arXiv:2601.11829v1 [math.CA] 16 Jan 2026

分数超移位及其相关的柯西演化问题

NATANAEL ALPAY

Abstract. 在本研究中，我们将超移位和超振荡序列的概念推广到基于 Gelfond–Leontiev 分数阶导数的分数阶 Fock 空间。我们首先引入分数超移位序列，随后讨论以分数超移位为初始条件的相关演化柯西问题。

关键词： 分数阶导数；Gelfond–Leontiev 算子；分数福克空间；超振荡；超移位；薛定谔方程；傅里叶积分算子；柯西问题

1. Introduction

超振荡现象源于量子力学，研究的是带限信号函数，即这些函数在适当区间内的振荡速度快于其最高傅里叶分量。数十年来，量子力学中的弱值等领域一直为人所知的这一物理现象[1]。随着时间推移，超振荡研究扩展到了超移位，以探究超振荡数据在薛定谔、狄拉克和克莱因–戈尔登等基本方程下的演化。从数学角度看，当有界谱中的“较小”傅里叶分量组合起来，产生远超谱支撑范围的有效移位时，就会出现超振荡；此后，这一现象还催生了新的生成函数，并与经典特殊函数建立了联系，包括伯恩斯坦族和埃尔米特族。 [9]。关于更多数学理论及其在薛定谔演化中的应用，请参见 [3, 2]；定义和结果向多变量的推广见 [4, 10]。

与再生核希尔伯特空间（RKHS）核相关的超移位实例最早在 [6] 中进行了研究。本文将这一思想拓展到与分数阶 Fock 空间权函数相关的超移位。

分数阶导数将经典导数的概念推广到非整数阶，其理论源于现代信号与图像处理领域。在该领域，人们希望通过离散化积分变换（例如小波和 Gabor 系统）来构造框架。这一目标植根于量子力学与信息论（冯·诺依曼、Gabor），即用联合扩展度近乎最小的时频原子来表示信号。在实际应用中，必须以离散、稳定且冗余的系统取代连续变换；因此，需要确定参数空间中的格点密度条件，以确保系统构成框架。在经典 Gabor 情形下，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：30H20；次要分类：30E05、26A33、35Q41
.

Gr¨ochenig 和 Lyubarskii 的研究通过 Bargmann变换，将采用 Hermite窗函数的 Gabor框架与福克空间的标准正交基联系起来，从而得出了具体的格点判据 [16]。在这一视角下，基于 Gelfond–Leontiev（GL）型导数的算子框架将分数阶算子置于希尔伯特空间框架中，并将其与采样和插值问题联系起来 [5]；其中采用了更一般的一类 Gabor型框架。标准福克框架以经典微分和乘法算子为基础，而 [5] 则以 Gelfond–Leontiev导数取代它们（详情参见 [18] ）。Gelfond–Leontiev导数涵盖了许多重要算子作为特例，包括 Caputo 和 Riemann–Liouville分数阶导数，以及与有限反射群（Dunkl 算子）相关的差分—微分算子。前者有广泛的应用，从分数阶力学到随机过程中的灰噪声模型；后者则自然地出现在 Calogero–Sutherland–Moser n 粒子系统的分析中。本文采用 GL 视角，并在基于 GL 导数的 分数福克空间 中开展研究。

第1节介绍分数阶导数和超振荡。第2节给出必要的预备知识，特别是与 Gelfond–Leontiev 算子相关的分数阶 Fock 空间的构造。第3节定义分数阶超振荡。第4节和第5节讨论以分数阶超振荡序列作为初始条件的柯西问题：第4节分析振荡积分和分布极限，随后第5节利用这些结果求解该问题。

2. 预备知识

为了研究与 Gelfond-Leontiev 算子相关的分数阶 Fock 空间中的超移位，我们沿着 [5] 中广义微分的发展脉络展开讨论。

2.1. 广义分数阶导数。 通过 Gelfond- Leontiev 算子定义的分数阶导数取决于所采用的函数类型。在圆盘上选取函数将得到 Hardy空间，选取整函数则得到福克空间，这正是本文所研究的空间。

定义 2.1. 设

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k z^k, \tag{2.1}$$

是一个阶为 $\rho>0$、次数为 $\sigma>0$ 的整函数，即 $\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[k]{|\varphi_k|}=(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}$。我们定义关于 φ 的广义微分 Gelfond-Leontiev (GL) 算子，记为 D_φ，其作用于解析函数$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$，$|z|<1$，定义为

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k \quad\mapsto\quad D_\varphi f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\varphi_{k-1}}{\varphi_k}\,z^{k-1}. \tag{2.2}$$

因此，在满足条件 φ的情况下，根据柯西–阿达马公式，若 $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{\varphi_{k-1}}{\varphi_k}\right|}=1$，我们可以看到，(2.2) 中的级数与原级数 f. 具有相同的收敛半径 $R>0$。此外，我们想指出，函数 φ 可作为 Gelfond-Leontiev

广义微分算子的替代物，因此满足恒等式 $D_\varphi \varphi = \varphi$.

对于给定的整函数 φ，我们利用以下关系关联一个解析权函数 K_φ （定义在适当的区域上）。

$$\frac{1}{\varphi_n} = \mathcal{M}(K_\varphi(-\cdot))(n+1), \tag{2.3}$$

其中 $\mathcal{M}$ 表示梅林变换。该关系导出如下离散再生核:

$$k_\varphi(n,k) := \varphi_n \delta_{n,k}, \qquad n,k \in \mathbb{N}_0, \tag{2.4}$$

相应的离散再生核希尔伯特空间定义为

$$\mathcal{H}(k_\varphi) := \Big\{ \underline{f} := (f_n)_{n=0}^\infty : \|\underline{f}\|_{\ell^2_\varphi}^2 = \sum_{n=0}^\infty \frac{|f_n|^2}{\varphi_n} < \infty \Big\}, \tag{2.5}$$

