arXiv:2601.11831v1 [math.NA] 16 Jan 2026

利用局部数据实现全局恢复：物理域中二维纳维–斯托克斯方程的内部 nudging

RUI FANG 和 ALI PAKZAD*

摘要。在许多数据同化（DA）的实际应用中，合理部署观测器对于实现有效、高效的预测至关重要。受传感器部署实际限制的启发，我们证明，即使观测数据仅来自区域内的某个子区域，且该子区域可能远离边界，也能够实现流场的全局恢复。我们研究有界物理区域上满足狄利克雷边界条件的二维不可压纳维–斯托克斯方程。基于 Azouani、Olson 和 Titi（2014）的连续数据同化框架，我们严格证明，在 nudging 参数、空间分辨率以及观测区域几何形状满足适当条件时，同化解会在全局范围内收敛到真实解。具体而言，区域内任意一点到观测子区域的最大距离须在尺度意义上不超过 $\nu^{1/2}$ 的常数倍。我们采用有限元方法，在复杂几何形状上进行计算，所得结果支持理论结论，并显示该方法在实际应用中具有更强的鲁棒性。具体而言，即使观测子区域与区域其余部分的距离超过理论阈值，仍能实现与真实解的同步。在测试的所有三种情形中，局部 nudging 算法的表现与全区域同化相当，达到机器精度级别的全局精度。有趣的是，靠近边界的观测数据基本无法提供有效信息。这表明，完全可观测性并非必要：只要精心选择观测位置，即使内部观测远离边界，也足以实现目标。

1. 引言

数据同化（DA）是一类将观测数据与数学模型相结合，以提高预测准确性的方法 [2, 46]。随着传感技术和计算能力的发展，观测数据的数量和质量迅速提升，数据同化技术在科学预测中的作用和影响也日益重要。在天气和湍流预报中，观测数据由气象站、传感器或海洋浮标等仪器采集，而这些工作都需要大量

2010 数学学科分类。 主要分类：35Q30，34D06。次要分类：35Q93，93B07，76D10。关键词和短语。数据同化、纳维–斯托克斯方程、湍流、传感器布置、普朗特边界层。

*通讯作者。电子邮箱： pakzad@csun.edu。

人力、财力资源和后勤规划。在高维系统（如天气预报模型）的设计、预测、估计和控制中，如何优化这些观测器的布置是一项核心挑战 [14]。例如，在浅海测量流体速度或温度，要比在极深海域测量容易得多。同样，在太阳风建模等场景中，部署密集且均匀分布的传感器阵列显然并不可行。因此，从实际角度出发，传感器布置策略必须兼顾资源限制，同时实现较高的预测精度。通过确定数据最具信息量的位置，我们可以在提升模型性能的同时减少所需传感器的数量。近年来，控制理论和反问题领域为优化传感器布置、改善流场预测付出了巨大努力 [5, 10, 19, 56, 58, 59]。事实上，并非所有观测位置对状态估计的贡献都相同，这一点已得到充分认识 [14, 59]。尽管如此，除 Biswas、Bradshaw 和 Jolly 的研究 [6], 之外，现有关于连续数据同化 [3] （CDA；见第 1.1 小节）的严谨分析和计算结果大多都假设存在 全局可观测性；也就是说，假设整个空间域内都能均匀获得观测数据。尽管这一假设在数学上便于处理，却对现实应用构成了严重限制。我们的工作挑战了这一框架，证明仅凭来自区域某一子区域的局部观测数据，也有可能恢复系统的完整动力学。

本文对一种**仅依赖局部观测的全局数据同化算法**进行了严格分析，并辅以全面的计算研究。我们关注的是定义在有界物理区域 Ω 上、满足狄利克雷边界条件的二维纳维–斯托克斯方程（NSE）

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty), \tag{1.1}$$

其初始条件为 $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(x,0)$，而在实际应用中，这一条件通常无法完全获知。这里，$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,t)$ 表示“真实”的速度场，$p = p(x,t)$ 表示压力，$\mathbf{f} = \mathbf{f}(x,t)$ 表示给定的外部体力，$\nu > 0$ 表示运动黏度。在使用纳维–斯托克斯方程或其他相关非线性模型进行天气预报时，精确的初始条件 $\mathbf{u}_0$ 通常无法先验地完全获知 [43]。初始数据中的这种不确定性会带来重大挑战，因为由于系统 [43, 48–50] 的非线性特征，即使很小的误差也可能随时间呈指数增长。为克服这一困难，在数据同化中，观测测量值会被直接插入数学模型 [35, 44]。

受 [3], 启发，我们现在引入局部数据同化框架，其中解$\mathbf{u}$ 仅在一个远离边界的子区域内部分已知。具体而言，我们假设只有在内部子区域内Ω （$_0 \subset \Omega$，见图1a）内有速度场的粗粒度空间观测，而非覆盖整个物理

区域 Ω。用插值算子 $I_H(\mathbf{u})$ 表示这些观测，该算子作用于$\mathbf{u}$ ，提取其在 Ω_0 内分辨率为 H 的粗粒度空间网格上的数值。相应的局部数据同化算法表述为以下修正后的纳维–斯托克斯系统，其在物理域 Ω 内采用相同的狄利克雷边界条件

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla q = \mathbf{f} + \mu\big(I_H(\mathbf{u}) - I_H(\mathbf{v})\big), \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty), \tag{1.2}$$

其中

$$I_H\text{: localization operator that incorporates observational data only from a designated subregion } \Omega_0 \text{ of the domain,}$$

且$\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0$的初值是任意的。这里，$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ 是“近似”速度场，而 $\mu > 0$ 是松弛（nudging）参数。

本文的结果。 在建立了（1.2）中的框架后，我们进行了严格分析，证明仅利用从区域内部一部分收集的速度观测，无需在边界附近测量，也能够恢复完整流场。具体而言，我们在定理 4.1 中证明，如果区域中没有任何部分距离观测子区域过远（更准确地说，若区域内任意一点到观测区域的最大距离在尺度上始终低于与黏度平方根成比例的固定阈值，$\delta \lesssim \nu^{1/2}$[1]），那么在满足关于 nudging 参数和空间分辨率的标准条件时，局部同化解（1.2）会全局收敛到 $2D$ 纳维–斯托克斯方程（1.1）的真实解。这一结果表明，实现全局精度并不需要全局数据，甚至无需边界附近的数据，这一点颇为令人惊讶。然而，经过精心选择的区域内部局部观测便足以实现这一目标。

我们通过大量计算研究展示了该算法的有效性。在所有实验中，我们采用有限元方法，在具有复杂几何形状、不规则区域和真实边界条件的情况下进行模拟。本研究的一项关键技术挑战与创新之处，在于为插值算子构造一个局部粗有限元网格，使其与用于求解完整系统的全局细网格相兼容。这种兼容性确保了数学一致性和数值稳定性，同时支持局部数据同化。我们测试了三种流动情景

（1）平面障碍物上的流动（见第 5 节）；（2）环域中的库埃特流／剪切流（见第 6 节）；（3）偏心障碍物圆盘中的体力驱动流动（见第 7 节）。

[1]这与经典普朗特边界层厚度所遵循的尺度关系相同[53], 这表明，内部观测的有效性可能与近壁黏性流的物理结构有关。

所有流动均在狄利克雷边界条件下的有界物理区域内进行模拟。三项数值模拟均与定理 4.1 中证明的理论结果一致。我们观察到，当数据采集自远离边界的内部子区域时，局部松弛算法能够实现全局同步，达到机器精度；与全域松弛相比，其收敛速度通常略慢（但差异并不显著）。几乎在所有数值模拟中，我们发现边界附近的观测数据对松弛算法没有提供有效信息。为确保这一现象并非仅仅由数据密度或观测点数量的变化所致，我们还改变了局部数据同化区域的面积。尽管如此，观察到的趋势始终相同：内部观测能够有效实现同步，而边界观测在很大程度上仍未能提供有效信息。

参数的理论严格条件，即 nudging 参数 μ、观测点密度 H以及观测子区域与区域其余部分之间的距离 δ，在实践中都可以大幅放宽。即使局部观测区域距离边界比理论阈值所允许的更远，局部同化算法仍能表现良好，实现与真实解的全局同步，精度达到机器精度。这些理论限制在数据同化的框架中广为接受（例如，见 [11, 12, 22, 30, 32, 39, 54, 61]）。

1.1. 全局**连续数据同化**。利用观测数据提升数学模型的预测能力，可追溯至 Rudolph Kalman 在1960 [42], 年的研究，以及卫星观测系统问世并开始产生气候数据后，Charney、Halem 和 Jastrow 在 1969 [13], 年的研究。沿着这一思路，数据同化旨在仅凭粗略的部分观测[16, 43]恢复系统的精细尺度动力学。该领域的一项重要贡献是 Azouani、Olson 和 Titi [3], 提出的基于 nudging 的数据同化算法（又称 CDA）；其数学基础源自 Foias 和 Prodi [25] 关于决定泛函的早期研究。他们的方法的一项主要优势在于实现简单，且适用于严谨的数学分析，因此成为其他数据驱动技术的有力替代方案。

