arXiv:2601.11871v1 [math.GT] 17 Jan 2026

以四孔球面为页的开书分解

HARAHM PARK

Abstract. 本文研究由页面为四孔球面的开书分解所支撑的接触结构。全文分为两部分。第一部分中，我们找到了四孔球面上无穷多个过扭且右转的单值化。这是利用 Ito–Kawamuro 在论文 [IK14a; IK14c] 中发展的技巧完成的。尽管我们证明的大多数过扭单值化都是伪阿诺索夫的，但我们也精确分类了四孔球面上哪些可约单值化是紧的。第二部分中，我们通过分类哪些可约单值化具有非零的 Heegaard Floer 不变量，重新证明 Lekili 结果 [Lek11] 的一部分。为此，我们使用了 Min–Varvarezos 的带边接触不变量 [MV24]。

Contents

1. 引言 1

第 1 部分。过扭、右行单值2. 曲线、弧与映射类群 3. 过扭转性 3 5

第 2 部分。可约单值的接触不变量 33

4. 定理 1.3 的证明 33 5. 分割开书 34 6. 识别带边接触不变量 39 7. 重新参数化与粘合 50 附录 A。环面代数上的模 55 附录 B。计算边界 Floer 同调 58 附录 C。来自 hf-hat-obd-nice 的数据 71 参考文献 74

1. Introduction

自 Giroux 在 2002 年 ICM 会议论文集中提出接触结构与开书分解之间的对应关系以来 [Gir02], ，三维接触拓扑的核心主题之一，便是从支撑接触结构的开书分解数据中识别接触结构的性质。（关于 Giroux 对应的现代论述，另见 [BHH24] 和 [LV24a; LV24b] 。）仅凭开书的数据，直接判断其所支撑的接触结构是否为紧结构，或其 Ozsv´ath–Szab´o 接触不变量是否非零，并非易事 [OS05]。

Date: 2026 年 1 月 21 日。作者获得了 NSF资助项目 DMS-2136090 的支持。

当开书的页为圆盘、环带或裤形曲面时，可以很容易地看出，单值化要么可分解为正德恩扭转的复合，要么不是右转的。因此，其所支撑的接触结构要么是 Stein 可填充的——因而是紧的，且接触不变量非零——要么是过扭的。

当开书的页是单穿孔环面时，根据 Honda–Kazez–Mati´c 和 Baldwin 各自独立的工作，已知其所支撑的接触结构是紧的，当且仅当它具有非零的接触不变量。当且仅当单值化是右转的时，这一情况才会发生 [HKM07；HKM08；HKM09a；Bal07]。

在本文中，我们研究下一个最易处理的情形，即开书的页是一个四穿孔球面 $\Sigma_{0,\,4}$。我们可以进一步利用 Nielsen–Thurston 分类对开书的单值化进行细分。当单值化是周期的时，它必定是边界平行德恩扭转的乘积。这一子情形与圆盘、环带和裤形曲面的情形相同。因此，我们可以将注意力限制在可约和伪阿诺索夫单值化上。

本文分为两部分。第 1 部分中，我们在$\Sigma_{0,\,4}$上找到了无穷多个右转且过扭的单值化。给定一个紧致可定向曲面 Σ，令 Mod(Σ，$\partial\Sigma$) 表示 Σ的相对映射类群。在 [IK15b]中，证明了以下定理。

定理1.1 (Ito–Kawamuro)。若 Σ 是一个边界非空的平面曲面，且$f \in \mathrm{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ 是一个单值化，其分数德恩扭转系数（分数 *Dehn* 扭转系数）均严格大于1，那么相应的开书支撑一个紧接触结构。

在四孔球面$\Sigma_{0,\,4}$上，任何单值化的分数 Dehn 扭转系数都是整数。此外，在$\Sigma_{0,\,4}$ 上的任何右转单值化，若其最小分数 Dehn 扭转系数为零，则可分解为正德恩扭转。因此，我们可以将注意力限制在最小分数 Dehn 扭转系数为 1 的单值化上。利用 Ito 和 Kawamuro 在 [IK14a; IK14b; IK14c; IK15a; IK15b; IK16; IK17a; IK17b; IK19a; IK19b; IK20].中开发并使用的开书叶状结构技术，我们找到了两族这样的过扭单值化，每一族都包含无穷多个单值化。

尽管 Ito 和 Kawamuro 最早使用了“开书叶状结构”这一术语，但这一概念可追溯至 Bennequin [Ben83] 关于区分 S^3 上接触结构的研究。后来，Birman 和 Menasco 在 [BM92a; BM91; BM93; BM90; BM92b; BM92c] 中运用类似思想研究辫子。他们将其称为辫子叶状结构。Pevalescu 在其论文 [Pav08]，中将辫子叶状结构推广到任意接触三维流形。

用这种方法能够证明为过扭的单值化，其集合不太容易描述；我们将精确陈述推迟到定理 3.6 和 3.9。我们证明为过扭的单值化大多是伪阿诺索夫的。不过，我们能够证明足够多的可约单值化是过扭的，从而精确判定哪些可约单值化是紧的。令$f \in$ Mod($\Sigma_{0,4}, \partial\Sigma_{0,4}$) 为固定一个本质圆 $\gamma \subset \Sigma_{0,4}$ 的可约单值化，并令 $a_1, \ldots, a_4$ 表示与$\Sigma_{0,4}$ 的边界分支平行的圆。则在同痕意义下，

$$f = \tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}^{n_3}\tau_{a_4}^{n_4}\tau_{\gamma}^{n_\gamma}, \tag{1.1}$$

