arXiv:2601.11841v1 [cs.DS] 17 Jan 2026







# 支配集的随机局部搜索算法分析

随机局部搜索算法的分析，用于
支配集

**Hendrik Higl**

为获得学士学位而撰写的大学学士论文

理学学士（*B. Sc.*）

提交于2025年10月30日，隶属
波茨坦大学数字工程学院算法工程
专业信息系统工程学位课程

**评审人** Tobias Friedrich教授**指导教师**
Timo Kötzing博士 Jurek Sander

# Abstract

支配集是一个著名的组合优化问题，在计算生物学和移动通信领域都有应用。由于其具有NP难性，人们常借助启发式算法来寻找较好的解。许多此类启发式算法已经过实证检验，表现相当出色。然而，人们并不十分清楚它们为何能取得如此好的结果，也不了解它们在运行时间或结果质量方面究竟能提供哪些保证。为此，我们需要建立坚实的理论基础。我们通过严格分析一种旨在求解图上最小支配集的随机局部搜索（RLS）算法，为此作出了贡献。我们考察该算法在含有 $n$ 个顶点的环图上的表现。我们证明，找到最优解所需期望运行时间的上界为 $O\left(n^4 \log^2(n)\right)$。为此，我们引入了若干用于表示环上支配集的模型，帮助我们理解 RLS 如何探索搜索空间以找到最优解。在证明中，我们采用了在随机化算法分析中已相当常用的技术。此外，我们还使用一种特殊方法来分析由此建模产生的可逆马尔可夫链。这种方法尚未广泛应用于此类运行时间分析。

# Zusammenfassung

支配集是组合优化中的一个经典问题，与生物信息学和移动通信相关。由于该问题具有 NP 困难性，人们通常采用启发式方法来寻找较好的解。许多启发式算法已经过实证测试，并且往往能取得良好结果。然而，人们对这些启发式算法为何表现如此出色，或其运行时间和解的质量能提供何种保证，知之甚少。为此，需要稳固的理论基础。本文通过分析一种旨在寻找图中最小支配集的随机局部搜索，为此作出贡献。我们考察该算法在含有 $n$ 个顶点的环图上的运行时间。我们证明，找到一个最小支配集所需的期望运行时间为 $O\left(n^4 \log^2(n)\right)$。为此，我们引入了若干模型来表示环图上的支配集，并考察它们在局部搜索的变异作用下如何变化。由此，我们得以更好地理解局部搜索如何探索解空间以找到最优解。证明中，我们采用了广泛用于随机算法分析的技术。此外，我们还运用了一种专门方法来分析由我们的建模所产生的可逆马尔可夫链。这种方法在此类运行时间分析中尚未得到广泛应用。

# Contents

**摘要** ii

**摘要** iii

**目录** iv

**1 引言** 1 1.1 支配集 . 2 1.2 随机化搜索启发式算法分析 . 4

**2 预备知识** 5
2.1 图论与支配集 . 5 2.2 随机局部搜索算法 . 6 2.3 概率论 . 8

**3 马尔可夫链** 10
3.1 马尔可夫链作为网络 . 10 3.2 三角网格中的电阻 . 15

**4 环图上的支配集 RLS** 20
4.1 达到可行性的时间 . 20 4.2 重要性质与早期优化 . 22 4.3 邻接模型 . 26 4.4 粒子系统 . 31 4.5 随机游走与运行时间界 . 37

**5 结论与展望** 52

**参考文献** 54

**作者声明** 58

# 1 引言

随机化算法 在解决困难问题、寻找解的过程中发挥着重要作用。人们普遍认为，对于 NP 类问题，不存在高效算法。然而，寻找这些问题的解具有重要的实际意义：确定在哪里开设新店最合适（设施选址问题），寻找途经多个城市的最短往返路线（旅行商问题），或者确定无线电塔的建设地点以实现最佳覆盖（支配集问题），这些只是少数几个例子。无论这些问题的复杂度如何，我们都需要解决它们，因此必须采取不同的方法。其中一些方法包括将问题范围限制在可处理的实例上 [Blä+23；HLP86]或者接受非精确解，也就是与最优解存在一定差距的近似解 [Hoc97]。

为了结合这两种方法，我们转而采用启发式算法。它们能够提供指导信息，帮助我们在比精确方法更短的时间内找到优质解 [ES00]。为此，它们可以将适用于某些问题实例的方法与能够对所得解的质量提供稳健保证的方法相结合。一种简单的贪心启发式是，始终向解中添加一个能使某个目标函数最大化的元素。这类启发式算法的例子包括顶点覆盖的2近似算法，以及支配集的 $1 + \log(n)$近似算法 [Aus+99;Chv79]。另一种启发式方法是不总是寻找最佳的下一个候选解，而只寻找一个更好的解。

遵循这一范式的一种著名算法是随机局部搜索（RLS）。与其他随机化搜索启发式算法一样，它已应用于聚类和库存路径问题等实际问题 [Ben+11; FK00], 在这些问题中，它能在较短时间内取得良好结果，同时易于实现。然而，关于此类随机化启发式算法的研究大多纯属经验性，正如 Droste 等人所言，即便是目前已知的最佳结果，也仍存在争议 [DJW02]。他们强调，严谨的理论基础对于缓解这一问题至关重要。

顾名思义，RLS启发式算法通过仅探索那些在某种意义上接近当前候选解的解，来遍历问题的解空间[AL03]。与（1+1）EA 等其他随机搜索算法不同，一个解的邻域并非整个解空间。因此，对此类算法轨迹的分析更加依赖其当前解及相应的邻域，因为有些转移不仅不太可能发生，而且根本不可能发生。我们将采用广为人知的马尔可夫链概念来建模这些局部依赖关系。

在 第2章 中，我们介绍了本学位论文通篇使用的图论和概率论必备概念。在 第3章中，我们定义了与可逆马尔可夫链相关的网络概念。随后，我们分析了三角网格上的随机游走，该游走在下一章分析 RLS 的轨迹时会用到。首先，我们在 第4章 讨论环图上支配集的重要性质。利用这些性质，我们证明，RLS 以期望时间 1.5倍于最优解规模的支配集，其期望时间界为 $O(n\log(n))$，见 定理 4.12。接下来，我们建立了若干模型，以更好地理解 RLS 在进一步优化时的轨迹。我们描述了何时可以交换一些顶点，以及单次交换如何帮助 RLS 朝着还能进一步缩减的支配集移动。借助这些模型，我们证明，RLS 将该解改进为最优解的期望时间界为 $O\left(n^4\log^2(n)\right)$，见 定理4.38。

## 1.1 支配集

支配集问题要求：给定一个简单无向图，求一个顶点子集，使得每个顶点要么属于该子集，要么与其中某个顶点相邻。优化变体则要求在所有满足这一性质的集合中，求基数最小的集合。该问题可应用于计算生物学，用于在大型蛋白质相互作用网络中识别对人类疾病起主要作用的蛋白质 [NA16]。类似地，在连接可能不可靠的自组无线网络路由中，寻找网络的支配集可用于确定最有可能成功将数据包送达接收方的节点 [SZP09]。在文档摘要中，图可以表示句子及其相似度，而最小支配集可被视为对内容具有最大代表性且冗余最少的摘要 [SL10]。

然而，众所周知，该问题是 NP完全问题，因此被认为无法高效求解。即使在其他 NP困难问题易于求解的图类中，该问题仍然是 NP完全问题，例如二分图、弦图或分裂图；Haynes 等人对此作了综述 [HHH23]。甚至很难将其近似到 $(1-\varepsilon)\ln(n)$ 这一因子以内，任意 $\varepsilon > 0$ [CC08]均如此。通过一种简单的贪心算法可以实现 $1+\log(n)$-近似：每次迭代都将能够覆盖最多未覆盖节点的顶点加入集合 [Chv79]。

针对这个问题，还提出并测试了其他近似启发式：Sanchis [San02] 分析了五种启发式算法在已知图实例以及随机图上的表现。它们本质上都是著名贪心启发式的变体。在她的随机图测试集上，最初的贪心启发式仍然效果最佳，而且大多数情况下都能找到最优支配集。在另一类具有预设支配数的随机图上，另一种结合了部分问题知识的过程表现略好。

这些启发式算法的目标只是找到较好的支配集，而非最优支配集。Hedar 和 Ismail 提出了另一种方法，更接近随机化启发式。他们将经典遗传框架（即随机改变解并将其组合以生成新解）与针对支配集问题的特定知识相结合。他们的启发式算法旨在不断改进解，最终得到最优解。每次迭代中，局部搜索过程会从支配集中随机移除一个顶点；如果移除后得到的结果不再是支配集，则加入一个不在集合中的顶点。过滤过程会依次从支配集中移除每个顶点，并计算由此得到的适应度值，从而移除可能冗余的顶点。他们称为“精英启发”的选择机制会找出最佳支配集的交集，并扩展该解，直到它再次成为支配集，以此识别最相关的顶点。他们在随机生成的图上测试了该算法，并得出结论：与每次迭代中仅随机变异并组合解的遗传算法相比，该算法显著优越 [HI10]。

已应用于此问题的其他启发式算法包括蚁群优化 [HSE06],采用不同变异算子的进化算法[CS15] 或其他局部搜索程序 [Cas+23；Cha18]。所有这些论文都对其算法进行了实证分析。据我们所知，尚无针对支配集问题的随机搜索启发式算法的严谨理论分析。为介绍这一主题及一些相关技术，我们列举其他已开展此类分析的问题实例。

## 1.2 随机搜索启发式分析

随机搜索启发式（如随机局部搜索）通常在具有某些特征的伪布尔函数上进行分析 [DJW02]。这有助于研究人员了解哪些性质有助于这些启发式算法找到优质解，以及哪些因素可能会阻碍它们。不过，我们关注的是这类方法在图论问题中的应用。其他源于图论的重要问题也已有理论时间复杂度结果，包括最大匹配 [GW03], 最小生成树 [NW07], 图着色[SZ10], 以及顶点覆盖 [Bag+22]。

P 对这些算法的分析往往涉及一些“简单”的图类。Sudholt 和 Zarges 证明了用于二分图、平面图和色数较低的稀疏随机图着色问题的局部搜索算子的相关结果。Baguley 等人分析了他们用于路径和二分图上顶点覆盖问题的算子。然而，这些分析并非出于发现越来越快的算法的需要，而是再次源于人们希望更好地理解随机搜索启发式算法行为的兴趣。

因此，人们开发并运用了多种技术来进行这些分析。对于进化算法，例如（1+1）EA，随机漂移往往有助于分析。漂移及其相关结果将这样一种观点形式化：如果你知道一个过程朝目标推进的速度，就可以推断到达目标需要多长时间。Baguley 等人利用这一方法说明，某种启发式算法需要多长时间才能采样到图 [Bag+22]的一个合法顶点覆盖。Doerr [Doe11] 还表明，漂移论证能够为 Neumann 和 Wegener 研究的最小生成树问题提供更简单的证明，并给出额外的界 [NW07]。

然而，这个更简单的证明仍然利用了许多关于一般问题结构的结果。对这类启发式算法的分析通常会纳入特定领域的知识。在 [GW03], 中，运行时间证明的一个关键部分也依赖于已知的图中匹配及其改进方式的结果。Giel和Wegener随后利用这些结果，论证（1+1）EA如何通过特定的随机变异来利用这些结果。Neumann和Wegener则利用非最小生成树的性质，说明他们的搜索启发式算法能在多大程度上改进解 [NW07]。这表明，可以利用底层问题结构来辅助分析这些启发式算法。本学位论文将采用其中许多技术，分析我们的随机局部搜索算法的性能。现在介绍所需的预备知识。

# 2 预备知识

本章将介绍本学位论文所需的图论和概率论定义与概念。我们还将定义并说明随机局部搜索启发式算法的动机。首先给出一些基本定义。令 $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ 为包含 0 的自然数集合。我们用 $\mathbb{N}^+$ 表示集合 $\mathbb{N} \setminus \{0\}$。用 $[n]$ 表示集合 $\{1, \ldots, n\}$。对于自然数对 $(a, b) \in \mathbb{N}^2$，定义 $|(a, b)| = a + b$。对于有限集合 $S$，其基数记为 $|S|$。最后，$\log(\cdot)$ 表示自然对数，$\log^2(x)$ 表示 $\log(x)\log(x)$。

## 2.1 图论与支配集

图 $G = (V, E)$ 是由顶点集 $V$ 和边集 $E \subseteq V \times V$ 组成的。对于顶点 $u, v \in V$，若 $\{u, v\} \in E$，则称它们相邻或互为邻居，并记作 $x \sim y$。我们允许顶点 $v \in V$ 带有自环，并将其记作 $v \sim v$。

对于顶点 $v \in V$，我们用 $N(v)$ 表示其开邻域 $N(v) := \{u \mid \{u, v\} \in E\}$。顶点 $v \in V$ 的闭邻域是集合 $N[v] := N(v) \cup \{v\}$。我们将集合 $T \subseteq V$ 的闭邻域定义为 $N[T] := \bigcup_{v \in T} N[v]$。

我们考虑两类简单图：路径和环。

▶ **定义 2.1（路径）**。长度为 $k \in \mathbb{N}^+$ 的路径是一个图，其顶点集为 $V := \{v_1, \ldots, v_k\}$，边集为 $E := \bigcup_{1 \le i < k} \{v_i, v_{i+1}\}$。我们将其记为 $P_k$。◀

▶ **定义 2.2（环）**。长度为 $k \in \mathbb{N}^+$ 的环是一条路径 $P_k$，并增加一条边 $\{v_k, v_1\}$。我们将其记为 $C_k$。◀

图 $G = (V, E)$ 的支配集是其顶点 $D \subseteq V$ 的一个子集，并且满足：对于每个顶点 $v \in V$，要么 $v \in D$，要么存在一个顶点 $u \in D$，使得 $\{u, v\} \in E$。等价地，可以表述为 $N[D] = V$。若不存在基数严格更小的其他支配集，我们称该支配集为最小支配集。若不存在真子集 $S \subset D$ 也为支配集，我们称该支配集 $D$ 为极小支配集 $S$。

我们注意到，关于环上最小支配集的大小，有如下结果，见 [HHH23] *(观察 2.21)*:

▶ **命题2.3**。 一个最小支配集的 $C_n$ 对于 $n \in \mathrm{N}^+$ 基数为$\lceil \frac{n}{3} \rceil$。 ◀

–

直观而言，可以每隔三个顶点选取一个，从而覆盖所有顶点。这样，当 $n$ 是3的倍数时，每个顶点都恰好覆盖其自身的邻域；而当 $n$ 除以3余1或2时，大多数顶点仍然如此。

## 2.2 随机局部搜索算法

随机局部搜索与其他随机搜索启发式算法的不同之处在于，它只探索与当前解有些“接近”的解。为了定义“接近”的含义，我们首先需要定义如何表示解。

对于一个图 $G = (V, E)$，其中 $|V| = n$，我们将搜索算法的一个解或状态表示为一个位串 $y \in \{0, 1\}^n$。给定顶点的一种编号方式，第 $i$位定义第 $i$个顶点是否属于该解。对于一个解$y \in \{0, 1\}^n$，我们定义 $S(y)$ 为该解所诱导的集合，即 $S(y) := \{v_i \in V \mid y_i = 1\}$。我们用 $|y|_1$ 表示状态 $y$ 中值为1的位数，用$|y|_0$ 表示零位数。

衡量两个位串之间距离的一种典型方法是汉明距离，也就是它们不同的位数。对于 RLS，可以考虑只探索与当前状态汉明距离为 1 的状态。在每一步中，算法随机选择一位并将其翻转。

为了决定是接受一个新解，还是继续从旧解出发进行探索，算法必须判断一个解的优劣。为此，我们需要提供一个所谓的适应度函数。这个术语源自随机搜索启发式在自然进化中的起源。我们选择一个简单的函数，优先寻找可行解，也就是实际的支配集，随后引导搜索趋向最小支配集。我们定义

$$f\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{N}, x \mapsto |\{v \in V \mid N[v] \cap S(x) = \emptyset\}| \cdot (n+1) + |S(x)|$$

作为我们的适应度函数。第一项以$n + 1$为权重，计算未覆盖顶点的数量，即既不在集合中、也没有邻居位于集合中的顶点。这样一来，每个非支配集的适应度至少为 $n + 1$，大于支配集的最大基数。

这两点考虑可以得出一种能够在某些图类上成功解决支配集问题的算法。然而，正如 Neumann 和 Wegener [NW07] 所言，只考虑汉明距离为1 的邻域，往往会使启发式算法容易陷入许多非全局最优的局部最优解。我们的当前算法就是如此。考虑路径 $P_3$，其两个端点均被选中。这是一个有效支配集，但并非最优解；最优解仅包含中间顶点。然而，任何单次翻转都不会被接受，因为移除一个已选顶点会使该顶点变为未覆盖，而添加中间顶点则会增大集合的基数。因此，我们纳入一些汉明距离为2的状态。我们允许算法先从当前集合中选取一个顶点，再从其邻域中选取一个顶点，移除前者并添加后者。我们将选择范围限制在直接邻域内，以简化分析。据此，我们在算法1中定义随机局部搜索。

**算法1：** 随机局部搜索算法

```
1  均匀随机选择 x ∈ {0,1}^n ;
2  当尚未满足条件 时执行
3      以概率1/2 执行
4          均匀随机选择一个顶点 v ∈ V(G);
5          y ← 翻转 x_v;
6      else
7          选择 u ∈ S和 v ∈ N（v），均匀随机地;
8          if x_v 的 then
9              y ← 翻转 x_u 和 x_v;
10     如果 f（y） ≤ f（y） 那么
11         x ← y;
```

我们将代码中随机选择一个顶点并将其翻转的部分称为翻转算子，也可以说 RLS 选择翻转一个顶点。类似地，第二部分是交换算子。

我们注意到，*not happy* 是实际停止准则的占位符。在实践中，可以在经过特定时间后停止算法。不过，我们从纯理论的角度考察该算法，只关心找到最优解的期望时间，因此让搜索无限期地运行。

## 2.3 概率论

我们假定读者对概率论有基本了解，这也是本 [MU17] 学位论文的大部分内容所需的基础。基本定义请参阅。

我们经常会考虑所谓的随机过程，即考察一组随时间变化的随机变量。

▶ **定义 2.4（随机过程）**。随机过程是定义在共同样本空间上的一组随机变量 $\Omega$，由时间 $t \in \mathrm{N}$索引。我们通常将其记作$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$。若 $\Omega = \mathrm{R}$，则称该过程可积，当且仅当对$t \in \mathrm{N}$，$\mathrm{E}[X_t]$ 有限。◀