为描述连续数据同化算法，设 $\mathbf{u}(t)$ 是由下式控制的耗散动力系统的解

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = F(\mathbf{u}), \tag{1.3}$$

其中初始数据 $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ 并不完全已知。我们用 $I_h(\mathbf{u})$ 表示解的可观测状态，其中 I_h 是自治有界线性算子，表示向 $L^2(\Omega)$ 的有限维子空间上的正交投影。该算子满足

逼近性质

$$\|\phi - I_h(\phi)\|_{L^2(\Omega)} \le C_1 h \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.4}$$

对所有 $\phi \in H^1(\Omega)$，其中 $C_1 > 0$ 是一个与离散参数无关的常数h。算子 I_h 仅利用全局粗网格空间观测所提供的信息来逼近真实状态 h。对于本文所研究的不可压缩流， I_h 可理解为先对观测数据进行插值，再将其正交投影到无散（无旋）向量场空间。因此，I_h 是幂等且自伴的，即 $I_h^2 = I_h$ 且 $I_h^* = I_h$。例如，投影到低阶傅里叶模态上的正交投影 [41] ；更具物理动机的例子则是利用分片多项式有限元空间进行插值 [39]。

利用 [3]，中引入的 CDA 算法，将观测 I_h（$\mathbf{u}(t)$) 纳入如下辅助系统：

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = F(\mathbf{v}) + \mu \left(I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})\right), \tag{1.5}$$

其初始条件 $\mathbf{v}_0$任意。在适当条件下，即 μ 足够大且 h 足够小，可以得到

$$\mathbf{v}(t) \to \mathbf{u}(t)$$

在合适的函数空间中呈指数快速收敛。

基于插值的松弛已从理论和计算两个角度得到了广泛研究。奠基性的理论成果包括 Azouani、Olson 和 Titi 对 $2D$ 纳维–斯托克斯方程的收敛与误差分析 [3], ， 以及 Biswas 和 Price 将其扩展到 $3D$ 情形的工作 [7]。Rebholz 和 Zerfas [54]利用 L^2 投影算子给出了更多误差估计。基于插值的松弛广泛应用于各种流体力学问题，见 [1, 4, 11, 18, 20, 21, 23, 24, 31, 32, 38, 40, 51, 52, 60]。近期研究表明，除理想化模型外，即使存在模型误差或含噪观测，通过插值函数松弛进行的数据同化仍然有效 [15, 33, 45, 60]。研究还表明，nudging 参数 μ的选择对性能至关重要，因为它控制着同化强度；已有多项工作提出了自适应或优化的参数选择方法 [17, 61]。尽管存在集合卡尔曼滤波器和 $3D/4D$-VAR 方法等其他数据同化框架 [8, 43], ，但基于插值的松弛因其简单性和可证明的收敛性质，仍然颇具吸引力。

本文的组织结构。 第 2 节介绍分析中用到的不等式以及纳维–斯托克斯方程的预备结果。第 3 节简要介绍整个数值模拟中采用的有限元方法和数值方案；更重要的是，我们详细说明如何根据粗局部观测网格构建全局直接数值模拟（DNS）网格

。第 4 节陈述并证明主要理论结果。三个数值实验分别在展示解析结果的基础上进一步拓展，相关内容见第 5、6 和 7 节。最后，第 8 节讨论可能的改进和未来方向。

2. 预备知识

本节中的结果都是标准结果，可在任何关于纳维–斯托克斯方程[26] 或泛函分析的经典教材中找到 [9]。

令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ 且 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为边界为 C^2 的有界区域。令 $1 \le p \le \infty$，并用 p' 表示由 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$定义的共轭指数。假设 $\phi \in L^p(\Omega)$ 和$\psi \in L^{p'}(\Omega)$。那么，Hölder 不等式指出

$$\|\phi\,\psi\|_{L^1(\Omega)} \le \|\phi\|_{L^p(\Omega)}\,\|\psi\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{2.1}$$

此外，对于任意 a，$b \ge 0$ 以及 $\lambda > 0$，杨氏不等式可写为

$$ab \le \lambda a^p + \frac{1}{p'}\,(p\lambda)^{-\frac{p'}{p}}\,b^{p'}. \tag{2.2}$$

对于任意 $\phi \in H^1(\Omega)$，Ladyzhenskaya不等式指出

$$\|\phi\|_{L^4(\Omega)} \le 2^{1/4}\|\phi\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}. \tag{2.3}$$

设 $d(\mathbf{x}) = \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega)$。那么，对于任意 $\mathbf{u} \in W^{1,p}_0(\Omega)$，Hardy 不等式指出，存在一个无量纲常数 C_p，使得

$$\left\|\frac{\mathbf{u}}{d}\right\|_{L^p(\Omega)} \le C_p\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.4}$$

为支持接下来的分析，我们先回顾方程（1.1）的一些基本结果。这些结果广为人知，并已在文献中有所记载（例如，参见 [26, 57]）。记 λ_1 为 Stokes算子的最小特征值，则对于 $\phi \in H^1$，Poincaré不等式可表述为

$$\lambda_1\|\phi\|^2 \le \|\nabla\phi\|^2. \tag{2.5}$$

刻画系统复杂性的一个关键无量纲参数是 Grashof数，其定义为

$$G := \frac{1}{\nu^2\lambda_1}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.6}$$

定理2.1（2D中的强解存在性与唯一性）。设 $\mathbf{u}_0 \in H^1(\Omega)$ 且 $\mathbf{f} \in L^\infty((0,\infty); L^2(\Omega))$。则对于任意 $T > 0$，初值问题（1.1）存在唯一的强解 $\mathbf{u}$ 满足

$$\mathbf{u} \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap L^2\big(0,T; H^1(\Omega)\big), \quad \partial_t\mathbf{u} \in L^2\big(0,T; L^2(\Omega)\big).$$

定理 2.2。 固定 $T > 0$，令 G 为定义于 （2.6）中的 *Grashof*数。**设 u 是 （1.1）对应于初值 $\mathbf{u}_0$**的解。则存在一个时间t_0，其取决于 $\mathbf{u}_0$, ，使得对所有 $t \geq t_0$，均有：

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq 2\nu^2 G^2,$$

and

$$\int_t^{t+T} \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|^2 \, d\tau \leq 2\left(1 + T\nu\lambda_1\right)\nu G^2.$$

命题 2.3 (一致格朗沃尔不等式)。 设 $T > 0$ 为固定值。假设

$$\frac{d}{dt}Y + \alpha(t)Y \leq 0,$$

其中

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{t+T} \alpha(s)ds \geq \alpha_0 > 0,$$

则当 $t \to \infty$ 时， $Y(t) \to 0$ 指数收敛。

3. 网格构造与数值实现

本节介绍有限元方法所需的符号，并详细说明如何根据粗局部观测网格构造用于求解完整系统的全局网格，这是我们方法的关键组成部分。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个具有 C^2 边界的有界区域，并设 $\Omega_0 \subset \Omega$ 是一个子域；见图 1a。我们将 δ 定义为 Ω 中任意一点与子域 Ω_0之间的最大距离；即

$$\delta := \sup_{x\in\Omega} \operatorname{dist}(x, \Omega_0).$$

从此处起，我们用 Ω_δ 表示 Ω 与 Ω_0之间的区域；即

$$\Omega_\delta := \Omega \setminus \overline{\Omega_0}.$$

将速度和压力对应的自然函数空间分别记为

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &:= \mathbf{H}_0^1(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ on } \partial\Omega\right\}, \\
Q &:= L_0^2(\Omega) = \left\{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q \, dx = 0\right\}, \\
\mathbf{V} &:= \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{X} : \ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = 0 \text{ for all } q \in Q\right\}.
\end{aligned}$$

记Ω_h 为区域 Ω的正则协调三角剖分，并令 $\mathbf{X}^h \subset \mathbf{X}$ 和$Q^h \subset Q$ 构成一对满足 inf-sup 条件的稳定离散速度—压力空间（更多详情见 [37] 。此外，我们将离散无散空间 $\mathbf{V}^h$ 定义为

$$\mathbf{V}^h := \left\{\mathbf{v}^h \in \mathbf{X}^h : (q^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h) = 0 \quad \text{for all } q^h \in Q^h\right\}.$$

对于所有数值模拟，我们按照算法 3.1采用 IMEX（隐式-显式）格式进行时间离散化，以避免在每个时间步长求解非线性问题。空间离散化基于有限元方法。我们假设速度–压力有限元空间 $(\mathbf{X}^h, Q^h) = (\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_1)$即 Taylor–Hood 元，满足 inf-sup 稳定性条件，格式的详细说明见 [47]第 9 章。

算法 3.1. 给定体力 $\mathbf{f} \in L^\infty((0, \infty) L^2(\Omega))$、初始条件 $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}^h$、参考解 $\mathbf{u}_{n+1}$以及 $(\mathbf{v}_n^h, q_n^h) \in \mathbf{X}^h \times Q^h$，计算满足以下条件的 $(\mathbf{v}_{n+1}^h, q_{n+1}^h) \in \mathbf{X}^h \times Q^h$

