 2.3 和 2.6 证明

$$x(t, \tau, \xi) = y(t, \tau, H(\tau, \xi)) + \vartheta(t; (\tau, H(\tau, \xi))).$$

3.- 若 $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ 和 $t \mapsto y(t,\tau,\eta)$ 分别是方程 (1.1) 和 (1.2) 的解，且分别在 $t=\tau$ 时经过 ξ 和 η，利用引理2.4和2.5证明

$$y(t,\tau,\eta) = x(t,\tau,G(\tau,\eta)) + \chi(t;(\tau,G(\tau,\eta))).$$

4.- 利用习题 2 和 3 证明

$$\vartheta(t;(\tau,G(\tau,\eta))) + \chi(t;(\tau,\eta)) = 0 \quad \text{for any } \eta \in \mathbb{R}^n.$$

5.- 利用习题 2 和 3 证明

$$\vartheta(t;(\tau,\xi))) + \chi(t;(\tau,H(\tau,\xi))) = 0 \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

6.- 利用恒等式 (2.16)–(2.17)，以及分别由 (2.10) 和 (2.14) 给出的 H 和 G的定义，证明:

$$\begin{cases} G(t,\eta) &= \eta - \chi(t;(t,G(t,\eta))) \quad \text{for any } \eta \in \mathbb{R}^n, \\ H(t,\xi) &= \xi - \vartheta(t;(H(t,\xi))) \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

7.- 考虑拟线性系统

$$\dot{x} = A(t)x + f_1(t,x), \tag{4.1a}$$

$$\dot{y} = A(t)y + f_2(t,y), \tag{4.1b}$$

其中，线性部分在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，常数为 K 和 α，并且还满足(**A1**)；而两个非线性项均满足(**A2**)–(**A3**)，常数为 μ 和 $\alpha_\circ$ 证明：若$2K\gamma < \alpha$，则存在映射 H: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得对于方程 (4.1a) 的任意解 $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto H[t,x(t)]$都是方程 (4.1b) 的解，反之亦然。

8.- 若假设 $t \mapsto A(t)$ 和 $t \mapsto f(t,\ x)$ 连续且为ω–周期函数，证明：通过考虑一个适当的函数$y(t,\ \tau,\ \eta)$，引理 2.1 中存在唯一的 ω–周期映射 $t \mapsto \chi(t;(\tau,\ \eta))$。提示：参见第2章的推论 3.2。

9.- 考虑以下非线性控制系统

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + f(t,u(t)),$$

其中 $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$、$B \in M_{np}(\mathbb{R})$、$u \in \mathbb{R}^p$ 连续，且 f: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 满足

$$|f(t,u)| \le \mu \quad \text{and} \quad |f(t,u) - f(t,u')| \le \gamma|u-u'|$$

对于任意 $(t,u,u') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p$。

若存在有界连续映射 $t \mapsto F(t) \in M_{pn}(t)$，使线性系统 $\dot{x} = [A(t) + B(t)F(t)]x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，求关于 $||F(t)||_\infty$ 的条件

以及确保其与该系统拓扑等价的指数二分常数

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)F(t)]x + f(t, F(t)x),$$

它源自反馈控制 $u(t) = F(t)x$。

10.- 详细说明注 2.1。 11.- 详细证明命题 2.2。 12.- 仔细验证恒等式 (2.8)。 13.- 详细说明如何得到 (2.17)。 14.- 推导恒等式 (2.18) 和 (2.19)。 15.- 给出满足定理 2.1 假设的显式例子。

第7章

全局线性化的可微性

1. 动机

前一章旨在构造一个全局同胚，将线性系统的解

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.1}$$

与其拟线性扰动的解联系起来

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y) \tag{1.2}$$

在以下假设下：

(A1) 线性系统的矩阵 $A(\cdot)$是有界的，即

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||A(t)|| = M,$$

(A2) 存在正常数 μ使得

$$|f(t,y)| \le \mu \quad \text{for any} \quad (t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$$

(A3) 存在正常数 γ 使得

$$|f(t,y) - f(t,y')| \le \gamma|y - y'| \quad \text{for any } t\in\mathbb{R} \text{ and } (y,y')\in\mathbb{R}^n.$$

第6章中由（2.14）描述的同胚 $\eta \mapsto G(t,\eta)$ 的光滑性，几年前已经开始在一系列文章中得到研究。然而，研究中考虑了一个额外且限制性更强的假设：

(A4)线性系统（1.1）具有投影为 $P = I$、常数为 K 和 α 的指数二分性，使得

$$\frac{2K}{\alpha} < \gamma.$$

建立该同胚可微性的第一种方法见 [**29**] ，其中证明了：在满足适当的关于 $y \mapsto f(t,\ y)$ 的可微性条件时，映射 G 是 C^2。随后，[**30**] 得到了 $G \in C^r$ ，其中 $r \ge 1$。后一项工作仅考虑了 $t \ge 0$ 时的同胚 $\eta \mapsto G(t,\ \eta)$。

2. 整条实线上的第一种方法

本节的主要目标是研究任意 $t \in \mathbb{R}$ 下同胚 $\eta \mapsto G(t, \eta)$ 的可微性性质。为实现这一目标，研究映射 $\xi \mapsto y(t, t_0, \xi)$ 及其性质将很有意义。事实上，如果对于任意 $t \in \mathbb{R}$， $y \mapsto f(t, y)$ 是 C^1，那么众所周知（例如参见 [**36**, 第 2] 章），$\partial y(t, t_0, \xi)/\partial \xi = y_\xi(t, t_0, \xi)$ 满足矩阵微分方程

$$
(2.1) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial y}{\partial \xi}(t, t_0, \xi) &= \{A(t) + Df(t, y(t, t_0, \xi))\}\dfrac{\partial y}{\partial \xi}(t, t_0, \xi), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi}(t_0, t_0, \xi) &= I. \end{cases}
$$

由于 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$，上述方程可以写成一组 n常微分方程组

$$
\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial y}{\partial \xi_i}(t, t_0, \xi) &= \{A(t) + Df(t, y(t, t_0, \xi))\}\dfrac{\partial y}{\partial \xi_i}(t, t_0, \xi), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi_i}(t_0, t_0, \xi) &= e_i, \end{cases}
$$

对所有 $i = 1, \dots, n$。

此外，已证明（例如，参见 [**64**, 第 V 章]中的定理 **4.1**），如果 $y \mapsto f(t, y)$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 均 C^r 且 $r > 1$，那么映射 $\xi \mapsto y(t, t_0, \xi)$ 也 C^r。特别地，如果 f 是 C^2，我们可以验证，二阶导数 $\partial^2 y(t, t_0, \xi)/\partial \xi_j \partial \xi_i$ 是下列微分方程组的解

$$
(2.2) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi_j \partial \xi_i} &= \{A(t) + Df(t, y)\}\dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi_j \partial \xi_i} + D^2 f(t, x)\dfrac{\partial y}{\partial \xi_j}\dfrac{\partial y}{\partial \xi_i} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi_j \partial \xi_i} &= 0, \end{cases}
$$

其中 $y := y(t, t_0, \xi)$，对任意 $i, j = 1, \dots, n$。

现在，我们来介绍关于非线性项的以下条件：（**D1**） $y \mapsto f(t, y)$ 是 C^2，并且对于任意固定的 t，其一阶导数满足

$$
\int_{-\infty}^{t} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} ||X(t, r) Df(r, y(r, 0, \xi)) X(r, t)||\, dr < 1.
$$

（D2）对于任意固定的 $\in \mathbb{R}$ 和任意初始条件 ξ，可得

$$\int_{-\infty}^{t} \operatorname{Tr} Df(r, y(r,t,\xi)\, dr < +\infty.$$

(D3) 对任意固定的 $t \in \mathbb{R}^n$ 和 $i,\ j = 1, \ldots,\ n$，下列极限存在

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{\partial Z_\eta(s)}{\partial \eta_j} e_i,$$

其中，$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$、$e_i$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的规范基的第 i 个分量，而 $Z_\eta(s)$ 是依赖于 η 参数的系统的一个基本矩阵

$$\dot{z} = F(s,\eta)z \tag{2.3}$$

满足 $Z_\eta(t) = I$，其中 $F(r,\ \eta)$ 定义如下

$$F(r,\eta) = X(t,r)Df(r, y(r,t,\eta))X(r,t). \tag{2.4}$$

注 2.1。我们将看到，同胚 G 的构造考虑了任意 $t \in (-\infty,\ \infty)$ 时 $y(t,\ 0,\ \xi)$ 的行为。特别是，要证明 G 是保定向的微分同胚，需要了解其在 $(-\infty,\ t]$ 上的行为。事实上，注意到:

(D1) 是一个技术性假设，用来确保同胚 $y \mapsto G(t,\ y)$ 是 C^1。事实上，利用第 6 章中的 (2.13b)，可知 $G[s, t_0, y(s,\ t_0,\ \xi)] = x(s,\ t_0,\ G(t_0,\ \xi))$ 是 (1.1) 的一个解，并且在 $s = t_0$ 时经过 $G(t_0,\ \xi)$。此外，利用第 2 章中的 (3.3a)，并回顾 $P(\cdot) = I$，可得当 $s \to -\infty$ 时，$|G[s, y(s,\ t_0,\ \xi)]| \to +\infty$，因为

$$G[s,t_0,y(s,t_0,\xi)] = |x(s,t_0,G(t_0,\xi))| \geq \frac{|G(t_0,\xi)|}{K} e^{\alpha(t_0-s)},$$

这个事实结合第6章中的 (2.13a) 和三角不等式，意味着 $|y(s,\ t_0,\ \xi)| \to +\infty$。因此，**(D1)** 表明，$Df(s,\ y)$ 的渐近行为（当 $|y| \to +\infty$ 和 $s \to -\infty$时）必须确保其可积性。

(D2) 的引入是为了确保 G 是保向微分同胚。我们强调，这一假设与刘维尔公式有关。

(D3)的引入是为了确保 G是一个 C^2 微分同胚。

定理 2.1。 若(1.1)和(1.2)满足**(A1)**–**(A4)** 及**(D1)**–**(D2)**，则对于任意固定的 t，函数 $y \mapsto G(t, y)$ 是保向微分同胚。

证明。证明分为几个步骤。步骤 *1*： 映射 $\eta \mapsto G(t,\eta)$ 的可微性。利用如下事实：对于任意 $t \in \mathbb{R}$，$y \mapsto f(t,y)$ 是 C^1，结合第1章中的 (2.1) 和 (1.7)，我们可以推出：

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t,\eta)}{\partial \eta} &= I - \int_{-\infty}^{t} X(t,s) Df(s,y(s,t,\eta)) \frac{\partial y(s,t,\eta)}{\partial \eta}\, ds \\ &= I - \int_{-\infty}^{t} \frac{d}{ds}\Big\{ X(t,s) \frac{\partial y(s,t,\eta)}{\partial \eta} \Big\}\, ds \qquad (2.5) \\ &= \lim_{s\to-\infty} X(t,s) \frac{\partial y(s,t,\eta)}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

因此，当且仅当上述极限存在时，$\eta \mapsto G(t,\eta)$ 才具有可微性。

步骤 *2*： 极限 (2.5) 定义良好。由 (2.1) 可知，我们已经验证了 $s \mapsto \frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta)$ 是以下方程的解：

$$\begin{cases} \dot{Y}(s) = F(s,\eta) Y(s) \\ Y(t) = I. \end{cases} \qquad (2.6)$$

根据第1章中的 (1.7)、恒等式 (2.4) 和 (2.6)，读者可以验证，$s \mapsto Z_\eta(s) = X(t,s)\partial y(s,t,\eta)/\partial \eta$ 是以下矩阵微分方程的解

$$\begin{cases} \dot{U}(s) = \Big\{ X(t,s) Df(s,y(s,t,\eta)) X(s,t) \Big\} U(s) \\ U(t) = I. \end{cases} \qquad (2.7)$$

利用第1章中的 (1.3)，我们得到与 Z_η 相关联的转移矩阵的以下估计

$$||Z_\eta(s,t)|| \le \exp\left(\left| \int_t^s X(t,r) Df(r,y(r,t,\eta)) X(r,t)\, dr \right| \right)$$

并且 (**D1**) 意味着 (2.5) 定义良好。

步骤 *3*： $\eta \mapsto G(t,\eta)$ 是保向微分同胚。我们已经证明，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，$\eta \mapsto G(t,\eta)$ 都是 C^1，并且

$$\frac{\partial G(t,\eta)}{\partial \eta} = \lim_{s\to-\infty} X(t,s) \frac{\partial y(s,t,\eta)}{\partial \eta} = \lim_{s\to-\infty} Z_\eta(s),$$