我们使用以下漂移定理，该定理由 Kötzing 给出 [Köt24], ，其出处为定理*2.5*。

▶**定理2.5（乘法漂移）**。设$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$是定义在$\{0、1\} \cup S$上的可积过程，其中 $S \subset \mathrm{R}_{>1}$，并令 $T = \min\{t \in \mathrm{N} \mid X_t \leq 0\}$。假设存在一个$\delta \in \mathrm{R}_+$，使得对所有 $s \in S \cup \{1\}$ 以及所有 $t < T$，均有

$$\mathrm{E}[X_t - X_{t+1} \mid X_0, \ldots, X_t] \geq \delta X_t.$$

Then

$$\mathrm{E}[T] \leq \frac{1 + \log \mathrm{E}[X_0]}{\delta}.$$

◀

在以下各节中，我们还将讨论特殊的随机过程，即马尔可夫链。它们遵循某种性质（改编自[MU17],定义 *7.1*）：

▶**定义 2.6（马尔可夫链）**。若随机过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$满足以下条件，则称其为马尔可夫链：

$$\Pr[X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t] = \Pr[X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t].$$

对于 $u$，$v \in \Lambda$，其中 $\Lambda$ 是该马尔可夫链的样本空间，我们将转移概率称为

$$P(u,v) = \Pr[X_{t+1} = v \mid X_t = u].$$

我们将马尔可夫链的样本空间称为其状态空间。◀

W之后我们将利用 [MU17] （定理 *13.3*）中所述的 Wald 方程。

▶ **定理2.7（沃尔德方程）**。设 $X_1$、$X_2$、..... 为具有分布 $X$的非负、相互独立且同分布的随机变量。设$T$为该序列的一个停时。如果 $T$和 $X$具有有界期望，则

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{T} X_i\right] = \mathrm{E}[T]\mathrm{E}[X].$$

这里， $T$是一个停时，如果事件 $T = n$独立于 $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$。 ◀

# 3 马尔可夫链

本章中，我们将探讨具有特殊性质的马尔可夫链模型。我们重述重要定义和已知结果，并进一步介绍这种方法的运作原理。我们尤其关注它如何帮助分析一些随机游走。随后，我们给出一个示例，该示例将在之后对 RLS 进行运行时间分析时发挥作用。我们针对这个具体实例证明了新的结果。

## 3.1 马尔可夫链作为网络

我们的所有定义均改编自 Levin 和 Peres [LP17]。我们会指出相应的定义、定理和命题在他们的书中出现的位置。我们将在此引入一种称为网络的模型。首先对其进行严格定义：

▶ 定义 3.1（网络）。（第 9.1 节引言）网络是一个有限的无向连通图 $G$，其顶点集为 $V$，边集为 $E$，并且有一个从边到正实数的映射 $c\colon E \to \mathrm{R}^+$，其中 $c(e)$ 称为边 $e$ 的电导。对于一条边 $\{x, y\} \in E(G)$，我们通常将 $c(x, y)$ 记作 $c(\{x, y\})$；显然，$c(x, y) = c(y, x)$。倒数 $r(e) = 1/c(e)$ 称为该边$e$的电阻。网络记作一对 $(G, c)$。我们通常将 $G$ 的顶点称为节点。如果除自环外所有边的电导都相等，我们就称该网络为均匀电导网络。相应地，我们定义网络的均匀电阻。◀

与边相关联的值的命名已经颇具启发性。事实上，这个模型确实将底层图视为一个电网络，其中每条边都是具有固定电阻的电阻器。这样便可以运用许多关于电流在此类网络中行为的物理学结论。这对我们很有用，因为这些结论有一些概率论解释，其中许多都与该网络上的随机游走有关：

▶ **定义 3.2（网络上的加权随机游走）**。（第 *9.1* 节引言）考虑定义在 $G$ 的顶点上的马尔可夫链，其转移矩阵为

$$P(x, y) = \frac{c(x, y)}{c(x)},$$

其中 $c(x) = \sum_{y:\ y\sim x} c(x,\ y)$。这个过程称为 $G$上边电导为 $c$的加权随机游走。◀

在研究网络时，我们将明确允许网络包含自环。当顶点 $v$ 有一条连接自身的环时，我们记作 $v \sim v$。在随机游走中，这对应于一个自环，即随机游走可以停留在某个顶点上。我们可以用这些网络来建模具有一项良好性质的随机游走，这项性质称为可逆性。

▶**定义 3.3（可逆性）**。如果一个马尔可夫链 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 在状态空间 $\Lambda$ 上关于概率分布 $\pi$ $\Lambda$可逆，当且仅当对每个 $x,\ y \in \Lambda$

$$\pi(x)\cdot \Pr[X_{t+1} = y \mid X_t = x] = \Pr[X_{t+1} = x \mid X_t = y]\cdot \pi(y).$$

◀

Levin 和 Peres（第 9.1 节末尾）还强调了一项重要结果：每个可逆马尔可夫链都可以用网络上的随机游走来建模。其直观解释如下：设 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 是关于 $\pi$ 可逆的马尔可夫链。设 $\Lambda$ 为其状态空间，$P'(\cdot)$ 为其转移概率。进一步假设，对所有状态 $x$、$y \in \Lambda$，$\Pr[\exists t \in \mathrm{N}:\ X_t = y \mid X_0 = x] > 0$，因此每个状态都能在有限步内转移到任何其他状态。这保证了下面的图是连通的。我们可以定义一个网络 $G$，其底层状态空间作为顶点集，并且当从一个状态到另一个状态的转移概率为正时，就在两者之间连一条边。对于节点 $x$、$y \in \Lambda$，使得 $\{x, y\} \in E(G)$ as $c(x, y) = \pi(x)P'(x, y)$；自环也类似，即 $c(x, x) = \pi(x)P'(x, x)$。根据定义，我们有 $c(x) = \sum_{y:x\sim y} c(x, y) = \pi(x)$，因为电导乘积中的转移概率之和为 1。那么，节点$x$、$y$ 之间的转移概率恰好为

$$P(x, y) = \frac{c(x, y)}{c(x)} = \frac{\pi(x)P'(x, y)}{\pi(x)} = P'(x, y)$$

这恰好就是原始马尔可夫链的转移概率。既然我们已经提到了电流，就必须说明两个与之相关的概念，它们对于其他定理也很重要。

▶ 定义 3.4（流）。（第 9.3 节引言）设 $(G, c)$ 是一个网络。流 $\theta$ 是定义在有向边上的函数，且具有反对称性，这意味着对于一条边 $\{x, y\} \in E(G)$：$\theta(\vec{xy}) = -\theta(\vec{yx})$，其中 $\vec{xy}$是从 $x$到 $y$的有向边，$\vec{yx}$ 的定义类似。我们将 $\theta$ 在 $x$ 处的散度定义为

$$\mathrm{div}\theta(x) := \sum_{y:y\sim x} \theta(\vec{xy}).$$

令 $s$， $t$ 为两个指定顶点，分别称为源点 和汇点。从 $s$到 $t$ 的流 必须满足

1. $\mathrm{div}\theta(x) = 0$ 对所有 $x \notin \{s,t\}$，并且
2. $\mathrm{div}\theta(s) \geq 0$。

请注意，1. 是经典的“流入等于流出”要求。我们将流的强度 $\theta$ 从 $s$ 到 $t$ 定义为 $\mathrm{div}\theta(s)$。从 $s$ 到 $t$ 单位流是一个从 $s$ 到$t$ 、强度为1的流。◀

▶ **定义 3.5（能量）**。（定理 *9.10* 的预备内容）设$(G,c)$ 是一个网络，并设 $s$, $t \in V(G)$。对于一个 $\theta$从 $s$到 $t$的流，我们将该流的能量定义为

$$\mathcal{E}(\theta) := \sum_e [\theta(e)]^2 r(e).$$

◀

借助能量的概念，我们可以定义网络中节点之间的一种度量，即所谓的有效电阻。我们仅将其定义为以下最小化问题的结果，尽管它也具有概率解释。两个节点 $a$ 和 $b$ 之间的有效电阻与网络上的随机游走（见定义 3.2）从 $a$ 出发并在返回 $b$ 之前访问 $a$的概率成正比。

▶ **定理 3.6（汤姆孙原理）**。（定理 *9.10*）设 $(G,\ c)$ 是一个网络。对于有限连通图 $s,\ t \in V(G)$ 中的源点和汇点顶点

$$\mathcal{R}(s \leftrightarrow t) = \inf\{\mathcal{E}(\theta) \mid \theta \text{ is a unit flow from} s \text{ to } t\}.$$

存在一个从 $s$ 到 $t$ 的唯一极小化流，对应于上文的 下确界 。我们将量 $\mathcal{R}(s \leftrightarrow t)$ 称为 $s$和 $t$的“有效电阻”。◀

有效电阻还与期望击中时间有一个有用的联系，具体如下述定理所示。

▶ **定义3.7（往返时间）**。（第*10.3*节引言）网络中节点 $a$、 $b$之间的往返时间，是从 $a$到 $b$ 再返回 $a$的期望时间。我们用$\tau_{a,\ b}$ 表示从 $a$ 到$b$再返回 $a$所需的（随机）时间。也就是说，对于网络上的随机游走 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$，

$$\tau_{a,b} = \min\{t \geq \tau_b : X_t = a\},$$

其中 $X_0 = a$。往返时间为

$$t_{a\leftrightarrow b} := \mathrm{E}\left[\tau_{a,b} \,\middle|\, X_0 = a\right].$$

◀

▶ **定理 3.8（往返时间恒等式）**。（命题 *10.7*）设 $(G, c)$ 是一个网络，且令 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 为该网络上的随机游走。对于 $V(G)$ 中的任意节点 a 和 b，

$$t_{a\leftrightarrow b} = c_G \mathcal{R}(a \leftrightarrow b),$$

其中 $c(x) = \sum_{y:\ y\sim x} c(x,y)$ 且 $c_G = \sum_{x\in V(G)} c(x)$。

◀

根据定义，往返时间也是从节点 $b$出发到达节点 $b$ 的期望时间的一个上界。

以下定理将使我们能够对包含其他网络作为子图的网络进行推理；对于这些其他网络，已有一些已知结果。直观地说，可以将一个网络（它是另一个网络的子图）建模为边相同但电阻为“无穷大”的网络。这将大大降低分析的复杂度。

▶ **定理 3.9（瑞利单调定律）**。（定理 *9.12*）若 $r$ 和 $r'$是对同一图 $G$ 中各边的两种电阻赋值，且满足对于所有 $e \in E(G)$，$r(e) \le r'(e)$，则

$$\mathcal{R}(s \leftrightarrow t; r) \le \mathcal{R}(s \leftrightarrow t; r').$$

◀

在对网络的定义中，我们引入了均匀网络这一新概念，其中除自环外的所有电阻都相同。我们证明，对于有效电阻的界，总可以考虑一个单位网络，其中所有边的电阻均为 1，并将电阻因素纳入这个替代网络的界中。这将简化部分论证，使计算更加简洁。

▶ **引理3.10**。 设 $(G,\ c)$ 是一个具有均匀电阻 $R$的均匀网络。设$c'$ 是在相同边上赋予的另一组均匀电导，其均匀电导/电阻为 1。那么对于任意 $s,\ t$

$$\mathcal{R}(s \leftrightarrow t; c) = R \cdot \mathcal{R}(s \leftrightarrow t; c').$$

◀

证明。 我们希望证明，在电导为 $c$ 的网络中能量的唯一极小化流，同时也是电导为 $c'$时能量的极小化流。我们通过反证法证明这一点。设 $\theta$ 是关于 $c$使能量达到极小的唯一流。ˆ 假设关于 $c'$ 的能量极小化流是另一个不同的流 $\theta'$，于是令 $\mathrm{E}(\theta';\ c') < \mathrm{E}(\theta;\ c')$。

Then

$$\mathcal{E}(\hat{\theta}';c) = \sum_e [\hat{\theta}'(e)]^2 r(e) = \sum_e [\hat{\theta}'(e)]^2 R = R \cdot \sum_e [\hat{\theta}'(e)]^2 \tag{3.1}$$
$$= R \cdot \mathcal{E}(\hat{\theta}';c')$$

根据我们的假设，它接着是

$$< R \cdot \mathcal{E}(\hat{\theta};c') = R \cdot \sum_e [\hat{\theta}(e)]^2 = \sum_e [\hat{\theta}(e)]^2 r(e) = \mathcal{E}(\hat{\theta};c).$$

ˆ ˆ这与 $\theta$是关于 $c$的能量极小化流相矛盾。因此，$\mathcal{E}(\theta;c') \leq \hat{\mathcal{E}}(\theta';c')$。由于不存在能量严格更低的流，且能量有一个ˆ唯一的极小化流， $\theta$ 也是关于 $c'$的唯一能量极小化流。根据我们在（3.1）中的计算，以及定理 3.6 中有效电阻的定义，因此可立即得出

$$\mathcal{R}(s \leftrightarrow t;c) = R \cdot \mathcal{R}(s \leftrightarrow t;c').$$

■

从现在起，每当我们考虑均匀网络时，只需分析具有单位电导和电阻的网络。由于这个引理非常简单，一些资料中常常省略它。我们陈述这个引理，旨在帮助建立更直观的理解，并给出一个简单的有效电阻界的示例。

▶ **引理 3.11**。 在具有均匀电阻 $(G,c)$ 的均匀网络中， $R$对于不同的顶点 $u,v \in V(G)$

$$\mathcal{R}(u \leftrightarrow v) \leq R \cdot d(u,v).$$

其中， $d(\cdot)$ 是 $G$ 中的跳数距离。 ◀

证明。 我们考虑底层图相同且电导为单位值的均匀网络。 定理 3.6 告诉我们，有效电阻不超过从 $u$ 到 $v$的任意单位流。因此，我们将构造这样一个流 $\theta$来证明我们的界。考虑一条最短路径 $P$从 $u$ 到 $v$，其含义是它经过的

边数最少。于是这条路径有 $d(u,\ v)$ 条边。将这些边沿路径方向从 $u$ 定向，并对路径上的每条有向边令 $\theta(e)\ = 1$ 且 $\theta(e^-)\ = -1$，其中 $e^-$ 是 $e$ 的反向定向。所有其他边均赋值为 0。 $\theta$ 是一个从 $u$ 到 $v$ 的合法流，且强度为单位值。此外，

$$\mathcal{E}(\theta) = \sum_e [\theta(e)]^2 r(e) = \sum_e [\theta(e)]^2 = \sum_e \mathbb{1}[e \text{ lies on } P] = d(u,v).$$

这里， $\mathbb{1}$ 表示一个指示函数：当其参数是1 的一条边时， $P$ 取0，否则。由此结合引理3.10，$\mathcal{R}(u \leftrightarrow v) \leq R \cdot d(u,v)$。■

有效电阻的最后一个良好性质是，它实际上是网络节点上的一种度量，并满足三角不等式。因此，我们可以根据某些子图或子路径的已知界，构造电阻的界。

▶ **定理3.12（三角不等式）**。（推论*10.8*）有效电阻$\mathcal{R}$满足三角不等式：若 $a$， $b$，$c$是顶点，则

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow c) \leq \mathcal{R}(a \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(b \leftrightarrow c).$$

◀

## 3.2 三角网格中的电阻

现在，我们将运用上一节介绍的概念来分析一个非常具体的例子。我们希望界定均匀电阻为 $R$的三角网格图上均匀网络中的有效电阻。首先，我们定义这一概念的含义。之后，通过考察子图中的电阻，我们推导出一个关于电阻的上界 $\mathrm{O}\left(R \cdot \log^2(n)\right)$。我们通过构造从一个顶点到另一个顶点的特殊路径来选取这些子图，从而能够应用一个关于方形网格图中电阻的已知结果。

▶ 定义3.13（三角网格图）。对于 $n \in \mathbb{N}$，三角网格图$T_n$是一个图，其顶点集为 $V := \{(x,y)\ \in \mathbb{N}^2 \mid x + y \leq n\}$，其中两个顶点相邻，当且仅当它们之间的距离为1，或距离为2且位于同一条对角线上。我们将对应于 $(0,\ 0)$ 的顶点称为该图的原点。对于 $v \in V$，我们定义 $\partial(v,k)\ := \{u \in V \mid d(v,u)\ \geq k\}$。我们定义 $\chi_n := |V(T_n)|$。◀

见图3.1 中展示的三角网格图。关于该三角网格图的顶点集基数，我们有以下结果。这将在第4章中。

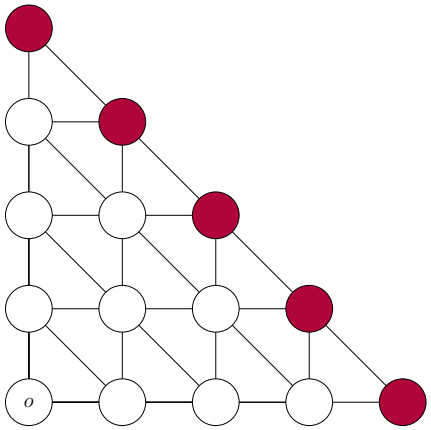



**图3.1：** 三角网格图 $T_4$。原点标记为 $o$。 $\partial(o,\ 4)$中的顶点已突出显示。

▶ **引理3.14.** 对于 $n \in \mathrm{N}^+$， $\chi_n = (n+1)(n+2)\ 2$。 ◀

证明。 我们考虑 $T_n$的顶点集。于是，有一个顶点的 $y$坐标为$n$，两个顶点的 $y$ 坐标为 $n-1$，依此类推，直到最后有 $n+1$个顶点的 $y$ 坐标为0。根据定义，不存在 $y$坐标严格小于或大于0和 $n$的顶点。因此，我们有

$$|V(T_n)| = \sum_{y=0}^{n} n + 1 - y = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

■

为了证明该界，我们需要以下关于方格网图角点之间有效电阻的结果：

▶ **定义3.15（方格网图）。** （第*9.5*节引言） 设 $B_n$ 为 $n \times n$二维网格图，其中 $V := \{(z,\ w)\ \in \mathrm{N}^2 \mid 1 \le z,\ w \le n\}$，其中当顶点之间的欧几里得距离为单位长度时，它们相邻。 ◀

▶ **定理 3.16（正方形中的电阻）。** （命题 *9.17*）设 $a =$ （1，1）为 $B_n$的左下角，并设 $z =$ （$n$，$n$）为 $B_n$的右上角。假设 $B_n$ 的每条边的电导均为 1。有效电阻$\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)$满足

$$\frac{\log(n)}{2} \le \mathcal{R}(a \leftrightarrow z) \le 2\log(n).$$

◀

现在我们可以证明以下引理。

▶ **引理 3.17**。 设，对于 $n \in \mathrm{N}^+$， $(T_n, c)$ 是一个具有均匀电阻的均匀网络$R$。设 $o$ 是 $T_n$ 的原点，且 $t \in V(T_n) \setminus \{o\}$。则

$$\mathcal{R}(o \leftrightarrow t) \leq R \cdot \left(8 \log^2(n) + 6(\log(n) + 1)\right)$$

◀

证明。 我们再次考虑将 $T_n$ 作为底层图、且所有边均赋予单位电导的网络。我们通过证明以下关于三角网格行数的不变量来证明该命题：设 $k \in \mathrm{N}$。则，对某个 $r, s \in \mathrm{N}$： $k = 4s + r$。设 $o$是 $T_k$的原点，且 $t \in \partial(o, k)$。设$r_k := \mathrm{R}(o \leftrightarrow t)$是在以 $T_k$为底层图的网络中的电阻。则

$$r_k = r_{4s+r} \leq 4 \log(s+1) \log_2(4s) + 3(\log_2(4s + r) + 1). \tag{3.2}$$