对于某些 n_1，n_2，n_3，n_4，$n_\gamma \in \mathbb{Z}$。这里 τ_γ 表示关于 γ 的正向扭转，即右手德恩扭转。（当 $n_\gamma = 0$ 时，单值化变为周期的而非可约的，但定理 1.2 和 1.3 的结果仍然适用。）

Th定理 1.2。（证明见第 20 页）若 f 如 (1.1) 中所述，则 f 是紧的，当且仅当 f

(i) $\min\{n_1, n_2, n_3, n_4\} \geq 2$，或(ii)
$\min\{n_1, n_2, n_3, n_4\} \geq \max\{-n_\gamma, 0\}$。

在第 2 部分中，我们通过分类 $\Sigma_{0,\ 4}$ 上哪些可约单值具有非零的 Heegaard Floer 接触不变量，重新证明了 Lekili 的一项结果的一部分。

定理 1.3 (Lekili)。 由单值化(1.1)指定的开书，其不变量非零当且仅当它是 *Stein* 可填充的。这当且仅当

$$\min\{n_1, n_2, n_3, n_4\} \geq \max\{-n_\gamma, 0\}.$$

Lekili 证明了一个稍微更一般的陈述，详见注记 4.2。该证明借助 Baldwin 的封盖定理 [Bal13]。我们注意到，Baldwin 的封帽结果并非在一般情况下都成立，因为 Min 已发现反例。不过，当封帽后的流形是有理同调球面时，该结果成立。结合勒让德手术下接触不变量的自然性，这足以证明注记 4.2 中的结果。

我们利用 Min–Varvarezos [MV24]提出的边界-缝合 Floer 同调中的接触不变量，为上述定理给出另一种证明。该不变量的先驱包括 [Ali+23]的边界不变量以及 [HKM09b]的缝合不变量。Zarev 在 [Zar11]中定义了边界-缝合 Floer 同调。

约定。 在映射类群中，我们使用不带符号 $\circ$ 的函数记号，因此 $\widehat{\ }$ 右边的元素先作用。对于 *Heegaard Floer* 同调 及其相关的带边缝合理论，我们使用 $\mathbb{Z}/2$ 系数。

致谢。 感谢我的导师 Ko Honda 的鼓励与支持，以及他对本文早期稿件提出的宝贵意见。感谢 Hyunki Min 和 Konstantinos Varvarezos 在撰写本文第二部分时给予我的悉心指导。感谢 Cagatay Kutluhan 帮助编写 Sage 程序 hf-hat-obd 和 hf-hat-obd-nice；这些程序对撰写本文第一部分很有帮助。最后，感谢 John Baldwin 提供的在线问题列表 https://floerhomologyproblems.blogspot.com，正是它让我开始研究这个问题。

第1. 部分 过扭、右转单值

2. Curves, arcs, and the mapping class group

本节回顾一些关于四孔球面的预备知识，这些知识将用于论证过扭转性。我们还会确立一些术语。图 2.1 展示了四孔球面 $\Sigma_{0,\ 4}$ 以及其中的一些嵌入闭曲线。

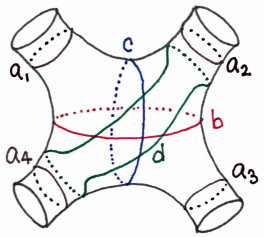


Figure 2.1

注意$\Sigma_{0,\ 4}$ 由在整数格 $\mathbb{Z}^2$处打孔的平面 $\mathbb{R}^2$ 覆盖，如图 2.2 所示。我们可以通过将$\Sigma_{0,\ 4}$ 中的本质嵌入圆提升为此覆盖中的直线，为其赋予斜率 $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$。这里，本质是指不围成嵌入圆盘且不与边界平行。我们采用这样的约定，使图 2.1 中曲线 b 的斜率为 0，而曲线 c 的斜率为 ∞。设 $s = p/q$

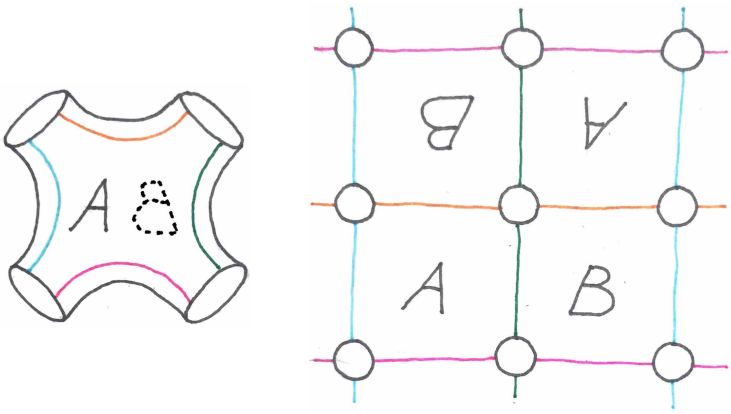


FIGURE 2.2

是一个斜率，其 p， $q \in \mathbb{Z}$ 互素。所谓斜率为 s的弧，是指$\Sigma_{0,\ 4}$ 中的本性嵌入弧，其在图 2.2 所示覆盖中的提升满足以下性质：