其中 $Z_\eta(\cdot)$ 是 (2.7) 的基本矩阵，即

$$\dot{Z}(s) = F(s,\eta) Z(s), \qquad Z(t) = I.$$

将刘维尔公式（见第1章中的定理 1.2）应用于 (2.7)，我们可得，对于任意 $s \le t$,

$$\det Z_\eta(s) = \exp\left(\int_t^s \operatorname{Tr} F(r,\eta)\, dr\right) = \exp\left(-\int_s^t \operatorname{Tr} F(r,\eta)\, dr\right) > 0.$$

由于 $F(r,\eta) = X(t,r)Df(r,y(r,t,\eta)X(r,t)$ 且 $X(r,t) = X(t,r)^{-1}$, 利用迹的循环性，我们得到迹在共轭下的不变性,

$$\operatorname{Tr} F(r,\eta) = \operatorname{Tr} Df(r,y(r,t,\eta)).$$

因此，对于任意固定的 $t \in \mathbb{R}$，我们有

$$\frac{\partial G(t,\eta)}{\partial \eta} = \lim_{s\to-\infty} \det Z_\eta(s) = \exp\left(-\int_{-\infty}^t \operatorname{Tr} Df(r,y(r,t,\eta)\, dr\right).$$

因此，在假设 **(D2)** 下，我们有 $\det^{\frac{\partial G(t,\eta)}{\partial \eta}} > 0$ 且 $^{\partial G}{}_{(t,\eta)}\ {}_{\partial\eta}$ 对任意固定的 $t \in \mathbb{R}$ 都是可逆的。由于 $\eta \mapsto G(t,\eta)$ 是一个同胚，反函数定理意味着 $\eta \mapsto G(t,\eta)$ 是保持定向的全局微分同胚。□

注 2.2. 矩阵微分方程 (2.6) 可以看作是矩阵方程的一个扰动

$$\begin{cases} \dot{W}(s) = A(s)W(s) \\ W(t) = I \end{cases} \tag{2.8}$$

与 (1.1) 相关。此外，对于任意固定的 $t \in \mathbb{R}$，(2.8) 有一个解 $s \mapsto W(s) = X(s,t)$。此外，注意到 $X(t,s)W(s) = I$，而定理 2.1 表明当 $s \to -\infty$ 时， $s \mapsto X(t,s)^{\frac{\partial y(s,t,\eta)}{\partial \eta}}$ 存在。这一事实提示我们，当 $s \to -\infty$ 时，(2.6) 和 (2.8) 的渐近行为之间存在某种弱于渐近等价的关系。事实上， [3] 中证明了，**(D1)** 是线性系统与线性扰动渐近等价的必要条件。

定理 2.2。 如果 (1.1) 和 (1.2) 满足 **(A1)**–**(A4)**及**(D1)**–**(D3)**，那么对于任意固定的 t，函数 $\eta \mapsto G(t,\eta)$ 是一个 C^2 保向微分同胚。

证明。记作 $\eta = (\eta_1, \ldots\ldots, \eta_n)$。与前面的结果一样，证明将分为几个步骤:

步骤 *1*：关于 $\partial^2 G\left(t,\ \eta\right)/\partial\eta_j\partial\eta_i$。
对于任意 $i,\ j\in\{1,\ \ldots,\ n\}$，我们可以验证

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial\eta_j\partial\eta_i}(t,\eta) &= -\int_{-\infty}^{t} X(t,s)D^2 f(s,y(s,t,\eta))\frac{\partial y(s,t,\eta)}{\partial\eta_j}\frac{\partial y(s,t,\eta)}{\partial\eta_i}\,ds \\ &\quad -\int_{-\infty}^{t} X(t,s)Df(s,y(s,t,\eta))\frac{\partial^2 y(s,t,\eta)}{\partial\eta_j\partial\eta_i}\,ds.\end{aligned}$$

现在，利用第1章中的 (2.2) 和 (1.7)，读者可以看出

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial\eta_j\partial\eta_i}(t,\eta) &= -\int_{-\infty}^{t}\frac{d}{ds}\left\{X(t,s)\frac{\partial^2 y(s,t,\eta)}{\partial\eta_j\partial\eta_i}\right\}ds \\ &= \lim_{s\to-\infty} X(t,s)\frac{\partial^2 y(s,t,\eta)}{\partial y_j\partial y_i}\end{aligned} \tag{2.9}$$

并且，当且仅当上述极限存在时，$\partial^2 G(t,\ \eta)/\partial\eta_j\partial\eta_i$ 的存在性才成立。

步骤 *2*：$\partial^2 G(t,\ \eta)/\partial\eta_j\partial\eta_i$ 定义良好。

利用第1章中的 (2.1) 和 (1.7)，我们可以看出，$s\mapsto X(t,\ s)\partial y(s,\ t,\ \eta)/\partial\eta_i$ 是 (2.3) 的一个解，并且在 $s=t$ 时经过 e_i。因此，我们可以推得

$$X(t,s)\frac{\partial y(s,t,\eta)}{\partial\eta_i}=Z_\eta(s)e_i$$

and

$$X(t,s)\frac{\partial^2 y(s,t,\eta)}{\partial\eta_j\partial\eta_i}=\frac{\partial Z_\eta(s)}{\partial\eta_j}e_i.$$

根据 **(D3)**，当 $s\to-\infty$ 且 $\partial^2 G(t,\ \eta)/\partial\eta_j\partial\eta_i$ 定义良好时，最后一个恒等式存在极限，并且对于任意固定的 $t\in\mathbb{R}$，它关于 η 连续。□

3. 半直线上的第二种方法

仔细阅读上一节可知，对于任意 $t\in\mathbb{R}$，$\eta\mapsto G(t,\eta)$ 的一阶和二阶导数与 $t\to-\infty$ 时极限的存在有关，而这些极限的存在需要相当严格的假设来保证，例如**(D1)** 和**(D3)**。为了解决这个问题，请注意，如果限制参数$t\in[0,+\infty)$，便可以去掉这些假设。尽管如此，我们仍需针对任意 $t\in J\subset\mathbb{R}$，将第6章中的拓扑等价定义 1.1 调整如下：

定义 3.1。 如果存在一个具有以下性质的函数 H：$J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，则系统(1.1) 和(1.2) 是 J–连续拓扑等价的：

(i) 若 $t \mapsto x(t)$ 是 (1.1) 的一个解，则 $t \mapsto H[t, x(t)]$ 是 (1.2) 的一个解，(ii) $H(t, u) - u$ 在 $J \times \mathbb{R}^n$ 中有界，(iii) 对每个固定的 $t \in J$， $u \mapsto H(t, u)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个同胚，(iv) H 在任意 $(t, u) \in J \times \mathbb{R}^n$中连续。

此外，函数 $u \mapsto G(t, u) = H^{-1}(t, u)$ 具有性质 (ii)–(iv)，并将 (1.2) 的解映射为 (1.1) 的解。

上述定义涵盖了定义 **1.1**，因为 $J = \mathbb{R}$ 只是一个特例。此外请注意，定义 **1.1** 未考虑 H和 G 在任意 $(t, u) \in J \times \mathbb{R}^n$ 中的连续性。然而，仔细查阅拓扑等价相关文献可以发现，这一性质的处理并不一致。事实上，Palmer [**98**, 第 754] 页的文献中考虑了这一性质，而 Shi 等人 [**119**,第 814] 页的文献中则未予考虑。此外，为简化行文，我们将 H和 G 称为***Palmer*** 同胚。

据我们所知，此前尚未研究过对于任意 $t \in J$，Palmer 同胚 $u \mapsto H(t, u)$ 和 $u \mapsto G(t, u)$ 的可微性， [**30**], 这促使我们引入以下定义：

定义 3.2。 若系统 (1.1) 和 (1.2) 在 J 上 C^r 连续拓扑等价，则：

(i) 这些系统 J–连续拓扑等价；(ii) 对于任意固定的 $t \in J$，映射 $u \mapsto H(t, u)$ 是 $\mathbb{R}^n$上的 C^r阶微分同胚，且 $r \geq 1$；(iii) H 和 G 关于 u 的直至 r 阶偏导数都是$(t, u) \in J \times \mathbb{R}^n$的连续函数。

在本小节中，我们在 $J = \mathbb{R}^+$ 上讨论，并希望证明系统 **(1.1)** 和 **(1.2)** 在 $\mathbb{R}^+$. 上 C^r 连续拓扑等价。为此，我们要求 $t \in \mathbb{R}^+$ 满足性质**(A1)**–**(A4)** ，而不是 $t \in \mathbb{R}$.

下面的定理，其证明与第6章中研究的线性化结果相似。然而，将 t 限制在区间 $[0, +\infty)$ 上会产生一些细微问题，值得进行详细处理。特别值得注意的是，其一个重要推论是，**(1.1)** 和 **(1.2)** 的所有解在 $[0, +\infty)$ 上都有界。

定理 3.1。 如果系统 (1.1) 和 (1.2) 对于任意 $t \in [0, +\infty)$ 满足 **(A1)**–**(A4)**，那么它们连续拓扑等价。

证明。为了使证明更易于阅读，我们将其分解为几个步骤。具体而言，步骤 1 定义两个辅助系统，其解将在步骤 2 中用于构造映射 H 和G。为证明这些映射建立了拓扑等价，步骤 3 验证定义 3.1 中的性质 (i)–(ii)，而步骤 4 和 5 证明一致连续性。最后，步骤6证明 H 在任意 $(t_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 中的连续性。

步骤 *1*：预备知识。 我们将考虑以下初值问题

$$\begin{cases} \dot{w} &= A(t)w - f(t, y(t, \tau, \eta)) \\ w(0) &= 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

and

$$\begin{cases} \dot{z} &= A(t)z + f(t, x(t, \tau, \xi) + z) \\ z(0) &= 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

利用常数变易公式，我们得到

$$w^*(t; (\tau, \eta)) = -\int_0^t X(t, s) f(s, y(s, \tau, \eta))\, ds \tag{3.3}$$

是方程 (3.1) 的唯一解。现在，为了研究方程 (3.2)，令 $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ 表示由有界连续函数构成、配备上确界范数的巴拿赫空间。现在，对于任意一对 $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, 利用 **(A2)** ，我们定义算子 $\Gamma_{(\tau,\xi)}$: $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) \to BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ 如下

$$\phi(t) \mapsto \Gamma_{(\tau,\xi)}\phi(t) := \int_0^t X(t, s) f(s, x(s, \tau, \xi) + \phi)\, ds.$$

由于 $2\gamma K/\alpha < 1$ ，由**(A3)** 很容易看出，算子 $\Gamma_{(\tau,\xi)}$是一个压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，可知

$$z^*(t; (\tau, \xi)) = \int_0^t X(t, s) f(s, x(s, \tau, \xi) + z^*(s; (\tau, \xi)))\, ds$$

是 (3.2) 的唯一解。

另一方面，利用解的唯一性可以证明

$$z^*(t; (\tau, \xi)) = z^*(t; (r, x(r, \tau, \xi))) \quad \text{for any } r \geq 0, \tag{3.4}$$

and

$$w^*(t; (\tau, \eta)) = w^*(t; (r, y(r, \tau, \eta))) \quad \text{for any } r \geq 0.$$

步骤 *2*：映射的构造 H 和 G。对于任意 $t \geq 0$，我们定义映射 $H(t,\ \cdot)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$和 $G(t,\ \cdot)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$如下:

$$\begin{aligned} H(t,\xi) &:= \xi + \int_0^t X(t,s) f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))\, ds \\ &= \xi + z^*(t;(t,\xi)), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} G(t,\eta) &:= \eta - \int_0^t X(t,s) f(s, y(s,t,\eta))\, ds \\ &= \eta + w^*(t;(t,\eta)). \end{aligned}$$

设 $t \mapsto x(t,\ \tau,\ \xi)$ 是方程 (1.1) 的一个解，它在 $t = \tau$ 时经过 ξ。利用 (3.4)，我们可以验证

$$\begin{aligned} H[t, x(t,\tau,\xi)] &= x(t,\tau,\xi) + \int_0^t X(t,s) f(s, x(s,t,x(t,\tau,\xi) + z^*(s;(t,x(t,\tau,\xi))))\, ds \\ &= x(t,\tau,\xi) + \int_0^t X(t,s) f(s, x(s,\tau,\xi) + z^*(s;(\tau,\xi)))\, ds \\ &= x(t,\tau,\xi) + z^*(t;(\tau,\xi)). \end{aligned}$$

步骤 *3*：H 和 G 满足定义 *3.1* 的性质 (i)–(ii)。由 (1.1) 和 (3.2)，结合上述等式，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H[t, x(t,\tau,\xi)] &= \frac{\partial}{\partial t} x(t,\tau,\xi) + \frac{\partial}{\partial t} z^*(t;(\tau,\xi)) \\ &= A(t)x(t,\tau,\xi) + A(t)z^*(t;(\tau,\xi)) + f(t, H[t, x(t,\tau,\xi)]) \\ &= A(t)H[t, x(t,\tau,\xi)] + f(t, H[t, x(t,\tau,\xi)]), \end{aligned}$$