（有时记作 ℓ^2_φ），因此对所有 $f \in \mathcal{H}(k_\varphi)$，我们有再生性质

$$f(z) = \langle k_\varphi(z,\cdot), f \rangle_{\ell^2_\varphi}. \tag{2.6}$$

对于两个整函数 $f(z) = \sum_{k=0}^\infty f_k z^k$， $g(z) = \sum_{k=0}^\infty g_k z^k$， 空间 $\mathcal{H}(k_\varphi)$ 配备如下内积

$$\langle f, g \rangle_{2,\varphi} := \sum_{n=0}^\infty \frac{f_n \, \overline{g_n}}{\varphi_n}.$$

分数福克空间 $\mathcal{F}_\varphi$ 定义为

$$\mathcal{F}_\varphi := \Big\{ f := \sum_{n=0}^\infty f_n z^n : \langle\!\langle f, f \rangle\!\rangle_{\mathcal{F}_\varphi} < \infty \Big\}, \tag{2.7}$$

相对于加权测度 $d\mu(w) = K_\varphi(-|w|^2) dxdy$，并赋予加权内积

$$\langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle_{\mathcal{F}_\varphi} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z) K_\varphi(-|z|^2) dxdy, \tag{2.8}$$

空间 $\mathcal{F}_\varphi$ 是一个具有连续核的分数再生核希尔伯特空间

$$k_\varphi(z,w) := \varphi(\bar{z}w) = \sum_{n=0}^\infty \varphi_n \cdot (\bar{z}w)^n \quad z,w \in \mathbb{C}.$$

事实上， ℓ^2_φ 与 $\mathcal{F}_\varphi$ 之间存在一个等距同构，它将 $f(z) = \sum_{k=0}^\infty f_k z^k$ 在 $\mathcal{F}_\varphi$ 中映射到其系数序列 $(f_k)_{k=0}^\infty$ 在 ℓ^2_φ 中。也就是说，这些加权内积应满足恒等式 $\langle f, \ g \rangle_{\ell^2_\varphi} = \langle\!\langle f, \ g \rangle\!\rangle_{\mathcal{F}_\varphi}$，即

$$\langle f, g \rangle_{\ell^2_\varphi} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\overline{f_k} g_k}{\varphi_k} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z) K_\varphi(-|z|^2) dxdy = \langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle_{\mathcal{F}_\varphi}. \tag{2.9}$$

注 2.2. 函数 $K_\varphi(z)$ 表示分数福克空间的权函数，而函数 $k_\varphi(z,w) = \varphi(z\bar{w})$ 是其关联再生核。

注 2.3. 方程 (2.3) 将测度 $d\mu(z) = K_\varphi(-|z|^2)dxdy$ 的确定归结为梅林变换的反演问题或斯蒂尔切斯矩问题；对于后者，确定 K_φ 的一个充分条件是卡尔曼条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n^{\frac{1}{2n}}} = +\infty. \tag{2.10}$$

例 2.4. 给定权函数 $K_\varphi(z) = e^z$，由逆梅林变换并令 $K_\varphi(x) = K_\varphi(-x)$，可得核系数

$$\frac{1}{\varphi_n} = \mathcal{M}(e^{-x})(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!.$$

为证明该权函数满足矩问题，我们验证 (2.10)，即

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{2n}^{-1/(2n)} = \lim_{n\to\infty} (2n!)^{\frac{1}{2n}} = \infty.$$

因此，该条件成立。顺便提一下，从 $\varphi(x) = e^x$ 出发，我们还可以通过另一种方式确定权函数 $K_\varphi(x) = e^x$，如下：

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx.$$

例 2.5. 设 φ 为米塔格-莱夫勒函数，其定义如下：

$$E_{\frac{1}{\rho},\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}, \qquad \rho > 0,\ \mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\mu) > 0, \tag{2.11}$$

系数为 $\varphi_k = \Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)$。为验证 (2.10)，我们首先指出伽马函数 [14, A.1.24], 的如下渐近公式

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \cdots\right],$$

当 $z \to \infty$ 且 $|\arg z| < \pi$ 时（由斯特林公式可得）。由于我们考虑的是趋于无穷大的实数 z，且 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$，因此得到

$$\lim_{x\to\infty} \Gamma(x+1) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

为证明该权函数满足矩问题，我们验证 (2.10)：

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{2k}^{-1/(2k)} = \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k\right)^{1/(2k)} = \infty.$$

因此，条件 (2.10) 得以满足。另一方面，回忆一下，Γ函数由一个梅林变换积分定义

$$\Gamma(qn+1) = \int_0^\infty t^{qn} e^{-t}$$

令 $r^2 = t^q$，得到 $r^{2/q} = t$ 和 $\frac{2}{q} r^{\frac{2}{q}-1} dr = dt$，因此

$$\int_0^\infty r^{2n+1} d\tilde{\mu}(r) = \int_0^\infty r^{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{q\pi} r^{-\frac{2}{q}} e^{-r^{2/q}}\right) dr.$$

因此，由下式给出的测度函数

$$K_\varphi(-|z|^2) = \frac{1}{q\pi}|z|^{\frac{2}{q}-2}e^{-|z|^{\frac{2}{q}}}.$$

这给出了记作 $ML^2(\mathbb{C};\, q)$ 的 Mittag-Leffler 再生核希尔伯特空间，该空间最早由 Rosenfeld 在 [19]，中引入，并且在 [7, 8]，中分别研究了相关的 Bargmann 变换和热态。

在 [5]，中，广义 Bargmann 变换 $\tilde{\mathcal{B}}\colon L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}_\varphi$ 定义为

$$\tilde{\mathcal{B}}f(z) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{h_n(x)}\sqrt{\varphi_n} z^n \right) f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} A(z,x)f(x),$$

其中， $A(z,x)$ 是 Bargmann 核。我们注意到， $\mathcal{B}$ 根据构造是酉的。这给出了升降算符 a^* 和 a 作用于厄米函数时的形式：

$$a^*h_{n-1} = \sqrt{\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}}h_n, \qquad ah_n = \sqrt{\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}}h_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{2.12}$$