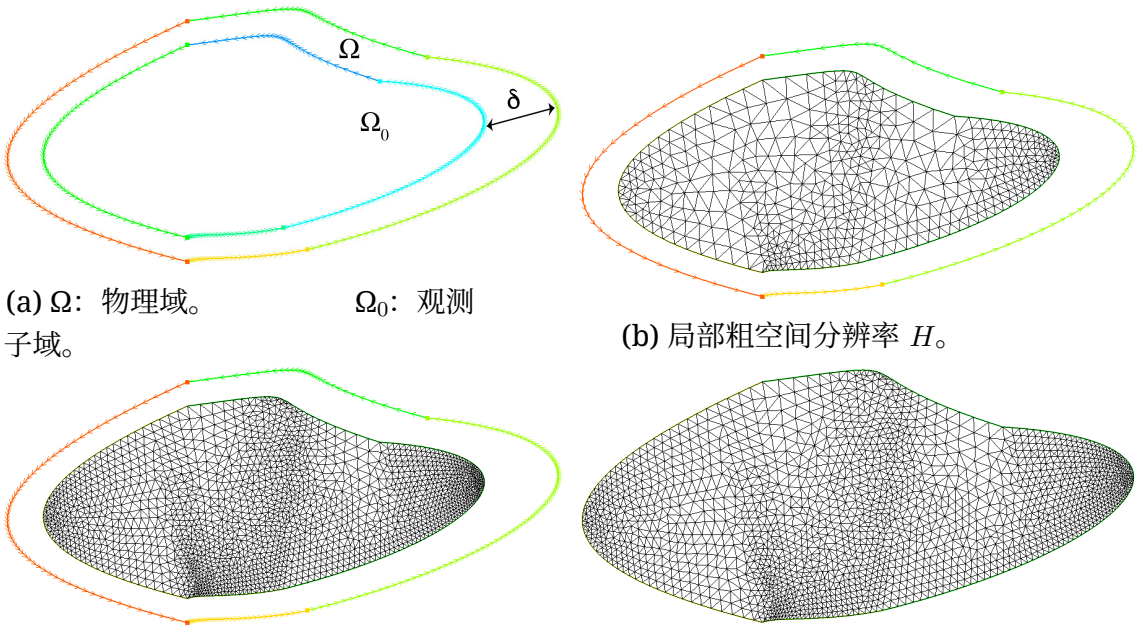
$$(\frac{\mathbf{v}_{n+1}^h - \mathbf{v}_n^h}{\Delta t}, \Theta^h) + b(\mathbf{v}_n^h, \mathbf{v}_{n+1}^h, \Theta^h) + \nu\,(\nabla \mathbf{v}_{n+1}^h, \nabla \Theta^h) - (q_{n+1}^h, \nabla \cdot \Theta^h) = (\mathbf{f}_{n+1}, \Theta^h) - \mu\,(I_H(\mathbf{v}_{n+1}^h - \mathbf{u}_{n+1}), \Theta^h), \tag{3.1}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_{n+1}^h, r^h) = 0, \tag{3.2}$$

对于所有 $(\Theta^h, r^h) \in \mathbf{X}^h \times Q^h$.

为尽量减少不确定性、全面控制观测的分辨率并评估重建精度，我们从独立的直接数值模拟中提取观测数据。 $I_H(\mathbf{u}_{n+1})$ 表示在粗空间分辨率和时间步长 t_{n+1}下，限制在子域Ω_0内的局部观测；全局近似解 $\mathbf{v}^h$从任意初始条件出发，使用算法 3.1进行计算。注意，在时间 t_{n+1}时，真实解的相关数据已经采集完毕；因此，$I_H(\mathbf{u}_{n+1})$ 可理解为在整个 Ω_0范围内最近采集到的局部数据。在所有实验中，算法均使用公共领域有限元软件 `FreeFEM++` [34]实现。在所有数值测试中，我们通过将使用上述算法计算得到的局部同化解 $\mathbf{v}^h$与通过直接数值模拟获得的参考解 $\mathbf{u}^h$ 进行比较，来评估重建的精度和稳健性。

局部到全局网格构造。模拟中的一项挑战，是为插值算子构造局部粗有限元网格，使其与用于求解整个系统的全局 DNS 网格相兼容。这种兼容性既能确保数学一致性和数值稳定性，也有助于实现局部化数据同化。在展示主要结果之前，我们先以一个一般的二维区域演示这一过程。考虑一个表示有界物理区域的 Bézier 曲面$\Omega \subset \mathbb{R}^2$，并令$\Omega_0 \subset \Omega$表示观测子域，在该子域中可以获得局部粗空间测量数据；见图1a。我们首先在 H 内构造最粗的网格$\Omega_{0,}$，其分辨率对应于采集局部观测数据时所用的分辨率，见图1b。每个粗



(a) Ω：物理域。 Ω_0：观测子域。

(b) 局部粗空间分辨率 H。

(c) 局部 DNS 网格。

(d) 全局 DNS 网格 h。

图 1. 区域网格设置：从局部粗观测到全局 DNS 网格。

网格单元随后进一步划分为更多子三角形，从而在子域Ω_0, 内生成与 DNS 分辨率相一致的细网格，见图1c。最后，将该细网格扩展至覆盖整个区域Ω，其中 h 表示最细的全局 DNS 网格尺寸；见图1d。

4. 严格分析；同步

定理 *4.1.* 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个边界为 C^2 的有界区域，且 $\Omega_0 \subset \Omega$ 是一个子域，其 $\delta := \sup_{x\in\Omega} dist(x, \Omega_0)$。设 u 是 Ω 上不可压缩二维纳维–斯托克斯方程 *(1.1)* 的解，并满足无滑移狄利克雷边界条件。设 v 是由 *(1.2)* 给出的近似解，其中 I_H 是局部化算子，它将子区域 Ω_0，的观测数据纳入其中，并满足 *(1.4)*。那么，

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

在满足以下条件的情况下：

$$4\,C_1\mu H^2 \le \nu, \quad \mu \ge 4\,G^2\nu\lambda_1, \quad and \quad \delta \le \frac{C_1}{C_p}\,H.$$

注 4.2： **边界层条件在实际应用/数值模拟过程中可以放宽**。从实际角度来看，上述对参数 μ、 H 的限制，尤其是条件 $\delta \lesssim H \sim \mathcal{O}(\nu^{1/2})$，可能显得过于保守。

然而，在数据同化及其严格的分析框架中，此类限制是可以充分理解的（例如参见 [11,12,22,30,32,39,54,61]），因为这些界限源自经典不等式和能量估计，难以进一步改进，但仍是标准且得到广泛认可的结果。正如我们的数值模拟所展示的那样，这些理论限制在实际应用中已得到显著放宽。因此，如何通过替代性的数学技术或针对具体问题的改进，建立限制性更低且能更好反映计算实验中所观察到的稳健性的分析准则，仍是未来研究中一个开放且引人关注的方向。

证明。 将（1.1）与（1.2）相减，差值 $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ 满足

$$\partial_t \mathbf{e} + \mathbf{e}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{e} - \nu\Delta\mathbf{e} + \nabla(p-q) = -\mu I_H(\mathbf{e}), \quad \nabla\cdot\mathbf{e} = 0.$$

利用不可压缩性，并将上述差分方程乘以 $\mathbf{e}$ 后，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu\|\nabla\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)} = -(\mathbf{e}\cdot\nabla\mathbf{u},\mathbf{e}) - \mu\|I_H(\mathbf{e})\|^2_{L^2(\Omega_0)} := \mathrm{I} + \mathrm{II}. \tag{4.1}$$

利用 Hölder 不等式和 Young 不等式（2.1）和（2.2），以及（2.3），可将上式中的第一项估计为

$$\begin{aligned} |(\mathbf{e}\cdot\nabla\mathbf{u},\mathbf{e})| &\le \|\mathbf{e}\|^2_{L^4(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \le 2^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{e}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{e}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{\nu}{2}\|\nabla\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\nu}\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

接下来估计（4.1）中的第二项。首先注意到

$$\|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} \le \|I_H(\mathbf{e})\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|(I-I_H)(\mathbf{e})\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega_\delta)}, \tag{4.3}$$

上述不等式右端的第二项可作如下界定

$$\|(I-I_H)(\mathbf{e})\|^2_{L^2(\Omega_0)} \le (C_1H)^2\|\nabla\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega_0)} \le (C_1H)^2\|\nabla\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

然后，利用 Hardy 不等式（2.4），我们得到（4.3）中最后一项的如下估计

$$\|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} \le (C_p\delta)^2\|\nabla\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} \le (C_p\delta)^2\|\nabla\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

现在，由（4.3）以及上述两个估计，可得

$$\|I_H(\mathbf{e})\|^2_{L^2(\Omega_0)} \ge \|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)} - 2\max\{C_1^2H^2, C_p^2\delta^2\}\|\nabla\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.4}$$

在假设 $\delta \le \frac{C_1}{C_p}H$ 和 $4C_1\mu H^2 \le \nu$ 下，并在（4.2）和（4.4）中使用（4.1）中的估计，我们得到如下结果

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)} + \left[2\mu - \frac{1}{2\nu}\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)} \le 0.$$