(i) 将 $\mathbb{Z}^2$ 中的穿孔点缩为点后，每个提升的端点相差向量 $\pm(p,\ q)$（不是该向量的标量倍数）。(ii) 将穿孔点缩为点后，每个提升都可以拉直为穿孔点补集中的线段。

根据将嵌入圆对应到斜率的关系，我们可以将 $\Sigma_{0,\ 4}$ 中嵌入圆的同痕类视为法雷镶嵌中的顶点；见图 2.3。若两个嵌入圆可以经过同痕变为横截相交且交点仅有两个——这是 $\Sigma_{0,\ 4}$ 中的最小交点数——则它们在法雷镶嵌中由一条弧相连。

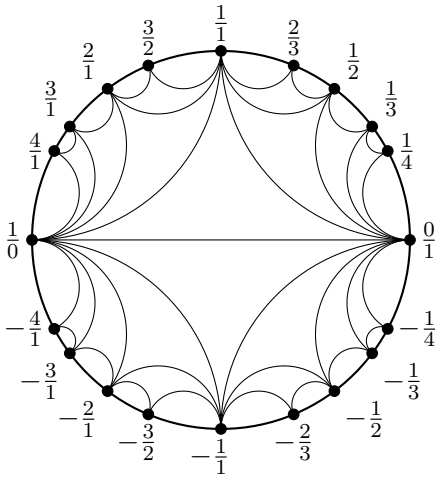


FIGURE 2.3

回顾 [FM12, 第 2.2 节， 5] $\Sigma_{0,\ 4}$ 的映射类群为

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) \rtimes \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}).$$

投影 π: 映射类群$(\Sigma_{0,4}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 记录了 $\Sigma_{0,4}$ 在简单闭曲线上的作用。理解这一作用的一种方法是，将法雷镶嵌视为双曲空间上半空间模型中的一种铺砌

。然后，我们将 PSL(2, $\mathbb{Z}$) $\leq$ PSL(2, $\mathbb{R}$) 视为保定向双曲等距变换（即 M¨obius 变换）的一个子群。π 的核由两个双曲 *involution* 生成，它们通过双换位置换边界分支；参见图 2.4

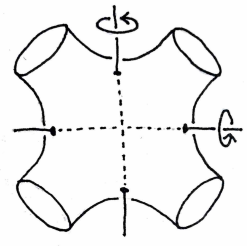


FIGURE 2.4

接下来，由 [Lek11]可得相对映射类群的一个非典范同构

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}, \partial\Sigma_{0,4}) \cong \mathbb{Z}^4 \times F_2,$$

其中， F_2 是由两个元素生成的自由群。 $\mathbb{Z}^4$ 因子是典范的。然而， F_2 因子没有典范的选取。存在一个自然映射

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}, \partial\Sigma_{0,4}) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}),$$

其核是上面的 $\mathbb{Z}^4$ 因子。该因子由边界平行戴恩扭转生成。接下来，复合

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}, \partial\Sigma_{0,4}) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$$

在 F_2 因子上是单射。我们也将上述复合称为 π。可以验证

$$\pi(\tau_b) = \pm \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \pi(\tau_c) = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

此外,

$$\pi(F_2) = \left\{ \pm \begin{bmatrix} r & s \\ p & q \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : r, q \text{ odd}, \, p, s \text{ even} \right\} \trianglelefteq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}). \tag{2.1}$$

注意，若且唯若两个 Mod($\Sigma_{0,4}$,$\partial\Sigma_{0,4}$)} 的元素在 π 下的像相同，且它们的分数 Dehn 扭转系数相同，则这两个元素相同。

3. OVERTWISTEDNESS

为证明过扭转性，我们首先选取单值化 $f \in$ Mod($\Sigma_{0,4}$,$\partial\Sigma_{0,4}$) 的一个良好的共轭类代表元。

命题 3.1. 设 a_i、 b、 c、 d 是图 2.1 中的曲线。若在通过 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4})$ 共轭的意义下，单值化 f 不是

$$\tau_{a_1}^{n_1} \tau_{a_2}^{n_2} \tau_{a_3}^{n_3} \tau_{a_4}^{n_4} \tau_c^{n_c}, \qquad n_c \geq 0, \tag{3.1}$$

那么，在共轭意义下，可以选取 f 使得

$$\pi(f) = \pm \begin{bmatrix} p' & q' \\ p & q \end{bmatrix}$$

其中 p、 q、 p'、 $q' \geq 0$ 和 $p > q$。

证明。 如果 f 不是伪阿诺索夫映射，也不是上述被禁止的单值化之一，那么在共轭意义下，它具有以下形式

$$\tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}^{n_3}\tau_{a_4}^{n_4}\tau_c^{n_c}, \qquad n_c < 0.$$

将 π 应用于上述单值化可得

$$\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2n_c & 1 \end{bmatrix},$$

这确实具有所需的形式。现在假设 f 是伪阿诺索夫。我们首先断言，经过共轭后，可以选择 f 使得

$$\pi(f) = \pm\begin{bmatrix} p' & q' \\ p & q \end{bmatrix}, \qquad p, q, p', q' \geq 0. \tag{3.2}$$