我们强调， $\mathcal{B}$ 现在以下述方式充当交织算子

$$\mathcal{B}af = D_\varphi \mathcal{B}f, \qquad \mathcal{B}a^*f = z\mathcal{B}f. \tag{2.13}$$

定理 2.6。 系统 $\{e_n\}_{n\geq 0}$ 满足 $e_n := \sqrt{\varphi_n}\, z^n$ 是 $\mathcal{F}_\varphi$ 的标准正交基。

证明。 首先证明正交归一性。对于 $m,\ n \geq 0$ 我们有

$$\langle e_n, e_m\rangle_{\mathcal{F}_\varphi} = \sqrt{\varphi_n}\sqrt{\varphi_m}\underbrace{\langle z_n, z_m\rangle_{\mathcal{F}_\varphi}}_{=\frac{\delta_{n,m}}{\varphi_n}} = 1.$$

因此 $\{e_n\}$ 是正交归一的。接下来证明再生性质。对于固定的 a w，核截面 $k_w(z) := k(z,\ w) = \sum_{n\geq 0}\varphi_n z^n \overline{w}^n$ 属于 $\mathcal{F}_\varphi$，因为

$$\|k_w\|^2_{\mathcal{F}_\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\varphi_n\overline{w}^n|^2}{\varphi_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n|w|^{2n} = \varphi(|w|^2) < \infty.$$

(由于 φ是整函数，我们无需担心 $\varphi(|z|^2)$的解析性；不过，如果 φ 在半径为 r 的圆盘内全纯，我们就需要对 $|z| \in r,\ \sqrt{r}$加以限制。参见

$$\langle f, k_w\rangle_{\mathcal{F}_\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n\,\overline{\varphi_n\overline{w}^n}}{\varphi_n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n w^n = f(w), \quad \text{for} \quad f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n \in \mathcal{F}_\varphi$$

因此 k_ω 确实是 $\mathcal{F}_\varphi$的再生核。最后，我们证明完备性。

$$\langle f, e_n\rangle_{\mathcal{F}_\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} f_m\langle z^m, e_n\rangle_{\mathcal{F}_\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} f_m\sqrt{\varphi_n}\langle z^m, z^n\rangle_{\mathcal{F}_\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} f_m\sqrt{\varphi_n}\frac{\delta_{n,m}}{\varphi_n} = \frac{f_n}{\sqrt{\varphi_n}}.$$

因此，对于所有的 $f \in \mathcal{F}_\varphi$，我们有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f_n}{\sqrt{\varphi_n}}\right)e_n = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, e_n\rangle_{\mathcal{F}_\varphi}\, e_n, \qquad \text{and} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{f_n}{\sqrt{\varphi_n}}\right|^2 < \infty.$$

因此， $\{e_n\}$ 的闭线性包是整个 $\mathcal{F}_{\varphi}$。结合正交归一性， $\{e_n\}$ 是一个正交归一基。最后，我们注意到，核确实可以分解为

$$k(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z)\,\overline{e_n(w)}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n\overline{w}^{\,n}=\varphi(\overline{w}z),$$

□

例 2.7. 若考虑与例 2.5 中空间 $ML^2(\mathbb{C};\,q)$ 相对应的 $\varphi(z)=E_q(z)$，便可从 [19] 和标准正交基中重新得到 MLB 变换 B_q，

$$\{g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}=\left\{\frac{z^n}{\sqrt{\Gamma(qn+1)}}\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

2.2. **超振荡**。超振荡是指由低频分量构成、却表现出高频行为的函数序列。阿哈罗诺夫等人最初在量子力学弱测量的背景下引入了这类序列。 [3], 这些序列具有出人意料的解析性质和渐近性质，近年来已应用于泛函分析和数理物理，并对信号处理、量子力学和波传播中的数值方法产生了重要影响。

超振荡现象已在 [3] 中得到研究，所用的函数序列定义如下：

$$F_n(a,t)=\left[\cos\frac{t}{n}+ia\sin\frac{t}{n}\right]^n,\quad n\in\mathbb{N},\ a>1.$$

当 n 较大（等价于 t较小）时，我们有超移位性质

$$\lim_{n\to\infty}F_n(a,t)=e^{iat}.$$

当 $a=1$时，这个表达式对任意 n都成立。对于 $a>1$，函数 $F_n(a,\ t)$以高于其最高傅里叶分量的频率振荡；以下命题将使这一点更加明显。

命题 2.8 ([3, 定理 3.1。17])。超振荡序列可使用福克空间核 $B(z,w)=e^{z\bar{w}}$ 表示如下

$$F_n(z,a)=\sum_{j=0}^{n}C_j(n,a)e^{iz\left(1-\frac{2j}{n}\right)}=\sum_{j=0}^{n}C_j(n,a)B(z,z_j),\tag{2.14}$$

其中，对于 $j=0,\dots n$，有

$$C_j(n,a)=\binom{n}{j}\left(\frac{1+a}{2}\right)^{n-j}\left(\frac{1-a}{2}\right)^{j}\quad and\quad z_j=-i\left(1-\frac{2j}{n}\right).\tag{2.15}$$

推论 2.9。超振荡序列可使用福克空间权函数 $K_{\varphi}(x)=e^{x}$表示为

$$F_n(z,a)=\sum_{j=0}^{n}C_j(n,a)e^{iz\left(1-\frac{2j}{n}\right)}=\sum_{j=0}^{n}C_j(n,a)K_{\varphi}(-zz_j),$$

其中，常数 $C_j(n,a)$ 和 z_j 由 (2.15)给出

注2.10。 超振荡行为在方程 (2.14) 中表现得最为明显，因为 $F_n(z,a)$ 的每个傅里叶分量的频率 $1-\frac{2j}{n}$ 都不超过 1；但在极限 e^{iat}下，频率 a 可以任意大。