接下来，利用定理 2.2中得到的界，可以选取 $T = \frac{1}{\nu\lambda_1}$ 和 $\mu \geq 4\,G^2\nu\lambda_1$,从而得到

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{t+T} \left(2\mu - \frac{1}{2\,\nu}\|\nabla \mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\right) ds \geq \alpha_0 =: 2G^2 > 0.$$

然后，应用标准的 Gronwall 不等式（命题 2.3），并结合

$$\alpha(t) = 2\mu - \frac{1}{2\,\nu}\|\nabla \mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega)},$$

由此可知，$\|\mathbf{e}\|^2_{L^2(\Omega)} \to 0$ 呈指数衰减，当 $t \to \infty$ 时。 □

注 4.3。 我们注意到，在采用更高正则性假设（例如 $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$）时，正如 García-Archilla、Novo 和 Titi [29], 所考虑的，可能有望改进 nudging 参数 μ的上界。对此可能性的详细研究留给感兴趣的读者。

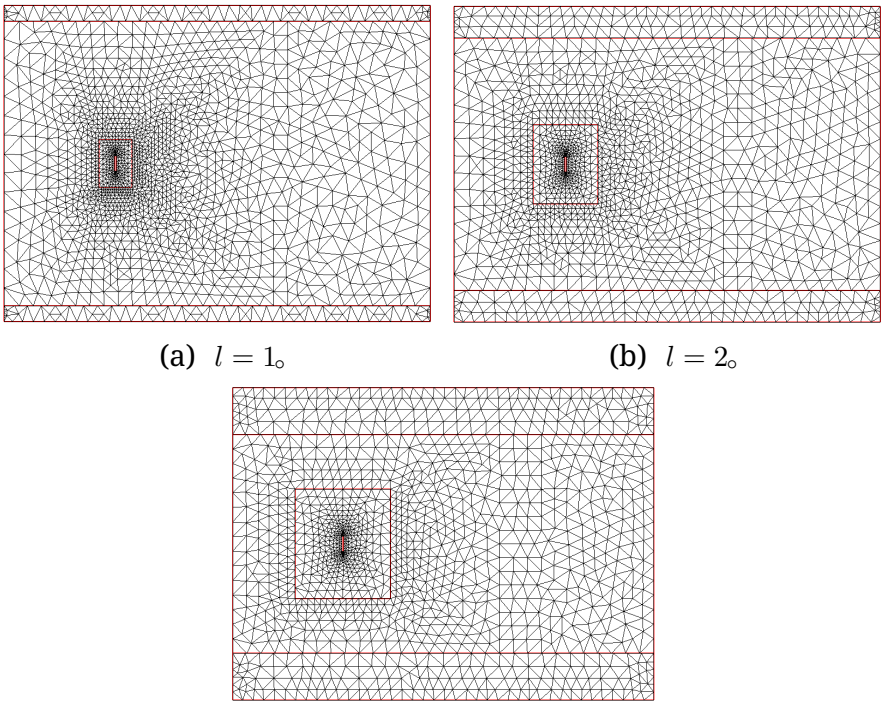
5. 计算研究 I：平坦障碍物上的流动

本节中，我们使用算法 3.1，对平面障碍物上的流动进行数值测试，设置基于 [30,61] 中所述内容。计算域为矩形通道 $[-7, 20] \times [0, 20]$，其中包含一个尺寸为 0.125×1、中心位于(0.075,0) 的平板障碍物。我们将区域 Ω 划分为三个子区域，以研究局部数据同化的影响：$\Omega_j \subset \Omega \quad j = 1,2,3$ （图 2a），定义如下：

- 区域 1 (Ω_1)：以平板为中心的盒状区域，其厚度为 $2l$，并向外延伸，超出平板的长度和宽度。
- 区域 2 (Ω_2)：顶部和底部壁面层与盒状区域之间的区域。
- 区域 3 (Ω_3)：靠近顶部和底部壁面的边界层，厚度为 l。

在上述设置下，我们考察三种情形。首先，对于厚度参数 $l = 1$，我们使用 Delaunay–Voronoi 三角剖分方法在每个子域上生成分辨率为 H 的粗网格（见图 2a），并在这些子域中采集观测数据。随后，将该粗网格中的每个三角形细分，生成分辨率为h 的更精细 DNS 网格；详细信息见表 1 。此外，为改变数据密度和观测数据点的数量，我们通过将层厚增加至Ω_1,Ω_2,Ω_3，调整观测区域 $l = 2$ 和 $l = 3$ （见图 2b 和 2c）。在每种配置中，区域 1 和 3 随之扩展，而区域 2 则相应缩小。更多详情见表 2和 3。

我们不施加外力，流动由流入速度驱动，$u_{\text{in}} = \langle 1,\ 0\rangle^T$。我们在障碍物和壁面处施加无滑移边界条件，并在流出边界处施加弱零牵引边界条件。我们设置雷诺数 $\mathcal{R}e \sim 600$、时间步长 $\Delta t = 0.02$ 和终止时间 $T = 81$，对应三个周转



(a) $l = 1$。 (b) $l = 2$。

(c) $l = 3$。

图2。在区域 Ω 内构造局部粗网格，展示了三个子区域。区域 1（Ω_1）：以平板为中心的盒状区域；区域 2（Ω_2）：顶部和底部壁面层与盒状区域之间的内部区域。区域 3（Ω_3）：靠近顶部和底部壁面的边界层。

区域	# 顶点	# 每个区域的顶点数	网格最大尺寸
Ω（直接数值模拟）	7322	14	0.85
Ω_1	278	45	0.40
Ω_2	1447	3	1.70
Ω_3	204	4	1.16

表 1. $l = 1$ 平面障碍物网格流动的详细信息。

次。这里，周转时间基于完整的流向域长度，即长壁长度 $= 27$。由于该测试考察的是贯流问题，因此它评估三个周转时间内的误差，而不是更长时间段内的误差。尽管如此，流动仍然很复杂，具有许多引人入胜的特征，是一个标准测试问题 [30, 61]。

区域	# 顶点	# 每个区域的顶点数	网格最大尺寸
Ω（直接数值模拟）	6312	12	0.75
Ω_1	364	18	0.68
Ω_2	1003	2	1.51
Ω_3	310	3	1.22

表 2. $l = 2$ 的平面障碍物上的流动网格详情。

区域	# 顶点	# 每个区域的顶点数	网格最大尺寸
Ω（直接数值模拟）	5736	11	0.69
Ω_1	428	10	0.95
Ω_2	722	2	1.38
Ω_3	383	2	1.35

表3. $l = 3$ 平面障碍物流动网格的详细信息。

真实初始条件 $\mathbf{u}_0$ 通过求解具有相同边界条件且外力为零的定常Stokes问题生成，随后在 DNS全局网格 h 上求解 NSE，得到真实解。全局细网格的自由度总数为 50182。为启动数据同化模拟，我们假设数据同化系统中的流动初始时处于静止状态，即在 $t = 0$ 时 $\mathbf{v}_0 = 0$ ，并将 nudging 参数设为 $\mu = 5$。

观测位置的影响：边界与内部。图 3 展示了速度差在 L^2 范数下的相对误差随时间的演化，其中速度差是参考解 u 与局部推 nudging解 v 之间的差异；观测数据分别采集自不同区域：区域 1（Ω_1）、区域 2（Ω_2）、区域 3（Ω_3）以及区域1和区域3的并集（$\Omega_1 \cup \Omega_3$）。作为比较，每种情况下还展示了全局（全区域）松弛的结果（蓝色实线），其中数据采集自整个区域 Ω。在全部三种情况（$l = 1$、2、3）下，使用远离边界的内部区域 $\Omega_{2,}$ 中的数据时，均实现了完全同步，但其收敛速度略慢于全局数据同化。相比之下，在边界附近采集的数据（即来自区域 Ω_1 和 Ω_3的数据）对同步几乎没有改善，甚至没有任何改善。即使结合区域 1 和区域 3 的观测，这种有限的有效性仍然存在。需要注意的是，在我们的最终模拟（图 3c）中，内部观测区域 Ω

$_2$ 缩小后，仍然实现了全局同步。然而，收敛需要明显更长的时间，这凸显出：尽管内部观测确实足够，但观测区域的空间范围在决定同化过程的效率方面发挥着关键作用。

此外，在图 4中，我们比较了不同层厚度参数下，针对区域 2 的局部松弛算法的表现，并考察了更长的时间区间 $l\ T = 182$。对应于 $l = 1$ 的误差下降最快，并在约 $t = 15$ 时达到完全同步。对于 $l = 2$，约在 $t = 60$ 时收敛；而对于 $l = 3$，则在约 $t = 140$ 时实现完全同步。这一趋势是因为扩大观测区域能够提供更多信息，从而提升同化性能。

5.1. **不同 nudging 参数下的局部数据同化**。 我们还改变了施加于区域 μ 的 nudging 参数2，取值为 $\mu = 0$、1、5、10，以研究其对误差的影响。所有实验均设置 $l = 1$。从图 5 中可以看到，对于较大的 μ，在较长时间内，对区域 2 进行数据同化的效果显著更好；$\mu = 5$ 和 $\mu = 10$ 的结果相近。对于较小的值 $\mu = 1$，其表现也远优于无数据同化系统。