于是 $t \mapsto H[t, x(t,\ \tau,\ \xi)]$ 是方程 (1.2) 的一个解，它在 $t = \tau$ 时经过 $H(\tau,\ \xi)$。由解的唯一性可得

$$H[t, x(t,\tau,\xi)] = y(t,\tau,H(\tau,\xi)), \tag{3.5}$$

类似地，可以证明 $t \mapsto G[t, y(t,\ \tau,\ \eta)]$ 是方程 (1.1) 的一个解，它在 $t = \tau$ 时经过 $G(\tau,\ \eta)$，并且

$$G[t, y(t,\tau,\eta)] = x(t,\tau,G(\tau,\eta)) = X(t,\tau)G(\tau,\eta),$$

性质 (i) 得证。其次，利用 **(A2)** 和 **(A4)** 可得

$$|H(t,\xi) - \xi| \leq K\mu \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\, ds \leq \frac{K\mu}{\alpha}$$

对任意 $t \geq 0$ 均成立。对于 $|G(t,\eta) - \eta|$，可以得到一个相似的不等式，由此验证性质 (ii)。

步骤 4：H 对任意 $t \geq 0$ 都是双射。我们首先证明恒等式 $H(t, G(t,\eta)) = \eta$ 对任意 $t \geq 0$ 均成立。事实上，

$$\begin{aligned} H[t, G[t, y(t,\ \tau,\ \eta)]] &= G[t, y(t,\ \tau,\ \eta)] \\ &\quad + \int_0^t X(t,s) f(s, x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)]) + z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)]))) \, ds \\ &= y(t,\tau,\eta) - \int_0^t X(t,s) f(s, y(s,\tau,\eta)) \, ds \\ &\quad + \int_0^t X(t,s) f(s, x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)]) + z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)]))) \, ds. \end{aligned}$$

令 $\omega(t) = |H[t, G[t, y(t,\tau,\eta)]] - y(t,\tau,\eta)|$. 因此，利用 （**A2**）和（**A3**）可得

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \left| \int_0^t X(t,s) \{ f(s, x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)]) + z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)]))) - f(s, y(s,\tau,\eta)) \} \, ds \right| \\ &\leq K\gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} |\{ x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)]) + z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)])) - y(s,\tau,\eta) \}| \, ds. \end{aligned}$$

系统 (1.1) 和 (1.2) 的所有解在 $\mathbb{R}^+$ 上的有界性，再结合 $s \mapsto z^*(s; (t, G[t, y(t,\tau,\eta)])) \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$，可推出 $\sup_{t \geq 0} \{\omega(t)\} < +\infty$。

此外，再次利用 $\xi \mapsto H(s,\xi)$ 的定义，我们可以推得

$$x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)]) + z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)])) = H[s, x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])],$$

由此得到

$$\begin{aligned} \omega(t) &\leq K\gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} |\{ H[s, x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])] - y(s,\tau,\eta) \}| \, ds \\ &= K\gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} |\{ H[s, G[s,y(s,\tau,\eta)]] - y(s,\tau,\eta) \}| \, ds, \end{aligned}$$

其中，最后一步由以下恒等式得出

$$x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)]) = x(s,\tau,G(\tau,\eta)) = G[s,y(s,\tau,\eta)].$$

因此，我们得到

$$\omega(t) \leq K\gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \omega(s) \, ds \leq \frac{K\gamma}{\alpha} \sup_{s \in \mathbb{R}^+} \{\omega(s)\} \quad \text{for all} \quad \mathrm{t} \geq 0.$$

现在，对上式左侧取上确界，由于$K\gamma/\alpha < 1$，可得 $\omega(t) = 0$，对任意 $t \geq 0.$ 均成立。特别地，当取 $t = \tau$ 时，我们得到 $H(\tau, G(\tau, \eta)) = \eta.$

接下来，我们将证明 $G(t,\ H(t,\ \xi)) = \xi.$ 事实上，由于 (3.5)，我们有

$$\begin{aligned} G[t, H[t, x(t,\tau,\xi)]] &= H[t, x(t,\tau,\xi)] \\ &\quad - \int_0^t X(t,s) f(s, y(s,t,H[t, y(x,\tau,\xi)]))\, ds \\ &= x(t,\tau,\xi) \\ &\quad + \int_0^t X(t,s)\{f(s, H[s, x(s,\tau,\xi)]) - f(s, y(s,\tau,H(\tau,\xi)))\}\, ds \\ &= x(t,\tau,\xi), \end{aligned}$$

并且取 $t = \tau$得到 $G(\tau,\ H(\tau,\ \xi)) = \xi$。因此，对于任意$t \geq 0$, $\xi \mapsto H(t,\ \xi)$ 是一个双射，而 $\eta \mapsto G(t,\ \eta)$ 是它的逆矩阵。

步骤*5*: 对于任意固定的 $t,\ H$ 和 G 均一致连续。首先，我们证明 $\eta \mapsto G(t, \eta)$ 是一致连续的。

利用性质 **(A1)** 并结合第1章的推论 2.1，我们可以看出，对于任意 $t,\ s \geq 0,\ ||X(t,\ s)|| \leq ||I||e^{M|t-s|}$。然后，第2章的引理 2.4 表明 $\alpha \leq M$。现在，我们构造辅助函数 $\theta,\ \theta_0$: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$，定义如下

$$\theta(t) = 1 + K\gamma\left(\frac{e^{(M+\gamma-\alpha)t} - 1}{M + \gamma - \alpha}\right) \quad \text{and} \quad \theta_0(t) = \begin{cases} K\gamma t & \text{if} \quad \alpha = M, \\ K\gamma\left(\frac{e^{(M-\alpha)t}-1}{M-\alpha}\right) & \text{if} \quad \alpha < M. \end{cases}$$

现在，给定 $\varepsilon > 0$，我们定义这些常数

$$L(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{2\mu K}{\alpha\varepsilon}\right),\ \theta_0^* = \max_{t\in[0,L(\varepsilon)]}\theta_0(t) \text{ and } \theta^* = \max_{t\in[0,L(\varepsilon)]}\theta(t). \tag{3.6}$$

我们将通过考虑两种情形来证明 G 的一致连续性:

情形 i) $t \in [0, L(\varepsilon)]$。根据 **(A2)** 和 **(A4)**，我们可以推导出

$$|G(t,\eta) - G(t,\bar{\eta})| \leq |\eta - \bar{\eta}| + K\gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}|y(s,t,\eta) - y(s,t,\bar{\eta})|\, ds. \tag{3.7}$$

现在，根据**(A1)**、**(A3)** 以及第6章中的命题 2.1，我们知道，对于任意 $0 \leq s \leq t$:

$$|y(s,t,\eta) - y(s,t,\bar{\eta})| \leq |\eta - \bar{\eta}|e^{(M+\gamma)(t-s)}. \tag{3.8}$$

将 (3.8) 代入 (3.7)，可得

$$\begin{aligned}|G(t,\eta)-G(t,\bar{\eta})| &\leq \left(1+K\gamma e^{(M+\gamma-\alpha)t}\int_0^t e^{-(M+\gamma-\alpha)s}\right)|\eta-\bar{\eta}| \\ &= \left(1+K\gamma\left\{\frac{e^{(M+\gamma-\alpha)t}-1}{M+\gamma-\alpha}\right\}\right)|\eta-\bar{\eta}| \\ &\leq \theta(t)|\eta-\bar{\eta}| \leq \theta^*|\eta-\bar{\eta}|.\end{aligned}$$

情形 ii) $t > L(\varepsilon)$。根据 **(A2)–(A4)**，可得

(3.9)

$$\begin{aligned}|G(t,\eta)-G(t,\bar{\eta})| &\leq |\eta-\bar{\eta}|+\mu K\int_0^{t-L(\varepsilon)} e^{-\alpha(t-s)}\,ds \\ &\quad +K\gamma\int_{t-L(\varepsilon)}^t e^{-\alpha(t-s)}|y(s,t,\eta)-y(s,t,\bar{\eta})|\,ds \\ &\leq |\eta-\bar{\eta}|+\frac{\mu K}{\alpha}e^{-\alpha L(\varepsilon)} \\ &\quad +K\gamma\int_0^{L(\varepsilon)} e^{-\alpha u}|y(t-u,t,\eta)-y(t-u,t,\bar{\eta})|\,du.\end{aligned}$$

与情形 i) 一样，不等式 (3.8) 意味着

$$\begin{aligned}K\gamma\int_0^{L(\varepsilon)} e^{-\alpha u}|y(t-u,t,\eta)-y(t-u,t,\bar{\eta})|\,du &\leq K\gamma\int_0^{L(\varepsilon)} e^{(M+\gamma-\alpha)u}|\eta-\bar{\eta}|\,du \\ &= K\gamma\left\{\frac{e^{(M+\gamma-\alpha)L(\varepsilon)}-1}{M+\gamma-\alpha}\right\}|\eta-\bar{\eta}|.\end{aligned}$$

将上述不等式代入 (3.9)，并利用 (3.6)，可得

$$\begin{aligned}|G(t,\eta)-G(t,\bar{\eta})| &\leq \left(1+K\gamma\left\{\frac{e^{(M+\gamma-\alpha)L(\varepsilon)}-1}{M+\gamma-\alpha}\right\}\right)|\eta-\bar{\eta}|+\frac{\mu K}{\alpha}e^{-\alpha L(\varepsilon)} \\ &\leq \theta^*|\eta-\bar{\eta}|+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

综上，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $L(\varepsilon) > 0$ 和 $\theta^* > 0$，使得:

$$|G(t,\eta)-G(t,\bar{\eta})| \leq \begin{cases}\theta^*|\eta-\bar{\eta}| & \text{if} \quad t\in[0,L(\varepsilon)] \\ \theta^*|\eta-\bar{\eta}|+\dfrac{\varepsilon}{2} & \text{if} \quad t > L(\varepsilon),\end{cases}$$

由此可得

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{2\theta^*}$ 使得 $|\eta - \bar{\eta}| < \delta \Rightarrow |G(t,\ \eta) - G(t,\ \bar{\eta})| < \varepsilon$,

且 G的一致连续性成立。

最后，我们将证明对于任意的 $t \geq 0,\ \xi \mapsto H(t,\ \xi)$ 都是一致连续的。由于恒等映射是一致连续的，我们只需证明映射 $\xi \mapsto z^*(t; (t,\ \xi))$ 是一致连续的。

注意，不动点 $z^*(t; (t,\ \xi))$ 可视为在 $\mathbb{R}^+$ 上一致收敛的序列 $z_j^*(t; (t, \xi))$ 的极限，该序列递归定义如下：

$$\begin{cases} z_{j+1}^*(t;(t,\xi)) &= \int_0^t X(t,s) f(s, x(s,t,\xi) + z_j^*(s;(t,\xi)))\, ds \quad \text{for any } j \geq 1, \\ \\ z_0^*(t;(t,\xi)) &= 0. \end{cases}$$

我们将沿着 [**75, 119**] 的思路，通过归纳法证明每个映射 $\xi \mapsto z_j^*(t; (t,\ \xi))$ 都是一致连续的。首先，显然$\xi \mapsto z_0^*(t; (t,\ \xi))$ 满足这一性质。其次，我们假设归纳假设

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_j(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } |\xi - \bar{\xi}| < \delta_j \Rightarrow |z_j^*(t;(t,\xi)) - z_j^*(t;(t,\bar{\xi}))| < \varepsilon \text{ for any } t \geq 0.$$

对于步骤 $j+1$，给定 $\varepsilon > 0$，我们只考虑 $\alpha < M$，因为 $\alpha = M$ 的情形可以很容易地处理。我们将使用在（3.6）中定义的常数L（ε）和 θ_0^*，并引入记号

$$\Delta_j(t,\xi,\bar{\xi}) = z_j^*(t;(t,\xi)) - z_j^*(t;(t,\bar{\xi})).$$

与之前一样，我们将区分 $t \in [0, L$（ε）$]$ 和 $t > L$（ε）这两种情形。首先，对于 $t \in [0, L$（ε）$]$，我们将 **(A1)** 与估计结合起来

$$|x(s,t,\xi) - x(s,t,\bar{\xi})| \leq |\xi - \bar{\xi}| e^{M|t-s|}, \tag{3.10}$$

并且我们可以验证

$$\begin{aligned} |\Delta_{j+1}(t,\xi,\bar{\xi})| &\leq K\gamma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \{|x(s,t,\xi) - x(s,t,\bar{\xi})| + |\Delta_j(s,\xi,\bar{\xi})|\}\, ds \\ &\leq K\gamma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \{|\xi - \bar{\xi}| e^{M(t-s)} + ||\Delta_j(\cdot,\xi,\bar{\xi})||_\infty\}\, ds \\ &\leq K\gamma \left\{ \frac{e^{(M-\alpha)t} - 1}{M - \alpha} \right\} |\xi - \bar{\xi}| + \frac{K\gamma}{\alpha} ||\Delta_j(\cdot,\xi,\bar{\xi})||_\infty \\ &\leq \theta_0^* |\xi - \bar{\xi}| + \frac{K\gamma}{\alpha} ||\Delta_j(\cdot,\xi,\bar{\xi})||_\infty, \end{aligned}$$

其中 $||\Delta_j(\cdot\ \xi, \xi)$

$||_\infty = \sup_{t \geq 0} |\Delta_j(t, \xi, \xi)|$.