命题 2.11。 令 $F_n(z,a)$ 为式 (2.14)中定义的函数。那么，对于 $\mathbb{C}$ 的某些紧集中的任意 z，有

$$\lim_{n\to\infty} F_n^{(k)}(z,a) = (ia)^k e^{iza}.$$

特别地

$$\lim_{n\to\infty} F_n^{(k)}(0,a) = (ia)^k.$$

证明。 沿用 [3, 命题 3.1.16.]，的证明，令 $F_n(z,a)$ 如式 (2.14) 所定义，我们直接计算函数 $F_n(z,a) = g_n^n(z)$ 的导数，其中

$$g_n(z) = \cos\left(\frac{z}{n}\right) + ia\sin\left(\frac{z}{n}\right).$$

我们看到

$$F_n'(z,a) = ng_n^{n-1}(z)g_n'(z) = n\frac{g_n'(z)}{g_n(z)}F_n(z,a).$$

现在我们关注 F_n' 在 n 趋于无穷且 z 属于 $\mathbb{C}$ 的一个紧子集时的渐近行为。根据 [3, 定理 3.1.8]，，我们知道 $F_n(z,a)$ 在 $\mathbb{R}$ 的每个紧子集上一致地关于 $n\to\infty$，但可以自然地推广到 $\mathbb{C}$。因此，只需计算 g_n'/g_n 的渐近行为，我们有，

$$\frac{g_n'(z)}{g_n(z)} = \frac{1}{n}\frac{-\sin\left(\frac{z}{n}\right) + ia\cos\left(\frac{z}{n}\right)}{\cos\left(\frac{z}{n}\right) + ia\sin\left(\frac{z}{n}\right)} \sim \frac{1}{n}ia.$$

So

$$\lim_{n\to\infty} F_n'(z,a) = \lim_{n\to\infty} n\frac{g_n'}{g_n}F_n(z,a) = \lim_{n\to\infty} iaF_n(x,a) = iae^{iax}.$$

对 k^{th} 导数重复上述过程，得到

$$\lim_{n\to\infty} F^{(k)}(z,a) = (ia)^k e^{iza}.$$

取 $z=0$ 即可得出结论。 □

推论 2.12. 令 $F_n(z,a)$ 为式 (2.14) 中定义的函数。则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} C_j(n,a)i^k\left(1-\frac{2j}{n}\right)^k = (ia)^k.$$

特别地，对于 $k=0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} C_j(n,a) = 1.$$

根据 [3, 注 3.1。11]，这一等式在更一般的情况下也成立：

$$F(0,a) = \sum_{j=0}^{n} C_j(n,a) = 1,$$

现在，我们已经具备了将超振荡序列的概念推广到广义分数阶 Fock 空间所需的全部背景知识和工具。

3. 分数超移位

命题 2.8 是本研究的动机，其中超振荡序列被写成 Fock 空间权函数的形式，即$K_\varphi(x) = e^x$。在本研究中，我们希望将这一思路推广到以分数阶福克空间核表示的广义超移位。

让我们回顾一下基于 Gelfond-Leontiev 导数、在 [5] 中引入的分数福克空间 $\mathcal{F}_\varphi$，其定义为

$$\mathcal{F}_\varphi := \Big\{ f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n : \langle\!\langle f, f \rangle\!\rangle_{\mathcal{F}_\varphi} < \infty \Big\}, \tag{3.1}$$

相对于加权测度 $d\mu(w) = K_\varphi(-|w|^2)dxdy$，并赋予加权内积

$$\langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle_{\mathcal{F}_\varphi} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z) K_\varphi(-|z|^2) dxdy, \tag{3.2}$$

其关联再生核为

$$k_\varphi(z, w) = \varphi(z\bar{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (z\bar{w})^n. \tag{3.3}$$

令 K_φ 为根据 (2.3) 与 φ 关联的测度。现在，我们以类似于命题 2.8 的方式定义超振荡的类似物，称为广义超移或分数超移位。在命题 2.8 中，我们看到，用 $K_\varphi(x) = e^x$ 表示的经典超振荡对应于 $\varphi(x) = e^x$。

定义 3.1。对于权函数 K_φ 在 $|z| < r$ 上解析的分数福克空间 $\mathcal{F}_\varphi$，对 $n \geq 1$，定义分数阶超移序列如下

$$F_{n,\varphi}(z, a) = \sum_{j=0}^{n} C_j(n, a) K_\varphi(-z_j \cdot z). \tag{3.4}$$

对所有 $|z| < r$、$a > 1$ 和 $C_j(n,\ a)$ z_j，其定义如式（2.15）所示。

为证明此定义确实定义了一个具有命题 2.11 所述超移位性质的序列，我们给出以下命题。

命题 3.2（超移位性质）。对于由（2.15）定义的 $a > 1$、z_j 和 C_j（n、a），采用在 $|z| < r$ 上解析的权函数 K_φ，函数 $F_{\varphi,\ n}$ 通过超移位性质推广了超振荡的概念。

$$\lim_{n\to\infty} F_{\varphi,n}(z, a) = K_\varphi(-iza), \quad \forall\, |z| < r.$$

证明。对于固定的 $n > 0$，以及由（2.15）给出的 z_j、C_j（$n,\ a$）。由于 K_φ 在 $|z| < r$ 上解析，考虑其幂级数展开

$$K_\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad |z| < r.$$

超振荡序列 $F_{n,\varphi}$ 随后可展开为

$$F_{n,\varphi}(z, q) = \sum_{j=0}^{n} C_j(n, a) K_\varphi\left(iz\left(1 - \frac{2j}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (iz)^k \left(\sum_{j=0}^{n} C_j(n, a) \left(1 - \frac{2j}{n}\right)^k \right).$$

我们希望证明

$$\lim_{n\to\infty}|F_{n,\varphi}(z,a)-K_\varphi(-iza)|=0.$$

由于 K_φ 在 $|z|<r$上解析，因此我们有

$$|F_{n,\varphi}(z,a)-K_\varphi(-iza)|\le\sum_{k=0}^{\infty}|a_k||z|^k\left|\sum_{j=0}^{n}C_j(n,a)i^k\left(1-\frac{2j}{n}\right)^k-(ia)^k\right|.$$