6. 计算研究II：库埃特流

在本节中，我们研究不存在体力且具有切向边界条件的二维库埃特流。我们的数值实验受 Couette and Taylor 的工作启发，被称为泰勒实验 [28]。在泰勒实验中，使用两个同心且非常长的圆柱体，圆柱体之间的空间充满液体。每个圆柱体都可以独立旋转。考虑该实验的一个 $2D$ 切片，其中区域 Ω 是定义为

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0.1^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1^2\}.$$

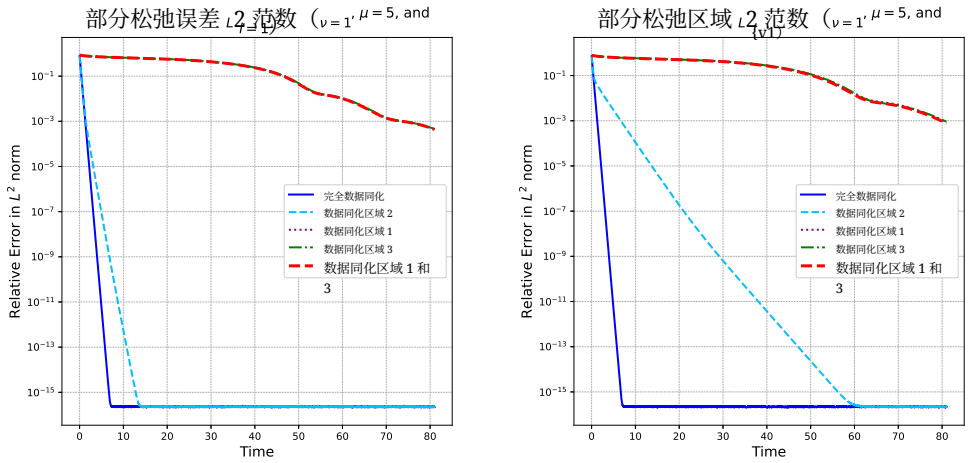
流动由内圆和外圆同时旋转驱动，其中一个顺时针旋转，另一个逆时针旋转。在不存在体力 $\mathbf{f} = 0$的情况下，我们将雷诺数设为 $\mathcal{R}e = 600$。

在上述区域 Ω 内，我们使用人工边界引入三个子区域，这些边界由以下参数方程定义，适用于 $s \in [0, 2\pi]$ with

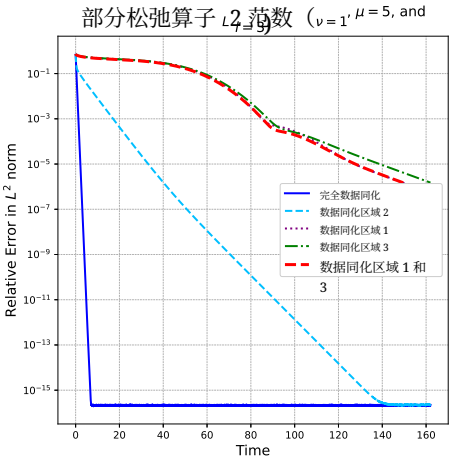
$$r_1 = 0.2 \text{ and } r_2 = 0.9$$

as

$$\text{Border } C_1(s) : \{x = 0.1\cos(s),\ y = 0.1\sin(s)\},$$
$$\text{Border } C_2(s) : \{x = r_1\cos(s),\ y = r_1\sin(s)\},$$



(a) 带有 $l = 1$ 的平坦障碍物上的流动。(b) 带有 $l = 2$ 的平坦障碍物上的流动。



(c) 带有 $l = 3$ 的平坦障碍物上的流动。

图 3. 使用局部数据同化算法对平坦障碍物上的流动进行处理的结果比较，所用数据采集自区域内的不同区域：Ω_1, Ω_2, 和 Ω_3。

$$\text{Border } C_3(s) : \{x = r_2 \cos(s),\ y = r_2 \sin(s)\},$$
$$\text{Border } C_4(s) : \{x = \cos(s),\ y = \sin(s)\}.$$

利用这些边界，我们定义三个子区域：$\Omega_j \subset \Omega$ $j = 1$、2、3（图6），如下所示

- 区域 1 (Ω_1)：由 C_1 和 C_2围成的区域，是最靠近内圆盘的部分。

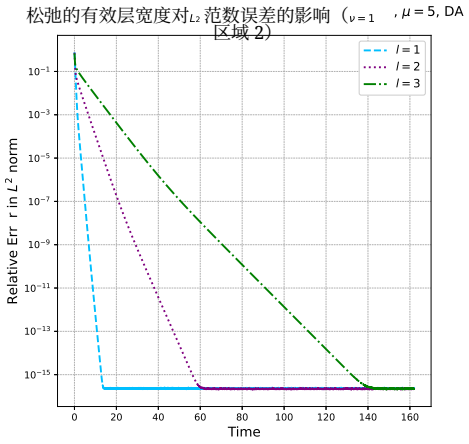


图 4. 对 Ω_2 采用不同参数进行局部数据同化时的相对误差 l.

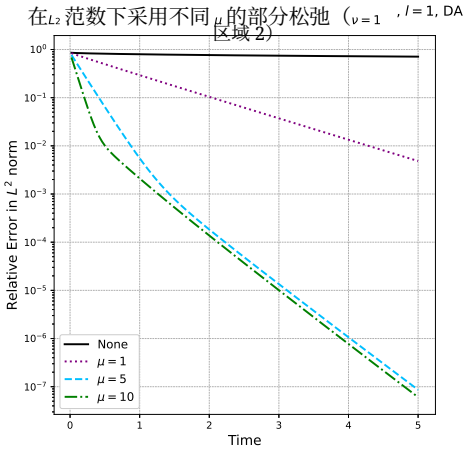
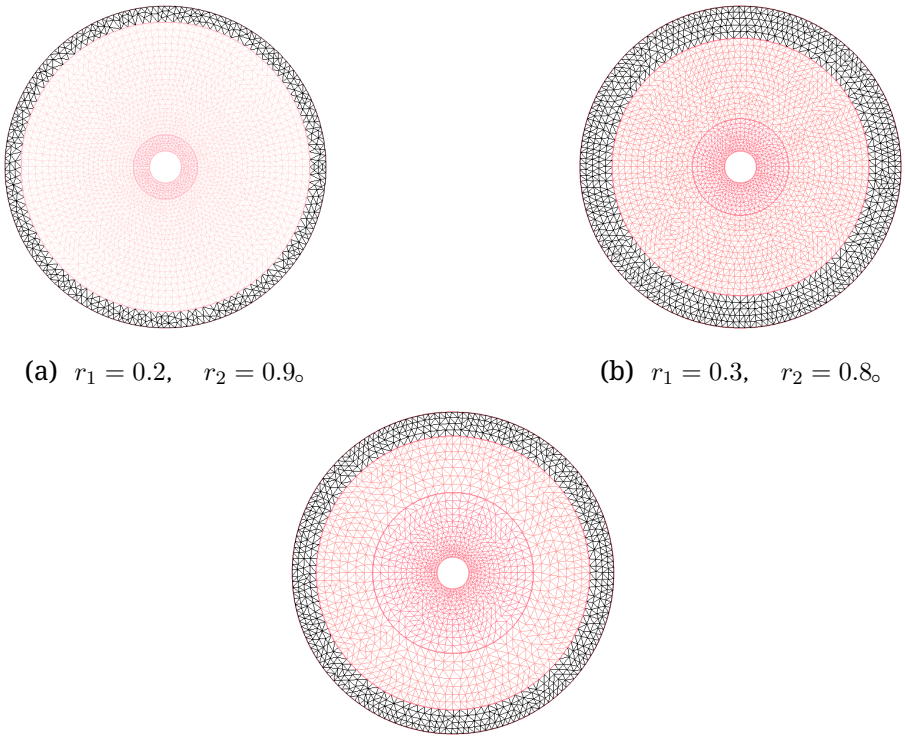


图 5. 对 Ω 进行数据同化时不同 μ 值下的相对误差 s.