我们按照 [HKM09a，引理 4.2] 中的方法进行论证。注意， $\pi(f)$ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 中的一个双曲元素。令 λ_1 表示对应于绝对值大于 1 的特征值的特征空间的斜率。令 λ_2表示另一个特征空间的斜率。在法雷镶嵌中，取从 λ_2 到 λ_1 的逆时针边上的一个有理斜率 μ_1 ，以及从 λ_1到 λ_2的逆时针边上的一个有理斜率 μ_2 ，使得 μ_1, μ_2 之间有一条边。（例如，考虑 λ_1 的连分数逼近，即可找到这样的一对。）令 $A \in$ 为 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 中唯一一个其列按顺序具有斜率 μ_1, μ_2 的元素。则 $A\pi(f)A^{-1}$ 的所有元素都具有相同的符号。由于映射$\pi\colon \mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 是满射，这就完成了中间断言的证明。

现在假设 f 如 (3.2) 中所选。由于 f 不可约， p 不能为 0，因此必定严格为正。假设 $p \leq q$。我们计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\pi(f)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \pm\begin{bmatrix} p+p' & q-p+q'-p' \\ p & q-p \end{bmatrix}.$$

右边的所有项都非负，除了可能的 $q-p+q'-p'$。此外，对角项均严格为正，因为它们是奇数。由于该矩阵的行列式为 1， $q-p+q'-p'$ 为负数的唯一可能情况是 $p=0$。这就回到了上文讨论的可约情形。通过反复进行上述共轭，我们最终可以安排使得 $q < p$。□

注 3.2。 注意，(3.1) 中的单值化当且仅当 n_1， n_2， n_3， $n_4 \geq 0$ 时是紧的。事实上，如果每个 n_i 都非负，那么单值化可分解为正德恩扭转。另一方面，如果某个 $n_i < 0$ ，那么该单值化就不是右转的。

从这里开始，我们假设 $f \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4},\partial\Sigma_{0,4})$ 取为上述命题中的定义。也就是说，我们假设

$$\pi(f) = \pm\begin{bmatrix} p' & q' \\ p & q \end{bmatrix}$$

其中 p， q， p'， $q' \geq 0$和 $p > q$。回忆一下， p是偶数，而 q是奇数。上述矩阵的行列式为 1 这一事实意味着 p 和 q 没有公因子。

一般而言，给定互质正整数 $p > q > 0$，可以考虑 $-p/q$ 的“减法型”连分数展开，其形式为

$$-\frac{p}{q} = r_0 - \cfrac{1}{r_1 - \cfrac{1}{r_2 - \cdots - \cfrac{1}{r_k}}}$$

其中每个 $r_j < -1$ 是一个整数。我们将上式右侧记为 $[r_0, \dots, r_k]$。令

$$N = |(r_0+2) + (r_1+2) + \cdots + (r_{k-1}+2) + (r_k+1)|.$$

对于 $i = 0$、.....、N，我们通过以下方式归纳地定义有理数 $s_i \in \mathbb{Q}$：首先令 $s_N = -p/q$。接着，对于 $1 \le i \le N$，若 s_i的连分数展开为 $s_i = [a_0, \dots, a_\ell]$，且所有 $a_j < -1$，则令 $s_{i-1} = [a_0, \dots, a_\ell + 1]$。注意，若 $a_\ell = -2$，这与 $[a_0, \dots, a_{\ell-1} + 1]$相同。此过程以 $s_0 = -1$结束。

引理 3.3。将 $s_i = -p_i/q_i$ 写成最简形式，其中 p_i、$q_i > 0$。（“最简形式”是指 p_i、q_i没有任何公因子。）特别地，$p_N = p$ 和 $q_N = q$。

(a) 对于每个 $1 \le i \le N$，都有 $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = 1$。因此

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} + \frac{1}{q_{i-1} q_i}.$$

(b) 我们有严格单调性

$$-\frac{p}{q} = s_N < s_{N-1} < \cdots < s_1 < s_0 = -1.$$

(c) 对于每个 $0 \le j \le k$，递归定义 x_j、y_j 如下

$$\begin{aligned} &x_0 = r_0, \qquad x_1 = r_0 r_1 - 1, \qquad x_j = r_j x_{j-1} - x_{j-2}, \quad j \ge 2, \\ &y_0 = 1, \qquad y_1 = r_1, \qquad\quad y_j = r_j y_{j-1} - y_{j-2}, \quad j \ge 2. \end{aligned}$$

Then

$$\frac{x_j}{y_j} = [r_0, \dots, r_j]$$

and

$$x_j y_{j-1} - x_{j-1} y_j = -1, \qquad 1 \le j \le k.$$

因此，分数 x_j/y_j 是最简形式。

证明。我们先证明 (a)。若对某个整数 $n \ge 2$ 有 $s_i = -n$，则 $s_{i-1} = 1 - n$。因此

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = n \cdot 1 - (n-1) \cdot 1 = 1.$$

现在我们对 s_i 的连分数展开的长度进行归纳。设 $s_i = [a_0, \dots, a_\ell]$，其中 $a_j < -1$。根据归纳法，若我们写作

$$-\frac{p'}{q'} = [a_1, \dots, a_\ell], \qquad -\frac{p''}{q''} = [a_1, \dots, a_\ell + 1]$$