根据命题 2.11，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}C_j(n,a)i^k\left(1-\frac{2j}{n}\right)^k=\lim_{n\to\infty}F_n^{(k)}(0,a)=(ia)^k.$$

因此 $\lim_{n\to\infty}|F_{n,\ \varphi}(z,\ \ a)\ -K_\varphi(-iza)|=0.$，结论得证。 □

因此，$F_{n,\ \varphi}$ 确实定义了一个超振荡；接下来的问题是在后续章节中研究其矩和柯西演化问题。

注 3.3。 对于 $\varphi(z)=e^z$，我们有 $K_\varphi(z)\ =e^z$，因此可以得到经典超振荡序列。

例 3.4. 对于 $q\ge0$ 考虑 $\varphi(z)=E_q(z)$，由例 (2.5) 可知

$$K_\varphi(-|z|^2)=\frac{1}{q\pi}|z|^{\frac{2}{q}-2}e^{-|z|^{\frac{2}{q}}}.$$

因此，对于 $a\ge1$ ，我们得到与 Mittag-Leffler Fock 空间相关的分数超移位，其定义如下

$$F_{n,q}(z,a)=\frac{1}{q\pi}\sum_{j=0}^{n}C_j(n,a)|zz_j|^{\frac{1}{q}-1}e^{-|zz_j|^{\frac{1}{q}}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{q\pi}|az|^{\frac{1}{q}-1}e^{-a|z|^{\frac{1}{q}}}$$

注 3.5. 定义广义超移的另一种自然方式是使用核。这类超移最初在 [6] 中作为最小二乘最小化问题的解进行了研究。设 $k_\varphi=\varphi$ 为再生核希尔伯特空间 $\mathcal{F}_\varphi$ 的核，定义

$$\tilde{F}_{n,\varphi}(z,a)=\sum_{j=0}^{n}C_j(n,a)\varphi(z,z_j)\quad\forall z\in\mathbb{C}.$$

这些序列也满足超移位性质

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{F}_{\varphi,n}(z,a)=\varphi(-iza),\quad\forall z\in\mathbb{C}.$$

使用与命题 3.2 类似的证明以及展开式 $\varphi(z)\ =\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_kz^k$。此外，该定义仅依赖于 φ ，且对所有 $z\in\mathbb{C}$ 都成立。然而，对于这样的广义超移序列，我们尚未找到直接求解矩与柯西演化问题（见 (5.2)）的方法，因为它们不具有梅林变换关系 (2.3)。

注 3.6。 在本文中，我们考虑一个整函数 φ，但该理论也可以扩展到解析的 φ，如 [5, 例 3.4] 所示，其中我们有

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\pi\cot(\pi(k+1))}\xrightarrow{\text{associated weight}}K_\varphi(z)=\frac{1}{1-z}.$$

在单位圆盘上解析。此外，即使 φ是整函数，通过逆梅林变换得到的相应权函数 K_φ 也不一定是整函数。利用

$$\mathcal{M}(t^\alpha e^{-t})(s) = \int_0^\infty t^{s-1} t^\alpha e^{-t} dt = \Gamma(s+\alpha).$$

对于 $\alpha = \frac{1}{2}$，我们得到权函数

$$\mathcal{M}[K_\varphi(-\cdot))](s) = i\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\varphi_{s-1}}.$$

因此，可以构造一个具体例子，其中 φ 是整函数，而 K_φ 不是，

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{i\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \xrightarrow{\text{associated weight}} K_\varphi(z) = \sqrt{z} e^{-z}.$$

4. Oscillatory Integrals and Distributional Limits

要研究演化问题，我们必须先研究分布意义下的积分极限这一概念。另一种方法可参见本节末尾的注 4.3；不过，本节内容也很有趣。令 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$表示由快速衰减光滑函数构成的施瓦茨空间。傅里叶积分算子理论最初由 H¨ormander 在 [17], 中发展起来，随后由 Duistermaat [11], Treves [21], 和 Taylor [20]进一步拓展。作用于函数 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$的傅里叶积分算子 T 定义如下

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi(x,\xi) - iy\xi} a(x,\xi) u(y)\, dy\, d\xi,$$

其中，$\phi(x,\xi)$是满足某些非退化条件的光滑实值相位函数，而 $a(x,\xi)$是一个 $m \in \mathbb{R}$阶符号。在一维情形下，相位为 $\phi(x,\xi)$的傅里叶积分算子的施瓦茨核可写成振荡积分

$$K(x,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{\,i(\phi(x,\xi) - y\xi)}\, a(x,\xi)\, d\xi,$$

且该算子的作用方式为

$$(Tu)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)\, u(y)\, dy.$$

注释 4.1。将 T 作用于常函数 $u \equiv 1$ 可得

$$(T1)(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi}\, dy \right) a(x,\xi) e^{i\phi(x,\xi)}\, d\xi = 2\pi\, a(x,0)\, e^{i\phi(x,0)}$$

（差一个傅里叶归一化因子）。因此，$(T1)(x)$ 不是 $\int e^{i\phi(x,\xi)} a(x,\ \xi)\ d\xi$。后者出现在核在 $y = 0$ 处取值时，即对于 $T\delta_0$

$$(T\delta_0)(x) = K(x,0) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi(x,\xi)}\, a(x,\xi)\, d\xi.$$

为了求解下一节中与广义超振荡相关的薛定谔演化问题，我们必须首先研究正则化振荡积分

$$I_m^\epsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2 + i\lambda x}\, d\lambda$$

作为傅里叶积分算子（FIO）的核。随后我们证明，当 $\epsilon \to 0^+$ 时，其分布极限符合傅里叶积分算子的标准框架。正则化后的核 $I_m^\epsilon(x,t)$ 可写成如下形式

$$I_m^\epsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}} a(\lambda) e^{i\phi(x,\lambda)} e^{-\epsilon\lambda^2}\, d\lambda,$$