另一方面，当 $t > L(\varepsilon)$ 时，我们结合 **(A2)**、**(A4)** 以及 f 在 $[0, t - L(\varepsilon)]$ 中的有界性和在 $[t - L(\varepsilon)\ t)$ 中的利普希茨连续性，推得

$$\begin{aligned}|\Delta_{j+1}(t,\xi,\bar{\xi})| &\leq K\mu\int_0^{t-L(\varepsilon)} e^{-\alpha(t-s)}\,ds \\ &\quad + K\gamma\int_{t-L(\varepsilon)}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\{|x(s,t,\xi)-x(s,t,\bar{\xi})|+|\Delta_j(s,\xi,\bar{\xi})|\}\,ds.\end{aligned}$$

结合 $u = t - s$、(3.6) 和 (3.10) 使用 **(A4)**，可得

$$\begin{aligned}|\Delta_{j+1}(t,\xi,\bar{\xi})| &\leq \frac{K\mu}{\alpha}e^{-\alpha L(\varepsilon)} + \frac{K\gamma}{\alpha}||\Delta_j(\cdot,\xi,\bar{\xi})||_\infty \\ &\quad + K\gamma\int_0^{L(\varepsilon)} e^{-\alpha u}|x(t-u,t,\xi)-x(t-u,t,\bar{\xi})|\,du \\ &\leq \frac{K\mu}{\alpha}e^{-\alpha L(\varepsilon)} + \frac{K\gamma}{\alpha}||\Delta_j(\cdot,\xi,\bar{\xi})||_\infty + K\gamma|\xi-\bar{\xi}|\int_0^{L(\varepsilon)} e^{(M-\alpha)u}\,du \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K\gamma}{\alpha}||\Delta_j(\cdot,\xi,\bar{\xi})||_\infty + K\gamma\left\{\frac{e^{(M-\alpha)L(\varepsilon)}-1}{M-\alpha}\right\}|\xi-\bar{\xi}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K\gamma}{\alpha}||\Delta_j(\cdot,\xi,\bar{\xi})||_\infty + \theta_0^*|\xi-\bar{\xi}|.\end{aligned}$$

综上，对任意 $t \geq 0$，有

$$|\Delta_{j+1}(t,\xi,\bar{\xi})| \leq \begin{cases} \theta_0^*|\xi-\bar{\xi}| + \dfrac{K\gamma}{\alpha}||\Delta_j(\cdot,\xi,\bar{\xi})||_\infty & \text{if} \quad t \in [0, L(\varepsilon)] \\ \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{K\gamma}{\alpha}||\Delta_j(\cdot,\xi,\bar{\xi})||_\infty + \theta_0^*|\xi-\bar{\xi}| & \text{if} \quad t > L(\varepsilon). \end{cases}$$

现在，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $L(\varepsilon) > 0$、$\theta_0^* > 0$，使得

$$\delta_{j+1}(\varepsilon) = \min\left\{\delta_j(\varepsilon/2), \frac{\varepsilon}{\theta_0^*}\left(1 - \frac{K\gamma}{\alpha}\right)\right\}$$

使得对任意 $t \geq 0$，有

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_{j+1}(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } |\xi-\bar{\xi}| < \delta_{j+1} \Rightarrow |z_{j+1}^*(t;(t,\xi)) - z_{j+1}^*(t;(t,\bar{\xi}))| < \varepsilon.$$

并且对任意 $j \in \mathbb{N}$，$\xi \mapsto z_j^*(t;(t,\xi))$ 的一致连续性成立。

为了完成我们的证明，我们选择 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意$j > N$，都有

$$||z^*(\cdot;(\cdot,\xi)) - z_j^*(\cdot;(\cdot,\xi))||_\infty < \varepsilon \quad \text{for any} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

¯因此，如果 $|\xi-\xi|<\delta_j$ 且满足 $j>N$，则有

$$\begin{aligned}|z^*(t;(t,\xi))-z^*(t;(t,\bar{\xi}))| &\leq |z^*(t;(t,\xi))-z_j^*(t;(t,\xi))|+\Delta_j(t,\xi,\bar{\xi})\\ &\quad +|z^*(t;(t,\bar{\xi}))-z_j^*(t;(t,\bar{\xi}))|<3\varepsilon,\end{aligned}$$

并且，对于任意固定的 $t\geq 0$，$\xi\mapsto z^*(t;(t,\xi))$ 和 $\xi\mapsto H(t,\xi)$ 的一致连续性成立。

步骤6： H 和 G 在 $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$. 上连续。利用解关于初始时间和初始条件的连续性[64, Ch.V]，，注意到对于任意 $\varepsilon_1>0$，存在 $\delta_1(t_0,\xi_0,\varepsilon_1)>0$，使得

$$|x(s,t,\xi)-x(s,t_0,\xi_0)|<\varepsilon_1 \quad \text{when} \quad |t-t_0|+|\xi-\xi_0|<\delta_1 \tag{3.11}$$

对于包含 t_0 的 $\mathbb{R}^+$ 的紧区间内任意的 t 和 s。

另一方面，利用解关于参数的连续性 [64, Ch.V]，结合Palmer结果[98, 引理 1]（限制在 $\mathbb{R}^+$ 上），我们知道，对于任意 $\varepsilon_2>0$，存在 $\delta_2(t_0,\xi_0,\varepsilon_2)>0$，使得

$$|z^*(s;(t,\xi))-z^*(s;(t_0,\xi_0))|<\varepsilon_2 \quad \text{when} \quad |t-t_0|+|\xi-\xi_0|<\delta_2, \tag{3.12}$$

对于包含 t_0 的 $\mathbb{R}^+$ 的紧区间内任意的 t 和 s。

此外，我们知道，对于任意 $\varepsilon_3>0$，都存在 δ_3（ε_3，t_0），使得

$$||X(t,s)-X(t_0,s)||<\varepsilon_3 \quad \text{when} \quad |t-t_0|<\delta_3 \tag{3.13}$$

对于包含 t_0 的实数集紧区间中的任意 t 和 s。

从现在起，我们假设 t、s 和 t_0 都属于紧区间 $I\subset\mathbb{R}^+$，并记

$$\omega_1(s,t,t_0,\xi,\xi_0)=f(s,x(s,t,\xi)+z^*(s;(t,\xi)))-f(s,x(s,t_0,\xi_0)+z^*(s;(t_0,\xi_0))).$$

不失一般性，我们假设 $t > t_0$。现在注意到

$$\begin{aligned} H(t,\xi) - H(t_0,\xi_0) &= \xi - \xi_0 + \int_0^t X(t,s) f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))\, ds \\ &\quad - \int_0^{t_0} X(t_0,s) f(s, x(s,t_0,\xi_0) + z^*(s;(t_0,\xi_0)))\, ds \\ &= \xi - \xi_0 \\ &\quad + \int_0^{t_0} \{X(t,s) - X(t_0,s)\} f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))\, ds \\ &\quad + \int_0^{t_0} X(t_0,s)\omega_1(s,t,t_0,\xi,\xi_0)\, ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t X(t,s) f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))\, ds. \end{aligned}$$

令 $C = \max\{||X(u,s)||:\ u,s \in I\}$. 利用 **(A3)** 结合 (3.11)、(3.12) 和 (3.13)，我们推得

$$\begin{aligned} |H(t,\xi) - H(t_0,\xi_0)| &\le |\xi - \xi_0| + \mu \int_0^{t_0} ||X(t,s) - X(t_0,s)||\, ds \\ &\quad + \mu \int_{t_0}^t ||X(t,s)||\, ds \\ &\quad + \int_0^{t_0} ||X(t_0,s)||\, |\omega_1(s,t,t_0,\xi,\xi_0)|\, ds \\ &\le |\xi - \xi_0| + \mu t_0 \varepsilon_3 + C|t - t_0|\mu + C\gamma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) t_0, \end{aligned}$$

并得出结论： H 在任意 $(t_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 上连续。

最后，通过验证 G 在任意 $(t_0,\eta_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 上连续即可得到该结果，这可用类似的方法证明。□

为了确立本小节的主要结果，我们引入以下附加条件：

(D4) 函数 $f(t,x)$ 及其关于 x 的直至 r 阶的导数，都是 (t,x) 的连续函数。

上述性质的一个直接推论（参见例如 [**36**, 第2]章）是， $\partial y(t,\tau,\eta)/\partial\eta$ 满足矩阵微分方程 (2.1)。

下述结果给出了充分条件，确保映射 $\xi \mapsto H(t,\xi)$ 和 $\eta \mapsto G(t,\eta)$ 满足定义 3.2 中所述的性质。

定理 3.2. 若**(A1)**–**(A4)** 和 **(D4)**成立，则 和(1.2) 在 $\mathbb{R}^+$ 上 (1.1) C^r 连续拓扑等价。

证明。定理 3.1 保证定义 3.2 的性质 (i) 成立，而性质 (ii) 将通过分情况讨论来证明。

情形 $r = 1$. 由于对于任意 $t \geq 0$, $y \mapsto f(t,y)$ 是 C^1，因此$y \mapsto Df(t,y)$ 和 $\eta \mapsto \partial y/\partial \eta$ 是连续的。这使得可以计算映射 $\eta \mapsto G(t,\eta)$ 的一阶偏导数，其中 $t \geq 0$ 任意且 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 任意，计算如下

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_i}(t,\eta) = e_i - \int_0^t X(t,s)Df(s,y(s,t,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta_i}(s,t,\eta)\,ds, \tag{3.14}$$

这意味着对于任意固定的 $t \geq 0$，偏导数存在且连续，因此 $\eta \mapsto G(t,\eta)$ 是 C^1。

利用恒等式 $X(t,s)A(s) = -\frac{\partial}{\partial s}X(t,s)$，结合 (2.1)，可推知对于任意 $t \geq 0$，雅可比矩阵为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \eta}(t,\eta) &= I - \int_0^t X(t,s)Df(s,y(s,t,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta)\,ds \\
&= I - \int_0^t \frac{d}{ds}\left\{X(t,s)\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta)\right\} ds \qquad (3.15) \\
&= X(t,0)\frac{\partial y(0,t,\eta)}{\partial \eta},
\end{aligned}$$

或者，更简洁地说

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(t,\eta) = X(t,0)\frac{\partial y(0,t,\eta)}{\partial \eta}. \tag{3.16}$$

为完成证明，我们将使用 Hadamard 定理的一个变体 [**109**, 推论 2.1]，其内容是：$\eta \mapsto G(t,\eta) \in C^1$ 是微分同胚，当且仅当对于任意 $\eta \in \mathbb{R}^n$，$\mathrm{Det}\frac{\partial G(t,\eta)}{\partial \eta} \neq 0$，并且当$|\eta| \to +\infty$时，$|G(t,\eta)| \to +\infty$。

注意，(3.16) 右端由分别对应于线性系统 (1.1) 和 (2.1) 的两个基矩阵构成。

应用刘维尔公式（参见第1章中的定理 1.2，或 [36,Ch.1] 中的定理 7.2 和定理 7.3），我们可以看到

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\frac{\partial G}{\partial \eta}(t,\eta) &= \mathrm{Det}X(t,0)\,\mathrm{Det}\frac{\partial y(0,t,\eta)}{\partial \eta}\\ &= \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}A(s)\,ds\right)\exp\left(\int_t^0 \mathrm{Tr}\{A(s)+Df(s,t,\eta)\}\,ds\right),\end{aligned}$$

因此，对于任意 $t \geq 0$，$\mathrm{Det}\frac{\partial G(t,\eta)}{\partial \eta} > 0$。

此外，我们回顾一下：

$$G(t,\eta) = \eta + w^*(t;(t,\eta)),$$

其中，$w^*(t;(t,\eta))$ 由 (3.3) 给出，我们可以推出，由于对于任意 (t,η)，$|w^*(t;(t,\eta))| \leq K\mu/\alpha$，当 $|\eta| \to +\infty$ 时，$|G(t,\eta)| \to +\infty$。因此，我们得出，对于任意固定的 $t \geq 0$，$\eta \mapsto G(t,\eta)$ 是一个全局微分同胚。