我们首先证明 $1 \leq k \leq 3$的情形。根据 引理 3.11， $r_k \leq k \leq 3$，这由求和式的第二项计入。因此，不等式成立。

现在令 $k$ 为任意但固定的值，使得对所有 $1 \leq k' < k$， (3.2)都成立。令$r$, $s \in \mathrm{N}$， 且 $0 \leq r < 4$ 满足 $k = 4s + r$。令 $t = (t_x, t_y)$， 并令 $t_y \leq 2s$。由于$k = t_x + t_y$, 因此有 $t_x \geq 2s + r$。现在考虑点 $a := (s, s)$ $b := (2s, 0)$ $c := (2s + r, 0)$。由于它们坐标之和均小于 $4s + r$， 因此都属于 $V(T_k)$。根据定理3.12，我们有

$$r_k \leq \mathcal{R}(o \leftrightarrow a) + \mathcal{R}(a \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(b \leftrightarrow c) + \mathcal{R}(c \leftrightarrow t).$$

关于这一构造的具体示例，请参见图 3.2。我们首先考虑点 $o$和 $a$。它们构成子图 $B_{s+1}$ 在 $T_k$中的角点。由于在 $T_k$ 中只添加沿对角线的边，根据定理 3.9，我们知道 $\mathrm{R}(o \leftrightarrow a; T_k) \leq \mathrm{R}(o \leftrightarrow a; B_{s+1})$。这意味着我们可以应用定理 3.16 来界定有效电阻。对于顶点 $a$和 $b$，情况也相同。为了界定 $b$和 $c$之间的有效电阻，我们再次使用引理 3.11。现在我们只需关注 $c$和 $t$之间的有效电阻。为此，我们考虑以 $c$为原点的 $T_k$的子图 $T_{2s}$。我们注意到，从 $c$到 $t$的能量最小化单位流的能量，必然小于或等于从 $c$到 $t$、且仅使用 $T_{2s}$中的边的能量最小化单位流的能量，因为下确界只是对受限的一类流取的。因此我们有

$$r_k = r_{4s+r} \leq 2 \log(s+1) + 2 \log(s+1) + d(b, c) + r_{2s}$$

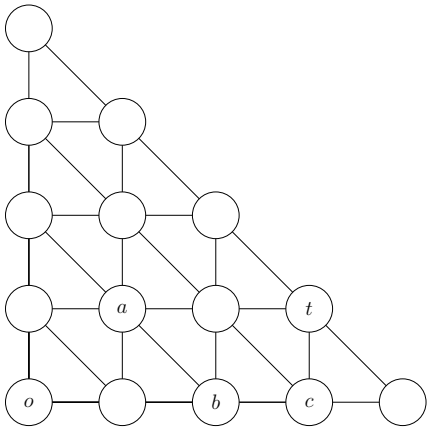



**图 3.2：** 三角网格图 $T_4$ 及其原点 $o$。为确定有效电阻 $\mathcal{R}(o \leftrightarrow t)$，引理 3.17 使用顶点 $a$、$b$、$c$以及诱导方形网格的已知界。

$$
\begin{aligned}
&\leq 4\log(s+1) + r + r_{2s} \\
&\leq 4\log(s+1) + 3 + r_{2s}.
\end{aligned}
$$

由于 $2s < k$，现在我们可以应用不变量（3.2）：

$$
\begin{aligned}
&\leq 4\log(s+1) + 3 + 4\log\left(\left\lfloor\frac{2s}{4}\right\rfloor + 1\right)\log_2(2s) + 3(\log_2(2s)+1) \\
&\leq 4\log(s+1) + 4\log(s+1)\log_2(2s) + 3(\log_2(2s)+1) + 3 \\
&= 4\log(s+1)(\log_2(2s)+1) + 3(\log_2(2s)+1+1) \\
&= 4\log(s+1)(\log_2(2s)+\log_2(2)) + 3(\log_2(2s)+\log_2(2)+1) \\
&= 4\log(s+1)\log_2(4s) + 3(\log_2(4s)+1) \\
&\leq 4\log(s+1)\log_2(4s) + 3(\log_2(4s+r)+1).
\end{aligned}
$$

当 $t_y \geq 2s + r$ 时，这具有 $t_x \leq 2s$。现在，我们可以对点 $a := (s,\ s)$ $b := (0,\ 2s)$ $c := (0,\ 2s + r)$ 作出相同的论证，这同样满足该界。

最后考虑 $2s < t_y < 2s + r$的情况。我们称 $t_y = 2s + x$为 $0 < x < r$。然后，令 $a := (s, s)$ $b := (2s, 2s)$。根据 引理 3.11，顶点 $b$具有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(b \leftrightarrow t) \leq d(b,t) &\leq |t_x - b_x| + |t_y - b_y| = |(4s + r - t_y) - 2s| + |t_y - 2s| \\
&= |2s + r - t_y| + |t_y - 2s| \\
&= |2s + r - (2s + x)| + |2s + x - 2s|
\end{aligned}
$$

$$= |r - x| + |x| = r.$$

由于 $o$、$a$ 和 $a$ 以及 $b$ 是一个 $B_{s+1}$ 子图的角，根据 定理 3.16，它们具有 $\mathcal{R}($ $o \leftrightarrow a) \leq 2$ 对数$(s+1)$，对于 $\mathrm{R}\,(a \leftrightarrow b)$也同样成立。根据定理3.12，最终得到

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(o \leftrightarrow t) &\leq \mathcal{R}(o \leftrightarrow a) + \mathcal{R}(a \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(b \leftrightarrow t)\\ &\leq 4\log(s+1) + 3\\ &\leq 4\log(s+1)\log_2(4s) + 3(\log_2(4s+r) + 1).\end{aligned}$$

因此，我们的 $k$不变量也成立。最后，注意到对于 $x \in \mathrm{R}^+$ 以及对于满足 $n = 4s+r$和 $0 \leq r < 4$的 $n \in \mathrm{N}^+$，$\log_2(x) = \log(x)\log(2) \leq \log(x)_1 \leq 2\log(x)$：$s+1 \leq n.$最后，结合引理3.10，我们得到

$$\mathcal{R}(o \leftrightarrow t) = R \cdot r_n \leq R \cdot \Big(8\log^2(n) + 6(\log(n)+1)\Big).$$

■

# 4 环图上的支配集 RLS

本章将分析我们的 RLS 算法在环图上求解最小支配集问题的性能。我们将运用在第3章 中开发的技术，以及概率论中的其他工具。首先，我们考察 RLS 首次采样到可行支配集所需的时间，不论其质量如何。进入可行区域后，我们将在下一节探究大规模支配集的一些良好性质，以及这些性质如何帮助 RLS 快速提升解的质量。在接下来的一节中，我们将介绍一种在环上表示支配集的新方法：邻接模型。我们将分析 RLS 对解所做的更改如何反映在这一新模型中。然后在下一节中，我们将把另一种表示形式形式化：粒子系统。它们抽象了先前模型中的依赖关系，使我们能够更好地推理其行为。在最后一节中，我们将使用这些模型分析 RLS 找到最优解的运行时间，并证明其界为$O\left(n^4 \log^2(n)\right)$。

## 4.1 达到可行性的时间

回顾一下，我们的 RLS 算法（算法1）会随机初始化一个集合，即以 $1\,2$ 的概率独立地将每个顶点纳入其中。我们的第一个结果证明，这种随机初始化几乎不可能得到一个支配集。

▶ **引理 4.1**。 随机初始化集合 $y \in \{0,1\}^n$ 以至少 $C_n$ 的概率不会在环图 $1 - 2^{-\Theta(n)}$ 上诱导出一个支配集。 ◀

证明。 我们先考虑 $n$ 模 $3 = 0$ 的情形，其他情形稍后讨论。我们可以将图 $0 \le i < \frac{n}{3}$ 划分为若干个三元组（$v_{3i}$，$v_{3i+1}$，$v_{3i+2}$）。令 $M_i$ 表示顶点 $v_{3i+1}$ 未被支配这一事件。为此，$i$ 号三元组中的三个顶点都必须未被纳入我们的解。因此，$\Pr[M_i] = \frac{1}{2} \cdot 1\,2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$，因为每个顶点都以概率 $1\,2$ 被独立选中。因此，这个中间顶点被支配的概率为 $\Pr\left[M_i\right] = 1 - \Pr[M_i] = \frac{7}{8}$.

现在我们证明这些事件相互独立，即对每个满足 $|I| \geq 2$的子集 $I \subseteq [n]$，都有：$\Pr\left[\bigcap_{i\in I} M_i\right] = \prod_{i\in I}\Pr[M_i]$.。任取这样的子集 $I \subseteq [n]$。所有事件（$M_i$）$_{i\in I}$的交集表示所有顶点（$v_{3i+1}$）$_{i\in I}$都被支配。单个顶点 $v$ 只能支配其闭邻域中的顶点，也就是满足 $d(u,v) \leq 1$的顶点 $u$。对于 $i$、 $j \in I$，支配$v_{3i+1}$的顶点 $v$因此不能支配 $v_{3j+1}$，因为 $d(v_{3j+1}, v_{3i+1}) \geq 3$和 $d(v, v_{3i+1}) \leq 1$意味着 $d(v, v_{3j+1}) \geq 2$。因此，是否选中顶点 $v_{3i}$、 $v_{3i+1}$、 $v_{3i+2}$，只会影响对 $v_{3i+1}$的支配。由于解中的一个顶点是否被选中与其他所有顶点相互独立，事件 $M_i$ 与其他所有事件 $M_j$独立。对于 $j \in I$和事件 $M_j$，因此可以得出 $\Pr\left[\bigcap_{i\in I} M_i\right] = \Pr[M_j] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} M_j\right]$。反复应用这一推理，可得 $\Pr\left[\bigcap_{i\in I} M_i\right] = \prod_{i\in I}\Pr\left[M_i\right]$

令 $D$ 表示随机初始化的解是该图的支配集这一事件。根据上述划分，这样的有效解必须支配所有中间顶点。因此，该事件的概率是事件 $D$概率的一个上界。现在我们有

$$\Pr[D] \leq \Pr\left[\bigcap_{0\leq i<\frac{n}{3}} \overline{M_i}\right] = \prod_{0\leq i<\frac{n}{3}} \overline{M_i} = \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{n}{3}} = 2^{\frac{\log_2(7)-\log_2(8)}{3}n} = 2^{-\Theta(n)}$$

由此可得

$$\Pr\left[\overline{D}\right] = 1 - \Pr[D] \geq 1 - 2^{-\Theta(n)}$$

对于 $n \mod 3 \neq 0$的情形，我们忽略那些不可能属于三元组的顶点。因此，$\Pr\left[\bigcap_{0\leq i<\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} M_i\right]$仍然是$\Pr[D]$的一个上界，因为这仍是该解导出支配集的必要条件。由于$\frac{n}{3} - \lfloor\frac{n}{3}\rfloor < 1$，我们仍有一个在 $\Theta(n)$内的界，且结论成立。■

由此，我们已经可以证明关于运行时间的第一个界，即 RLS 采样到一个可行支配集所需的期望时间。

▶ **定理 4.2.** 从随机初始化集合 $y \in \{0,1\}^n$开始，RLS 的期望$O(n\log(n))$ 适应度评估次数后即可采样到一个可行集。 ◀

证明。 考虑 $y \in \{0,1\}^n$ 均匀随机初始化。根据 引理 4.1，$S(y)$ 以至少 $1 - 2^{-\Theta(n)}$ 的概率不是支配集。因此，在计算期望运行时间时，我们只考虑这种情况。令 $N(y)$ 表示非支配顶点的集合。令 $x_t$ 表示迭代 $t+1$之前 RLS 的当前解；我们令 $X_t = |N(x_t)|$。要使这个过程取得进展，非支配顶点的数量必须减少。要使其中一个顶点变为受支配顶点，可能发生以下两种事件：

要么该顶点自身被选入集合，要么它的一个直接邻居被选入集合。对于顶点 $v \in N(y)$，令 $D_v$ 表示该顶点变为受支配顶点这一事件。我们只考虑 RLS 均匀随机选择一个顶点并将其翻转，且所选顶点为 $v$ 的情况。这两种情况发生的概率分别为 $1_2$ 和 $\frac{1}{n}$。于是 $\Pr[D_v] \geq \frac{1}{2n}$。考虑这一点，并忽略所选顶点支配了自身以外更多顶点的可能性，我们可以给出该过程期望进展的界：

$$\mathrm{E}[X_{t+1} - X_t \mid X_0, \ldots, X_t] \geq 1 \cdot \Pr[X_{t+1} - X_t = 1 \mid X_0, \ldots, X_t]\} \geq \frac{1}{2n} \cdot X_t.$$

令 $I$ 为表示初始选中顶点数量的随机变量。则 $I \sim$服从二项分布$\left(n, \frac{1}{2}\right)$且 期望$[I] = \frac{n}{2}$。由于至少所有选中的顶点都已被支配，因此有 期望$[X_0] \leq$期望$[n - I] = n -$期望$[I] = \frac{n}{2}$。令 $T =$最小值$\{t \in \mathbb{N} \mid X_t \leq 0\}$表示该过程首次达到0的时间。由定理2.5 可得

$$\mathrm{E}[T] \leq \frac{1 + \ln\left(\frac{n}{2}\right)}{\frac{1}{2n}} = 2n \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{n}{2}\right)\right) = 2n + 2n \ln\left(\frac{n}{2}\right) \in O(n \log(n))$$

■

一旦我们采样到一个可行支配集，适应度函数 $f$就能确保我们之后不会再离开可行解空间。从此以后，每次变异都必须产生一个有效支配集。要得到适应度严格更优的解，唯一的方法是减小该集合的基数。根据算法的定义，这只能通过翻转一个集合中“非必需”的顶点来实现。在下一节中，我们将形式化这一概念，探究环图上支配集的一些有趣性质，并利用这些性质证明下一个运行时间界。

## 4.2 重要性质和早期优化

以下两个定义可见于 Haynes 等人 [HHH23] 的 定义 *2.10* 和 *2.13*，它们对于确定某些顶点是否与支配集相关将十分重要。

▶ **定义 4.3（私有邻域）**。对于集合 $S \subseteq V$和顶点 $v \in S$， $S$- $v$ 的私有邻域是集合 $N[v] \setminus N[S \setminus \{v\}]$，记作 $\mathrm{pn}[v, S]$。对于任意顶点 $v \in S$，我们称另一个顶点 $w \in \mathrm{pn}[v, S]$ 为 $S$-私有邻居 $v$。◀

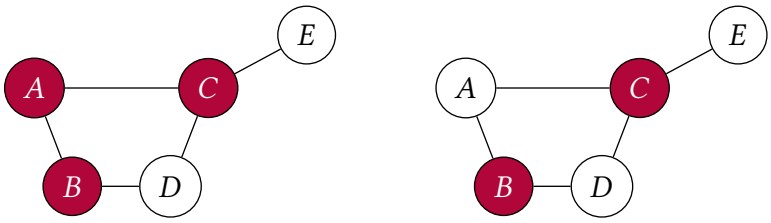



**图 4.1：** 左：集合 $S := \{A, B, C\}$。$E$是 $C$ 的一个私有邻居。$S$是冗余的，因为 $A$是一个冗余顶点。右：集合 $S' := \{B, C\}$。此时，$B$是它自身的一个私有邻居。$B$ 和 $C$ 都有私有邻居。因此，$S'$ 是非冗余的。

▶ **定义 4.4（冗余集）**。如果存在某个 $S \subseteq V$ 使得 $\operatorname{pn} v \in S$，则称集合 $[v, S] = \emptyset$ 为冗余集。若集合 $S$ 不是冗余集，则称其为非冗余集。我们定义 $\mathcal{R}(S) := \{v \in S \mid \operatorname{pn}[v, S] = \emptyset\}$。我们称 $v \in \mathcal{R}(S)$ 为冗余顶点。◀

有关图中私有邻居和冗余集的直观示例，请参见图 4.1。现在我们来证明一个关于冗余性的简单性质。

▶ **引理 4.5**。对于任意集合 $S \subset S' \subseteq V$ 和 $u \in S$，如果 $\operatorname{pn}[u, S] = \emptyset$，那么 $\operatorname{pn}[u, S'] = \emptyset$。◀

证明。设 $S \subset S' \subseteq V$ 和 $u \in S$ 满足 $\operatorname{pn}[u, S] = \emptyset$。那么，对于所有 $v \in N[u]$，都存在另一个不同于 $u$的顶点 $w \in S$，使得 $v \in N[w]$。由于 $S'$ 是 $S$的真超集，这些顶点也属于 $S'$。因此 $\operatorname{pn}[u, S'] = \emptyset$。■

很多时候，我们需要讨论基数固定的支配集。现在我们为这些集合引入一些简写符号。

▶ **定义 4.6.** 设 $n$，$k \in \mathrm{N}^+$。我们将所有 $k$-支配集记作 $C_n$：$\mathcal{D}_k(C_n)$。将所有 $C_n$ 的支配集记作 $\mathcal{D}(C_n)$。◀

▶ **引理 4.7.** 对于 $n$，$k \in \mathrm{N}^+$，支配集 $D \in \mathcal{D}_k(C_n)$ 是极小的，当且仅当它是非冗余的。◀

证明。设 $D \in \mathrm{D}_k(C_n)$ 是一个极小支配集。那么，对于任意 $S \subset D$，$S$ 都不是支配集。因此，特别地，对于某个 $v \in D$，$D \setminus \{v\}$ 不是支配集。这意味着必定存在一个顶点 $w \in V$，它被 $v$ 支配，但不被$D \setminus \{v\}$支配。因此 $w \in \operatorname{pn}[v, D]$。由于 $D$ 中没有顶点拥有非空的私有邻域，$D$ 是非冗余的。

反之，设 $D \in \mathrm{D}_k(C_n)$ 是一个不可约支配集。那么每个顶点$v \in D$ 都有一个非空的私有邻域。这意味着

$$N[D \setminus \{v\}] = N[D] \setminus \operatorname{pn}[v, D] \subset V,$$

因此 $D\setminus\{v\}$ 不是支配集。所以 $D$ 的每个子集都不是支配集，并且 $D$ 是极小的。■

这个引理也见于 [CHM78] 中的 命题*4.1*。然而，由于 Cockayne等人省略了证明，我们选择在此给出。要使环上的一个支配集冗余，我们需要用其他顶点完全覆盖某个顶点的邻域。我们通过以下定义来明确这一概念，并据此证明支配集冗余的充要条件。

▶ **定义4.8（弧）**。设 $n\in\mathrm{N}^{+}$。对于 $k\le n$，我们称 $P_k$ 中 $C_n$长度为 $k$的导出路径为一条弧。◀

▶ **引理 4.9**。对于 $n\in\mathrm{N}^{+}$，支配集 $D\in\mathcal{D}_k(C_n)$ 冗余，当且仅当存在一条弧 $A$ 位于 $C_n$ 内，长度至多为4，且 $|A\cap D|\ge 3$。◀