具有实值、光滑、非退化的相位函数 $\phi(x,\ \lambda) = \lambda x - t\lambda^2$，满足 $\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial\lambda} = 1 \neq 0$，且振幅为$a(\lambda) = \lambda^m$。由于指数的实部为负，保证了可积性，因此该积分对所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 均有定义，即

$$\left|\lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2 + i\lambda x}\right| = |\lambda|^m e^{-\epsilon\lambda^2},$$

且函数 $\lambda \mapsto |\lambda|^m e^{-\epsilon\lambda^2}$ 对每个固定的 $\epsilon > 0$ 都属于 $L^1(\mathbb{R})$，因此该积分绝对收敛。

令 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$表示 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$的对偶，即温和分布空间。我们有以下命题。

命题 4.2。 设 $m \in \mathbb{N}_0$、 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$。则函数

$$I_m^\epsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2 + i\lambda x}\, d\lambda$$

是一个傅里叶积分算子的核，该算子与相位函数$\phi(x,\lambda) = \lambda x - t\lambda^2$ 以及振幅 $a(\lambda) = \lambda^m$相关。此外，极限

$$I_m(x,t) := \lim_{\epsilon\to 0^+} I_m^\epsilon(x,t)$$

存在于 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x)$ 中，并定义了一个温和分布，它同时也是分布理论意义下某个傅里叶积分算子的核。

证明。 正则化积分 $I_m^\epsilon(x,t)$ 符合傅里叶积分算子的经典形式

$$I_m^\epsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2 + i\lambda x}\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} a(\lambda)\, e^{i\phi(x,\lambda)}\, e^{-\epsilon\lambda^2}\, d\lambda.$$

其相位为 $\phi(x,\lambda) = \lambda x - t\lambda^2$，满足标准的非退化条件

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x - 2t\lambda) = 1.$$

振幅 $\lambda^m \in S^m$ 是阶数为 m 的经典符号。函数 $a(\lambda) =\lambda^m$ 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数，并且对任意多重指标 α，

$$|\partial_\lambda^\alpha a(\lambda)| \le C_\alpha (1+|\lambda|)^{m-|\alpha|},$$

这意味着 $a \in S^m(\mathbb{R})$ 属于阶数为 m 的经典符号类，因此 $a(\lambda)$ 是傅里叶积分算子的一个可容许振幅。现在我们将证明固定 $\epsilon > 0$ 时，被积函数的收敛性

$$f_\epsilon(x,\lambda) := \lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2 + i\lambda x},$$

在 λ 中光滑且快速衰减，因为我们有如下逐点界

$$|f_\epsilon(x,\lambda)| = |\lambda|^m e^{-\epsilon\lambda^2},$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}_0$，它在 $\mathbb{R}$ 上可积。因此，对于每个固定的 $\epsilon > 0$，$I_m^\epsilon(x,\ t)$ 是 x 的光滑函数。

设 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x)$ 是一个施瓦茨测试函数。我们考虑 $I_m^\epsilon(x,t)$ 与 $\varphi(x)$ 的配对

$$\langle I_m^\epsilon(\cdot,t),\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2 + i\lambda x}\, d\lambda \right) \varphi(x)\, dx.$$

由于 I_m^ϵ 绝对可积，我们应用富比尼定理交换积分次序

$$\langle I_m^\epsilon(\cdot,t),\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}\varphi(x)\, dx \right) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2} \widehat{\varphi}(-\lambda)\, d\lambda,$$

其中 $\widehat{\varphi}$ 表示 φ 的傅里叶变换，它也属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$。现在我们考虑极限 $\epsilon \to 0^+$。逐点极限为，

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2}\widehat{\varphi}(-\lambda) = \lambda^m e^{-it\lambda^2}\widehat{\varphi}(-\lambda),$$

对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，由于 $\widehat{\varphi}$ 是施瓦茨函数，它满足快速衰减性质；对于任意 $N > 0$，我们有

$$|\widehat{\varphi}(-\lambda)| \le C_N (1+|\lambda|)^{-N}.$$

取 $N = m+2$，我们得到

$$|\lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2}\widehat{\varphi}(-\lambda)| \le |\lambda|^m |\widehat{\varphi}(-\lambda)| \le C_{m+2}(1+|\lambda|)^{-2},$$

这提供了一个可积的控制函数。因此，根据控制收敛定理，我们可以交换极限与积分，从而得到

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \langle I_m^\epsilon(\cdot,t),\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda^m e^{-it\lambda^2}\widehat{\varphi}(-\lambda)\, d\lambda.$$

这定义了 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的连续线性泛函，因此，极限

$$I_m(x,t) := \lim_{\epsilon\to 0^+} I_m^\epsilon(x,t)$$

以温和分布的意义存在。证明完毕。 □

这个极限使我们能够更精确地表述积分$I_m(x,\ t)$，即将其视为 $I_m^\epsilon(x,\ t)$ 的极限；我们可以利用以下公式 [（引自 9.253（引用积分教材））求出其精确值，具体如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ix)^v e^{-\beta^2 x^2 - iqx}\, dx = 2^{-\frac{v}{2}}\sqrt{\pi}\beta^{-v-1}\exp\left(\frac{-q^2}{8\beta^2}\right) D_v\left(\frac{q}{\beta\sqrt{2}}\right),$$

对于 $\mathrm{Re}\beta > 0$，$\mathrm{Re}(v) > -1$，$\arg ix = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\ x$；并且

$$D_n(z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

其中 H_n 是第 n 阶厄米多项式。由于 $x \in \mathbb{R}$，有 $\arg\ ix = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\ x$。对于 $\epsilon > 0$，取 $v = m$, $\beta^2 = (it+\epsilon)$, $q = -x$，得到

$$\begin{aligned} I_m^{\epsilon}(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2 + i\lambda x}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{i^m} 2^{-\frac{m}{2}} \sqrt{\pi} (it+\epsilon)^{-\frac{m+1}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{8(it+\epsilon)}\right) D_m\left(\frac{-x}{\sqrt{2(it+\epsilon)}}\right) \\ &= \frac{1}{i^m} 2^{-m} \sqrt{\pi} (it+\epsilon)^{-\frac{m+1}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{4(it+\epsilon)}\right) H_m\left(\frac{-x}{2\sqrt{it+\epsilon}}\right). \end{aligned}$$