- 区域 1 (Ω_2)：由 C_2 和 C_3围成的区域，表示内外区域之间的部分。
- 区域 1 (Ω_3)：由 C_3 和 C_4围成的区域，也是最靠近外边界的区域。

我们首先使用德劳内-沃罗诺伊方法在每个子区域上构造粗网格 H，用于收集数据，见图 6a。随后将每个三角网格细分为四个子网格，以生成 DNS 网格 h。在整个细化过程中，我们确保尺度能够解析至柯尔莫哥洛夫耗散尺度，$h_{\max} \leq \mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}}$。关于 DNS 网格和局部网格的详细信息见表4。

采用算法 3.1中所述的方案，我们考虑时间区间 $[0, 100]$，时间步长为 $\Delta t = 0.01$，遵循 [36]中的方法。为生成初始条件



(a) $r_1 = 0.2, \quad r_2 = 0.9$。 (b) $r_1 = 0.3, \quad r_2 = 0.8$。

(c) $r_1 = 0.5, \quad r_2 = 0.85$。

图6. 区域 Ω 内的局部粗网格构造，展示了三个子区域：Ω_1 （最靠近内圆盘—深红色）、Ω_2 （位于内圆盘与外部区域之间—浅红色），以及 Ω_3 （最靠近外边界—黑色）。

区域	# 顶点	# 每个区域的顶点数	网格最大尺寸
Ω（直接数值模拟）	12293	3965	0.037
Ω_1	356	3747	0.029
Ω_2	2379	992	0.064
Ω_3	572	969	0.074

表 4. $r_1 = 0.2, \quad r_2 = 0.9$ 的库埃特空间网格详情。

对于真实解，我们首先从零初始状态出发，在指定的剪切边界条件下运行模拟，直至 $t = 5$。随后将 $t = 5$ 时的状态用作后续模拟的初始条件，记为 $\mathbf{u}_0^h$。对于数据同化算法，我们从 $\mathbf{v}_0^h = \mathbf{0}$ 开始，其中 $\mu = 10$。对于插值函数，我们在局部区域 Ω_2, 内的网格 H 上采用局部线性插值；该网格比 DNS 网格粗四个层级。

区域	# 顶点	# 每个区域的顶点数	网格最大尺寸
Ω（直接数值模拟）	10545	3401	0.032
Ω_1	526	2140	0.043
Ω_2	1425	828	0.057
Ω_3	919	813	0.064

表 5. $r_1 = 0.3, \quad r_2 = 0.8$ 的库埃特空间网格详情。

区域	# 顶点	# 每个区域的顶点数	网格最大尺寸
Ω（直接数值模拟）	7973	2571	0.042
Ω_1	747	996	0.071
Ω_2	733	495	0.084
Ω_3	747	858	0.066

表 6. $r_1 = 0.5, \quad r_2 = 0.85$ 的库埃特空间网格详情。

观测位置的影响：边界与内部。 图 7a 展示了 L^2 参考解与推导解之间速度差的范数随时间的演化，采用了局部和全局数据同化。当使用远离边界的内部区域 Ω_2, 中的数据时，可以实现完全同步，但速度略低于全域同化。相比之下，在边界附近（区域 Ω_1 和 Ω_3）采集的观测数据基本没有提供有用信息。

接下来，我们通过调整人工边界 $C_1(s)$ 和 $C_2(s)$ 的半径，再改变两次观测数据区域，使其

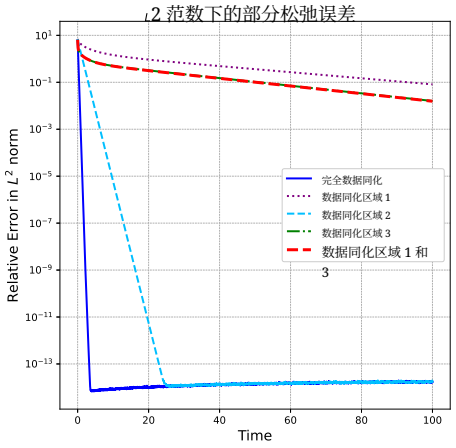
$$r_1 = 0.3 \quad \text{and} \quad r_2 = 0.8,$$

and

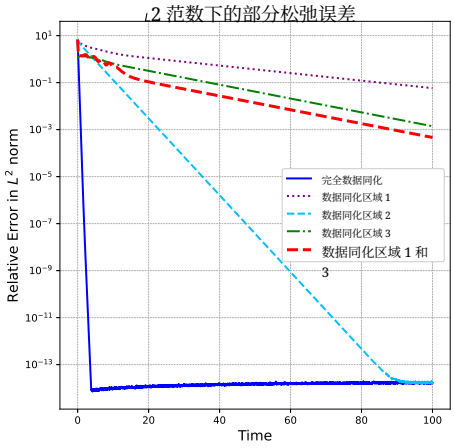
$$r_1 = 0.5 \quad \text{and} \quad r_2 = 0.85.$$

在这些配置中，外部子域 Ω_1 和 Ω_3 变大，而内部子域 Ω_2 变小；见图 6b 和图 6c。DNS 网格和局部同化网格的详细信息分别列于表5 和 6中。观察到相同的现象（见图 7b 和 7c）：使用内部区域 Ω_2, 的数据时，始终能够实现完全同步；而在靠近

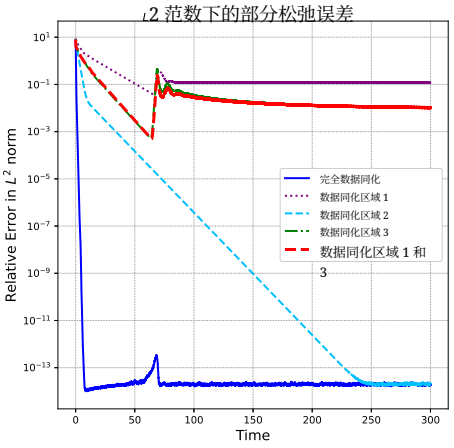
边界（来自区域 Ω_1 和 Ω_3）的数据对同化过程的影响仍然微乎其微，甚至毫无影响。在最后一项测试 7c中，内部观测区域 Ω_2 显著缩小，同步仍然得以实现，但所需模拟时间大幅延长。这进一步表明，尽管内部观测足以实现同步（正如预期），观测区域的大小和密度会显著影响收敛速率。



(a) 库埃特流 $r_1 = 0.2,\ r_2 = 0.9.$



(b) 库埃特流 $r_1 = 0.3,\ r_2 = 0.8.$



(c) 库埃特流 $r_1 = 0.5,\ r_2 = 0.85.$

图7. 比较采用数据同化算法处理 $2D$ 库埃特流的结果，所用数据采自区域内的不同区域：Ω_1,Ω_2, 和 Ω_3。

7. 计算研究 III：具有非齐次狄利克雷边界条件的受迫流动

在第三个实验中，我们考虑偏心圆之间的流动。简言之，与第 6 节之前的测试相比，我们打破了区域的对称性，并引入了驱动力。该区域由一个圆盘构成，其中移除了一个较小的偏心内圆盘，其定义如下

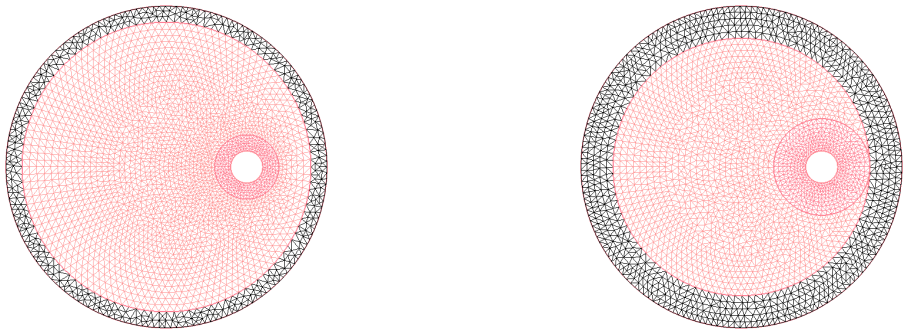
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1^2 \quad \text{and} \quad (x - 0.2)^2 + y^2 \geq (0.1)^2\},$$

两个圆上均采用无滑移边界条件。雷诺数为 $\mathcal{R}e = 600$，此外，流动还受到逆时针旋转的定常体力驱动

$$\mathbf{f}(x, y) = (-4y(1 - x^2 - y^2), 4x(1 - x^2 - y^2))^\top.$$

逆时针方向的力使流动绕 (0，0) 旋转，并与浸没圆（障碍物）相互作用。这会形成冯·卡门涡街，该涡街与湍流中常见的近壁条带和中心涡相互作用。

沿用之前的方法，每个子区域 Ω_1, Ω_2, 和 Ω_3 均已通过沿 x 轴平移 0.2 个单位进行了调整，以体现相关修改，见图 8。



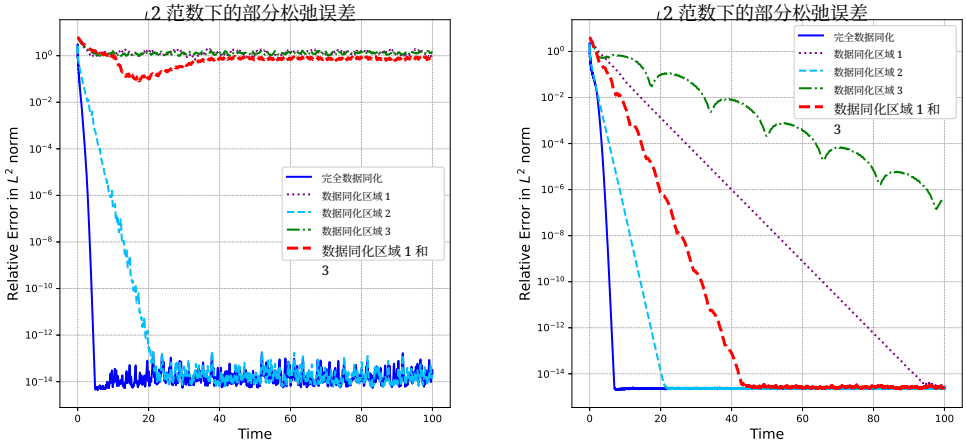
(a) $r_1 = 0.2, \quad r_2 = 0.9$。 (b) $r_1 = 0.3, \quad r_2 = 0.8$。