最后，再次利用性质 (D4) 并结合 [64, Ch.V] 中的定理 4.1，我们还可以得出，$(t,\eta) \mapsto \frac{\partial y}{\partial \eta}(0,t,\eta)$ 在 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 上，并且由恒等式 (3.16) 可知，$(t,\eta) \mapsto \frac{\partial G}{\partial \eta}(t,\eta)$ 在 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 上连续，该情形遂得证。

情形 $r = 2$。由(D4)可知，我们可以验证二阶偏导数 $\partial^2 y(s,\tau,\eta)/\partial\eta_j\partial\eta_i$ 满足以下微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta_j\partial\eta_i} = \{A(t)+Df(t,y)\}\dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta_j\partial\eta_i} + D^2 f(t,y)\dfrac{\partial y}{\partial\eta_j}\dfrac{\partial y}{\partial\eta_i}\\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta_j\partial\eta_i} = 0,\end{cases}$$

对任意 $i, j = 1, \ldots\ldots, n$，其中 $D^2 f$ 是 f 的形式二阶导数，而 $y = y(t,\tau,\eta)$。利用 (3.14)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial\eta_j\partial\eta_i}(t,\eta) &= -\int_0^t X(t,s)D^2 f(s,y(s,t,\eta))\frac{\partial y}{\partial\eta_j}(s,t,\eta)\frac{\partial y}{\partial\eta_i}(s,t,\eta)\,ds\\ &\quad -\int_0^t X(t,s)Df(s,y(s,t,\eta))\frac{\partial^2 y(s,t,\eta)}{\partial\eta_j\partial\eta_i}\,ds\\ &= -\int_0^t \frac{d}{ds}\left\{X(t,s)\frac{\partial^2 y(s,t,\eta)}{\partial\eta_j\partial\eta_i}\right\}ds\\ &= X(t,0)\frac{\partial^2 y(0,t,\eta)}{\partial\eta_j\partial\eta_i}.\end{aligned}$$

因此，对于任意固定的 $t \geq 0$，映射 $\eta \mapsto G(t, \eta)$ 是 C^2 。对于任意固定的 $t \in \mathbb{R}^+$，恒等式 $\xi = G(t, H(t, \xi))$，恒等映射在 $\mathbb{R}^n$ 上的雅可比矩阵可表示为

$$DG(t, H(t,\xi))DH(t,\xi) = I \quad \text{for any fixed } t \in \mathbb{R}^+.$$

根据情形 $r = 1$，我们有，对于任意固定的 $t \in \mathbb{R}^+$， $\eta \mapsto G(t, \eta)$ 是一个 C^1 类微分同胚，这意味着

$$DH(t,\xi) = [DG(t, H(t,\xi))]^{-1} \quad \text{for any } t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.17}$$

定义良好。此外，注意到 $(t, \xi) \mapsto DH(t, \xi)$ 是连续的，因为映射 $U \mapsto U^{-1}$ 和 $(t, \xi) \mapsto DG(t, H(t, \xi))$ 对任意 $U \in Gl_n(\mathbb{R})$ 和 $(t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 都是连续的。

现在，再次对第二个变量求导，我们得到形式计算

$$D^2G(t, H(t,\xi))DH(t,\xi)DH(t,\xi) + DG(t, H(t,\xi))D^2H(t,\xi) = 0$$

而恒等式 (3.17) 意味着

$$D^2H(t,\xi) = -DH(t,\xi)D^2G(t, H(t,\xi))DH(t,\xi)DH(t,\xi). \tag{3.18}$$

容易看出，由于 $D^2H(t, \xi)$ 是若干关于 (t, ξ) 连续的映射的复合，因此它关于 (t, ξ) 连续。因此，对于任意固定的 $t \geq 0.$， $\eta \mapsto G(t, \eta)$ 是一个 C^2 类全局微分同胚

情形 $r \geq 3$。利用**(D4)**，我们可以得出 $\eta \mapsto y(0, t, \eta)$ 是C^r，且偏导数

$$(t,\eta) \mapsto \frac{\partial^{|m|} y(0,t,\eta)}{\partial \eta_1^{m_1} \cdots \partial \eta_n^{m_n}}, \quad \text{where } |m| = m_1 + \ldots + m_n \leq r,$$

对任意 $(t, \eta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 都是连续的。此外，将这一事实与 (3.15) 结合可知， G 关于 η 的直至 r 阶偏导数

$$(t,\eta) \mapsto \frac{\partial^{|m|} G(t,\eta)}{\partial \eta_1^{m_1} \cdots \partial \eta_n^{m_n}} = X(t,0)\frac{\partial^{|m|} y(0,t,\eta)}{\partial \eta_1^{m_1} \cdots \partial \eta_n^{m_n}},$$

其中 $|m| = m_1 + \ldots + m_n \leq r$， 在 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ 中连续。此外，根据 (3.17) 和 (3.18)，可以递归地推出 H 直至 $r-$ 阶的高阶形式导数及其在 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 上的连续性。

定义 3.2 的性质 (iii) 已融入前面的 Analysis 中。因此，结论成立。□

4. 注释与参考文献

1) 第1节的可微性结果受文献[29]的启发。一般而言，第1节提高了论述的清晰度，并在若干中间步骤中提供了更清楚、更简单的解释。我们还要指出，据我们所知，尚无此前的工作专门研究 Palmer同胚的光滑性。

2) 研究 Palmer同胚光滑性的最初动机源于关于渐近稳定性的逆定理框架：注意，**(A1)–(A4)** 意味着 (1.1) 和 (1.2) 一致渐近稳定。另一方面，P. Monzón 的一个逆定理意味着存在一个与 (1.1) 相关的 *Rantzer*密度函数$r(t,\ x)$，而本文的一项重要成果[29] 是根据 $r(t,\ x)$ 和 Palmer 同胚为 (1.2) 构造了一个 Rantzer 密度函数。关于详情，请参阅 [29]中的定理 3。

3) 假设**(D1)** 和**(D3)** 的限制性促使人们将 Palmer同胚的时间域从 $\mathbb{R}$ 限制到$[0,+\infty)$，相关工作见 [30] 和 [31] ，并已在第2节中作了总结。这样一来，同胚的构造变得容易得多，而要得到它们的可微性，只需采用限制较少的假设。

4) 在第2节的背景下，并在额外假设平衡点 $\bar{y}$ 存在的条件下，即

$$A(t)\bar{y} = f(t,\bar{y}) = 0 \quad \text{for any } t \geq 0,$$

全局线性化结果的一个附带结论是 [30,定理3.1]:

定理 4.1. 假设满足 **(A1)**–**(A4)** ，则

i) 如果系统存在平衡点 $\bar{y}$，则该平衡点唯一。

ii) 如果 $\bar{y} = 0$，即 $f(t,\ 0) = 0$ 对任意 $t \geq 0$，则：

$$H(t,0) = G(t,0) = 0 \quad \text{for any } t \geq 0.$$

iii) 如果 $\bar{y} \neq 0$，则

$$\lim_{t\to+\infty} H(t,0) = \bar{y} \quad \text{and} \quad \lim_{t\to+\infty} G(t,0) = 0.$$

iv)平衡点 $\bar{y}$ 对系统 (1.2) 全局一致渐近稳定。

5) 在 [**32**] 中，作者通过允许一族无界扰动 f，去掉假设 (**A2**)，从而推广了 [**30**] 中的光滑线性化结果。

6) 在考虑非平凡投影时，关于线性化可微性的首个结果由 D. Dragičević等人在 [**51**], 中得到；他们的方法考虑了非一致指数二分性及与该二分性相关的谱。其次， [**74**], 中的 N. Jara 证明了：若线性系统具有一般的非一致二分性，且非线性部分满足严格的渐近条件，那么无需使用二分谱，线性化便属于 C^2 类，定义在 $\mathbb{R}^+$上。

5. 习题

1.- 利用定理 2.1 和 2.2 的方法，证明$y(t) \mapsto G[t, y(t)]$ 是保定向的微分同胚。2.- 验证 $\eta \mapsto G(t, \eta)$ 满足 (2.9)。4.- 证明同胚 $\eta \mapsto G(t, \eta)$ 满足定义 3.1 的性质 (ii)。5.- 证明定义 3.1 中的 $(t, \eta) \mapsto G(t, \eta)$ 在任意 $(t_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 上连续。6.- 利用 (3.17) 和 (3.18)，求出 H 直到 r–阶的高阶形式导数公式，并证明其在 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. 上的连续性。7.- 在定理 3.1 中，考虑 $J = \mathbb{R}^-$.并完成证明的各个步骤。8.- 在条件 (**A4**) 中，将投影 $P = I$ 换为 $P = 0$。你对本章的所有定理有何看法? 9.- 给出验证本章所有定理假设的显式例子。

附录 A

标量情形下的指数二分性（Pablo Amster）

标量情形的一个特点是，唯一可能的投影算子是平凡投影。极限情形总是特殊的，并为已经研究过的结果提供了新的视角。在此背景下，我们将重点研究标量方程:

$$\dot{x} = a(t)x \quad \text{where } t \in J \tag{0.1}$$

并且，如同本书一贯的做法，J 可以是区间 $J = (-\infty,\ 0]$, $J = [0, +\infty)$ 和 $J = (-\infty,\ +\infty)$。

定义0.1。 方程(0.1) 在无界区间 J 上具有指数二分性，当且仅当存在常数 $C \geq 0$和 $\alpha > 0$ 使得

$$\left| \int_s^t a(r)\, dr \right| \geq \alpha(t-s) - C \qquad \text{for any } t \geq s \text{ with } t, s \in J.$$

如有必要，重新定义常数 C 后，显然，定义0.1总对应于以下情形之一

a) 存在常数 $C \geq 0$ 和 $\alpha > 0$，使得:

$$\int_s^t a(r)\, dr \leq C - \alpha(t-s) \qquad \text{for any } t \geq s \text{ with } t, s \in J. \tag{0.2}$$

b) 存在常数 $C \geq 0$ 和 $\alpha > 0$，使得:

$$\int_t^s a(r)\, dr \geq \alpha(s-t) - C \qquad \text{for any } s \geq t \text{ with } t, s \in J. \tag{0.3}$$

上述性质等价于指数二分性的标准定义:

a') 存在常数 $K \geq 1$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$e^{\int_s^t a(r)\, dr} \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{for any } t \geq s \text{ with } t, s \in J. \tag{0.4}$$

b') 存在常数 $K \geq 1$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$e^{-\int_t^s a(r)\, dr} \leq K e^{-\alpha(s-t)} \quad \text{for any } s \geq t \text{ with } t, s \in J. \tag{0.5}$$

事实上，受标准定义的启发，情形 a) 对应于具有恒等投影算子的指数二分性，而情形 b) 对应于具有零投影算子的指数二分性。

- 如果 (0.1) 在 $J = [0, +\infty)$ 上具有指数二分性，那么性质 (0.4)–(0.5) 表明，随着 $t \to +\infty$，任意解要么指数收敛到零（恒等投影算子），要么指数发散（零投影算子），因为 (0.5) 等价于$_{K^{-1}e^{\alpha(t-t_0)}} \leq e^{\int_{t_0}^{t} \mathfrak{a}(r)\, dr}$，其中 $t \geq t_0 \geq 0$。
- 同样，如果 (0.1) 在 $J = (-\infty, 0]$ 上具有指数二分性，那么性质 (0.4)–(0.5) 表明，随着 $t \to -\infty$，任意解要么指数收敛到零（零投影算子），要么指数发散（恒等投影算子），因为 (0.4) 等价于 $K^{-1}e^{\alpha_{(t_0-t)}} \leq e^{\int_{t_0}^{t} \mathfrak{a}(r)dr}$，其中 $t \leq t_0 \leq 0$。
- 如果方程 (0.1) 在 $J = (-\infty, +\infty)$ 上具有指数二分性，那么它在 $(-\infty, 0]$ 和 $[0, +\infty)$ 上也具有指数二分性，并且在 $\pm\infty$ 处继承上述渐近行为。

正如我们所看到的，如果方程 (0.1) 在 J 上具有指数二分性，则其解在 $t \to +\infty$ 或 $t \to -\infty$ 处具有二分性 渐近行为：它们要么收敛，要么以指数速率发散。正如我们所知，这种定性的渐近行为正是指数二分性这一名称的由来。

注 0.1. 上述讨论的一个结论是，如果方程 (0.1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有指数二分性，那么在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界的唯一解是平凡解。事实上，任何其他解都会在 $+\infty$ 或 $-\infty$处发散。

一个值得注意的事实是，线性方程 (0.1) 可以同时在 $(-\infty, 0]$ 和 $[0, +\infty)$ 上具有指数二分性，但不一定在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有指数二分性；关于一个说明性例子，请参阅第 3 章中的节。