于是我们看到，需要计算的积分 $I_m(x,\ t)$ 等价于

$$\begin{aligned} I_m(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0^+} I_m^{\epsilon}(x,t) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \lambda^m e^{-(it+\epsilon)\lambda^2 + i\lambda x}\, d\lambda \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{i^m} 2^{-m} \sqrt{\pi} (it+\epsilon)^{-\frac{m+1}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{4(it+\epsilon)}\right) H_m\left(\frac{-x}{2\sqrt{it+\epsilon}}\right). \end{aligned}$$

为了证明该极限定义良好，我们需要证明该极限存在。由于复值厄米多项式是整函数，并且与实厄米多项式 [15, 12, 13]，一致，我们得到

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} H_m\left(\frac{-x}{2\sqrt{it+\epsilon}}\right) = H_m\left(\frac{-x}{2\sqrt{2t}}(1-i)\right).$$

因此，我们可以得到 I_m 的如下闭式，

$$I_m(x,t) = \frac{1}{i^m} 2^{-m} \sqrt{\pi} (it)^{-\frac{m+1}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{i4t}\right) H_m\left(\frac{-x}{2\sqrt{it}}\right). \tag{4.1}$$

注4.3。根据 [6, 定理 6.5]，，我们有一个一般公式，指出对于 $a,\ b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，其中 $\Re(a) > 0$。于是对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2+bx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}} (-i)^n \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^n H_n\left(i\,\frac{b}{2\sqrt{a}}\right). \tag{4.2}$$

利用 $a = it,\ \ b = ix,\ \ n = m$。于是

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\pi}\,(it)^{-1/2}, \qquad \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) = \exp\left(\frac{(ix)^2}{4it}\right) = \exp\left(\frac{-x^2}{i4t}\right),$$

and

$$(-i)^m \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^m = (-i)^m\, 2^{-m} (it)^{-m/2} = i^{-m}\, 2^{-m} (it)^{-m/2} = \frac{1}{i^m}\, 2^{-m} (it)^{-m/2}.$$

此外，Hermite 论证变为 $i\frac{b}{2\sqrt{a}} = i\frac{ix}{2\sqrt{it}} = \frac{x}{2\sqrt{it}}$. 将~~这些~~代入 ~~(4.2)~~ 得

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^m e^{-it\lambda^2 + i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{i^m} 2^{-m} \sqrt{\pi}\,(it)^{-\frac{m+1}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{i4t}\right) H_m\left(-\frac{x}{2\sqrt{it}}\right),$$

这正是我们计算过的积分。不过，我们是在本节写成之后才证明了这个定理；此外，我认为本节内容颇有意思，值得保留。

5. Evolution Problems: Schrödinger equation for the free particle

阿哈罗诺夫等人给出了超振荡和超移位的薛定谔演化问题的一个解，见 [2]。对于

$$H\psi(x,t) := -\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}.$$

他们求解了以下柯西问题的时间演化

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = H\psi(x,t), \\ \psi(x,0) = F_n(x,a). \end{cases},$$

在 [6] 中，对具有初始条件的 L^2正则化柯西问题的一个解

$$\psi(x,0) = \phi_n(x)F_n(x,a).$$

对于不同的 $\phi_n(x)$，例如高斯函数和厄米多项式。本节旨在求解演化问题

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = H\psi(x,t), \\ \psi(x,0) = F_{n,\varphi}(x,a), \end{cases} \tag{5.1}$$

其中$F_{n,\ \varphi}$ 是与有效权函数 K_φ相关联的超移位序列。

定理5.1。 问题*5.1*的解为

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty} b_n(m)\exp\left(\frac{-x^2}{i4t}\right)H_m\left(\frac{-x}{2\sqrt{it}}\right),$$

其中 $b_n(m)$ 由下式给出

$$b_m = \frac{\sqrt{\pi}}{m!}\frac{1}{\varphi_{m+1}}2^{-2}(it)^{-\frac{m+1}{2}}\sum_{j=1}^{n} C_j(n,a)z_j^{1-m},$$

且 C_j, z_j 由(2.15)定义。

证明。 为求解该问题，我们对 $i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$应用傅里叶变换，然后求解所得的常微分方程。我们得到

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\lambda,t) = \lambda^2\hat{\psi}(\lambda,t) \implies \hat{\psi}(\lambda,t) = c(\lambda)e^{-i\lambda^2 t},$$

ˆ 其中常数 $c(\lambda)$ 根据初始条件 $\psi(\lambda,\ 0) = c(\lambda)$ 对所有$\lambda \in \mathbb{R}$ 且满足 $\psi(x,\ 0) = F_{n,\ \varphi}(x,\ a)$ 计算得到。利用初始条件和 $z_j = -i\left(1 - \frac{2j}{n}\right)$，可得 —

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\lambda,0) = c(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x}\psi(x,0)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x}F_{n,\varphi}(x,a)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{n} C_j(n,a)\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\lambda}K_\varphi\left(xz_j\right)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^m}{m!}\sum_{j=1}^{n} C_j(n,a)\int_{\mathbb{R}} x^m K_\varphi(xz_j)dx. \end{aligned} \tag{5.2}$$

作变量代换 $y = xz_j$, $dy = z_j dx$，并利用关系式 (2.3)，可得

$$\int_{\mathbb{R}} x^m K_\varphi(xz_j)dx = z_j^{1-m}\int_{\mathbb{R}} y^m K_\varphi(y)dy = z_j^{1-m}\mathcal{M}(K_\varphi)(m+1) = z_j^{1-m}\frac{1}{\varphi_{m+1}}.$$

合并各项，可得

$$c(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^m}{m!}\frac{1}{\varphi_{m+1}}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_j(n,a)z_j^{1-m}}_{:=c_n(m)} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^m c_n(m)}{m!}\frac{1}{\varphi_{m+1}}.$$