证明。设 $D\in\mathrm{D}_k(C_n)$ 是一个冗余支配集。于是存在一个顶点$v\in D$，其具有 $\mathrm{pn}[v,D]=\emptyset$。这意味着 $N[D]=N[D\setminus\{v\}]$。由于对于$u$，$w\in V$与 $v$相邻时，$N[v]=\{u,v,w\}$，因此必须存在不同于 $v$ 的顶点 $x,y\in D$，使得 $\{u,v,w\}\subseteq N[x]\cup N[y]$。于是，$v\in N[x]\vee v\in N[y]$,$v$ 必须是 $x$ 或 $y$ 的邻居。不妨设 $x$ 是该顶点，并且 $x=u$。于是 $w\notin N[x]$，因此$w\in N[y]$。由于 $w$ 必须位于 $y$ 的邻域中，且 $d(v,w)=1$，所以我们有$d(v,y)\le 2$。于是 $x,v,y$ 包含在一条长度至多为 4 的弧中。

反过来，设 $D\in\mathrm{D}_k(C_n)$ 是一个支配集，其中包含顶点集合 $\{u,v,w\}\subset D$，这些顶点都位于一条长度至多为 4 的弧 $A$ 上。设 $v$ 位于 $u$ 和 $w$ 之间。由于 $d(u,w)\le d(u,v)+d(v,w)<|A|\le 4$，且两个距离都大于 0，因此其中一个距离必定等于 1。不失一般性，设 $d(u,v)=1$，且 $d(v,w)\le 2$。于是 $N[v]\subset N[u]\cup N[w]$。这满足 $\mathrm{pn}[v,D]=\emptyset$，这意味着 $D$ 是冗余的。■

这表明，只要支配集中的顶点足够多，就必然会出现冗余。在某个时候，这些顶点必定会聚集得过于密集，从而必然满足这一条件。下面的引理证明了这一直觉。

▶ **引理 4.10.** 对于 $n\in\mathrm{N}^{+},k>\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，每个 $D\in\mathcal{D}_k(C_n)$都不是极小的。◀

证明。令 $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$和 $S \subset V$满足 $|S| = k$。考虑所有按顺时针方向排列的连续顶点四元组，即 $T := \{(v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}) \mid i \in [n]\}$，其中加法模 $n$进行。这样的四元组有 $n$ 个，因此 $|T| = n$。现在考虑集合 $S' := S \times [4]$。于是 $|S'| = 4|S|$。定义函数 $f\colon S' \to T$，其中$f(v,i) = t \in T$，且 $t_i = v$。这是一个定义良好的函数，因为每个顶点与位置对都恰好对应一个这样的四元组。此外，对于固定的 $v \in S$ 和 $i$，若 $j \in [4]$满足 $i \neq j$，则由构造可知，$f(v,i) \neq f(v,j)$。分两种情况讨论：$n$为偶数或奇数。当 $n$为偶数时，有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$。于是 $k \geq \frac{n}{2} + 1$。因此 $|S'| = 4|S| = 4k \geq 4\left(\frac{n}{2} + 1\right) = 2n + 4 > 2n$。根据鸽巢原理，必存在一个 $t \in T$满足 $|f^{-1}(t)| > 2$。当 $n$为奇数时，有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$和 $k \geq \frac{n-1}{2} + 1$，因此 $|S'| \geq 4\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) = 2n + 2 > 2n$。同样，必存在 $t \in T$满足$|f^{-1}(t)| > 2$。于是有 $\{(u,i),(v,j),(w,k)\} \subseteq f^{-1}(t)$。根据观察，$u$、$v$和$w$是三个不同的顶点。由于这些顶点都属于同一个四元组，它们包含在一条长度为 4 的弧中。若 $S$是一个支配 $k$ 集，则根据引理 4.9 和引理 4.7，$S$不是极小支配集。■

此时，我们已经可以利用这一事实来分析 RLS 采样基数为 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$的支配集所需的期望时间。引理 4.10 表明，在每个基数更大的支配集中，至少有一个冗余顶点可供 RLS 翻转。然而，利用我们在引理 4.5中证明的关于冗余集的简单性质，我们可以得到更好的界。

▶**引理 4.11.** 设 $n \in \mathrm{N}^+$。若对于 $q \in \mathrm{N}^+$，$k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + q$且 $D \in \mathcal{D}_k(C_n)$，则$|\mathcal{R}(D)| \geq q$。◀

证明。设 $q \in \mathrm{N}^+$，其中 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + q \leq n$，且 $D_q \in \mathrm{D}_k(C_n)$。由引理 4.10 可知，$D_q$ 是冗余的，也就是说，存在一个顶点 $v_q \in D_q$，使得 $N[D_q \setminus \{v_q\}] = V$。令 $D_{q-1} = D_q \setminus \{v_q\}$。再次递归地应用引理 4.10，可得存在一个顶点 $v_{q-1}$，使得 $N[D_{q-1} \setminus \{v_{q-1}\}] = V$。重复这一论证，直到到达 $D_0$。此时我们得到互不相同的顶点 $v_q$、……、$v_1$，使得对于 $1 \leq i \leq q$，$\mathrm{pn}[v_i, D_i] = \emptyset$。由于 $D_1 \subset \cdots \subset D_q$，由引理 4.5 可得 $\mathrm{pn}[v_i, D_q] = \emptyset$。这意味着所有这些顶点在 $D_q$ 中都是冗余的，因此 $\{v_1, \ldots, v_q\} \subseteq \mathrm{R}(D_q)$。于是有 $|\mathrm{R}(D_q)| \geq q$。■

▶**定理 4.12**。从一个支配集开始 $y \in \{0,1\}^n$满足 $|y|_1 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，RLS 的期望适应度评估次数为 $O(n\log(n))$ 即可采样得到一个支配集 $y' \in \{0,1\}^n$满足 $|y'|_1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。◀

证明。令 $y_t$ 表示迭代 $t+1$之前 RLS 的当前解。令$D_t \subseteq V$表示由 $y_t$诱导的顶点子集。令 $S_t = |D_t| - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，并令

$T := \min\{t \in \mathbb{N} \mid S_t = 0\}$。注意到 $|D_T| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。现在我们考虑这一过程的漂移。根据适应度函数 $f$的定义，有 $0 \leq |D_t| - |D_{t+1}| \leq 1$，因此 $0 \leq S_t - S_{t+1} \leq 1$。当 RLS 翻转顶点 $v \in V$，使得 $D_t \setminus \{v\}$仍然是一个支配集，即$v \in \mathcal{R}(D_t)$时，我们有 $|D_t| > |D_{t+1}|$，相应地有 $S_t > S_{t+1}$。令 $G$表示如下事件：RLS 在迭代 $t$中选择第一个算子，并选取 $\mathcal{R}(D_t)$ 中的一个顶点。根据引理 4.11，我们有

$$\mathrm{E}[S_t - S_{t+1} \mid S_0, \ldots, S_t] = \Pr[G] = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\mathcal{R}(D_t)|}{n} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{|D_t| - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} = \frac{S_t}{2n}.$$

我们注意到，在此分析中可以忽略任何交换操作，因为 引理 4.11 对所有支配集都成立，且交换操作无法减小基数。根据定理2.5，并且由于 $S_0 = |D_0| - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，我们有

$$\mathrm{E}[T] \leq 2n \cdot \left(1 + \log\left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\right) \leq 2n + 2n \cdot \log(n) \in O(n \log(n))$$

■

圈图上的最小支配集的基数为 $\lceil \frac{n}{3} \rceil$，其中 $C_n$。在采样一个包含 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个顶点的集合时，RLS 只需移除剩余顶点的六分之一。然而，基数更小的支配集不再具有总是冗余这一良好性质。

## 4.3 邻接模型

现在，我们分析当 RLS 的当前解是一个基数为 $D$ 的支配集 $|D| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$时的行为。正如我们所指出的，存在一些非冗余且非最优的支配集（示例见 图4.2 ）。为了更好地推理 RLS 的行为，我们首先引入一些新定义，以形式化环图上支配集的另一种表示方式。

▶ 定义4.13（[逆时针-]顺时针邻居）。对于任意 $n, k \in \mathbb{N}^+$，令$S \subseteq V(C_n)$。令 $v \in S$。那么，我们称顶点 $u \in V(C_n)$为$v$ 相对于 $S$的顺时针邻居，条件是 $u \in S$，并且 $u$是从 $v$开始按顺时针方向遍历 $C_n$时遇到的最近的此类顶点。我们称 $u =$ 为$\mathrm{cw}_S(v)$。类似地，我们将 $v$的逆时针邻居定义为$\mathrm{ccw}_S(v)$。如果 $S = V(C_n)$或参考集合可由上下文明确，我们将其简写为$\mathrm{cw}(v)$和$\mathrm{ccw}(v)$。◀

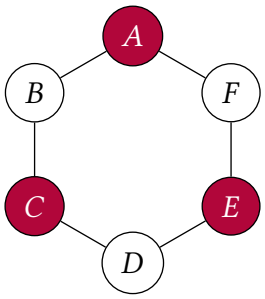



**图4.2：** $C_6$的一个非冗余但非最优支配集。

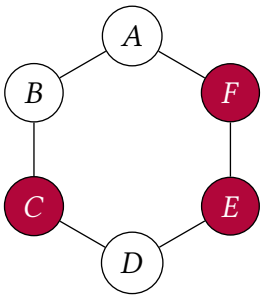



**图4.3：** $C_6$的一个支配集。 $C$是顺时针可移动的，但不是逆时针可移动的。

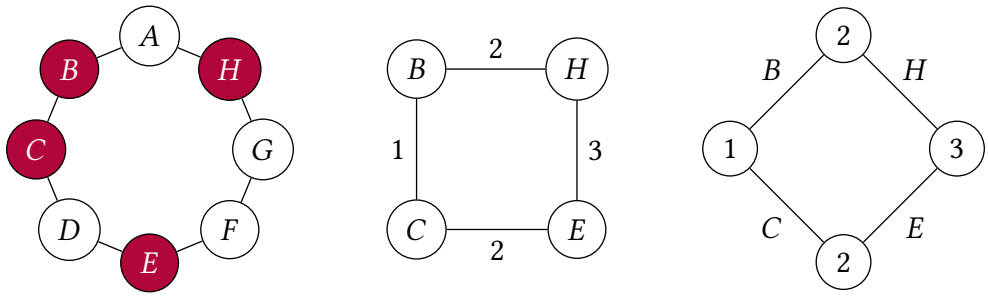
▶ 定义 4.14（可移动顶点）。令 $n, k \in N^+, D \in \mathrm{D}_k(C_n)$且 $v \in D$。将顶点 $v$ 移动到另一个顶点 $u \in V(C_n)$，对应于一个新的支配集 $D' \in \mathrm{D}_k(C_n)$，其中 $D' = D \setminus \{v\} \cup \{u\}$。如果$d(v, \mathrm{cw}_D(v)) \leq 2$，我们称 $v$ 为逆时针可移动。逆时针移动将 $v$ 移动到 $\mathrm{ccw}(v)$。如果 $d(v, \mathrm{ccw}_D(v)) \leq 2$，我们称 $v$ 为顺时针可移动。顺时针移动将 $v$ 移动到$\mathrm{cw}(v)$。如果 $d(v, \mathrm{cw}_D(v)) + d(v, \mathrm{ccw}_D(v)) \leq 3$，我们称 $v$为自由可移动。自由移动可以将 $v$ 移动到任意$u \in V(C_n) \setminus D$。我们将非自由移动称为邻居移动。◀

参见 图4.3 中的示例。我们注意到，引理 4.9中所述的弧存在，当且仅当存在一个可自由移动的顶点。因此，要确定顶点的可移动性，进而确定支配集的冗余性，只需了解顶点与其顺时针和逆时针邻居之间的距离。因此，我们希望在抽象掉环图上支配集顶点绝对位置等其他细节的同时，准确捕捉这些信息。为此，我们考虑以下模型：

▶ 定义 4.15（中间邻接图）。设 $n, k \in \mathrm{N}^+$ 且 $D \in \mathrm{D}_k(C_n)$。考虑带有双射 $\varphi: D \to V(C_k)$ 的 $C_k$，使得对于 $u, v \in D$：$\{\varphi(u)\ \varphi(v)\} \in E(C_k) \Leftrightarrow v = \mathrm{cw}_D(u) \wedge u = \mathrm{ccw}_D(v)$，即，与支配集中的一个顶点相对应的顶点，与对应于其逆时针和顺时针邻居的顶点相邻。我们进一步定义

$$w: E(C_k) \to \{1, 2, 3\}, \{\varphi(u), \varphi(v)\} \mapsto d(u, v).$$

我们将（$C_k$，$w$）称为 $D$ 的中间邻接图。 ◀




支配集 $D$ $(C_4,\ w)$ 邻接图 A $(D)$

**图4.4：** 左：$C_8$上的支配集 $D$。中：$D$ 的中间邻接图及其对应的权函数 $w$。右：中间邻接图的边到顶点对偶图，即邻接图 A $(D)$。

我们注意到，可以将权函数的陪域定义为 $\{1, 2, 3\}$，因为对于不同的顶点 $u, v \in V(C_n)$，有 $d(u, v) \geq 1$；而当 $v \in D$ 满足：$d(v, \mathrm{ccw}_D(v)) > 3$ 或 $d(v, \mathrm{cw}_D(v)) > 3$ 时，这两个顶点之间会有一个未被支配的顶点，因此 $D \notin \mathrm{D}_k(C_n)$。

现在我们有一个图，其顶点对应于支配集中的顶点，边权重表示它们之间的距离。然而，我们将转而考虑该图的边到顶点对偶图，即将边作为顶点、将顶点作为边的图。我们根据 Diestel [的25]（第*1.1*节，线图）定义对其进行调整。

▶ **定义4.16（边到顶点对偶图）**。设 $G = (V, E, w)$。边到顶点对偶图 $EVD(G)$ 是定义在 $E$ 上的图，其中 $x, y \in E$ 作为顶点相邻，当且仅当它们作为边在 $V$ 中相邻。边权函数 $w$ 变为定义在 $EVD(G)$ 的顶点上的函数。◀

▶ **定义4.17（邻接图）**。设 $n, k \in \mathrm{N}^+$ 和 $D \in \mathcal{D}_k(C_n)$。设 $A$ 为 $D$ 中根据定义4.15所定义的中间邻接图。则称$\mathrm{A}(D) := EVD(A)$ 为 $D$的邻接图，其中 $EVD(\cdot)$ 为边到顶点对偶图。◀

乍看之下，这或许有些违反直觉，但在接下来的分析中，这种模型更容易处理。关于如何定义支配集的邻接图，请参见图4.4。由于我们想观察 RLS 如何移动顶点，因此经常会考察与某个移动序列相对应的支配集序列。不过，我们希望将分析限制在这些集合的邻接图上。因此，下面定义如何从支配集序列导出邻接图序列。

▶ 定义 4.18（邻接序列）。设 $n, k \in \mathbb{N}^+$。设 $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个支配集序列，其中每个 $i$ 都满足 $D_i \in \mathrm{D}_k(C_n)$，且 $D_{i+1}$ 是通过在 $D_i$ 中进行一次邻居移动得到的。考虑 $A_0 := \mathrm{A}(D_0)$ 及其对应的映射$\varphi$： $D_0 \to E(C_k)$。注意，由于 $D_1$ 是通过在 $D_0$ 中进行一次邻居移动得到的，集合差 $D_0 \setminus D_1$ 只包含被移动的顶点 $v$，而 $D_1 \setminus D_0$ 则包含它被移动到的顶点 $v'$。于是，我们将 $A_1$ 定义为具有对应映射的邻接图

$$\varphi\colon D_1 \to E(C_k), u \mapsto \begin{cases} \varphi(v) & \text{if } u = v', \\ \varphi(u) & \text{else.} \end{cases}$$

我们自然地将此定义扩展到后续所有移动，从而形成相应的邻接图序列 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$。
◀

由于现在与移动顶点对应的边，只需对应于它移动到的顶点的边，因此唯一发生变化的是顶点权重函数。接下来我们将看到，支配集中的顶点移动如何反映在这些函数中。

考虑对于 $n, k \in \mathbb{N}^+$ 和 $D \in \mathrm{D}_k(C_n)$，将顶点 $v$逆时针移动，例如移动到顶点 $v' := \mathrm{ccw}(v)$。于是，该顶点更靠近它的逆时针邻居，而远离它的顺时针邻居。令 $D'$ 为与此邻居移动对应的支配集。我们有 $d(v', \mathrm{ccw}_{D'}(v')) = d(v, \mathrm{ccw}_D(v)) - 1$，且 $d(v', \mathrm{cw}_{D'}(v')) = d(v, \mathrm{cw}_D(v')) + 1$。令 $A := \mathrm{A}(D)$ 和 $A' := \mathrm{A}(D')$ 分别为其顶点权重函数如定义 4.18 所述的对象。令 $a, b \in V(C_k)$ 为与 $v$ 在 $A$中的边相接的左侧和右侧顶点。那么，对于所述的逆时针移动，我们有 $w'(a) = w(a) - 1$，且 $w'(b) = w(b) + 1$。类似地，若考虑顺时针移动，则有 $w'(a) = w(a) + 1$，且$w'(b) = w(b) - 1$。这意味着，在分析支配集序列及其邻接图时，实际上只需考察相应的权函数：

▶ **定义 4.19（邻接权重序列）**。设 $n$， $k \in \mathbb{N}^+$ 以及$(D_i \in \mathcal{D}_k(C_n))_{i\in\mathbb{N}}$是一个支配集序列。设$(\mathcal{A}(D_i) := (V_i, E_i, w_i))_{i\in\mathbb{N}}$是定义于定义 4.18中的邻接图序列。则称序列$(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为相对于该支配集序列的邻接权重序列。◀

我们在图 4.6中给出了一个支配集序列的邻接权重序列示例。

下面的引理在本质上只是对引理 4.9 在邻接图中的情形作了重新表述，不过它对于接下来分析 RLS 的行为至关重要。

▶ 引理 4.20. 令 $n,k \in \mathrm{N}^{+}$ and $D \in \mathrm{D}_k(C_n)$。令 $\mathrm{A}(D) = (V,E,w)$ 为该支配集的一个邻接图。那么 $D$ 不是极小的，当且仅当存在一条边 $\{u,v\} \in E$，满足 $w(u) + w(v) \leq 3$。◀

证明。设 $D$ 不是极小的。于是，根据引理 4.9，存在一条长度至多为 4 的弧，其中包含至少 3 个 $D$顶点。设这些顶点为 $a$、$b$、$c$。其中必有一个位于另外两个之间。设该顶点为 $b$，并设 $a = \mathrm{ccw}_D(b)$，且 $c = \mathrm{cw}_D(b)$。由于该弧的长度至多为 4，因此有 $d(a, b) + d(b, c) \leq 3$。由于 $a$、$c$是 $b$的（逆）顺时针邻居，根据邻接图的定义，存在两个彼此相邻且分别对应这些距离的顶点 $u$、$v$。因此，存在一条边$\{u, v\}$，满足 $w(u) + w(b) = d(a, b) + d(b, c) \leq 3$。