以最简形式表示为 $p', q', p'', q'' > 0$，那么 $p'q'' - p''q' = 1$. 现在

$$s_i = a_0 + \frac{1}{p'/q'} = \frac{a_0 p' + q'}{p'}, \qquad s_{i-1} = a_0 + \frac{1}{p''/q''} = -\frac{a_0 p'' + q''}{p''}.$$

注意，每个等式中的最后一个分数都已化为最简形式。因此

$$p_i = -(a_0 p' + q'), \qquad q_i = p', \qquad p_{i-1} = -(a_0 p'' + q''), \qquad q_{i-1} = p''.$$

现在我们计算

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = -(a_0 p' + q') p'' + (a_0 p'' + q'') p' = q'' p' - q' p'' = 1.$$

(a) 的最后部分现在得证，因为

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} + \frac{1}{q_{i-1} q_i} = \frac{p_{i-1} q_i + 1}{q_{i-1} q_i} = \frac{p_i q_{i-1}}{q_{i-1} q_i} = \frac{p_i}{q_i}.$$

注（b） 由 (a) 中的最后一个等式可得。对于 (c)，我们首先通过归纳法证明

$$\frac{x_j}{y_j} = [r_0, \dots, r_j].$$

这里允许 r_j 为任意有理数会很有用。我们先快速验证

$$\begin{aligned}
\frac{x_0}{y_0} &= \frac{r_0}{1} = [r_0], \\
\frac{x_1}{y_1} &= \frac{r_1 r_0 - 1}{r_1} = r_0 - \frac{1}{r_1} = [r_0, r_1], \\
\frac{x_2}{y_2} &= \frac{r_2 r_1 r_0 - r_2 - r_0}{r_2 r_1 - 1} = r_0 - \frac{r_2}{r_2 r_1 - 1} = r_0 - \frac{1}{r_1 - 1/r_2} = [r_0, r_1, r_2].
\end{aligned}$$

接下来，对于 $j \geq 3$，由归纳法可得

$$\begin{aligned}
[r_0, \dots, r_{j-1}, r_j] &= \left[r_0, \dots, r_{j-1} - \frac{1}{r_j}\right] = \frac{(r_{j-1} - 1/r_j)x_{j-2} - x_{j-3}}{(r_{j-1} - 1/r_j)y_{j-2} - y_{j-3}} = \frac{r_j(r_{j-1}x_{j-2} - x_{j-3}) - x_{j-2}}{r_j(r_{j-1}y_{j-2} - y_{j-3}) - y_{j-2}} \\
&= \frac{r_j x_{j-1} - x_{j-2}}{r_j y_{j-1} - y_{j-2}} = \frac{x_j}{y_j}.
\end{aligned}$$

我们现在证明（c）中的第二个结论，采用归纳法。对于基例 $j = 1$，2，我们验证 y

$$\begin{aligned}
x_1 y_0 - x_0 y_1 &= (r_1 r_0 - 1) \cdot 1 - r_0 \cdot r_1 = -1, \\
x_2 y_1 - y_1 x_2 &= (r_2 r_1 r_0 - r_2 - r_0) \cdot r_1 - (r_1 r_0 - 1) \cdot (r_2 r_1 - 1) = -1.
\end{aligned}$$

对于 $j \geq 3$，由归纳法可得

$$\begin{aligned}
x_j y_{j-1} - x_{j-1} y_j &= (r_j x_{j-1} - x_{j-2}) y_{j-1} - x_{j-1}(r_j y_{j-1} - y_{j-2}) \\
&= x_{j-1} y_{j-2} - x_{j-2} y_{j-1} = -1.
\end{aligned}$$

□

在下一个引理中，我们讨论一些数论关系，这些关系稍后会派上用场。我们继续使用引理 3.3 的记号。

引理 3.4。 (d) 分母 $q_0, \dots, q_N$ 全为奇数，当且仅当 k 为偶数且

$$r_1 = r_3 = r_5 = \cdots = r_{k-1} = -2.$$

在这种情况下， $p = p_N$ 与

$$r_0 + r_2 + r_4 + \cdots + r_k.$$

(e) 如果(d) 中的条件成立且 p 为偶数，那么 N 为奇数，并且 p_i 的奇偶性交替 *ates.*

(f) 假设 r_0 为奇数且 $k \geq 1$。以下条件等价。

- 对于每个 $i \geq |r_0| - 1$， p_i 或 q_i 之一为偶数。
- k 为奇数，且

$$r_2 = r_4 = \cdots = r_{k-1} = -2.$$

（g）如果（f）中的条件成立，那么对于 $i \geq |r_0| - 1$， p_i 的奇偶性会交替变化。

证明。对于（d），若 $k = 0$，该命题显然成立，因此假设 $k > 0$。对于每个 $|r_0| - 1 \leq i \leq N$，令 j（i） $\in \{0, \dots, k-1\}$，并令 $t_i < -1$ 满足 s_i的连分数展开为

$$s_i = [r_0, \dots, r_{j(i)}, t_i].$$

注意， $t_i > r_{j(i)+1}$ 但情况 $t_N = r_k$除外。如果 $j(i) \geq 1$ 注意

$$q_i = t_i y_{j(i)} - y_{j(i)-1}.$$

如果 $j(i) = 0$ 那么 $q_i = t_i$。现在，假设每个 q_i 都是奇数。考虑满足$j(i) = 0$的指标 i，可知若 $k > 0$，则实际上 $k \geq 2$ 且 $r_1 = y_1 = -2$。通过归纳法，假设对于某个 ℓ，