图 8. 区域 Ω 内的局部粗网格构造，展示了三个子区域：Ω_1 （最靠近内圆盘—深红色）、Ω_2 （位于内圆盘与外部区域之间—浅红色）以及 Ω_3 （最靠近外边界—黑色）。

真实初始条件 $\mathbf{u}_0$ 通过求解具有相同体力 $\mathbf{f}(x, \ y)$ 和非齐次边界条件的定常Stokes问题生成。鉴于该问题不存在精确解，我们采用直接数值模拟解 $\mathbf{u}^h$ 作为参考解。

观测位置的影响：边界与内部。该实验的结果（见图9a 和9b）再次证实了此前的发现：使用来自远离边界的内部区域Ω_2, 的局部数据进行同化，可实现全局同步

直至机器精度；而在边界区域 Ω_1 和 Ω_3获取的观测，对于同化过程几乎没有任何有用信息。



(a) 偏心圆之间的流动 r_1 =(b) 偏心圆之间的流动 r_1 =0。2， $r_2 = 0.9$。0。3，$r_2 = 0.8$。

图9。比较将数据同化算法应用于偏心圆之间的受迫流动时的结果，其中数据采集自区域内的不同区域：Ω_1, Ω_2,和 Ω_3。

8. 讨论

鉴于湍流的混沌特性，仅通过插值稀疏观测来估计湍流状态是无效的。数据同化通过将观测（通过传感器或其他测量技术采集）与基于控制物理模型的数值模拟相结合，解决了这一挑战，从而能够高保真地重建整个流动状态。由于传感器布置受到实际条件的限制，要高效重建完整的湍流流动，就需要有策略地布置传感器，重点观测对系统影响最大的流动特征；这样，每次观测都能为整体动力学提供最大限度的信息。本研究采用松弛算法应对这一挑战。研究结果凸显了局部数据同化在降低观测成本的同时保持预测保真度的潜力。

以多种方法开展的先前研究 [5, 19, 56, 58] 表明，壁面数据可用于重建近壁湍流，但除此之外，只能重建流场外部的大尺度结构。我们的结果与 Zaki 和 Wang 的发现相呼应 [59], 他们观察到，尽管壁面测量能够揭示近壁湍流结构，但从这类数据中只能恢复外流中的大尺度运动。此外，我们的模拟证实，在边界附近采集的观测不足以重建

高保真度的完整流场。然而，与基于壁面的传感方式存在的局限不同，我们通过理论分析和数值实验表明，利用位于区域内部更深处的观测，可以重建包括小尺度结构在内的完整湍流状态。这表明，与传统的基于壁面的方案相比，在远离边界处进行有针对性的传感能够带来更强的预测能力，凸显了在实际应用中策略性布置内部传感器以高效重建流场的潜力。

与 Biswas、Bradshaw 和 Jolly 的研究一致 [6], ，我们也证明，仅利用区域子区域内的观测即可实现完整流场重建。尽管他们的理论结果依赖于周期 $2D$ 环面上的谱方法，我们的工作将这些见解拓展到更贴近物理实际的情形：在具有狄利克雷边界条件的有界区域上求解二维不可压纳维–斯托克斯方程，并采用有限元方法在复杂几何形状上进行数值模拟。值得注意的是，我们发现边界附近的数据往往缺乏信息价值。

我们的发现中一个值得注意之处是，近边界观测对于实现流场全局同步的作用有限。乍看之下，这似乎有悖直觉，但这与经典边界层理论的见解相符：该理论指出，近壁动力学主要由黏度和边界条件决定。根据普朗特理论，在高雷诺数区域，黏度的影响局限于紧邻边界的一薄层区域（称为边界层），其厚度按 $\delta_{\mathrm{BL}} \sim \nu^{1/2}$ [53,55] 的尺度变化。在这一层内，速度场会迅速过渡以满足无滑移狄利克雷条件，但其结构受到严格约束：它从属于外部无黏流，并在很大程度上受黏度和施加的边界条件支配。在光滑几何形状、数据规则且不存在流动分离等标准假设下，边界层的行为具有可预测性，并呈现一种普适剖面，其主要取决于外部流动，而非额外的局部扰动。因此，在这类情况下，近壁动力学所包含的信息有限；一旦黏度和边界数据确定，壁面行为便基本上随之确定。

我们的理论与数值结果与这一观点高度一致：我们证明，只要观测子区域内的所有点到区域中任意点的距离不超过 $\mathcal{O}(\nu^{1/2})$，就有可能实现全局恢复；而在实践中，即使超过这一条件，我们仍然观察到稳健的同步。这一阈值与经典的边界层厚度相呼应，表明边界层之外的区域流动湍流性更强、约束更少，正是这里集中了不确定性，也最需要观测。因此，仅内部区域松弛的成功可以被理解为黏性流动物理结构的一种体现：边界层无需直接校正，因为其动力学是通过与内部区域的耦合间接决定的。由此，我们的研究发现

不仅拓展了连续数据同化方法的适用范围，也揭示了耗散系统中的可观测性与流体力学中近壁流动的经典结构之间一种深刻且此前未曾探索的联系。

未来研究的一个重要方向是探究我们分析中确立的几何阈值是否足够尖锐。$\delta \lesssim \nu^{1/2}$ 虽然数值模拟表明，即使超过这一界限，仍可能发生同步，但这一 $\nu^{1/2}$标度究竟是真正最优，还是仅仅源于所采用的分析方法，仍是一个悬而未决的问题。构造能够证明同步在 $\delta \gg \nu^{1/2}$ 时失效的反例，将有助于厘清这一问题，并进一步巩固其与普朗特边界层理论的联系；在该理论中，$\nu^{1/2}$决定了壁面层厚度。另一个很有前景的方向是开发自适应策略，以选择观测区域Ω_0。与其预先固定该区域，不如根据动态演变的流动特征（例如涡量平方积分、涡量大小，或涡旋等相干结构）来布置传感器，这样或许更有效（例如，参见 Franz、Larios 和 Victor 的研究[27]）。最后，尽管我们的理论和计算结果仅限于二维流动，将局部数据同化框架扩展至三维湍流仍面临数学和数值方面的挑战。尤其是，在小尺度相互作用更丰富、边界层动力学更复杂的情况下，仅内部区域松弛是否仍足以实现全局同步，目前尚不明确。

致谢

AP 得到了美国国家科学基金会资助的项目 DMS-2532987 的部分支持。RF 得到了美国国家科学基金会资助的项目 DMS-2410893 的部分支持。

参考文献

[1] D. Albanez、H. N. Lopes 和 E. Titi，《三维纳维–斯托克斯方程的连续数据同化》，《渐近分析》*97* (2016)，第 1–2 期，139–164 页。[2] M. Asch、M. Bocquet 和 M. Nodet，《数据同化》，算法基础，第 11 卷，工业与应用数学学会，宾夕法尼亚州费城，2016年。方法、算法与应用。[3] A. Azouani、E. Olson 和 E. S. Titi，《利用一般插值观测量进行连续数据同化》，《非线性科学杂志》**24** (2014)，第 2 期，277–304 页。[4] H. Bessaih、E. Olson 和 E. S. Titi，《利用随机噪声数据进行连续数据同化》，《非线性》**28** (2015)，第 3 期，729–753 页。[5] T. R. Bewley 和 B. Protas，《壁面摩擦与压力：湍流的“印迹”》，D辑物理学：非线性现象 **196**(2004)，第 1–2 期，28–44 页。[6] A. Biswas、Z. Bradshaw 和 M. S. Jolly，《利用局部观测量对纳维–斯托克斯方程进行数据同化》，SIAM应用动力系统杂志**20** (2021)，第 4 期，2174–2203 页。[7] A. Biswas 和 R. Price，《三维纳维–斯托克斯方程的连续数据同化》，SIAM数学分析杂志**53** (2021)，第 6 期，6697–6723 页。