逆命题的证明类似可得。 ■

▶ 推论 4.21. 对于引理 4.20 中的 $D$ 和 $\mathrm{A}(D)$，$D$ 不是极小的，当且仅当存在一条边 $\{u,v\} \in E$，且满足以下条件之一：$w(u) = 2 \wedge w(v) = 1$、$w(u) = 1 \wedge w(v) = 2$ 或 $w(u) = 1 \wedge w(v) = 1$◀

证明。我们证明，存在一条边 $\{u,v\} \in E$with $w(u) + w(v) \leq 3$，等价于存在一条具有所提出权重配置的边。我们先证明逆命题。假设存在一条具有所提出权重配置的边。所有这些配置都满足 $w(u) + w(v) \leq 3$。因此，存在一条满足这一总权重限制的边。现在假设存在一条边 $\{u,v\} \in E$with $w(u) + w(v) \leq 3$。由于 $w$ 的陪域是 $\{1, 2, 3\}$，对于任意 $v' \in V$，我们都有$w(v') \geq 1$。现在假设 $w(u) \geq 2$ 且 $w(v) \geq 2$。则 $w(u) + w(v) \geq 4$，这就产生了矛盾。因此，我们必须有 $u$ 或 $v$ 的权重为 1。不妨设 $w(u) = 1$。那么 $w(v) \leq 2$，因为否则，在 $w(v) = 3$ 的情况下，$w(u) + w(v) = 4$，这再次产生矛盾。由此可知，对于一条边而言，要使其总权重小于 3，所提出的权重配置是唯一的方式。应用引理 4.20 即完成证明。■

## 4.4 粒子系统

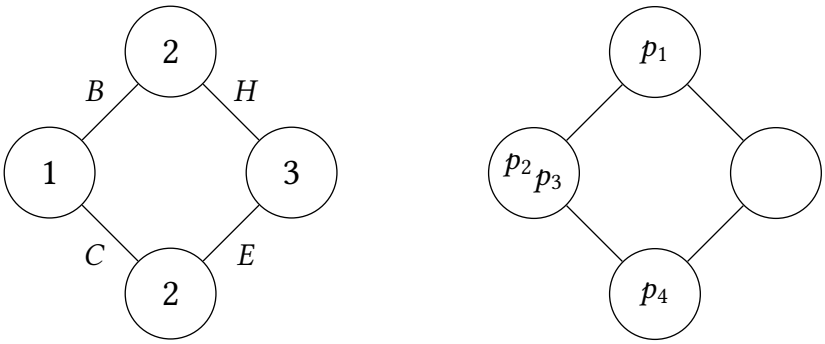
在邻接模型中采用这一新的非极小性定义后，我们希望根据该模型考察 RLS 的变异，以及它们如何影响邻接权重序列。我们希望界定 RLS 发现与推论 4.21 中所述权函数相对应的支配集所需的期望时间。为此，我们首先需要进一步观察刚刚引入的模型。对于某个 $n, k \in \mathrm{N}^+$，考虑圈图$C_k = (V, E)$，以及一个权函数 $w\colon V \to \{1, 2, 3\}$，它对应于一个支配集 $D \in \mathrm{D}_k(C_n)$。假设我们有一条边 $\{u, v\} \in E$with $w(u) = w(v) = 2$。该边对应于某个顶点 $a \in D$，其中 $w(u)$ 表示到其逆时针邻居的距离，而 $w(v)$ 表示到其顺时针邻居的距离。根据顶点可移动性的定义， $a$ 既可顺时针移动，也可逆时针移动。考虑 $a$ 的一次顺时针移动。则与该移动相对应的权函数 $w'$ 具有 $w'(u) = w(u) + 1 = 3$ 和 $w'(v) = w(v) - 1 = 1$。由于这种行为，我们可以想象，一个权重为 1 的顶点是某次移动的结果，由两个权重为 2 的顶点“组合”而成的。

现在，我们暂且重新设想一种模型：我们只关心权重为 1 和 2 的顶点，因为归根结底，只有这些顶点及其位置与判断底层支配集是否为非极小有关。我们将这些顶点视为一些粒子，它们根据某个支配集序列在环上游走。当两个粒子占据同一个顶点时，我们称它们相遇，这对应于顶点权重为 1。因此，在这个辅助模型中，若要使底层支配集不是极小的，就需要两个粒子相遇，然后至少有另一个粒子移动到它们紧邻的位置。如果这些粒子的行为能够用某种随机游走来建模，我们就可以将分析简化为研究三个粒子在环图上随机游走时“相遇”的情形。接下来我们将把这个想法形式化。

▶ **定义 4.22（粒子系统）**。设 $G = (V, E)$ 是一个图，且 $P$是一个粒子集合。令 $\psi$: $P \to V$ 是一个函数，为每个粒子指定其在图上的位置。我们用三元组 $(G, P, \psi)$表示一个粒子系统。◀

▶ 定义 4.23（邻接粒子系统）。设 $n, k \in \mathrm{N}^+$ and $D \in \mathrm{D}_k(C_n)$。设 $\mathrm{A}(D) = (V, E, w)$ 为 $D$ 的邻接图。设 $O := \{v \in V \mid w(v) = 1\}$ 和 $T := \{v \in V \mid w(v) = 2\}$。设 $P := \{p_1, p_2, \ldots p_{|T|+2|O|}\}$ 为粒子的集合。设$\psi\colon P \to V$，使得

1. 对于 $v \in O$， $|\psi^{-1}(\{v\})| = 2$ 以及 2. 对于 $v \in T$， $|\psi^{-1}(\{v\})| = 1$。




邻接图 A (*D*)　　邻接粒子系统

**图4.5：** 左：图 图4.4 中支配集的邻接图。右：相应的邻接粒子系统。由于有两个顶点的权重为 2，另一个顶点的权重为 1，因此该系统有四个粒子。

那么，粒子系统 $((V, E) P, \psi)$ 是 A $(D)$ 的邻接粒子系统。 ◀

之后会用到某些粒子之间的距离。我们在此定义其含义。

▶**定义4.24（粒子距离）**。设 $(G, P, \psi)$ 是一个粒子系统。对于 $p_1, p_2 \in P$ 我们将它们的距离 $d(\cdot)$ 定义为

$$d(p_1, p_2) = d_G(\psi(p_1), \psi(p_2))$$

其中，$d_G(\cdot)$ 是 $G$ 中的跳数距离。当粒子系统是邻接粒子系统时，其底层图是一个环（见定义4.17）。接下来，我们将（逆）顺时针距离 $d_{\text{ccw}}(\cdot)$ 和 $d_{\text{cw}}(\cdot)$ 定义为满足以下条件的路径长度：$\psi(p_1)$ 和 $\psi(p_2)$ 都是该路径的端点，并且对于该路径上的所有顶点 $v_i$，分别有 $v_{i+1} = \text{ccw}(v_i)$ 或 $\text{cw}(v_i)$。◀

正如我们之前所提示的，现在我们可以根据这个新模型重新表述推论 4.21 。

▶ 引理4.25. 设 $n, k \in \mathbb{N}^+$ 和 $D \in \mathrm{D}_k(C_n)$。令 $\mathrm{A}(D) = (V, E, w)$ 为该支配集的邻接图。令 $(C_k, P, \psi)$ 为相应的邻接粒子系统。那么 $D$ 不是极小的，当且仅当存在一条长度为 2 的弧 $A$，使得 $|\{p \in P \mid \psi(p) \in A\}| \geq 3$。◀

证明. 长度为 2 的弧，即一个诱导的 $P_2$，恰由两个顶点 $x, y$ 构成，二者由一条边相连。根据邻接粒子系统的定义，对于 $v \in V$ 且满足 $w(v) = 1$ 的情形，有 $|\{p \in P \mid \psi(p) = v\}| = 2$；对于 $w(v) = 2$，有 $|\{p \in P \mid \psi(p) = v\}| = 1$；而对于 $w(v) = 3$，该集合为空。在这条弧上产生至少 3 个粒子的组合，恰好是推论 4.21 中的组合，即 $w(x) = 1 \wedge w(y) = 1$、$w(x) = 2 \wedge w(y) = 1$ 和 $w(x) = 1 \wedge w(y) = 2$。由于根据定义，存在这样的弧等价于存在一条满足这些权重限制的边，因此引理得证。■

▶ 定义 4.26（邻接粒子序列）。设 $n, k \in \mathbb{N}^+$。设 $(D_i \in \mathsf{D}_k(C_n))_{i\in\mathbb{N}}$ 为一个支配集序列，其中 $D_{i+1}$ 对应于 $D_i$ 中的一次邻居移动（见定义 4.14）。设 $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为定义 4.19 中定义的邻接权重序列。设 $(C_k, P, \psi_0)$ 为 $\mathrm{A}(D_0) = (V, E, w_0)$ 的一个邻接粒子系统。现在考虑 $w_1$。设 $\{u, v\} \in E$ 为边，其中 $w_0(u) \neq w_1(u)$ 且 $w_0(v) \neq w_1(v)$。不失一般性，设 $w_1(u) = w_0(u) + 1$ 且 $w_1(v) = w_0(v) - 1$。根据权重序列的定义和顶点可移动性，我们有 $w_0(u) \leq 2$ 且 $w_0(v) \geq 2$。设 $p', p'' \in P$。我们区分以下两种可能的情况：

1. $w_0(u) = 2$ 这意味着 $\psi_0^{-1}(\{u\}) = \{p'\}$。然后

$$\psi_1 : P \to V, p \mapsto \begin{cases} v & \text{if } p = p', \\ \psi_0(p) & \text{else.} \end{cases}$$

2. $w_0(u) = 1$ 这意味着 $\psi_0^{-1}(\{u\}) = \{p', p''\}$。然后我们首先抛掷一枚公平硬币 $C \sim \mathrm{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$。据此，我们定义

$$\psi_1 : P \to V, p \mapsto \begin{cases} v & \text{if } p = p' \text{ and } C = 0, \\ v & \text{if } p = p'' \text{ and } C = 1, \\ \psi_0(p) & \text{else.} \end{cases}$$

现在，对于 $i \in \mathbb{N}^+$，我们根据 $\psi_i$ 关于 $\psi_{i-1}$ 以下规则定义。我们称 $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为邻接粒子序列。◀

关于如何定义支配集序列的相应邻接权重序列和邻接粒子序列，完整示例请参见图4.6。

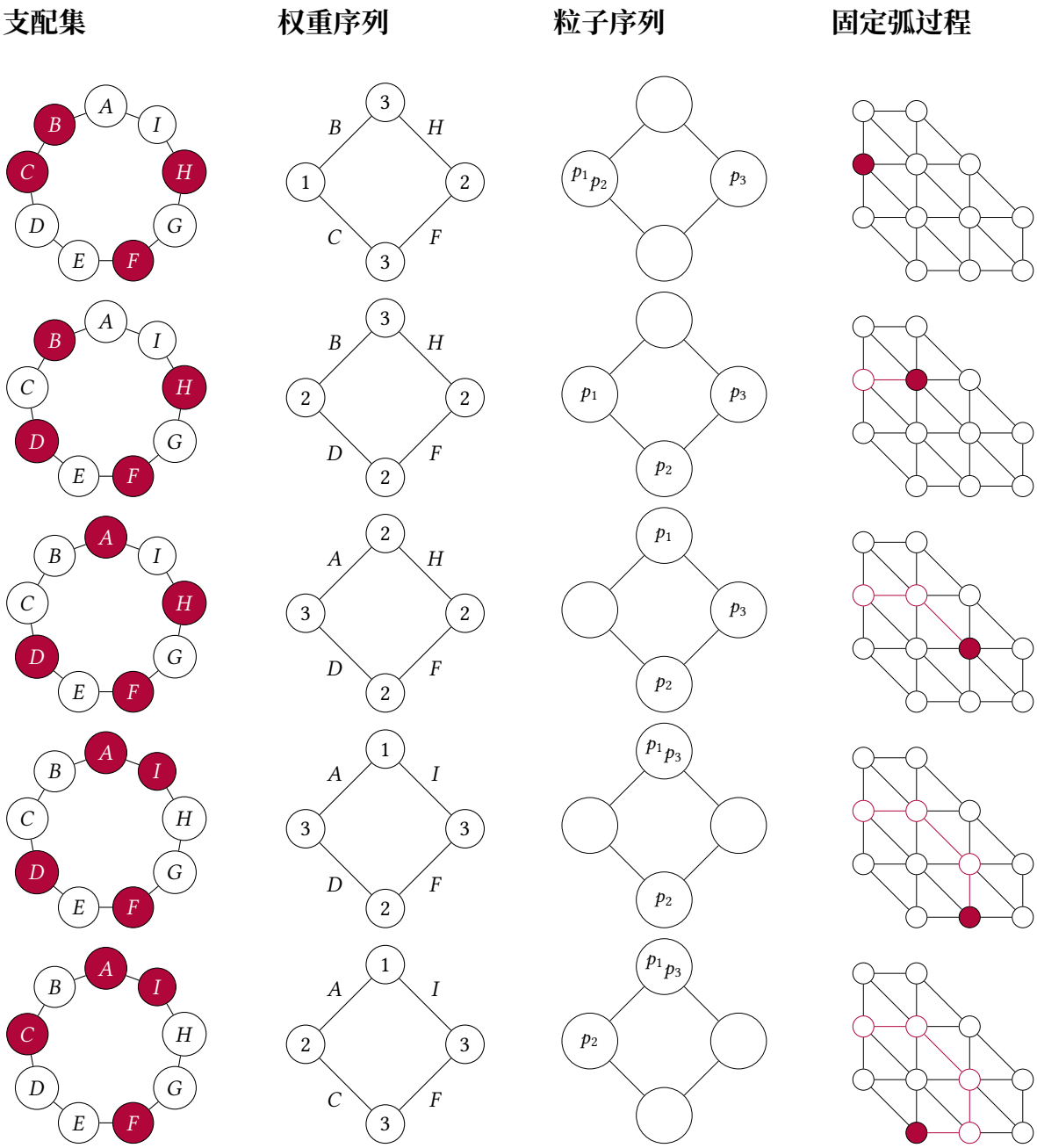



**图 4.6：** 支配集序列及其各自的邻接结构。左：支配集序列。左中：邻接权重序列（定义 4.19）。右中：邻接粒子序列（定义 4.26）。右：固定弧过程（定义 4.28）。为便于参照，固定弧过程的示意图中还包含其经过的路径。

我们的目标是利用这个粒子系统来模拟权重为 2 的顶点如何与其他顶点相互作用。对于第一种情况，顶点的权重恰好为 2；当其权重增加时，其邻居的权重就会减少。如果该邻居的权重原为 3，现在就会变为 2。我们可以说，权重为 2 的粒子移动到了它的邻居处。因此，在第一种情况下，我们保持除此粒子之外的所有粒子不变，并为它指定一个新位置，即它的邻居所在的位置。如果其邻居的权重原为 2，那么现在就会变为 1。由于它之前的权重为 2，因此其上已经有一个粒子。因为我们要用两个粒子来模拟权重为 1 的顶点，所以我们再次将该粒子移动到这个新位置。另一种情况下，权重为 1 的顶点会改变其权重。由于权重只能增加 1，因此它会变为 2。根据邻接粒子系统的定义，我们必须从这个顶点移走一个粒子。我们通过掷一枚公平硬币来选择移动哪个粒子，因为我们希望粒子能够自由移动。采用确定性的选择方式，例如总是将一个粒子移到顺时针邻居处，另一个移到逆时针邻居处，会使我们后续的分析变得复杂。

现在我们来观察这些粒子随时间的行为。

▶ 引理 4.27。设 $n$、$k \in \mathbb{N}^+$。设 $(D_t \in \mathrm{D}_k(C_n))_{t\in\mathbb{N}}$ 是由 RLS 的变异产生的支配集序列（见算法1）。设 $(w_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 是该序列的邻接权重序列。设 $(\psi_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 是具有固定初始粒子系统 $(C_k$、$P$、$\psi_0)$ 的邻接粒子序列。对于 $t \in \mathbb{N}$，令 $M_t$ 表示 $D_t$ 为极小的事件。此外，对于 $p \in P$，令 $PCN_t(p)$ 表示 $\psi_{t+1}(p) = \mathrm{cw}\ \psi_t(p)$，且 $PCCN_t(p)$ 表示 $\psi_{t+1}(p) = \mathrm{ccw}\ \psi_t(p)$ 的事件。则对于 $p \in P$，有

$$\Pr[PCN_t(p) \mid M_t, w_t(\psi_t(p)) = 2] = \Pr[PCCN_t(p) \mid M_t, w_t(\psi_t(p)) = 2] = \frac{1}{4n}$$

and

$$\Pr[PCN_t(p) \mid M_t, w_t(\psi_t(p)) = 1] = \Pr[PCCN_t(p) \mid M_t, w_t(\psi_t(p)) = 1] = \frac{1}{8n}.$$

◀

证明。我们首先考虑事件 $w_t(\psi_t(p)) = 2$。令 $v := \psi_t(p)$，不失一般性，$u :=$顺时针$v$。由于 $D_t$是极小的，且 $w_t(v) = 2$，我们必有 $w(u) \geq 2$。于是存在三个顶点 $a$、$b$、$c \in D_t$，使得 $b =$顺时针$_{D_t}(a)$，且 $c =$顺时针$_{D_t}(b)$，并且还有 $w_t(v) = d(a, b) = 2$，以及 $w_t(u) = d(b, c) \geq 2$。现在我们来论证，粒子移动到其顺时针邻居这一事件，恰好等同于 RLS 在迭代 $t + 1$ 中将 $b$与其顺时针邻居交换这一事件。

假设 RLS 在迭代 $t+1$ 中选择在底层环图中将 $b$ 与其顺时针邻居交换。由于 $b$ 顺时针可移动，此次交换会成功。我们还有 $w_{t+1}(v) = d(a, \text{顺时针}(b)) = d(a,b)+1 = w_t(v)+1$，类似地还有$w_{t+1}(u) = w_t(u)-1$。因此，根据邻接粒子序列的定义，我们有 $\psi_{t+1}(p) = u = \text{顺时针}(v) = \text{顺时针}(\psi_t(p))$。现在，若要有 $\psi_{t+1}(p) = \text{顺时针}(\psi_t(p))$，根据邻接粒子序列的定义，我们需要有 $w_{t+1}(v) = w_t(v)+1$，以及 $w_{t+1}(u) = w_t(u)-1$。由于 $b$ 是距离 $w(u)$ 和 $w(v)$ 的公共顶点，为了使这两个距离都发生变化，它必须在底层环图中与其顺时针邻居交换。

令 $S$ 表示 RLS 选择执行交换这一事件，并令 $BCN$ 表示在迭代 $t+1$中顶点 $b$ 及其顺时针邻居发生交换这一事件。于是有

$$\Pr[PCN_t(p) \mid M_t, w_t(v)=2] = \Pr[BCN \mid S, M_t, w_t(v)=2] \cdot \Pr[S \mid M_t, w_t(v)=2] = \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4n}.$$