ˆ 将 $c(\lambda)$ 代回 $\psi(\lambda, t)$，得到

$$\hat{\psi}(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i)^m}{m!}\frac{1}{\varphi_{m+1}}c_n(m)\,\lambda^m e^{-i\lambda^2 t}.$$

为了求得 ψ，我们只需进行傅里叶逆变换，得到

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}\hat{\psi}(\lambda,t)d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i)^m}{m!}\frac{1}{\varphi_{m+1}}c_n(m)\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\lambda^m e^{-it\lambda^2+i\lambda x}\,d\lambda}_{=I_m(x,\ t)}.$$

在上一节中，我们研究了积分 $I_m(x, y)$，利用结果 (4.1)，可得

$$I_m(x,t) = \frac{1}{i^m}2^{-m}\sqrt{\pi}(it)^{-m-1}\exp\left(\frac{-x^2}{i4t}\right)H_m\left(\frac{-x}{2\sqrt{it}}\right).$$

按如下方式代入即可完成该问题,

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}\hat{\psi}(\lambda,t)d\lambda\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i)^m}{m!}\frac{1}{\varphi_{m+1}}c_n(m)\left[\frac{1}{i^m}2^{-m}\sqrt{\pi}(it)^{-\frac{m+1}{2}}\exp\left(\frac{-x^2}{i4t}\right)H_m\left(\frac{-x}{2\sqrt{it}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{m!}\frac{1}{\varphi_{m+1}}c_n(m)2^{-m}(it)^{-\frac{m+1}{2}}}_{=b_n(m)}\exp\left(\frac{-x^2}{i4t}\right)H_m\left(\frac{-x}{2\sqrt{it}}\right).\end{aligned}$$

□

致谢。作者谨向 Paula Cerejeiras 教授和 Uwe Kaehler 教授致谢，感谢他们进行的宝贵讨论并提出的真知灼见。他们的指导，尤其是从分布观点处理积分问题时给予的帮助，尤为有益。

References

1. Yakir Aharonov、David Z. Albert 和 Lev Vaidman, *How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-$\frac{1}{2}$ partiele can turn out to be 100* **60** 1988 ，《物理评论快报》（），1351–1354。2. Yakir Aharonov、Jussi Behrndt、Fabrizio Colombo 和 Peter Schlosser, *A unified approachto schrödinger evolution of superoscillations and supershifts*, 《演化方程杂志》**22** （2022），第1期。3. Yakir Aharonov、Fabrizio Colombo、Irene Sabadini、Daniele Struppa 和 Jeff Tollaksen, *Themathematics of superoscillations*, 第247卷，美国数学会，2017年。4. Yakir Aharonov、Fabrizio Colombo、Irene Sabadini、Daniele C. Struppa 和 Jeff Tollaksen, *Superoscillating sequences in several variables*, 《傅里叶分析与应用杂志》**22** （2016），第4期，751–767。

5. Natanael Alpay、Paula Cerejeiras 和 Uwe K
¨ *Generalized fock space and fractional* ahler，，。6. *derivatives with applications to uniqueness of sampling and interpolation sets* 2021
Natanael Alpay、Antonino De Martino 和 Kamal Diki, *On the complex representer theorem and relations between the Fock space and superoscillations* 2025 ，，预印本。

7. Natanael Alpay 和 Kamal Diki, *On the mittag–leffler bargmann (mlb) transform*, 《数学分析与应用杂志》**527**（2023），第2期，127458。8. Natanael Alpay 和 Tiju Cherian John, *Thermal states on mittag-leffler fock space of the slitted plane* **547** 2025 1 ，《数学分析与应用杂志》（），第期。9. Domenico Colombo、Rolf S. Krausshar、Irene Sabadini 和 Yilmaz Simsek, *On the generating functions and special functions associated with superoscillations* **340**，《离散应用数学》（2023），215–227。10. Fabrizio Colombo、Stefano Pinton、Irene Sabadini 和 Daniele C. Struppa, *The general theoryof superoscillations and supershifts in several variables*, 《傅里叶分析与应用杂志》**29**（2023），66；亦可见 arXiv:2301.13482 [math-ph]。11. J. J. Duistermaat, *Fourier integral operators*, 《数学进展》，第130卷，Birkh¨auser，1996年。12. Charles F. Dunkl 和 Yuan Xu, *Orthogonal polynomials of several variables*，第2版，《数学及其应用百科全书》第155卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014年。13. Gerald B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*，《数学年刊研究》第122卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1989年。14. Rudolf Gorenflo、Yuri Luchko 和 Francesco Mainardi, *Mittag-leffler functions related topics* ，，Springer，。*and applications* 2020
15. Katarzyna G
´ *Holomorphic hermite* orska、*polynomials in two variables* **470** 2019 2, 750 769
Andrzej Horzela 和 Franciszek Hugon Szafraniec，，《数学分析与应用杂志》（），第期–。16. Karlheinz Gr¨ochenig 和 Yurii Lyubarskii, *Gabor frames with hermite functions*, 《巴黎科学院数学报告》**344**（2007），第3期，157–162。17. Lars H¨ormander, *Fourier integral operators i*, 《数学学报》**127**（1971），79–183。18. Virginia Kiryakova, *Generalized fractional calculus and applications*, 《皮特曼数学研究札记丛书》第301卷，Longman Scientific & Technical，哈洛，1994年；与John Wiley & Sons联合在美国纽约出版。19. Joel A. Rosenfeld、Benjamin Russo 和 Warren E. Dixon, *The mittag–leffler reproducing kernel hilbert spaces of entire and analytic functions* **463** 2018 2, ，《数学分析与应用杂志》（），第期–。20. Michael E. Taylor, *Pseudodifferential operators and nonlinear pde*, 《数学进展》第100卷，Birkh¨auser，波士顿，1991年。21. Fran
¸ ` *Introduction to pseudodifferential and fourier integral operators vols. i and* cois Treves，，，*ii* 1980
Plenum Press，。

(NA) Department of Mathematics, University of California, Irvine, Irvine, CA 92697, USA*Email address*: nalpay@uci.edu