0.1. 粗糙性、容许性与谱。 下一个结果称为粗糙性，它表明存在指数二分性的有界连续函数集合是开集。更确切地说，

命题 0.1. 假设(0.1)在 $[0, +\infty)$ 上具有指数二分性，其常数为 C，α，并且设 $b\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，使得

$$\delta_0 := \limsup_{t \to +\infty} |b(t)| < \alpha.$$

那么扰动方程

$$\dot{x} = [a(t) + b(t)]x$$

~在 $[0, +\infty)$ 上也具有指数二分性，其常数为 C、$\tilde{\alpha_0}$，其中 $C > C$，且 α_0 是满足限制条件$\alpha_0 + \delta_0 < \alpha$的任意正常数。

证明。固定满足 $\alpha_0 < \alpha - \delta_0$ 的 $\alpha_0 > 0$，并取满足$|\mathfrak{e}(t)| < \alpha - \alpha_0$的 $T \geq 0$，对任意 $t \geq T$均成立。证明将考虑三种可能的情况：$t \geq s \geq T$、$T \geq t \geq s$ 和 $t \geq T \geq s$。

首先，当 $t \geq s \geq T$时，可验证：

$$\left| \int_s^t [a(r) + b(r)]\, dr \right| \geq \alpha(t - s) - C - \int_s^t |b(r)|\, dr \geq \alpha_0(t - s) - C.$$

其次，当 $s \leq t \leq T$时，定义 $C_0 := \int_0^T |\mathfrak{a}(r) + \mathfrak{e}(r)|\, dr$。显然，

$$\left| \int_s^t [a(r) + b(r)]\, dr \right| \geq -C_0 \geq \alpha_0(t - s) - C_0 - \alpha_0 T.$$

最后，对于 $t > T \geq s$，有

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t [a(r) + b(r)]\, dr \right| &\geq \left| \int_T^t [a(r) + b(r)]\, dr \right| - \int_s^T |a(r) + b(r)|\, dr \\ &\geq \alpha_0(t - T) - C - C_0 \\ &\geq \alpha_0(t - s) - \alpha_0 T - C - C_0, \end{aligned}$$

于是，该方程具有指数二分性，其常数为~ α_0 和 $C := C + C_0 + \alpha_0 T$。□

我们强调，与一般的 n 维情形相比，上述引理的证明既优美又简洁；后者已在若干专著中讨论，如 [**12**],[**41**, 第4] 章，以及研究论文中，如 [**76, 95**]。

现在，设 $(\mathcal{B},\ \mathcal{D})$ 是一对函数空间。正如我们在第2章中所见，若对于任意 $v \in \mathcal{D}$，方程

$$\dot{y} = a(t)y + v(t), \tag{0.6}$$

在空间 $\mathcal{B}$ 中至少有一个解。下一个结果说明，当 $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ 是 $[0, +\infty)$ 上取上确界范数的有界连续函数所构成的巴拿赫空间时，$[0, +\infty)$ 上的指数二分性与容许性之间的等价关系：

命题0.2。设 $t \mapsto a(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数。以下性质等价：

a) 方程 (0.1) 在 $[0, +\infty)$上具有指数二分性。

b) 对于任意有界连续函数 v: $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$，问题

$$\dot{x} = a(t)x + v(t) \tag{0.7}$$

在 $[0,+\infty)$ 上至少有一个有界连续解。更确切地说，(0.2)成立，当且仅当对于每个有界的 $v(\cdot)$，所有解都是有界的；而 (0.3) 成立，当且仅当对于每个有界的 $v(\cdot)$，恰好存在一个有界解。

c) 非齐次方程

$$\dot{z} = a(t)z + 1$$

在 $[0,+\infty)$ 上至少有一个有界解。

d) 存在一个有界连续函数 v: $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$，使得

$$\liminf_{t\to+\infty} |v(t)| > 0$$

问题 (0.7) 至少有一个有界解。

证明。a) $\Rightarrow$ b) 的证明：如果 (0.2) 成立，那么 (0.6) 的任意解都具有如下形式:

右端的第一项是有界的，因为当 $t \to +\infty$ 时它收敛于 0，而第二项满足，对于 $t \geq t_0$:

$$\left| \int_{t_0}^{t} v(s) e^{\int_s^t a(r)\,dr}\,ds \right| \leq \|v\|_\infty \int_{t_0}^{t} K e^{-\alpha(t-s)}\,ds = \frac{K}{\alpha}\|v\|_\infty \left(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}\right),$$

并且验证了任意方程 (0.6) 的解在 $[0,+\infty$ 上的有界性。现在，若改为满足 (0.3)，则容易验证表达式

$$x(t) = -\int_t^{+\infty} v(s) e^{-\int_t^s a(r)\,dr}\,ds$$

是良定义的，并且给出了方程 (0.6) 的唯一解的显式描述，该解在 $[0,+\infty$ 上有界。

另一方面，注意到陈述 c) 和 d) 是 b) 的特殊情形，这意味着 a) $\Rightarrow$ c) 和 a) $\Rightarrow$ d) 可以直接验证。

d) $\Rightarrow$c) 的证明：设 $t \mapsto x(t)$ 是方程 (0.7) 的一个有界解，使得

$$m \leq x(t) \leq M \quad \text{for any } t \in [0,+\infty),$$

根据假设，存在 $v_0 > 0$，使得对于任意满足 $t_0 \geq 0$的 $t \geq t_0$，都有 $|v(t)| > v_0$。不失一般性，我们可以假设$t_0 = 0$。

首先，我们假设对于任意 $t \geq 0$，都有 $v(t) \geq v_0 > 0$，那么上述解 $t \mapsto x(t)$也满足：

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t a(r)\,dr} + \int_0^t e^{\int_s^t a(r)\,dr} v(s)ds \geq x_0 e^{\int_0^t a(r)\,dr} + v_0 \int_0^t e^{\int_s^t a(r)\,dr}\,ds,$$

由此我们可以推出：

$$\frac{x(t)}{v_0} \geq \frac{x_0}{v_0} e^{\int_0^t a(r)\,dr} + \int_0^t e^{\int_s^t a(r)\,dr}\,ds := z(t).$$

我们可以看到，$t \mapsto z(t)$ 是 $\dot{z} = a(t)z+1$ 在 $t = 0$ 时经过 x_0/v_0 的一个解，这也验证了对于任意 $t \geq 0$，$z(t) \leq M/v_0$。

现在，我们来观察

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{x_0}{v_0} e^{\int_0^t a(r)\,dr} + \int_0^t e^{\int_s^t a(r)\,dr}\,ds \\ &= ||v||_\infty^{-1} \left(x_0 \frac{||v||_\infty}{v_0} e^{\int_0^t a(r)\,dr} + \int_0^t e^{\int_s^t a(r)\,dr} ||v||_\infty\,ds \right) \\ &\geq ||v||_\infty^{-1} \left(x_0\, e^{\int_0^t a(r)\,dr} + \int_0^t e^{\int_s^t a(r)\,dr} v(s)\,ds \right) \\ &\geq ||v||_\infty^{-1} x(t), \end{aligned}$$

并且我们证明了

$$m||v||_\infty^{-1} \leq z(t) \leq v_0^{-1} M \quad \text{for any } t \in [0, +\infty).$$

其次，若假设对于任意 $t \geq 0$，$-v(t) \geq v_0 > 0$，我们将 (0.7) 乘以 -1，并进行变换 $u = -x$ 和 $w(t) = -v(t)$，得到 $\dot{u} = a(t)u + w(t)$。该方程也有一个有界解，因此可以进行上述证明。

c) $\Rightarrow$ a) 的证明：设 $t \mapsto z(t)$ 是 $\dot{z} = a(t)z + 1$ 的一个解，且在 $[0, +\infty)$ 上有界。首先，上述方程有一个值得注意的性质：若 $z(0) \geq 0$，则该解在任意 $t > 0$ 时始终为正；而若 $z(0) < 0$，则该解要么始终为负，要么只有一次变号。

其次，我们来验证

$$\liminf_{t \to +\infty} |z(t)| > 0. \tag{0.8}$$

事实上，当 $z(\cdot)$ 在某个值之后为正定时，这一性质显然成立，因为 $t \mapsto z(t)$ 在满足 $|z(t)|\|a\|_\infty < 1$ 的任意 t 处都递增。现在，若对任意 $t \geq 0$ 都有 $z(t) < 0$，则需要考虑两种情况：

情形 *i)* 上极限 $z(t) < 0$，这等价于 (0.8)。$t \to +\infty$

情形 *ii)* 上极限 $z(t) = 0$，这是不可能的，因为 $z(\cdot)$ 在某个有限时间之后单调递减，因此 $z(t) = o(1)$，从而得到下极限 $\lim_{t\to+\infty} z'(t) > 0$，这与 $t \mapsto z(t)$ 的有界性矛盾，故 (0.8) 成立。

因此，我们可以假设对任意 $t \geq T$，$0 < c \leq |z(t)| \leq M$。若 $z(\cdot)$ 对 $t > s \geq T$ 为正定，则可得:

$$C \geq \ln\left(\frac{z(t)}{z(s)}\right) = \int_s^t a(r)\,dr + \int_s^t \frac{1}{z(r)}\,dr,$$

由此得到:

$$\int_s^t a(r)\,dr \leq C - \frac{1}{M}(t-s).$$

类似地，若 $z(\cdot)$ 对任意 $t \leq s$ 为负，则有

$$\int_t^s a(r)\,dr \geq -C + \frac{1}{M}(s-t),$$

于是，方程 (0.1) 在 $[T, +\infty)$ 上具有指数二分性；根据第 3 章的引理 2.1，可知该指数二分性在 $[0, +\infty)$ 上成立。

□

我们要强调，与一般的 n 维情形相比，上述引理的证明极为简洁；一般情形已分别通过泛函分析方法和变分方法在 [**41**] 和 [**27**] 中加以处理。

当 $J = [0, +\infty)$ 时，标量情形下的指数二分谱有一个更简单的刻画。

命题 0.3. 若 $t \mapsto a(t)$ 在 $[0, +\infty)$上有界且连续，则(0.1)的指数二分谱可表述如下:

$$\Sigma^+(a) = [\beta^-(a), \beta^+(a)]$$

其中 $\beta^-(a)$ 和 $\beta^+(a)$ 分别是下、上 *Bohlexponents*，其定义如下:

$$\beta^-(a) := \liminf_{L,s\to+\infty} \frac{1}{L}\int_s^{s+L} a(r)\,dr \quad \text{and} \quad \beta^+(a) := \limsup_{L,s\to+\infty} \frac{1}{L}\int_s^{s+L} a(r)\,dr.$$

更准确地说,

- *The case* (0.2) *holds for* $a(\cdot) - \lambda$ *if and only if* $\lambda < \beta^-(a)$.
- *The case* (0.3) *holds for* $a(\cdot) - \lambda$ *if and only if* $\lambda > \beta^+(a)$.

证明。我们将证明一个等价的结果，即:

$$\mathbb{R} \setminus \Sigma^+(a) = (-\infty, \beta^-(a)) \cup (\beta^+(a), +\infty).$$

如果 $\lambda \notin \Sigma^+(a)$，则由第5章中的定义 2.2 可知，$\dot{x} = [a(t) - \lambda]x$ 在 $[0, +\infty)$ 上具有指数二分性，即对于 $a(\cdot) - \lambda$，(0.2) 或 (0.3) 成立。

证明将由以下陈述推出:

i) 对于 $a(\cdot)-\lambda$，性质 (0.3) 成立，当且仅当 $\lambda \in (-\infty, \beta^-(a))$；ii) 对于 $a(\cdot)-\lambda$，性质 (0.2) 成立，当且仅当 $\lambda \in (\beta^+(a) + \infty)$。

例如，假设 (0.3) 对 $a(\cdot) - \lambda$成立，则对于任意的 $s > t$，我们有

$$\frac{1}{s-t}\int_t^s a(r)\,dr \geq \lambda + \alpha - \frac{C}{s-t}$$

对于某个 $\alpha > 0$。对 $t \to +\infty$ 和 $L := s - t \to +\infty$ 取下极限，我们得到 $\beta^-(a) \geq \lambda + \alpha > \lambda$。反之，对于 $\beta^-(a) > \lambda$，我们可以固定 $\alpha \in (0, \beta^-(a) - \lambda)$ 和 t_0, $L_0 > 0$，使得

$$\frac{1}{s-t}\int_t^s a(r)\,dr > \lambda + \alpha \quad \text{with} \quad t > t_0 \quad \text{and} \quad s - t > L_0,$$

也就是说

$$\int_t^s [a(r) - \lambda]\,dr > \alpha(s-t) \quad \text{with} \quad s - t > L_0 \quad \text{and} \quad t > t_0 \tag{0.9}$$

我们需要研究条件 $s - t > L_0$ 和$t > t_0$ 不成立的情形，即:

a) $0 \leq s - t \leq L_0$,
b) $t_0 \geq s - L_0 > t$,
c) $s - L_0 > t_0 \geq t$.