可以进行完全相同的计算，以确认移动到逆时针邻居的概率。

现在考虑第二个事件，即 $w_t(\psi_t(p)) = w_t(v) = 1$。由于假设 $D_t$为极小集合，因此必然有 $w_t(u) = 3$。根据粒子系统的定义，还有$\psi_t^{-1}(v) = \{p, p'\}$。同样存在如上所定义的顶点 $a$、$b$、$c$，此时有 $w_t(v) = d(a,b) = 1$ 以及 $w_t(u) = d(b,c) = 3$。如前所述，当且仅当 RLS 在迭代 $t+1$中将顶点 $b$ 与其顺时针邻居交换时，$p$或 $p'$才会在迭代 $t+1$ 中移动。然而，现在仅当该事件发生且选择 $p$ 而不是 $p'$移动时，$p$ 才会移动。再次令 $S$和 $BCN$按上文定义。此外，令$P$ 表示邻接粒子序列选择 $p$ 移动这一事件。由此可得

$$\Pr[PCN_t(p) \mid M_t, w_t(v)=1] = \Pr[BCN, P \mid S, M_t, w_t(v)=1] \cdot \Pr[S \mid M_t, w_t(v)=1] = \Pr[P \mid BCN, S, M_t, w_t(v)=1] \cdot \Pr[BCN \mid S, M_t, w_t(v)=1] \cdot \Pr[S \mid M_t, w_t(v)=1] = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8n}$$

逆时针邻居的结果也可用相同的方法得出。 ■

借助引理4.25和4.27，我们现在已经将本节开头提出的直觉形式化。观察 RLS 随机变异产生的支配集序列时，我们现在可以从粒子在环上随机移动的角度来看待它。引理4.25 指出，要确定一个支配集的冗余性，甚至判断它距离冗余还有多远，可以考察那些被三个或更多粒子占据的弧。由于我们想要界定 RLS 首次采样到冗余支配集所需的时间，直观来看，应该观察具有这一性质的最短弧的行为。

## 4.5 随机游走与运行时间界

在上一节中，我们探讨了粒子系统在支配集序列中的行为。我们看到，每个粒子本质上都在进行独立的随机游走；但将它们划分到各条弧中后，就可以确定这些个体变化如何影响冗余性这一整体性质。我们的最终目标是将这一过程建模为马尔可夫链，因为这能大大简化分析。根据马尔可夫性质，某一状态下的转移概率只能取决于状态本身。因此，考虑最短弧的长度或其他性质并不可行，因为底层邻接粒子系统中还有许多其他弧在变化，这些变化会影响向新状态转移的概率。为此，我们引入一种更易于分析的新过程。

▶ 定义4.28（固定弧过程）。设 $n, k \in \mathrm{N}^+$。设 $(D_t \in \mathrm{D}_k(C_n))_{t\in\mathbb{N}}$ 是由 RLS 变异产生的支配集序列。设 $(\psi_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 是与该支配集序列对应的邻接粒子序列。考虑初始粒子系统 $(C_k, P, \psi_0)$。任取三个粒子 $P' := \{p_1, p_2, p_3\} \subseteq P$。根据粒子系统的定义，必有一个粒子使另外两个粒子占据不同的顶点。我们将这个粒子称为 $p_1$。不妨设 $\mathrm{ccw}_{P'}(p_1) = p_2$ 且 $\mathrm{cw}_{P'}(p_1) = p_3$。对于 $t \in \mathrm{N}$，我们定义 $A_t$ 为

$$A_t := (d_{\mathrm{ccw}}(p_1, p_2), d_{\mathrm{cw}}(p_1, p_3)).$$

其中，距离是相对于 $\psi_t$ 定义的。当底层粒子系统发生变化时，我们可以将某些粒子重新标记为 $p_1$，$p_2$ 或 $p_3$。为此，我们区分三种主要情况：

1. $\psi_{t-1}(p_1)$ $\psi_{t-1}(p_2)$ 和 $\psi_{t-1}(p_3)$ 两两不同。此时，每个粒子都占据不同的顶点。假设它们各自也是该顶点上唯一的粒子。无论它们如何移动，我们都保留其标记。现在假设另一个不同于另外两个粒子的粒子占据了与某个固定粒子相同的顶点。除非另有说明，以下定义也适用于后续情况。假设还有另一个粒子 $p_4$，满足 $\psi_{t-1}(p_1) = \psi_{t-1}(p_4)$。如果在第 $t$ 次迭代中，$p_1$或$p_4$ 移动，我们就将移动的那个粒子称为 $p_1$，也就是说，我们只需将这些粒子“互换”出去。如果 $p_2$ 和 $p_3$ 所在位置还有其他粒子，这一规则同样适用。

2. $\psi_{t-1}(p_1) \neq \psi_{t-1}(p_2) = \psi_{t-1}(p_3)$。那么，$p_2$和 $p_3$到 $p_1$的（逆）顺时针距离相同。如果 $p_2$ 或 $p_3$ 移动，我们将逆时针距离较小的粒子重新标记为逆时针邻居$p_2$，另一个则分别标记为顺时针邻居 $p_3$。

3. $\psi_{t-1}(p_1) = \psi_{t-1}(p_2) \neq \psi_{t-1}(p_3)$。$\psi_{t-1}(p_1) = \psi_{t-1}(p_3) \neq \psi_{t-1}(p_2)$的情况采用相同的处理方式。假设 $p_1$ 或 $p_2$ 中的任一个向 $p_3$移动，即它们的顺时针距离 $d_{\mathrm{cw}}(\cdot\ p_3)$减小。那么，移动的粒子将被重新标记为 $p_1$，而保持不动的粒子现在为 $p_3$。如果任一个粒子以相同的意义远离 $p_3$，移动的粒子将被重新标记为$p_3$，而剩下的粒子现在为 $p_1$。

过程 $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$定义为固定的 $A_0$其中，对于 $t \in \mathrm{N}^+$从$A_{t-1}$ 到 $A_t$ 的每次转移，均由上述规则决定。我们称之为固定弧过程。◀

支配集序列对应的固定弧过程示例如 图 4.6所示。

要使这一过程定义良好，初始支配集的邻接粒子系统必须至少包含三个粒子。我们只考虑在某个时刻可能包含冗余支配集的序列。根据 引理4.25，这样的集合所对应的粒子系统中存在一条至少包含三个粒子的弧。根据邻接粒子序列的定义，粒子数量始终与初始系统中的粒子数量相同，因此可以确定初始系统也至少包含三个粒子。

现在，我们分析这一过程相对于底层支配集序列的表现。最终，我们将利用这些观察来证明以下定理：

▶ **定理 4.29**。 设 $n$， $k \in \mathrm{N}^{+}$。设 $(D_t \in \mathcal{D}_k(C_n))_{t\in\mathbb{N}}$ 是由 RLS 的变异产生的支配集序列。令 $T := \min\{t \in \mathrm{N} \mid D_t \text{是冗余的}\}$。则

$$\mathrm{E}[T] \leq 4n \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} \cdot \left(8\log^2(k) + 6(\log(k)+1)\right)$$

◀

此证明的第一步是说明为何我们可以分析这个新的相关过程，以证明 RLS 的界。

▶ 引理4.30。设 $n, k \in \mathrm{N}^{+}$ 和 $(D_t \in \mathrm{D}_k(C_n))_{t\in\mathbb{N}}$ 是由 RLS 的变异产生的支配集序列。设 $T := \min\{t \in \mathrm{N} \mid D_t$ 是冗余的$\}$，如定理 4.29 中所述。设 $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 是定义4.28中的对应固定弧过程。令 $H := \{(0,1),(1,0),(k-1,0),(k-1,1),(0,k-1),(1,k-1)\}$ 且 $T_A := \min\{t \in \mathrm{N} \mid A_t \in H\}$。那么

$$\mathrm{E}[T] \leq \mathrm{E}[T_A].$$

◀

证明。考虑时间 $T_A$。那么 $A_{T_A} \in H$。我们考虑情形 $(0,1)$、$(k-1,0)$ 和 $(k-1,1)$，因为另外三种情形具有对称性。对于情形 $(0,1)$， $p_1$ 和 $p_2$ 位于同一个顶点，而 $p_3$ 位于其顺时针邻居处。这意味着有一条边，其两个端点上总共有三个粒子，因此存在一段长度为 2 且包含三个粒子的弧。根据引理4.25，这意味着 $D_{T_A}$ 是冗余的。对于 $(k-1,0)$， $p_1$ 和 $p_3$ 位于同一个顶点。由于 $p_2$ 到 $d_{\mathrm{ccw}}(p_1,p_2) = k-1$ 的逆时针距离，因此这条逆时针路径的端点是该顶点的顺时针邻居。这是因为底层环只有 $k$ 个顶点，而长度为 $k-1$ 的路径也必须包含 $k$ 个顶点。我们再次得到一段长度为 2 且包含三个粒子的弧。最后一种情形 $(k-1,1)$ 非常相似。同样， $p_2$ 位于顶点 $p_1$ 所在位置的顺时针邻居处。由于 $p_3$ 到 $p_1$ 的顺时针距离也是 1，因此它与 $p_2$ 位于同一个顶点，所以这里也存在一段长度为 2 且包含三个粒子的弧。由于所有这些情形都意味着 $D_{T_A}$ 是冗余的，因此我们有 $T \leq T_A$，从而 $\mathrm{E}[T] \leq \mathrm{E}[T_A]$。■

当然，可能还有另外三个粒子在我们选定的三个粒子之前相遇过，但由于我们只想确定一个上界，这样就足够了。我们还可以假设，在该过程的整个轨迹中，对于$t \leq T_A$ 如引理4.30中所述， $D_t$ 是非冗余的，即极小的，否则 $T < T_A$ 也同样如此。

我们可以通过界定 RLS 首次采样到冗余支配集之前所需的时间，来界定相应固定弧过程到达引理4.30中定义的集合之前所需的时间。为此，我们需要确定该过程随时间的变化情况，以及它可以进行哪些转移。为此，我们定义固定弧过程的状态邻域：

▶**定义4.31.** 设 $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 是定义 定义4.28 中的固定弧过程。对于 $t \in \mathrm{N}$，我们将邻域 $\mathcal{N}[A_t]$ 定义为

$$\mathcal{N}[A_t] := \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid \Pr[A_{t+1} = (a,b) \mid A_0, \ldots, A_t] > 0\}$$

◀

注意，我们可以将分析范围限制在满足 $|A_t| \le k$ 的 $A_t$ 状态。假设 $|A_t| > k$，那么 $d_{\mathrm{ccw}}(p_1, p_2) + d_{\mathrm{cw}}(p_1, p_3) > k$。由于环 $C_k$ 只有 $k$ 条边，$p_1$，$p_2$ 和 $p_1$，$p_3$ 的逆时针路径和顺时针路径必定有公共边。这意味着，不失一般性，$p_3$ 到 $p_1$ 的逆时针距离会小于 $p_2$。要出现这种情况，$p_2$ 和 $p_3$ 必定曾在某个时刻位于同一个顶点，而 $p_3$ 会逆时针朝 $p_1$ 移动。然而，在这种情况下，根据定义，$p_3$ 会被重新标记为 $p_2$，因此这类状态不可能出现。

我们将考虑定义4.28中描述的所有可能的下一状态定义。我们首先分析过程定义的第一种情况，即所有粒子都位于不同顶点时过程的运动。

▶**引理4.32.** 设 $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 是一个固定弧过程，如 定义4.28所述。设 $t \in \mathrm{N}$和 $A_t = (x, y)$ 满足 $2 \le |A_t| < k$ 且 $x, y > 0$。那么

$$\mathcal{N}[A_t] = \{(x-1,y), (x,y-1), (x+1,y-1), (x-1,y+1), (x+1,y), (x,y+1)\}$$

且对于 $n \in \mathrm{N}$ $[A_t]$

$$\Pr[A_{t+1} = n \mid A_0, \ldots, A_t] = \Pr[A_{t+1} = n \mid A_t] = \frac{1}{4n}.$$

◀

证明。 我们考虑粒子 $p_1$、$p_2$、$p_3$，它们分别位于图的不同顶点。首先考虑这对状态的两个分量都发生变化的情况。不失一般性，假设 $p_1$ 移动到它的顺时针邻居。随后，它沿顺时针路径移动到 $p_3$，从而与 $p_3$ 的距离缩短。同时，它与 $p_2$ 的逆时针距离增大，因而得到新状态 $(x+1, y-1)$。当 $p_1$ 是

其顶点上的唯一粒子时，根据引理 4.27，这种情况发生的概率恰好为$\frac{1}{4n}$。假设该顶点上还有另一个粒子 $p_4$。那么，到达这一新状态的概率对应于以下两种情况之一： $p_1$ 或者 $p_4$ 移动到顺时针相邻顶点，因为在这种情况下，我们会将它重新标记为 $p_1$。令 $O$、$F$ 表示相应移动的事件。那么，根据引理 4.27的第二个结论，我们有

$$\begin{aligned}&\Pr[A_{t+1} = (x+1, y-1) \mid A_0, \ldots, A_t] = \Pr[O \vee F \mid A_0, \ldots, A_t] \\ &= \Pr[O \mid A_t] + \Pr[F \mid A_t] = \frac{1}{8n} + \frac{1}{8n} = \frac{1}{4n}.\end{aligned}$$

下一个状态为 $(x-1, y+1)$ 的概率可以用相同的方法确定，因为只改变了所需移动的方向。只有 $A_t$ 的一个分量发生变化的情形都很相似，因此我们只考虑 $(x+1, y)$ 和 $(x-1, y)$。这对应于从 $p_1$ 到 $p_2$ 的逆时针距离增大或减小的情况。若距离增大，则 $p_2$ 远离了 $p_1$，即移动到了逆时针方向的邻居顶点。在另一种情况下， $p_2$ 移动到了顺时针方向的邻居顶点。当 $p_2$ 是其所在顶点上唯一的粒子时，根据引理 4.27，这两种移动的概率均为$\frac{1}{4n}$。通过与上文类似的分析可知，若其所在顶点上还有另一个粒子，由于重新标记，发生任一变化的概率仍为 $\frac{1}{4n}$。由于粒子只能移动到紧邻顶点，且每次只能移动一个粒子，因此三个粒子共有六种可能的移动。因此，所考虑的情形就是所有可能的情形，而这种 $A_t$ 的邻域恰好就是所描述的集合。■

对于第二种情况，我们假设 $p_2, p_3$ 占据同一个顶点。我们注意到，这意味着 $|A_t| = k$。这是因为 $d_{\text{ccw}}(p_1, p_2)$ 和 $d_{\text{cw}}(p_1, p_3)$ 分别表示相应顺时针或逆时针路径上的边数。如果 $|A_t| = k$，那么所有边都已计入，且两条路径必定终止于同一个顶点。因此，还有一些不可能的情况： $A_t = (0, k)$ 和 $A_t = (k, 0)$。含有 $k$ 个顶点的路径至多有 $k-1$ 条边，因此，根据定义，环上不存在含有 $k$ 条边的导出路径。如果放宽定义，这也对应于三个粒子位于同一个顶点的情况；根据邻接粒子系统的定义，这是不可能的（见定义 4.23）。其余所有 $k-1$ 种 $|A_t| = k$ 情况都对应于一个合法的粒子系统，其中 $p_2, p_3$ 位于同一个顶点，且该顶点不同于 $p_1$所在的顶点。因此，下面的引理涵盖了所有此类情况。

▶**引理 4.33.** 设 $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$是如下定义的固定弧过程： 定义4.28。设 $t \in \mathbb{N}$

且 $A_t = (x,\ y)$ 满足 $|A_t| = k$ 且 $x,\ y > 0$。那么

$$\mathcal{N}[A_t] = \{(x-1, y), (x, y-1), (x+1, y-1), (x-1, y+1)\}$$

以及对于 $n \in \mathrm{N}\ [A_t]$

$$\Pr[A_{t+1} = n \mid A_0, \ldots, A_t] = \Pr[A_{t+1} = n \mid A_t] = \frac{1}{4n}.$$

◀

证明。我们已经说明了为什么该定义涵盖了$\psi_t(p_2) = \psi_t(p_3) \neq \psi_t(p_1)$的所有情况。接下来，我们首先考虑 $p_1$的移动。其移动会导致后续状态为（$x+1$, $y-1$）或（$x-1$, $y+1$）。概率可以完全按照引理4.32中的方法确定。因此，我们只考虑（$x-1$, $y$），因为（$x$, $y-1$）同样具有对称性。由于 $p_2$ 和 $p_3$ 位于同一个顶点，当任意一个粒子向任意方向移动时，都将据此重新标记。因此，向状态（$x-1$, $y$）的状态转移对应于任意一个粒子移动到逆时针相邻顶点。由于当前顶点上有两个顶点，每次移动的概率均为 $\frac{1}{8n}$，因此其中任意一个粒子移动并由此产生相应状态转移的概率仍为 $\frac{1}{4n}$。这三个粒子仍有六种可能的移动，但是 $p_2$ 和 $p_3$ 的顺时针和逆时针移动会导致相同的状态，因此 $A_t$ 的邻域不能包含超过四个状态。■

最后一种情况是，$p_2$，$p_3$ 与 $p_1$位于同一个顶点。因此，其中一个距离等于0。两者不可能都等于0，否则同一个顶点上将再次有三个粒子。

▶**引理4.34**。设 $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$是定义4.28中的固定弧过程。设 $t \in \mathrm{N}$和 $A_t = (x,\ y)$ 满足 $2 \le |A_t| < k$，且 $x = 0$或 $y = 0$。那么，如果 $x = 0$,

$$\mathcal{N}[A_t] = \{(x, y-1), (x, y+1), (x+1, y-1), (x+1, y)\}$$

并且对于 $n \in \mathrm{N}\ [A_t]$

$$\Pr[A_{t+1} = n \mid A_0, \ldots, A_t] = \Pr[A_{t+1} = n \mid A_t] = \frac{1}{4n}.$$

如果 $y = 0$,

$$\mathcal{N}[A_t] = \{(x-1, y), (x+1, y), (x-1, y+1), (x, y+1)\}$$

概率相同。

◀

证明。无妨设 $x = 0$。这使得 $p_1$ 和 $p_2$ 位于同一个顶点。我们首先考察 $p_3$的移动。如果 $p_3$ 顺时针移动，则到 $p_1$的顺时针距离会增加；如果逆时针移动，则会减少。这对应于后续状态 $(x, y+1)$ 和 $(x, y-1)$。如引理4.32所述，无论$p_3$ 是否是其所在顶点上的唯一粒子，每种状态转移的概率都是 $\frac{1}{4n}$。现在我们考虑 $p_1$ 和 $p_2$ 的移动。如果其中任意一个朝 $p_3$ 移动，该粒子都会被重新标记为 $p_1$。移动之后，得到的状态将是 $(1, y-1)$，因为 $p_1$ 现在离 $p_3$更近了。由于 $x$ 之前为 0，因此这是状态 $(x+1, y-1)$。类似地，如果其中任意一个粒子远离 $p_3$移动，它就会被重新标记为 $p_3$。那么得到的状态是 $(1, y)$，因为 $p_1$ 到 $p_3$ 的距离仍与之前相同，但 $p_1$ 和 $p_2$ 之间的距离增大了。如引理 4.33 中的分析所示，由于这两个粒子占据同一个顶点，每种状态转移的概率都是 $\frac{1}{4n}$。同样，六种可能的移动均已考虑在内，因此 $A_t$ 的邻域恰好是所提出的邻域。对 $y = 0$ 的分析完全相同；改变 $x$和 $y$的含义后，可以看出所提出的邻域是如何形成的。■