(i) $k > 2\ell - 1$、(ii) $r_1 = r_3 = \cdots = r_{2\ell-1} = -2$，(iii) y_1，y_3，...，$y_{2\ell-1}$均为偶数，(iv) y_0，y_1，...，$y_{2\ell-2}$均为奇数。

若 $k = 2\ell$，则我们就完成了。否则，用反证法，假设 $a_{2\ell+1} < -2$。那么存在某个指标 i，使得 $j(i) = 2\ell$ 且 $t_i = -2$。注意，$q_i = -2y_{2\ell} - y_{2\ell-1}$ 是偶数，这就产生了矛盾。同理，$k = 2\ell + 1$不可能成立。为完成归纳步骤，注意到$y_{2\ell} = a_{2\ell}y_{2\ell-1} - y_{2\ell-2}$是奇数，而 $y_{2\ell+1} = -2y_{2\ell} - y_{2\ell-1}$是偶数。

反之，假设 k为偶数且 $r_1 = r_3 = \cdots = r_{k-1} = -2$。由上述相同的论证可知，$y_1$、$y_3$、.....、$y_{k-1}$为偶数，而 y_0、y_2、.....、y_k为奇数。根据 (c) 中的第二个陈述，注意到 x_1、x_3、.....、x_{k-1}为奇数。类似的归纳法表明，$x_{2\ell}$与 $r_0 + r_2 + \cdots + r_\ell$具有相同的奇偶性。特别地，这证明了关于 $p = x_k$奇偶性的陈述。现在，对于 $0 \leq i < |r_0| - 1$，我们有 $q_i = 1$ 为奇数。对于 $|r_0| - 1 \leq i \leq N$，注意 $j(i)$始终为奇数，因此 $q_i = t_i y_{j(i)} - y_{j(i)-1}$ 为奇数。部分 (e) 由引理 3.3 的部分 (a) 得出。

对于 (f)，假设 r_0 为奇数。注意，如果 $k = 1$，则 (f) 中的两个条件都成立，因此我们可以假设 $k \geq 2$。我们沿用上述记号 $j(i)$ 和 t_i。假设对于每个 $i \geq |r_0| - 1$，p_i 或 q_i 至少有一个为偶数。若 $k = 2$ 或 $r_2 < -2$ 成立，则存在一个指标 i，使得 $j(i) = 2$ 且 $t_i = -2$。那么二者

$$p_i = -2x_1 - r_0 \qquad \text{and} \qquad q_i = -2y_1 - 1$$

均为奇数，这就产生了矛盾。因此，$k \geq 3$、$r_2 = -2$，进而 x_2，y_2 都是奇数。根据归纳法，假设对于某个 ℓ，

(i) $k > 2\ell$、(ii) $r_2 = r_4 = \cdots = r_{2\ell} = -2$、(iii) x_0，x_2、.....、$x_{2\ell}$ 均为奇数，(iv) y_0，y_2、.....、$y_{2\ell}$ 均为奇数。

若 $k = 2\ell + 1$，则我们已经完成。若否，运用反证法，假设 $k = 2\ell + 2$ 或$a_{2\ell+2} < -2$。那么存在某个指标 i，使得 $j(i) = 2\ell + 1$ 且 $t_i = -2$。于是二者

$$p_i = -2x_{2\ell+1} - x_{2\ell} \qquad \text{and} \qquad q_i = -2y_{2\ell+1} - y_{2\ell}$$

都是奇数，这就产生了矛盾。因此 $k > 2\ell + 2$、$r_{2\ell+2} = -2$和 $x_{2\ell+2}$，$y_{2\ell+2}$ 都是奇数。

反过来，假设 k是奇数且 $r_2 = r_4 = \cdots = r_{k-1} = -2$。那么必然有 x_0，x_2，.....，$x_{2\ell}$和 y_0，y_2，.....，$y_{2\ell}$ 全都是奇数。根据 (c) 中的第二个陈述，若 i是奇数，则 x_i，y_i具有相反的奇偶性。对于 $i \geq |r_0| - 1$，注意到 $j(i)$ 总是偶数。因此

$$p_i = t_i x_{j(i)} - x_{j(i)-1} \qquad \text{and} \qquad q_i = t_i y_{j(i)} - y_{j(i)-1}$$

奇偶性相反。特别是，其中一个是偶数。结论 (g) 由引理 3.3 的 (a) 部分得出。□

注记 3.5。这些分数

$$-\frac{p}{q} = s_N < s_{N-1} < \cdots < s_1 < s_0 = -1.$$

确定法雷镶嵌中从 $-p/q$ 到 -1 的最短逆时针路径。

现在，我们可以描述第一类已证明为过扭的单值化族。

定理 3.6。 假设 $f \in$ 映射类群$(\Sigma_{0,4}, \partial\Sigma_{0,4})$ 满足

$$\pi(f) = \begin{bmatrix} p' & q' \\ p & q \end{bmatrix}$$

以及 p、q、p'、$q' \geq 0$ 和 $p > q$。此外，假设 $-p/q$ 的连分数展开具有如下形式

$$-\frac{p}{q} = [r_0, -2, r_2, -2, r_4, \ldots, r_{k-2}, -2, r_k],$$

其中 $r_j < -1$ 和 k 为偶数。此外，假设存在某个 r_j，它不是 -2。如果 f 的最小分数 ***Dehn*** 扭转系数1，那么 f 是过扭的。