首先，情形 a) 和 b) 意味着 $0 \leq s - t \leq L_0$ 和 $t \leq s \leq L_0 + t_0$。因此，如果 a) 或 b) 成立，则有:

$$\int_t^s [a(r)-\lambda]\,dr \geq -\|a-\lambda\|_\infty(L_0+t_0) \geq \alpha(s-t)-(\|a-\lambda\|_\infty+\alpha)(L_0+t_0).$$

最后，如果 $t \leq t_0 < s - L_0$，则利用 (0.9) 可得

$$\begin{aligned}\int_t^s [a(r) - \lambda]\,dr &= \int_{t_0}^s [a(r) - \lambda]\,dr + \int_t^{t_0} [a(r) - \lambda]\,dr \\ &> \alpha(s - t_0) - \|a - \lambda\|_\infty t_0 \\ &\geq \alpha(s-t) - (\|a - \lambda\|_\infty + \alpha)t_0.\end{aligned}$$

综合上述情形可知，(0.3) 在$\alpha > 0$和 $C = (\|a - \lambda\|_\infty + \alpha)t_0$的条件下得到验证，因此命题 i) 得证。命题 ii) 可以用类似的方法证明。

□

文献中通常不加证明地陈述上述结果[**4**, 第 30]页和 [**50**]。最后，我们请读者参阅 [**9, 10**]和 [**43**] ，以了解有关博尔指数的更多细节。

附录 B

矩阵范数

B.1 基本事实

给定矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$，由欧几里得向量范数 $|\cdot|_2$ 诱导的矩阵范数定义如下：

$$||A||_2 := \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|_2}{|x|_2} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)},$$

其中，$\lambda_{\max}(A^*A)$ 是 A^*A 的最大特征值。

B.2 正定矩阵

定义 0.1。方形厄米矩阵 $A = A^* \in M_n(\mathbb{C})$ 若对于任意$(n \times 1)$向量 $x \neq 0$，都有 $x^*Ax > 0$ $(x^*Ax \geq 0)$，则称其为正定（半正定）矩阵。

定义 0.2。方形对称矩阵 $A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$若对于任意$(n \times 1)$ 实向量 $x \neq 0$，都有 $x^TAx > 0$ $(x^TAx \geq 0)$，则称其为正定（半正定）矩阵。

记号 $A > 0$ $(A \geq 0)$ 专用于表示正定（半正定）矩阵。

正定（半正定）矩阵具有一些有趣的性质：

1) A 是正定（半正定）矩阵，当且仅当 A 的所有特征值均为正（非负）。2) A 是正定（半正定）矩阵，当且仅当存在一个正定（半正定）矩阵 $B \in M_n(\mathbb{C})$，使得 $A = BB$；也就是说，B 是 A 的平方根矩阵。3) A 是实正定（半正定）矩阵，当且仅当存在一个实正定（半正定）矩阵 $B \in M_n(\mathbb{R})$，使得 $A = BB$；也就是说，B 是 A 的平方根矩阵。

关于性质2）和3），详细内容请参阅[**69**, 第9],[**86**, 章第155] 页以及[**133**, 第37]页的定理13。

附录 C

这一结果由瑞典数学家 Thomas Hakon Grönwall 于 1919 年提出，见 [60]，用作证明微分方程的解关于初始条件的连续性。

C.1 格朗沃尔引理

引理 0.1. 设 $J \subset \mathbb{R}$ 为一个区间，$t_0 \in J$ 且 $c > 0$。设 u、$v \in C(J,(0,+\infty))$，使得对任意满足 $t \in J$ 的 $t \geq t_0$，都有：

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds, \tag{0.1}$$

那么对任意 $t \geq t_0$，都有

$$u(t) \leq c\,e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}. \tag{0.2}$$

证明。注意，函数和参数的正定性意味着不等式 (0.1) 等价于

$$\frac{u(t)v(t)}{c + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds} \leq v(t).$$

由于上述不等式的左边是 $t \mapsto c + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds$ 的对数导数。现在，在 t_0 与 t 之间积分，并再次利用 (0.1)，可得

$$\ln(u(t)) \leq \ln\left(c + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds\right) = \ln(c) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds$$

并且可以很容易地推出 (0.2)。 □

格朗沃尔引理的一个重要变体见以下结果，该结果摘自 [19,第 19] 页：

引理 0.2. 设 $J \subset \mathbb{R}$ 为一个区间，$t_0 \in J$ 且 $c > 0$。设u，$v \in C$（J，（0，$+\infty$），使得对于任意 $t \in J$均有；

$$u(t) \leq c + \left|\int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds\right|, \tag{0.3}$$

则对于任意 $t \in J$，有

$$u(t) \le ce^{\left|\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right|}$$

证明。如果 $t \ge t_0$，假设 (0.3) 等价于 (0.1)，根据格朗沃尔引理，我们可以推得

$$u(t) \le c\,e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds} = c\,e^{\left|\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right|}.$$

现在，假设 $t \in J$ 且 $t < t_0$，由 (0.3) 可知

$$0 < u(t) \le w(t) := c + \left|\int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds\right| = c - \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds$$

我们对 $w(t)$ 求导，得到

$$w'(t) = -v(t)u(t) \ge -v(t)w(t),$$

这等价于

$$w'(t) + v(t)w(t) \ge 0$$

也等价于

$$w'(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds} + v(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}w(t) \ge 0,$$

这可以写成

$$\frac{d}{dt}\left[w(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}\right] \ge 0.$$

于是，对于任意满足 $t \le t_0$的$t \in J$，函数 $t \mapsto \phi(t) = w(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}$都是递增的。因此，由于 $t \le t_0$，我们有 $\phi(t) \le \phi(t_0) = w(t_0) = c$，或者

$$w(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds} \le w(t_0) = c,$$

then

$$w(t) \le ce^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}.$$

由于 $w(t) \ge u(t) > 0$，我们可以得出结论:

$$u(t) \le w(t) \le ce^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds} = ce^{\left|\int_{t}^{t_0} v(s)\,ds\right|} = ce^{\left|-\int_{t}^{t_0} v(s)\,ds\right|} = ce^{\left|\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right|}$$

□

参考文献

[1] L. Ya. Adrianova：《微分方程线性系统导论》，数学专著译丛，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（1995）。[2] E. Ait Dads 和 O. Arino：指数二分性与某些微分方程伪几乎周期解的存在性，《Nonlinear Analysis：理论、方法与应用》27（1996）369–386。[3] M.A. Akhmet、M.U. Tleubergenova 和 A. Zafer：微分方程的渐近等价与渐近几乎周期解，《Nonlinear Analysis》67（2007）1870–1877。[4] V. Anagnostopoulou、C. Pötzsche 和 M. Rasmussen：《非自治分岔理论：概念与工具》，施普林格（2023）。[5] P. Anh、A. Czornik、T.S. Doan 和 S. Siegmund：单侧连续时变线性系统二分谱的比例局部可指定性，《微分方程杂志》309（2022）176–195。[6] P. Anh、A. Czornik、T.S. Doan 和 N.T.T. Suong：通过运动学等价指定时变线性控制系统的谱，《系统与控制快报》186（2024），文章编号 105763。[7] B. Aulbach 和 S. Siegmund：非自治微分方程的谱理论，载于 J. López–Fenner 和 M. Pinto（编），《第五届国际差分方程与应用大会论文集》（智利特木科，2000），第45–55页，泰勒-弗朗西斯出版社，伦敦（2002）。[8] B. Aulbach 和 S. Siegmund：线性差分方程非可逆系统的二分谱，《差分方程与应用杂志》7（2001）895–913。[9] E.A. Barabanov 和 A.V. Konyukh：线性微分系统的博尔指数，《微分方程与数理物理纪要》24（2001）151–158。[10] E.A. Barabanov 和 A.V. Konyukh：系数矩阵受到小扰动时线性微分系统解的博尔指数可移动性的精确极值边界（俄文），《白俄罗斯国家科学院学报：物理与数学辑》3（2015）1–12。[11] L. Barreira 和 C. Valls：《非自治微分方程的稳定性》，数学讲义1926，施普林格，柏林（2008）。[12] L. Barreira、D. Dragičević 和 C. Valls：《容许性与双曲性》，施普林格数学简明丛书，施普林格（2018）。[13] F. Battelli 和 K.J. Palmer：三角系统的指数二分性判据，《数学分析及其应用杂志》428(1)（2015）525–543。[14] F. Brauer 和 J.A. Nohel：《常微分方程定性理论：导论》，多佛出版社，纽约（1969）。

[15] R. Bellman：《微分方程稳定性理论》，多佛出版社，纽约州米尼奥拉（1953年）。[16] R. Bellman：《扰动技术》，多佛出版社，纽约州米尼奥拉（1966年）。[17] R. Bellman：《矩阵分析导论》，SIAM应用数学经典丛书第19卷，SIAM，宾夕法尼亚州费城（1997年）。[18] D.D. Berkey：线性几乎周期系统的渐近弗洛凯定理，《SIAM数学分析杂志》7（1976年）843–847。[19] F. Berthelin：《微分方程》，Cassini，巴黎（2017年）。[20] J. Ben Slimene 和 J. Blot：系统的可约性及几乎周期微分方程解的存在性，《电子微分方程杂志》2012（2012年）第75号，1–17。[21] E.M. Bonotto、M. Federson 和 F.L. Santos：广义常微分方程的二分性及其应用，《微分方程杂志》264(5)（2018年）3131–3173。[22] T.A. Burton：具有周期系数的线性微分方程，美国数学会会刊17（1966年）327–329。[23] T.A. Burton 和 J.S. Muldowney：广义弗洛凯理论，《数学档案》19（1968年）188–194。[24] T.A. Burton 和 J.J. Mallet–Paret：几乎弗洛凯系统与广义几乎弗洛凯系统，《捷克斯洛伐克数学杂志》26（1976年）13–19。[25]B.F. Bylov：微分方程的几乎可约系统（俄文），《西伯利亚数学杂志》3（1962年）339–359。[26] B.F. Bylov：将线性系统化为分块对角形式，《微分方程》23（1987年）1359–1362。[27] J. Campos 和 M. Tarallo：基于Ekeland变分原理的指数二分性，《动力系统与微分方程杂志》32（2020年）1475–1509。[28]A.N. Carvalho、J.A. Langa 和 J.C. Robinson：《无限维非自治动力系统的吸引子》，《应用数学科学》第182卷，施普林格，纽约（2013年）。[29] Á. Castañeda 和 G. Robledo：Palmer线性化定理的可微性及密度函数的逆命题，《微分方程杂志》259（2015年）4634–4650。[30] Á. Castañeda、P. Monzón 和 G. Robledo：半直线上非自治系统拓扑等价的光滑性，《爱丁堡皇家学会会刊》150（2020年）2484–2502。[31] Á. Castañeda、P. Monzón 和 G. Robledo：通过光滑拓扑等价得到的非一致压缩与密度稳定性结果，《动力系统》38（2023年）197–196。[32] Á. Castañeda 和 F. Torres：涉及压缩与无界非线性项的非自治 C^r 拓扑等价，《数学新闻》298（2025年）3893–3907。[33]Á. Castañeda、I. Huerta 和 G. Robledo：全局非一致渐近稳定性问题的二分谱方法：通过一致化处理三角情形，《加拿大数学杂志》，doi:10.4153/S0008414X25101569。[34] X. Chen 和 Y. Xia：通过广义指数二分性建立两类非线性微分方程之间的拓扑共轭，《国际微分方程杂志》（2011年），文章编号871574。