注意到，该固定弧过程的状态图与稍作修改的三角网格图相似（见 定义 3.13），其中顶点 $(0,0), (0,k)$ 和 $(k,0)$已被移除，因为这些是不可能出现的状态。因此，我们认为可以通过分析三角网格上的随机游走来分析固定弧过程。

▶ **定义 4.35（三角形上的惰性随机游走）**。对于 $n \in \mathrm{N}^+$ 以及常数 $c \in \mathrm{R}_{\geq 6}$，$\frac{1}{c}$-随机游走在 $n$-三角形上定义为随机过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$，其中，对于 $t \in \mathrm{N}$，$X_t$ 取值于 $V(T_n)$，且对于 $X_t = u$和$v \in N(X_t)$

$$P(u,v) = \Pr[X_{t+1} = v \mid X_t] = \frac{1}{c}.$$

注意到 $P(v, v) = \Pr[X_{t+1} = X_t \mid X_t] = 1 - \sum_{v\in N(X_t)} \Pr[X_{t+1} = v \mid X_t] = 1 - \frac{|N(v)|}{c}$。◀

▶ 引理4.36. 令 $n, k \in \mathrm{N}^+$，并令 $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 为一列支配集 $(D_t \in \mathrm{D}_k(C_n))_{t\in\mathbb{N}}$ 的固定弧过程。令 $H := \{(0,1), (1,0), (k-1,0), (k-1,1), (0,k-1), (1,k-1)\}$ 为引理4.30中定义的目标集。令 $T_A := \min\{t \in \mathrm{N} \mid A_t \in H\}$。令 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 为 $\frac{1}{4n}$-三角网格上的随机游走。令$H_\triangle := \{(0,0), (k,0), (0,k)\}$，并令 $T_\triangle := \min\{t \in \mathrm{N} \mid X_t \in H_\triangle\}$。则有 $\mathrm{E}[T_A] \leq \mathrm{E}[T_\triangle]$。◀

证明。 引理4.32 至4.34 表明，所有不在 $H$ 中的状态 $(x,y)$，在三角网格图中的邻域都与顶点 $(x,y)$ 相同，且转移概率也与 $\frac{1}{4n}$-随机游走中的一致。因此，只要 $A_t$ 尚未到达$H$， $A_t$ 所采取的每一步， $X_t$ 也都可以以相同的概率采取。对于 $s \in H$，当 $A_{T_A} = X_{T_A} = s$ 时， $X_t$ 可以继续任意移动，因为我们在时间 $T_A$ 停止过程 $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$。因此，我们只需遵循三角网格的结构。不失一般性，令 $X_{T_\triangle} = (0,0)$。由于仅有的相邻顶点是 $(0,1)$ 和 $(1,0)$，过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 必须有 $X_{T'^\triangle} = (0,1)$ 或 $X_{T'^\triangle} = (1,0)$，其中$T'_\triangle < T_\triangle$。这有 $T_A \le T_\triangle$，因此 $\mathrm{E}[T_A] \le \mathrm{E}[T_\triangle]$。 ■

现在我们可以利用这一点证明定理 4.29。

▶ **定理 4.29**。 设 $n$， $k \in \mathrm{N}^+$。设 $(D_t \in \mathcal{D}_k(C_n))_{t\in\mathbb{N}}$ 是由 RLS 的变异产生的支配集序列。设 $T := \min\{t \in \mathrm{N} \mid D_t$ 是冗余的$\}$。则

$$\mathrm{E}[T] \le 4n \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} \cdot \left(8\log^2(k) + 6(\log(k)+1)\right)$$

◀

证明。 首先注意到，对于某个 $m \in \mathrm{N}^+$ 和 $\alpha \in \mathrm{R}_{\ge 6}$，关于 $\frac{1}{\alpha}$-随机游走的$m$-三角形相对于 $\pi$ 顶点集 $T_m$上的均匀分布是可逆的。回忆一下引理 3.14 可知 $\chi_m = |V(T_m)|$。于是，对于 $x$， $y \in V(T_m)$ 满足$x \sim y$,

$$\pi(x)P(x,y) = \frac{1}{\chi_m} \cdot \frac{1}{\alpha} = \pi(y)P(y,x)$$

并且 $x \not\sim y$

$$\pi(x)P(x,y) = 0 = \pi(y)P(y,x).$$

因此，我们转而研究作为网络的可逆马尔可夫链，正如第3章中所介绍的那样。如第3.1节所示，为了对 $\frac{1}{4n}$-随机游走在 $k$-三角形上的情形进行建模，我们现在可以定义一个网络（$T_k, c$），其电导函数为$c$，其中对于 $x, y \in V(T_k)$ 和 $x \sim y$, $c(x,y) = \pi(x)P(x,y)$。此外，我们定义$c(x,x) = \pi(x)P(x,x)$。由于 $\pi$是均匀的，并且所有非自环边的转移概率均为 $\frac{1}{4n}$，因此所有非自环边的电导均为 $C := \frac{1}{\chi_k} \cdot \frac{1}{4n}$。这意味着（$T_k, c$）是一个均匀电阻为 $R = \chi_k \cdot 4n$ 的均匀网络。

回想一下，由 RLS 的变异所产生的随机过程 $(D_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 中，$\{t \in \mathrm{N} \mid D_t$ 是极小的$\}$（见定理 4.29）。对于 $n$-三角形（定义 4.35）上的惰性随机游走 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$，我们定义了 $H_\triangle := \{(0,0), (0,k), (k,0)\}$ 和 $T_\triangle := \min\{t \in \mathrm{N} \mid X_t \in H_\triangle\}$（引理4.36）。现在我们给出 $\mathrm{E}[T_\triangle]$ 的上界。

我们再次指出， $t_{a\leftrightarrow b}$ 网络中节点 $a$ 与 $b$ 之间的往返时间（定义见 定义 3.7）是从 $a$出发首次到达$b$ 的期望时间上界，因为它还包含返回 $a$的期望时间。根据往返时间恒等式（定理 3.8），因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[T_{\triangle} \mid X_0] &\le \mathrm{E}\left[\min\left\{t_{s\leftrightarrow X_0} \mid s \in H_{\triangle}\right\} \,\middle|\, X_0\right] \\ &\le \mathrm{E}\left[t_{(0,0)\leftrightarrow X_0} \,\middle|\, X_0\right] \\ &= t_{(0,0)\leftrightarrow X_0} = c_G \mathcal{R}((0,0) \leftrightarrow X_0) = \mathcal{R}((0,0) \leftrightarrow X_0),\end{aligned}$$

由于对于每个 $v \in V(T_k)$， $c(v) = \pi(v) = \frac{1}{\chi_k}$，我们有 $c_G = \chi_k \frac{1}{\chi_k} = 1$。为了界定$\mathcal{R}((0,0) \leftrightarrow X_0)$，我们使用引理 3.17：

$$\le R \cdot \left(8\log^2(k) + 6(\log(k) + 1)\right)$$

由于这对任意顶点都成立，特别是对任意 $X_0$也成立，因此无需再对 $X_0$ 进行条件化，我们现在有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[T_{\triangle}] &\le R \cdot \left(8\log^2(k) + 6(\log(k) + 1)\right) \\ &= 4n \cdot \chi_k \cdot \left(8\log^2(k) + 6(\log(k) + 1)\right).\end{aligned}$$

我们用 引理3.14 完成界的推导。

$$\le 4n \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} \cdot \left(8\log^2(k) + 6(\log(k) + 1)\right).$$

根据 引理4.30 和 引理4.36 我们知道 $\mathrm{E}[T] \le \mathrm{E}[T_{\triangle}]$。由此证明了该定理。 ■

这就给出了 RLS 首次采样到冗余支配集所需时间的一个界。设 $D_T$是 RLS 在第 $T$次迭代时的状态所诱导的支配集。那么 $\mathrm{R}(D_T) \neq \emptyset$，因此 RLS 可以随机翻转该集合中的一个顶点，从而得到一个基数严格更小的支配集。为了界定这一过程所需的期望时间，我们需要界定 RLS 处于冗余状态时，在再次采样到极小状态之前实际翻转一个冗余顶点的概率。

▶ 引理4.37. 设 $n \in \mathrm{N}^+$ and $(D_t \in \mathrm{D}(C_n))_{t\in\mathbb{N}}$ 是由 RLS 的变异产生的支配集序列。令 $S_1 := \min\{t \in \mathrm{N} \mid D_t$ 为冗余$\}$，且$E_1 := \min\{t \ge S_1 \mid D_t$ 为非冗余$\}$。分别令 $S_i := \min\{t \ge E_{i-1} \mid D_t$ 为冗余$\}$，且 $E_i := \min\{t \ge S_i \mid D_t$ 为非冗余$\}$。若不存在这样的 $t$，则定义 $S_i = E_i = +\infty$。对于 $k \in \mathrm{N}^+$，令 $TR_k := |\{S_i \mid i \in \mathrm{N}\ |D_{S_i}| = k, S_i < +\infty\}|$。那么，对于

$k \le |D_0|$，有

$$\mathrm{E}[TR_k] \le 2.$$

定义 $SC_k := \min\{t \in \mathbb{N} \mid |D_t| < k\}$ 和 $I_k := \{i \in \mathbb{N} \mid |D_{E_i}| = k\}$。那么，对于 $i \in I_k$，我们有

$$\mathrm{E}[E_i - S_i] \le 4n \text{ and } \mathrm{E}\left[SC_k - S_{\max\{I\}+1}\right] \le 4n.$$

◀

证明。 我们考虑 RLS 的当前状态为冗余支配集时会发生什么。此时，它以相同的概率 1 2 决定翻转或移动一个顶点。如果决定翻转，它可以选择翻转一个冗余顶点。否则，翻转将被拒绝，下一状态仍会是冗余支配集。回顾引理 4.9 ，并假设只有一条弧符合这一要求。那么，在最坏情况下，这条弧的长度为 4，且其上恰有三个顶点。弧的每个端点各有一个顶点。如果移动这两个顶点，得到的支配集将不再冗余。否则，这种配置将保持不变，下一状态仍会是冗余支配集。这个试验过程可以用马尔可夫链 $(E_t)_{t \in \mathbb{N}}$ 建模。其状态空间为 $V := \{G,\ F,\ S,\ M,\ B\}$，其中各状态分别表示 RLS 翻转一个冗余顶点 ($G$)、选择翻转 ($F$)、试验开始 ($S$)、选择移动 ($M$)，以及 RLS 从冗余配置中移动一个顶点 ($B$)。现在我们分析转移概率。根据算法的定义，有 $\Pr[E_{t+1} = F \mid E_t = S] = \Pr[E_{t+1} = M \mid E_t = S] = \frac{1}{2}$。假设 RLS 选择翻转，则至少存在一个冗余顶点，因此该事件的概率至少为 $\frac{1}{n}$。我们定义 $\Pr[E_{t+1} = G \mid E_t = F] = \frac{1}{n}$，这只会降低试验成功的概率。如果选中的顶点不是冗余顶点，则翻转将被拒绝，因此 $\Pr[E_{t+1} = S \mid E_t = F] = 1 - \Pr[E_{t+1} = G \mid E_t = F]$。另一方面，假设 RLS 选择移动一个顶点，并考虑最坏情况，则选择弧某一端点上的顶点并将其移动到弧外的邻居顶点的概率为 $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$。该事件的概率至多为 $\frac{1}{n}$，并像之前一样定义 $\Pr[E_{t+1} = B \mid E_t = M] = \frac{1}{n}$。同样，在另一种情况下，$\Pr[E_{t+1} = S \mid E_t = M] = 1 - \Pr[E_{t+1} = B \mid E_t = M]$。由于该马尔可夫链只对一次试验建模，我们定义 $\Pr[E_{t+1} = G \mid E_t = G] = \Pr[E_{t+1} = B \mid E_t = B] = 1$，使得 $B$ 和 $G$ 为吸收状态。

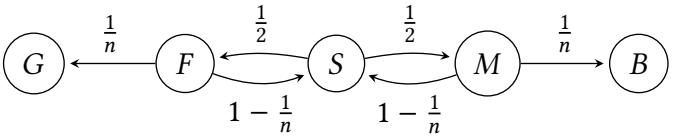



**图4.7：** 试验马尔可夫链（省略自环）

对于状态 $v \in V$，我们定义 $p_G(v) := \Pr[\exists t \in \mathbb{N} : E_t = G \mid E_0 = v]$。现在我们关注 $p_G(S)$，即从 $S$ 开始时，链最终进入 $G$ 的概率。根据全概率定律，我们有

$$\begin{aligned} p_G(S) &= \Pr[\exists t \in \mathbb{N} : E_t = G \mid E_0 = S, E_1 = F] \cdot \Pr[E_1 = F \mid E_0 = S] \\ &\quad + \Pr[\exists t \in \mathbb{N} : E_t = G \mid E_0 = S, E_1 = M] \cdot \Pr[E_1 = M \mid E_0 = S] \\ &= \Pr[\exists t \in \mathbb{N} : E_t = G \mid E_0 = S, E_1 = F] \cdot \frac{1}{2} \\ &\quad + \Pr[\exists t \in \mathbb{N} : E_t = G \mid E_0 = S, E_1 = M] \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

根据马尔可夫性质，无论我们是从 $S$ 开始链，然后到达 $F$，还是直接从 $F$开始链，都无关紧要：

$$= \frac{1}{2} \cdot p_G(F) + \frac{1}{2} \cdot p_G(M). \tag{4.1}$$

同理，我们可以确定 $p_G(F)$ 和 $p_G(M)$ 为

$$\begin{aligned} p_G(F) &= \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot p_G(S) \text{ and} \\ p_G(M) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot p_G(S). \end{aligned}$$

将这些代入（4.1），得到

$$\begin{aligned} p_G(S) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot p_G(S)\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot p_G(S)\right) \\ &= \frac{1}{2n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot p_G(S). \end{aligned}$$

从两边减去 $\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot p_G(s)$ 并重新整理，得到

$$\frac{1}{2n}=\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\cdot p_G(S)=\frac{1}{n}\cdot p_G(S)$$

最终得到

$$p_G(S)=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

对于 $k\le|D_0|$ 和 $r\in\mathbb{N}$，$TR_k=r$ 当且仅当 RLS 采样到一个冗余支配集，并在经过 $r-1$ 次之后的某个时间采样到一个具有相同基数的非冗余支配集，且在该过程的第 $r$ 次迭代中成功降低了基数。这个过程可以建模为 $r$ 次相互独立的马尔可夫链运行，因此 $TR_k$ 在随机意义下被几何随机变量 $G\sim\mathrm{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$ 所支配。其 $\mathrm{E}[TR_k]\le\mathrm{E}[G]=2$。

我们以类似的方式界定期望试验长度。由于我们无法知道马尔可夫链最终会处于什么状态，因此考虑链最终被吸收到 $G$ 或 $B$ 之一中的期望时间。然而，现在我们无法使用从 $M$ 到 $B$ 的转移概率的上界，因为实际上，链转移到 $B$ 的可能性可能更低，而更有可能返回到 $S$。这会导致通往吸收态的较短路径被赋予过多的概率质量，因此无法得到上界。因此，我们对该转移概率采用唯一可以接受的下界，即平凡界 $\Pr[E_{t+1}=B\mid E_t=M]\ge 0$。通过假设等号成立，我们隔离出 $B$，从 $S$ 开始时得到一个受限吸收态集合，从而使链被吸收前的时间更长。对于 $v\in V$，现在令 $f_v:=\mathrm{E}[\min\{t\in\mathbb{N}\mid E_t\in\{G,B\}\}\mid E_0=v]$ 表示从 $v$ 开始链时的期望吸收时间。注意到 $f_G=f_B=0$。现在得到方程组

$$f_S=\frac{1}{2}(1+f_F)+\frac{1}{2}(1+f_M) \tag{4.2}$$

$$f_F=\frac{1}{n}(1+f_G)+\left(1-\frac{1}{n}\right)(1+f_S)=\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)(1+f_S) \tag{4.3}$$

$$f_M=1+f_S \tag{4.4}$$

将（4.3）和（4.4）代入（4.2），可得

$$f_S=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)(1+f_S)\right)+\frac{1}{2}(1+1+f_S)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_S\right) + 1 + \frac{f_S}{2} \\
&= 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) f_S + \frac{f_S}{2} \\
&= 2 + f_S - \frac{1}{2n} f_S
\end{aligned}
$$

解出 $f_S$，可得

$$f_S = 4n.$$

这是实际期望吸收时间的一个上界，由此证明了引理的第二部分。■

现在，我们可以利用这一点来界定 RLS 从一个基数至多为 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$的支配集出发，采样到基数更小的支配集所需的期望时间。随后，我们可以据此界定 RLS 采样到最优解（即 $C_n$ 的最小支配集）所需的期望时间。

▶**定理4.38**。设 $n$，$k \in \mathrm{N}^+$满足 $\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。令 $(D_t \in \mathcal{D}(C_n))_{t \in \mathbb{N}}$为由 RLS 变异得到的支配集序列。令 $t_k := \text{最小}\{t \in \mathrm{N} \mid |D_t| = k\}$且 $T_k := \text{最小}\{t \geq t_k \mid |D_t| < k\}$。则

$$\mathrm{E}[T_k - t_k] \leq 8n \cdot \frac{(k+1)(k+2)+2}{2} \cdot \left(8\log^2(k) + 6(\log(k)+1)\right)$$

◀

证明。令 $k \in \mathrm{N}^+$ 满足相应的限制。我们只关注 RLS 在诱导出基数为 $k$的支配集的状态中所花费的时间。由于这与其在基数更大的状态中所花费的时间无关，因此我们可以假设$|D_0| = k$。令 $T := \min\{t \in \mathrm{N} \mid |D_t| < k\}$。那么，区间 $[0, T]$内的状态可根据其支配集的状态进行分类，即判断其是否冗余。令 $R$为随机变量，表示在该区间内 RLS 从非冗余状态转移到冗余状态的次数。令 $(TR_i)_{i \in \mathbb{N}}$和 $(TI_i)_{i \in \mathbb{N}}$为随机变量，分别表示转移回来之前在冗余状态中所花费的时间，以及其间在非冗余状态中所花费的时间。为了进行最坏情况分析，我们可以假设起始于一个非冗余状态。那么

$$T = \sum_{i=1}^{R} TR_i + \sum_{i=1}^{R} TI_i \text{ and thus}$$

$$\mathrm{E}[T] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{R} TR_i\right] + \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{R} TI_i\right].$$