定理 3.6 的证明策略是通过电影表示展示一个明确的过扭曲圆盘，如 [IK14a; IK14c]中所述。我们将在下文回顾必要的细节。此构造是对 [IK14c]中定理 4.1 的电影表示所作的修改。

证明。 我们将与 a_i 平行的绑定分量称为 B_i。令 n_i 表示 f 在B_i处的分数 Dehn 扭转系数。除去双曲 involution 共轭的影响，我们可以假设 $n_2 = 1$。现在我们将如图 3.1 所示绘制该页，其边界分支为正方形。

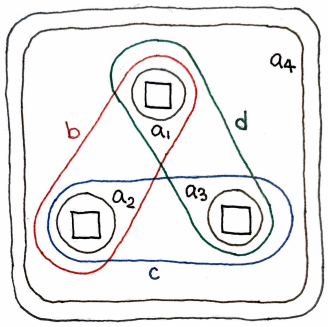


FIGURE 3.1

将开书的页面记为 Σ_φ，其中 $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$。对于 $\varphi \in [0, 2\pi)$，沿着 Reeb 向量场从 Σ_0 到 Σ_φ 向前移动，将 Σ_φ 与 Σ_0 识别。图 3.2 展示了候选过扭曲圆盘 D 与 Σ_0 的交集。这个交集由以下部分组成:

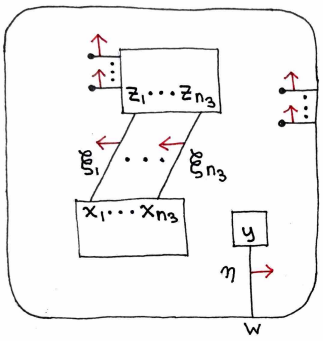


FIGURE 3.2. 边界分支已拉伸以适应标签。

- 从 B_2 到 B_1 的斜率为 0 的适当嵌入弧 ξ_1，……， ξ_{n_3}

- 一条从 B_3 到 B_4 的斜率为 0 的适当嵌入弧 η
- 若干条“毛发”（或触角），一端位于页的内部，另一端位于 B_1 或 B_4上。

证明过程中将会明确所需毛发的数量。红色箭头表示 D的（余）定向。 Σ 内部毛发的端点是 ∂D 上的点。我们要求

- ∂D 与所有页面横截地且正向相交，
- D与粘合 $B = B_1 \cup \cdots \cup B_4$的交点均为横截的，且局部模型如图 3.3 所示。

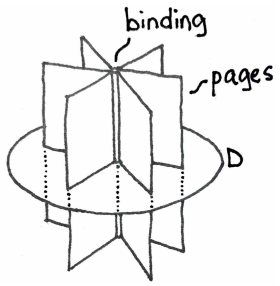


FIGURE 3.3. $D \pitchfork B$中一点的邻域

由于 B和 D均已定向，我们可以为每个这样的交点赋予一个符号。注意， x_1、……、 x_{n_3}， y的符号为负，而 z_1、……、z_{n_3}， w 的符号为正。每根毛在粘合分量上的端点符号为正。开书在 D上诱导出一个奇异叶状结构，称为其开书叶状结构 $\mathcal{F}_{\mathrm{ob}}$（$D$）。在这一叶状结构中， $D \pitchfork B$ 上的点对应径向（椭圆）奇点。

现在说明，当 φ 从 0 增加到 2π时， D 与 Σ_φ 的交集如何变化。在 φ的有限多个临界值之间，图形只会发生同痕变化，且该同痕在 $\partial\Sigma$上为恒等映射。在这些临界值处，页将扫过一个鞍点（双曲）奇点，如图 3.4 所示。若 $p \in \Sigma_\varphi \cap D$ 是这样的奇点，则 p 的符号定义为正号，当

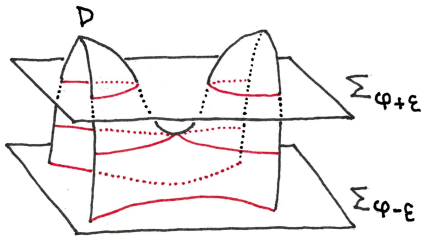


FIGURE 3.4. 鞍点奇点的邻域

$T_pD = T_p\Sigma$ 上的定向由 D 和 Σ 诱导时相同，否则定义为负向。此类奇点的形成将用弧之间的一条虚线表示，如图 3.5 所示。若嵌入圆盘 D 处于一般位置，则称其边界为正横截结，且 D 与粘合及页面的交点如上所述。

远离 φ 的奇异值时， Σ_φ 上总会有 $n_3 + 1$ 条本性嵌入弧，每条弧的一个端点位于某个负椭圆奇点 x_{n_1}、……、 x_{n_3}、 y。我们继续将这些弧称为 ξ_1、……、 ξ_{n_3}、 η。我们强调，这些弧总是按照