[8] D. Blömker、K. Law、A. M. Stuart 和 K. C. Zygalakis，纳维–斯托克斯方程连续时间 3DVAR 滤波器的精度与稳定性，《非线性》26 (2013)，第 8 期，2193–2219 页。[9] H. Brezis，《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》，Universitext，施普林格，纽约，2011年。[10] D. A. Buchta 和 T. A. Zaki，高速边界层转捩的观测融合模拟，《流体力学杂志》916 (2021)，A44，网址：2011.08265。[11] Y. Cao、A. Giorgini、M. Jolly 和 A. Pakzad，三维 Ladyzhenskaya 模型的连续数据同化：分析与计算，《非线性分析：现实世界应用》68 (2022)，103659。[12] Y. Cao、M. S. Jolly、E. S. Titi 和 J. P. Whitehead，瑞利–贝纳德吸引子的代数界，《非线性》34 (2021)，第 1 期，509–531 页。[13] J. Charney、M. Halem 和 R. Jastrow，利用不完整历史数据推断大气的当前状态，《大气科学杂志》26 (1969)，1160–1163 页。[14] J. Chen、M. Raiola 和 S. Discetti，一种高效的流动估计离线传感器布置方法，《实验热科学与流体科学》167 (2025)，111448。[15] N. Chen、A. Farhat 和 E. Lunasin，含模型误差的数据同化：Sabra 壳模型的分析与计算研究，D辑物理学：非线性现象443 (2023)，133552。[16] R. Daley，《大气数据分析》，剑桥大气与空间科学丛书，剑桥大学出版社，剑桥，1991年。[17] A. E. Diegel、X. Li 和 L. G. Rebholz，大（乃至无限）nudging 参数下连续数据同化的分析，《计算与应用数学杂志》456 (2025)，116221。[18] A. E. Diegel 和 L. G. Rebholz，Cahn–Hilliard 方程的内部罚方法中的连续数据同化与长时间精度，《应用数学与计算》424 (2022)，127042。[19] M. P. Encinar 和 J. Jiménez，《对数层湍流：从壁面视角观察》，《物理评论：流体》4 (2019)，第 11 期，114603。[20] A. Farhat、N. E. Glatt-Holtz、V. R. Martinez、S. A. McQuarrie 和 J. P. Whitehead，利用热测量对大普朗特数瑞利–贝纳德对流进行数据同化，《SIAM 应用动力系统杂志》19 (2020)，第 1 期，510–540 页。[21] A. Farhat、M. Jolly 和 E. S. Titi，仅通过速度测量对二维贝纳德对流进行连续数据同化，D辑物理学303 (2015)，59–66 页。[22] A. Farhat、A. Larios、V. R. Martinez 和 J. P. Whitehead，基于二维不可压速度场的部分观测识别体力，《物理评论：流体》9 (2024)，第 5 期，054602。[23] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi，利用速度场中单个分量的测量对二维纳维–斯托克斯方程进行简化连续数据同化，《数学流体力学杂志》18 (2016)，第 1 期，1–23 页。[24] ,仅利用温度测量进行数据同化的 Charney 猜想：三维行星地转模型范式，《数学、气候与天气预报》2 (2016)，61–74 页。[25] C. Foiaş 和 G. Prodi，二维纳维–斯托克斯方程非定常解的整体行为，《帕多瓦大学数学研讨会报告》39 (1967)，1–34 页。[26] C. Foias、O. Manley、R. Rosa 和 R. Temam，《纳维–斯托克斯方程与湍流》，数学及其应用百科全书，第 83 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2001年。

[27] *T. Franz*、*A. Larios* 和 *C. Victor*，《哔声、扫掠与爬行：通过数据同化实现二维纳维–斯托克斯方程动态观测器模式的收敛速率》，《计算方法与应用力学和工程》*392 (2022)*，*114673*。[28] *U. Frisch*，《湍流：*A. N. Kolmogorov* 的遗产》，剑桥大学出版社，剑桥，*1995*。[29] *Bosco García-Archilla*、*Julia Novo* 和 *Edriss S. Titi*，《应用于纳维–斯托克斯方程降尺度数据同化算法的有限元方法的时间一致误差估计》，《*SIAM*数值分析杂志》*58 (2020)*，第 *1* 期，*410–429*。[30] *M. Gardner*、*A. Larios*、*L. G. Rebholz*、*D. Vargun* 和 *C. Zerfas*，《连续数据同化在二维纳维–斯托克斯方程速度–涡量形式中的应用》，《电子研究档案》*29 (2021)*，第 *3* 期，*2223–2247*。[31] ,《连续数据同化在二维纳维–斯托克斯方程速度–涡量形式中的应用》，美国数学科学研究所《电子研究档案》*29 (2021)*，第 *3* 期，*2223–2247*。[32] *M. Gesho*、*E. Olson* 和 *E. S. Titi*，《二维纳维–斯托克斯方程数据同化算法的计算研究》，《计算与物理通讯》*19 (2016)*，第 *4* 期，*1094–1110*。[33] *E. Hawkins*、*L. G. Rebholz* 和 *D. Vargun*，《通过连续数据同化消除纳维–斯托克斯数值模拟中投影/罚方法的分裂/建模误差》，*arXiv*预印本 *arXiv:2302.05962 (2023)*。[34] *F. Hecht*，《*FreeFem* 的新进展》*++*，《数值数学杂志》*20 (2012)*，第 *3–4* 期，*251–265*。[35] *J. E. Hoke* 和 *R. A. Anthes*，《采用动态初始化技术初始化数值模型》，《月刊天气评论》*104 (1976)*，第 *12* 期，*1551–1556*。[36] *N. Jiang* 和 *W. Layton*，《一种快速计算流动系综的算法》，《国际不确定性、量化与表征杂志》*4 (2014)*，第 *4* 期，*273–301*。[37] *V. John*，《不可压缩流问题的有限元方法》，《施普林格计算数学丛书》第 *51* 卷，施普林格，*Cham*，*2016*。[38] *M. Jolly*、*V. R. Martinez* 和 *E. S. Titi*，《次临界表面准地转方程的数据同化算法》，《非线性研究进展》*17 (2017)*，第 *1* 期，*167–192*。[39] *M. J olly* 和 *A. Pakzad*，《采用高阶有限元插值函数的数据同化》，《国际数值方法：流体》*95 (2023)*，第 *3* 期，*472–490*。[40] *M. S. Jolly*、*V. R. Martinez*、*E. J. Olson* 和 *E. S. Titi*，《采用时间模糊测量的表面准地转方程连续数据同化》，《中国数学年刊*B*辑》*40 (2019)*，第 *5* 期，*721–764*。[41] *D. A. Jones* 和 *E. S. Titi*，《二维纳维–斯托克斯方程的确定有限体积元》，《物理学*D*辑》*60 (1992)*，第 *1–4* 期，*165–174*。[42] *R. E. Kalman*，《线性滤波与预测问题的一种新方法》，《基础工程杂志》*82 (1960)*，第 *1* 期，*35–45*。[43] *E. Kalnay*，《大气建模、数据同化与可预报性》，剑桥大学出版社，*2003*。[44] *R. E. Kistler*，《自正压原始方程通道模型中的数据同化技术研究》，博士学位论文，*1974*。[45] *A. Larios* 和 *Y. Pei*，《通过 *Voigt* 正则化和可观测数据近似连续同化二维纳维–斯托克斯方程》，《演化方程与控制理论》*9 (2020)*，第 *3* 期，*733–751*

.

[46] K. Law、A. Stuart 和 K. Zygalakis，《数据同化》，《应用数学丛书》第 62 卷，施普林格，Cham，2015。数学导论。[47] W. Layton，《不可压缩黏性流数值分析导论》，《计算科学与工程》第 6 卷，工业与应用数学学会，宾夕法尼亚州费城，2008。[48] E. N. Lorenz，《确定性非周期流》，《大气科学杂志》20 (1963)，第 2 期，130–141。[49] ，《流体动力流的可预报性》，《纽约科学院汇刊》25 (1963)，第 4 期，409–432。[50] ，《28变量大气模型可预报性研究》，《Tellus》17 (1965)，第 3 期，321–333。[51] J. Newey、J. P. Whitehead 和 E. Carlson，《利用连续数据同化实现在线模型发现》，arXiv预印本 arXiv:2411.13561 (2024)。[52] Y. Pei，《海洋三维原始方程的连续数据同化》，《纯粹与应用分析通讯》18 (2019)，第 2 期，643–661。[53] L. Prandtl，《极小摩擦下的流体运动》，《第三届国际数学家大会会议录》第 3 卷 (1904)，484–491。海德堡。英文译文见美国国家航空咨询委员会技术备忘录 452 (1928)。[54] L. G. Rebholz 和 C. Zerfas，《通过代数松弛对演化方程进行简单高效的连续数据同化》，《偏微分方程数值方法》37 (2021)，第 3 期，2588–2612。[55] H. Schlichting 和 K. Gersten，《边界层理论》，第 9 版，施普林格，柏林，海德堡，2017。[56] T. Suzuki 和 Y. Hasegawa，《基于壁面测量和简单序贯方法估计 $\mathrm{Re}_\tau = 100$ 下的湍流通道流》，《流体力学杂志》830 (2017)，760–786。[57] R. Temam，《纳维–斯托克斯方程：理论与数值分析》，《数学及其应用研究》第 2 卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约—牛津，1977。[58] M. Wang 和 T. A. Zaki，《基于有限观测的湍流通道流状态估计》，《流体力学杂志》917 (2021)，A9。[59] T. A. Zaki 和 M. Wang，《从有限观测到湍流状态：流场重建的根本困难》，《物理评论：流体》6 (2021)，第 10 期，100501。[60] A. Çibik、R. Fang、W. Layton 和 F. Siddiqua，《含模型误差的数据同化》，arXiv 2504.16291 (2025)，见 2504.16291。[61] A. Çıbık、R. Fang、W. Layton 和 F. Siddiqua，《基于松弛的数据同化中的自适应参数选择》，《计算方法与应用力学和工程》433 (2025)，117526。

(Fang)俄亥俄州立大学数学系电子邮件地址： fang.1211@osu.edu

(Pakzad)加利福尼亚州立大学北岭分校数学系电子邮件地址： pakzad@csun.edu