当 RLS 从冗余状态切换到非冗余状态时，我们有一条长度为 5、包含三个顶点的弧，因为要使该集合冗余，必然曾有一条长度为 4、包含相同三个顶点的弧。我们假设具有这一特征的状态足够相似，因此对于 $i,\ j > 1$，可以假设 $TI_i$和 $TI_j$ 独立同分布。对于所有 $i,\ j$，我们也采用相同的推理，得到 $TR_i$和 $TR_j$，因为它们都包含一条长度为 4 且至少有三个顶点的弧。于是我们有

$$\mathrm{E}[T] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{R} TR_i\right] + \mathrm{E}\left[TI_1 + \sum_{i=1}^{R-1} TI_{i+1}\right].$$

现在我们可以应用沃尔德方程（定理2.7）：

$$= \mathrm{E}[R]\mathrm{E}[TR_1] + \mathrm{E}[TI_1] + (\mathrm{E}[R] - 1)\mathrm{E}[TI_2]$$

利用 引理4.37和定理 4.29可得

$$\leq 2 \cdot 4n + 2 \cdot 4n \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} \cdot \left(8\log^2(k) + 6(\log(k)+1)\right).$$

最后化简得到

$$\mathrm{E}[T] \leq 8n \cdot \frac{(k+1)(k+2)+2}{2} \cdot \left(8\log^2(k) + 6(\log(k)+1)\right).$$

■

有了这个界，我们现在终于可以证明本学位论文的主要定理。

▶ **定理4.39.** 设 $n \in \mathrm{N}^+$。RLS 以 $O\left(n^4\log^2(n)\right)$次迭代的期望次数即可采样得到一个 $C_n$的最优支配集。 ◀

证明。 令 $(D_t \in \mathrm{D}(C_n))_{t\in\mathbb{N}}$为由 RLS 的变异产生的集合序列。令 $T := \min\{t \in \mathrm{N} \mid |D_t| = \lceil \frac{n}{3} \rceil\}$ 为 RLS 首次采样到最优支配集的时间。令$T_F := \min\{t \geq 0 \mid D_t$是支配集$\}$, $T_H := \min\{t \geq T_F \mid |D_t| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} - T_F$且 $T_O := \min\{t \geq T_H \mid |D_t| = \lceil \frac{n}{3} \rceil\} - T_H - T_F$。于是 $T = T_F + T_H + T_O$。由此可得

$$\mathrm{E}[T] = \mathrm{E}[T_F] + \mathrm{E}[T_H] + \mathrm{E}[T_O]. \tag{4.5}$$

由定理 4.2 可得 $\mathrm{E}[T_F] \in \mathrm{O}(n\log(n))$，由定理 4.12 可得 $\mathrm{E}[T_H] \in \mathrm{O}(n\log(n))$。令 $t_k := \min\{t \in \mathbb{N} \mid D_t$是支配集且 $|D_t| = k\}$，以及 $T_k := \min\{t \in \mathbb{N} \mid D_t$是支配集且 $|D_t| < k\}$。于是

$$T_O = \sum_{k=\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} T_k - t_k \text{ and}$$

$$\mathrm{E}[T_O] = \sum_{k=\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mathrm{E}[T_k - t_k].$$

应用定理4.38可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[T_O] &\leq \sum_{k=\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 8n \cdot \frac{(k+1)(k+2)+2}{2} \cdot \left(8\log^2(k) + 6(\log(k)+1)\right) \\
&\leq 4n \cdot \left(8\log^2(n) + 6(\log(n)+1)\right) \cdot \sum_{k=\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k^2 + 3k + 2 \\
&\leq 4n \cdot \left(8\log^2(n) + 6(\log(n)+1)\right) \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + 2n\right) \\
&\leq 4n \cdot \left(8\log^2(n) + 6(\log(n)+1)\right) \cdot \left(2n^3 + 3n^2 + n + 3n^2 + 3n + 2n\right) \\
&= 8n^4 \cdot \left(8\log^2(n) + 6(\log(n)+1)\right) \\
&\quad + \left(8\log^2(n) + 6(\log(n)+1)\right) \cdot (6n^2 + 6n) \\
&\in O\left(n^4 \log^2(n)\right).
\end{aligned}$$

因此，对于 $\mathrm{E}[T]$ 代入（4.5）可得

$$\mathrm{E}[T] \in O(n\log(n)) + O(n\log(n)) + O\left(n^4\log^2(n)\right).$$

这证明了该定理。 ■

# 5 结论与展望

在这篇学位论文中，我们证明了随机局部搜索启发式算法能在期望时间 $O(n^4 \log^2(n))$ 内，在圈图上找到一个最小支配集 $C_n$。为此，我们证明了均匀电阻三角网格图中有效电阻的新界。我们确定，随机初始化集合最有可能不具支配性。以此为起点，我们证明 RLS 会在期望时间 $O(n \log(n))$ 内首次采样到一个有效支配集。随后，我们分析了含有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + q \leq n$ 个顶点的支配集的性质。我们发现，在这类集合中，至少有 $q$ 个顶点可以从集合中移除，同时仍能保持支配性。利用这一事实分析 RLS 后，我们证明，采样到一个含有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个顶点的支配集需要期望时间 $O(n \log(n))$，其规模已经仅为 $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ 最优规模的 1.5 倍。此后，我们引入了邻接图及其对应序列，以及相应的权重序列。这些是用于捕捉 RLS 交换顶点动态过程的中间结果。我们基于这些模型形式化了粒子系统。它们使我们能够将顶点交换这一高度局部化的过程视为彼此独立的事件。借助这些模型，我们对该过程进行了逐层分析，以界定找到最优解所需的期望时间。

由于若干原因，我们认为这个界并不紧。利用 Nash-Williams 的一个不等式（在 命题 *9.16* 中给出 [LP17]），可以得到三角网格图中两个顶点之间有效电阻的下界 $\Omega(\log(n))$。我们认为，这个界也可以达到，从而将算法运行时间中的一个$\log(n)$ 因子去掉。由于有效电阻与两个节点的逃逸概率成正比，直观上看来，同样边长的三角网格中的电阻似乎不应高于正方形网格中的电阻 $n$；已证明后者为 $\Theta(\log(n))$。（定理 3.16）。

固定弧过程（参见定义4.28）本身就非常悲观。正如我们之前指出的，在任意时刻只考虑长度最短的弧可能会得到更好的结果，然而，我们无法恰当地分析这一过程。由该过程产生的三角图的界也不再是 $k$，而应是包含三个粒子的弧的最小长度的最大值。然而，在最后一层，当当前支配集的基数为 $\frac{n}{3} + 1$ 且存在三个粒子时，这大致为 $\frac{n}{9}$。因此，在对所有层求和时，这是否会造成渐近差异尚不明确。

最后，我们进行的一些模拟表明，所得到的界确实过于悲观。另一种可能得到更紧界的分析方法，是考察这一过程的适应度景观。在枚举小规模的 $n$ 和 $k$的支配集时，我们发现冗余支配集所占的比例相当高，直到最优解之前的一层才真正明显下降。可以利用这一点，将该过程作为状态空间上的随机游走进行分析，并估计遇到冗余集之前所需的时间。由于这种分析将直接考察该过程的轨迹，而无需经过其他几个模型，我们预计它能更准确地反映实际复杂度。

此外，从支配集的结构来看，圈构成的图类相当简单，而 RLS 的相应表现可能已经可以算是较差。为了更好地分析 RLS 对支配集问题的适用性，有必要考察其他算子和更复杂的图类。其他可能的图类中，支配集问题仍然容易求解的包括树或仙人掌图。对于树，可以通过动态规划求解该问题[HHH23], ；对于仙人掌图，则存在一种线性时间算法，它将求解圈上的支配集作为子程序 [HLP86]。

# Bibliography

[AL03] E. Aarts 和 J. K. Lenstra 编。《组合优化中的局部搜索》。普林斯顿大学出版社，2003。doi：10.2307/j.ctv346t9c。网址：https://www. jstor.org/stable/j.ctv346t9c（访问于 2025/10/25）（见第 2 页）。[Aus+99] G. Ausiello、A. Marchetti-Spaccamela、P. Crescenzi、G. Gambosi、M. Protasi 和 V. Kann。《复杂性与近似》。柏林，海德堡：施普林格柏林海德堡，1999。isbn：978-3-642-58412-1。doi：10.1007/978-3- 642- 58412-1。网址：http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-58412-1（访问于 2025/10/21）（见第 1 页）。[Bag+22] S. Baguley、T. Friedrich、T. Kötzing、X. Li、M. Pappik 和 Z. Zeif。《用于顶点覆盖的灰盒算子分析》。载于：遗传与进化计算会议论文集。马萨诸塞州波士顿：ACM，2022 年 7 月，1363–1371。isbn：978-1-4503-9237-2。doi：10.1145/3512290.3528848。网址：https://dl.acm.org/doi/10.1145/3512290.3528848（访问于 2024/12/02）（见第 4 页）。[Ben+11] T. Benoist、F. Gardi、A. Jeanjean 和 B. Estellon。《用于现实库存路径规划的随机局部搜索》。《交通科学》45:3（2011 年 8 月）。INFORMS，381–398。issn：0041-1655。doi：10.1287/trsc.1100.0360。网址：https: / / pubsonline . informs . org / doi / abs / 10 . 1287 / trsc . 1100 . 0360（访问于 2025/10/21）（见第 1 页）。[Blä+23] T. Bläsius、P. Fischbeck、T. Friedrich 和 M. Katzmann。《在双曲随机图上用多项式时间求解顶点覆盖》。《计算系统理论》67:1（2023 年 2 月），28–51。issn：1432-4350，1433-0490。doi：10 . 1007 / s00224-021-10062-9。网址：https://link.springer.com/10.1007/s00224-021-10062- 9（访问于 2025/10/21）（见第 1 页）。[Cas+23] A. Casado、S. Bermudo、A. D. López-Sánchez 和 J. Sánchez-Oro。《一种用于在图中寻找最小支配集的迭代贪心算法》。《数学与计算机仿真》207（2023 年 5 月），41–58。issn：0378- 4754。doi：10.1016/j.matcom.2022.12.018。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475422005055（访问于 2025/10/25）（见第 3 页）。

[CC08] M. Chlebík 和 J. Chlebíková。《有界度图中支配集问题的近似难度》。《信息与计算》206:11（2008 年 11 月），1264–1275。ISSN：08905401。DOI：10.1016/j.ic.2008.07.003。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0890540108000928（访问于 2025 年 10 月 23 日）（见第 3 页）。[Cha18] D. Chalupa。《一种求解最小支配集的基于序的算法及其在图挖掘中的应用》。《信息科学》426（2018 年 2 月），101–116。ISSN：0020-0255。DOI：10 . 1016 / j . ins . 2017 . 10 . 033。网址：https : / / www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025517310277（访问于 2025 年 10 月 23 日）（见第 3 页）。[CHM78] E. J. Cockayne、S. T. Hedetniemi 和 D. J. Miller。《遗传超图与中图的性质》。《加拿大数学通报》21:4（1978 年 12 月），461–468。ISSN：0008-4395, 1496-4287。DOI：10 . 4153 /CMB - 1978 - 079 - 5。网址：https : / / www. cambridge . org / core / product / identifier / S000843950005966X/type/journal_article（访问于 2025 年 10 月 25 日）（见第 24 页）。[Chv79] V. Chvatal。《集合覆盖问题的贪心启发式》。《运筹学研究》4:3（1979 年 8 月）。INFORMS，233–235。ISSN：0364-765X。DOI：10.1287/moor.4.3.233。网址：https://pubsonline.informs.org/doi/10.1287/moor.4.3.233（访问于 2025 年 10 月 21 日）（见第 1、3 页）。[CS15] S. N. Chaurasia 和 A. Singh。《一种用于最小权支配集的带引导变异的混合进化算法》。《应用智能》43:3（2015 年 10 月），512–529。ISSN：1573-7497。DOI：10.1007/s10489-015-0654- 1。网址：https://doi.org/10.1007/s10489-015-0654-1（访问于 2025 年 10 月 25 日）（见第 3 页）。[Die25] R. Diestel。《图论》。第 173 卷。数学研究生教材。柏林、海德堡：施普林格，2025。ISBN：978-3-662-70107-2。DOI：10.1007/978-3-662- 70107-2。网址：https://link.springer.com/10.1007/978-3-662-70107-2（访问于 2025 年 10 月 28 日）（见第 28 页）。[DJW02] S. Droste、T. Jansen 和 I. Wegener。《关于 (1+1) 进化算法的分析》。《理论计算机科学》276:1-2（2002 年 4 月），51–81。ISSN：03043975。DOI：10.1016/S0304-3975(01)00182-7。网址：https://linkinghub.elsevier. com / retrieve / pii / S0304397501001827（访问于 2025 年 10 月 21 日）（见第 1、4 页）。[Doe11] B. Doerr。《漂移分析》。载于：第 13 届遗传与进化计算年度会议论文集。GECCO ’11。美国纽约州纽约市：ACM，2011 年 7 月，1311–1320。ISBN：978-1-4503-0690-4。DOI：10.1145/2001858. 2002138。网址：https://dl.acm.org/doi/10.1145/2001858.2002138（访问于 2025 年 10 月 25 日）（见第 4 页）。

[ES00] H. A. Eiselt 和 C.-L. Sandblom。《启发式算法》。载于：《整数规划与网络模型》。H. A. Eiselt 和 C.-L. Sandblom 编。柏林、海德堡：施普林格，2000，229–258。ISBN：978-3-662-04197-0。DOI：10.1007/978-3- 662-04197-0_11。网址：https://doi.org/10.1007/978-3-662-04197-0_11（访问于 2025 年 10 月 21 日）（见第 1 页）。[FK00] P. Fränti 和 J. Kivijärvi。《聚类问题的随机局部搜索算法》。《模式分析与应用》3:4（2000 年 12 月），358–369。ISSN：1433-7541。DOI：10.1007/s100440070007。网址：https://doi.org/10.1007/s100440070007（访问于 2025 年 10 月 21 日）（见第 1 页）。[GW03] O. Giel 和 I. Wegener。《进化算法与最大匹配问题》。载于：STACS 2003。H. Alt 和 M. Habib 编。柏林、海德堡：施普林格，2003，415–426。ISBN：978-3-540-36494-8。DOI：10.1007/3- 540-36494-3_37（见第 4 页）。[HHH23] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 M. A. Henning。《支配的基础》。载于：《图中的支配：核心概念》。ISSN：2196-9922。施普林格，查姆，2023，27–47。ISBN：978-3-031-09496-5。DOI：10.1007/978-3-031-09496-5_2。网址：https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-09496-5_2（访问于 2025 年 8 月 24 日）（见第 3、6、22、53 页）。[HI10] A.-R. Hedar 和 R. Ismail。《求解最小支配集问题的混合遗传算法》。载于：计算科学及其应用——ICCSA 2010。D. Taniar、O. Gervasi、B. Murgante、E. Pardede 和 B. O. Apduhan 编。柏林、海德堡：施普林格，2010，457–467。ISBN：978-3-642-12189-0。DOI：10.1007/978-3-642-12189-0_40（见第 3 页）。[HLP86] S. Hedetniemi、R. Laskar 和 J. Pfaff。《求仙人掌图最小支配集的线性算法》。《离散应用数学》13:2-3（1986 年 3 月），287–292。ISSN：0166218X。DOI：10.1016/0166-218X(86)90089-2。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0166218X86900892（访问于 2025 年 10 月 25 日）（见第 1、53 页）。[Hoc97] D. S. Hochba。《NP难问题的近似算法》。《SIGACT 新闻》28:2（1997 年 6 月），40–52。ISSN：0163-5700。DOI：10.1145/261342.571216。网址：https://dl.acm.org/doi/10.1145/261342.571216（访问于 2025 年 10 月 21 日）（见第 1 页）。[HSE06] C. K. Ho、Y. P. Singh 和 H. T. Ewe。《用于最小支配集问题的增强型蚁群优化元启发式算法》。《应用人工智能》20:10（2006 年 6 月）。泰勒与弗朗西斯，881–903。ISSN：0883-9514。DOI：10.1080/08839510600940132。网址：https://doi.org/10.1080/08839510600940132（访问于 2025 年 10 月 25 日）（见第 3 页）。

[Köt24] T. Kötzing。《随机漂移理论》。arXiv：2406.14589。2024年6月。doi：10. 48550/arXiv.2406.14589。网址：http://arxiv.org/abs/2406.14589（访问于2025年10月26日）（见第8页）。[LP17] D. A. Levin 和 Y. Peres。《马尔可夫链与混合时间》。第2版，第107卷。美国数学学会，2017年10月。isbn：978-1-4704-2962-1。doi：https: //doi.org/10.1090/mbk/107（见第10、11、52页）。[MU17] M. Mitzenmacher 和 E. Upfal。《概率与计算：算法和数据分析中的随机化与概率技术》。第2版。美国：剑桥大学出版社，2017年6月。isbn：978-1-107-15488-9（见第8页）。[NA16] J. C. Nacher 和 T. Akutsu。用于分析生物网络的基于最小支配集的方法。《Methods》。《泛组学分析》102（2016年6月），57–63。issn：1046-2023。doi：10.1016/j.ymeth.2015.12.017。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1046202315300967（访问于2025年10月24日）（见第2页）。[NW07] F. Neumann 和 I. Wegener。随机局部搜索、进化算法与最小生成树问题。《理论计算机科学》378:1（2007年6月），32–40。issn：0304-3975。doi：10.1016/j.tcs.2006.11.002。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397506008589（访问于2025年6月2日）（见第4、7页）。[San02] L. A. Sanchis。支配集问题启发式算法的实验分析。《Algorithmica》33:1（2002年5月），3–18。issn：1432-0541。doi：10.1007/s00453-001-0101-z。网址：https://doi.org/10.1007/s00453-001-0101-z（访问于2025年10月23日）（见第3页）。[SL10] C. Shen 和 T. Li。通过最小支配集进行多文档摘要。载于：第23届国际计算语言学会议论文集。COLING ’10。美国：计算语言学协会，2010年8月，984–992。（访问于2025年10月23日）（见第2页）。[SZ10] D. Sudholt 和 C. Zarges。顶点着色迭代局部搜索算法的分析。载于：《算法与计算》。O. Cheong、K.-Y. Chwa 和 K. Park 编。柏林、海德堡：施普林格，2010年，340–352。isbn：978-3-642-17517-6。doi：10.1007/978-3-642-17517-6_31（见第4页）。[SZP09] H. Samuel、W. Zhuang 和 B. Preiss。异构无线网络中基于DTN的支配集路由，用于移动自组织网络。《移动网络与应用》14:2（2009年4月），154–164。issn：1572-8153。doi：10.1007/s11036-008-0131-8。网址：https://doi.org/10.1007/s11036-008-0131-8（访问于2025年10月23日）（见第2页）。

# Declaration 作者声明

我特此声明，本学位论文是本人在无他人协助下独立完成的。所使用的所有直接或间接来源均已作为参考文献列明。

波茨坦，2026年1月21日

Hendrik Higl