[35] J. Chu、F.–F. Liao、S. Siegmund、Y. Xia 和 W. Zhang：非自治方程的非一致二分谱与可约性，《数学科学通报》139（2015年）538–557。[36] E. Coddington 和 N. Levinson：《常微分方程理论》，McGraw–Hill，纽约（1955年）。[37] W.J. Coles：线性系统与Riccati系统，《杜克数学杂志》22（1955年）333–338。[38] R. Conti：《线性微分方程与控制》，学术出版社，伦敦和纽约（1976年）。[39] W.A. Coppel：《微分方程的稳定性与渐近行为》，D.C. Heath and Company，波士顿（1965年）。[40] W.A. Coppel：二分性与可约性，《微分方程杂志》3（1967年）500–521。[41] W.A. Coppel：《稳定性理论中的二分性》，《数学讲义》第629卷，施普林格出版社，柏林（1978年）。[42] S. Császár 和 S. Kovács：指数二分性与线性系统的稳定性，《布达佩斯大学科学年刊·计算机科学辑》47（2018年）211–226。[43] J.L. Daleckii 和 M.G. Krein：《巴拿赫空间上微分方程解的稳定性》，《数学专著译丛》，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（1995年）。[44] H. D’Angelo：《线性时变系统：分析与综合》，Allyn and Bacon，马萨诸塞州波士顿（1970年）。[45] B.P. Demidovich：《数学稳定性理论讲义》（俄文），科学出版社，莫斯科（1967年）。[46] L. Dieci 和 E.S. Van Vleck：Lyapunov与Sacker–Sell谱区间，《动力系统与微分方程杂志》19（2009年）265–293。[47] L. Dieci、C. Elia 和 E. Van Vleck：实数轴上的指数二分性：奇异值分解与QR方法，《微分方程杂志》248（2010年）287–308。[48] L. Dieci、C. Elia 和 E. Van Vleck：检测实数轴上的指数二分性：奇异值分解与QR算法，《BIT数值数学》51（2011年）555–579。[49] S.F. Diliberto：常微分方程系统，载于《非线性振荡理论文集》，第1–38页，《数学年刊研究丛书》第20卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（1950年）。[50] T.S. Doan：《非自治动力系统的谱理论及其应用》，施普林格，新加坡（2024）。[51]D. Dragičević、W. Zhang 和 W. Zhang：具有非一致二分性的非自治微分方程的光滑线性化，《伦敦数学会会刊》121（2020年）32–50。[52] S. Elaydi 和 O. Hajek：非线性常微分方程系统的指数二分性，载于 V. Lakshmikantham（编），《非线性分析理论与实践趋势》，《北荷兰数学研究丛书》，北荷兰出版社（1985年）。[53] H. Elorreaga、J.F. Peña 和 G. Robledo：一致 h二分性：非临界一致性与扩张性，《数学年刊》393（2025年）1769–1795。[54] N.P. Erugin：《具有周期与准周期系数的线性常微分方程组》，学术出版社，纽约和伦敦（1966年）。[55] A.M. Fink：《几乎周期微分方程》，《数学讲义》第377卷，施普林格出版社，柏林（1974年）。

[56] G. Floquet：关于周期系数线性微分方程，Annales de l’École Normale Supérieure 12 (1883) 47–88。[57] H.I. Freedman 和 J.J. Mallet–Paret：几乎弗洛凯系统与广义几乎弗洛凯系统，《捷克斯洛伐克数学杂志》26 (1976) 13–19。[58] J.R. Graef、J. Henderson、L. Kong 和 X.S. Liu：《常微分方程与边值问题》，《抽象与应用分析趋势》7，世界科学出版社，新加坡 (2018)。[59] D.M. Grobman：微分方程组的同胚，苏联科学院通报**128** (1959) 880–881（俄文）。[60] T.H. Gronwall：关于微分方程组的解对参数的导数的注记，Ann. of Math. 20 (1919年) 292–296。[61] W. Hahn：《运动稳定性》，施普林格出版社，纽约 (1967)。[62] A. Halanay：《微分方程：稳定性、振荡与时滞》，学术出版社，纽约和伦敦 (1966)。[63] C.J. Harris 和 J.F. Miles：《线性系统的稳定性：运动相似的若干方面》，学术出版社，纽约 (1980)。[64] P. Hartman：《常微分方程》，应用数学经典丛书38，SIAM，宾夕法尼亚州费城 (2002)。[65] P. Hartman：微分方程结构稳定性理论中的一个引理，美国数学会会刊11 (1960) 610–620。[66] J.P. Hespanha：《线性系统理论》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿 (2018)。[67] S. Hilger：测度链上的Hartman–Grobman广义定理，澳大利亚数学会杂志，A辑60，157–191。[68] D. Hinrichsen 和 A.J. Pritchard：《数学系统理论 I：建模、状态空间分析、稳定性与鲁棒性》，施普林格 (2005)。[69] K. Hoffman 和 R. Kunze：《线性代数》，普伦蒂斯-霍尔 (1972)。[70] S.H. Hou：课堂笔记：Leverrier–Faddeev特征多项式算法的一个简单证明，SIAM评论40 (1998) 706–709。[71] R.A. Horn 和 C.R. Johnson：《矩阵分析专题》，剑桥大学出版社，剑桥 (1991)。[72] A.S. Householder：《数值分析中的矩阵理论》，多佛出版社，纽约 (1964)。[73] I. Huerta：具有非一致压缩的非自治无界系统的线性化：一种谱方法，Discrete Contin. Dyn. Syst. 40 (2020) 5571–5590。[74] N. Jara：无谱条件下非自治线性化的 C^2 类光滑性，《动力系统与微分方程杂志》36 (2022) 1759–1766。[75] L. Jiang：广义指数二分性与全局线性化，《数学分析及其应用杂志》315 (2006) 474–490。[76] N. Ju 和 S. Wiggins：指数二分性的粗糙性，《数学分析及其应用杂志》262 (2001) 39–49。[77] H. Khalil：《非线性系统》，普伦蒂斯-霍尔，新泽西州上萨德尔里弗 (2005)。[78] P.E. Kloeden 和 M. Rasmussen：《非自治动力系统》，数学调查与专著176，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯 (2011)。[79] N.N. Krasovski：关于A.M. Lyapunov第二方法稳定性研究理论，数学文集（新系列）82 (1956) 57–64（俄文）。

[80]A. Liapounoff：《运动稳定性的一般问题》，Éditions Jacques Gabay，巴黎 (1988)。[81] J.C. Lillo：近似相似与几乎周期矩阵，美国数学会会刊12 (1961) 400–407。[82] F. Lin：线性微分系统的谱与可缩集（中文），《当代数学》11 (1990) 425–450。[83] F. Lin：非自治无界系统上的Hartman线性化，Nonlinear Analysis 66 (2007) 38–50。[84] Z. Lin 和 Y.–X. Lin：《线性系统的指数二分性与双曲点集的结构》，世界科学出版社，新加坡 (2000)。[85] J. López–Fenner 和 M. Pinto：关于一类具有脉冲效应的常微分方程的Hartman线性化定理，Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 38 (1999) 307–325。[86] H. Lütkepohl：《矩阵手册》，Wiley，奇切斯特 (1996)。[87] W. Magnus 和 S. Winkler：Hill方程，多佛出版社，纽约 (1979)。[88] L. Markus：连续矩阵与微分系统的稳定性，《数学杂志》62 (1955) 310–319。[89] L. Markus 和 H. Yamabe：微分系统的全局稳定性判据，《大阪数学杂志》12 (1960) 305–317。[90] R.H. Martin Jr.：微分方程解的条件稳定性与分离，《微分方程杂志》13 (1973) 81–105。[91] J.L. Massera 和 J.J. Schäffer：《线性微分方程与函数空间》，学术出版社，纽约—伦敦 (1966)。[92] C. Maulén、S. Castillo、M. Kostić 和 M. Pinto：常微分方程的远程几乎周期解，《数学杂志》(2021年) 文章编号 9985454。[93] Y.A. Mitropolsky、A.M. Samoilenko 和 V.L. Kulik：非自治线性系统的二分性与稳定性，泰勒-弗朗西斯出版社，伦敦—纽约 (2003)。[94] R. Naulin 和 M. Pinto：非线性微分系统的二分性与渐近积分，Nonlinear Analysis TMA 23 (1994) 871–882。[95] R. Naulin 和 M. Pinto：$(h,\ k)$-二分性的粗糙性，《微分方程杂志》118 (1995) 20–35。[96] R. Naulin：Hartman线性化定理的一个应用，《哥伦比亚数学杂志》25 (1991) 11–16。[97] V.V. Nemitskii 和 V.V. Stepanov：《微分方程定性理论》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿 (1960)。[98] K.J. Palmer：Hartman线性化定理的推广，《数学分析及其应用杂志》41 (1973) 753–758。[99] K.J. Palmer：几乎周期线性微分方程组的可约性，《微分方程杂志》36 (1980) 374–390。[100] K.J. Palmer：常微分方程线性系统的指数分离、指数二分性与谱理论，《微分方程杂志》46 (1982) 324–345。[101] K.J. Palmer：线性微分系统的一种序，以及用可约性刻画指数分离，《微分方程杂志》53 (1984) 67–97。

[102] K.J. Palmer：指数二分性与扩张性，Annali di Matematica 185 (2006) S171–S185。[103] G. Papaschinopoulos：带分段常值自变量的微分方程的一个线性化结果，Analysis 16 (1996) 161–170。[104] J.F. Peña 和 S. Rivera–Villagrán：关于线性非自治系统的一致渐近 h–稳定性，Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (2025) 第19篇，13页。[105] L. Perko：《微分方程与动力系统》，Springer–Verlag NY (2001)。[106] O. Perron：《微分方程的稳定性问题》，《数学杂志》32 (1930) 702–728。[107] M. Pinto：非自治半线性微分系统：渐近行为与稳定流形，预印本，智利大学数学系、理学院，圣地亚哥 (1990)。[108] M. Pinto 和 G. Robledo：线性几乎周期系统的柯西矩阵及其若干推论，Nonlinear Analysis 74 (2011) 5426–5439。[109] R. Plastock：巴拿赫空间之间的同胚，Trans. Amer. Math. Soc.**200**(1974) 1691–7183。[110] C. Pötzsche：非齐次时间尺度上的拓扑解耦、线性化与扰动，《微分方程杂志》245 (2008) 1210–1242。[111] C. Pötzsche：三角方程的二分谱，Discrete Contin. Dyn. Syst. 36(1) (2016) 423–450。[112] C.C. Pugh：关于 P. Hartman 的一个定理，Amer. J. Math. 91 (1969) 363–367。[113] H. Rajdavi 和 P. Rosenthal：《同时三角化》，Universitext，Springer，纽约 (2000)。[114] W.T. Reid：微分系统的普吕弗变换，Pacific J. Math. 8 (1958) 575–584。[115] A. Reinfelds：时变差分方程的格罗布曼–哈特曼定理，载于 J. Klovocs（编），Matem¯atika. Diferenci¯al¯alvien¯adojumi，Latvijas Universit¯ate，R¯ıga (1997) 9–13。[116] A. Reinfelds 和 D. ˇSteinberga：拟线性方程的动力等价，Int. J. Pure and Appl. Math. 98 (2015) 355–364。[117] L. Rollet 和 P. Nabonnand：加斯东·弗洛凯，外省的学者：南锡的数学与航空推广（法语），Cahiers François Viéte III–16 (2024) 239–267。[118] R.J. Sacker 和 G.R. Sell：线性微分系统的谱理论，《微分方程杂志》27 (1978) 320–358。[119] J. Shi 和 K. Xiong：关于哈特曼线性化定理与 Palmer 线性化定理，《数学分析及其应用杂志》92 (1995) 813–832。[120] T.C. Sideris：《常微分方程与动力系统》，Atlantis Press，巴黎 (2014)。[121] S. Siegmund：非自治微分方程的二分谱，J. Dynam. Differential Equations 14 (2002) 243–258。[122] S. Siegmund：非自治线性微分方程的可约性，J. London Math. Soc. 65 (2002) 397–410。[123] C.M. Silva：非一致 μ-二分谱与运动相似，《微分方程杂志》375 (2023) 618–652。

[124] R.L. Sternberg：相关矩阵微分方程与积分方程的厄米解定理，Portugal. Math. 12 (1953) 135–139。[125] L. Wang、Y. Xia 和 N. Zhao：广义指数二分性的一种刻画，《应用分析与计算杂志》5 (2015) 662–687。[126] R. Weikard：《具有亚纯解的线性微分方程的 Floquet 理论》，E.J. Qualitative Theory of Diff. Equ. (2000) 1–6。[127] W.M. Whyburn：矩阵微分方程，Amer. J. Math. 56 (1934) 587–592。[128] M. Wu 和 Y. Xia：线性部分为双曲的非自治无界系统的线性化：一种谱方法，Discrete and Continuous Dynamical Syste ms 44(2) (2024) 491–522。[129] V.A. Yakubovitch 和 V.M. Starzhinskii：《具有周期系数的线性微分方程》，Keter 出版社，耶路撒冷 (1975)。[130] C.Y. Zhang：某些微分方程的伪几乎周期解 II，《数学分析及其应用杂志》192 (1995) 543–561。[131] J. Zhang、M. Fan 和 L. Yang：非一致 ($h,\ k,\ \mu,\ \nu$)–二分性及其在非自治动力系统中的应用，《数学分析及其应用杂志》452 (2017) 505–551。[132] X. Zhang：非自治微分系统的非一致二分谱与标准形，J. Fu nct. Anal. 267 (2014) 1889–1916。[133] K. Zhou、J.C. Doyle 和 K. Glover：《鲁棒与最优控制》，Prentice Hall，新泽西州上萨德尔里弗 (1996)。[134] C. Zou 和 J. Shi：Floquet 理论的推广，Nonlinear Analysis 71 (2009) 1100–1107。