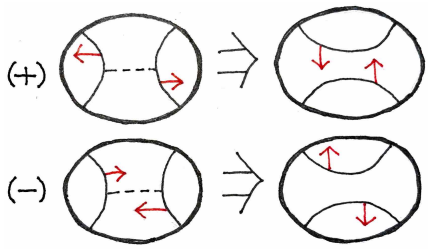


FIGURE 3.5

它们的负端点来标记。在若干步骤中，正双曲奇点形成于本性嵌入弧与毛发之间。这样的操作总是将本性嵌入弧向右移动（保持负端点固定），这里的“向右”是指 [HKM07] 意义下的右。毛发的数量应当经过选择，使得每根毛发恰好使用一次。

我们沿用记号

$$-\frac{p}{q} = s_N < s_{N-1} < \cdots < s_1 < s_0 = -1.$$

以及引理 3.3 中的 $s_i = p_i/q_i$。当前的假设要求 $N \geq 3$。关键在于利用双曲奇点，将 Σ_0 上的弧移动到它们在 f^{-1} 下的像。这些分数描述了本性嵌入弧在整个过程中所取的斜率。由于连续的斜率构成 $\mathbb{Z}^2$的一个整基，这些弧在移动过程中彼此不相交。

由于将安排弧 $\Sigma_{2\pi-\varepsilon}$ 与 Σ_0上的弧相吻合，下面的电影表示指定了一个嵌入曲面，其边界由位于页面内部的毛发端点描绘而成。该曲面的拓扑类型完全由电影表示决定。事实上，可以设想从 Σ_φ上的弧开始“逐步构建”这个曲面。在电影表示之后，我们将说明如何看出这个曲面确实是一个圆盘。

我们将用文字描述一般情形，并举例说明情形

$$-\frac{p}{q} = -\frac{10}{7} = [-2, -2, -4]$$

与 $n_2 = 1$ 和 $n_1 = n_3 = n_4 = 2$。请注意，在这种情况下

$$s_0 = -1, \quad s_1 = -\frac{4}{3}, \quad s_2 = -\frac{7}{5}, \qquad s_3 = -\frac{10}{7}.$$

整个过程分为两个主要阶段。

阶段 1。利用 ξ_1 和 η之间的区域形成一个负双曲奇点。这样做使得所得的两条弧的斜率均为 -1。见图 3.6。

如果 $n_3 \geq 2$，则使用带毛发的正双曲奇点，将ξ_{n_3}、……、ξ_2（按此顺序）的正端点移至 B_4。这样做使得现在所有本性嵌入弧的斜率均为 -1。（如果 $s_1 = -2$，可以跳过这一步，在下一步直接实现负双曲奇点。不过，这会改变后续的一些步骤，因此即使 $s_1 = -2$，我们也按当前步骤进行。）见图 3.7。

如果 $n_3 \geq 2$，则按此顺序在 η和 ξ_2、……、ξ_{n_3}之间形成负双曲奇点。操作方式是，除 ξ_1以外，所有本性嵌入弧的斜率均为 s_1。每增加一个由 η 形成的负奇点，都会使 η 绕 B_3向左扭转。如果 $n_3 = 1$，则使用带毛的正双曲奇点，将 η 移至斜率为 s_1的位置。由于 p_1 为偶数而 q_1 为奇数，因此在所有情况下，η 的正端点现在都位于 B_4上。参见图 3.8。

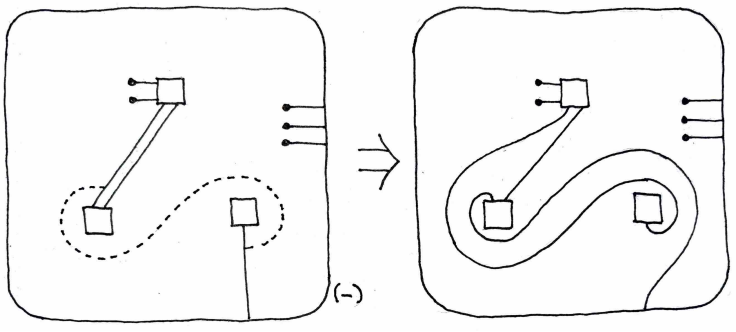


FIGURE 3.6

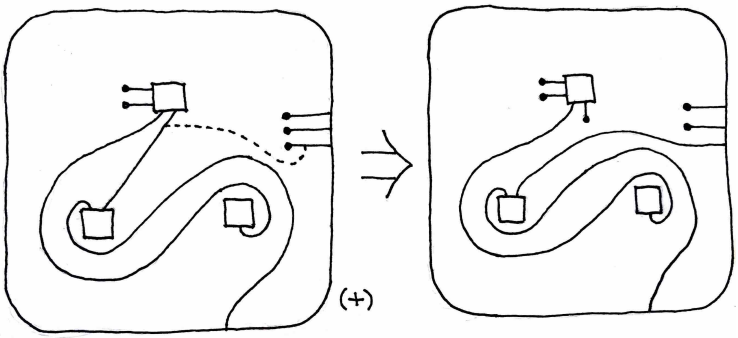


FIGURE 3.7

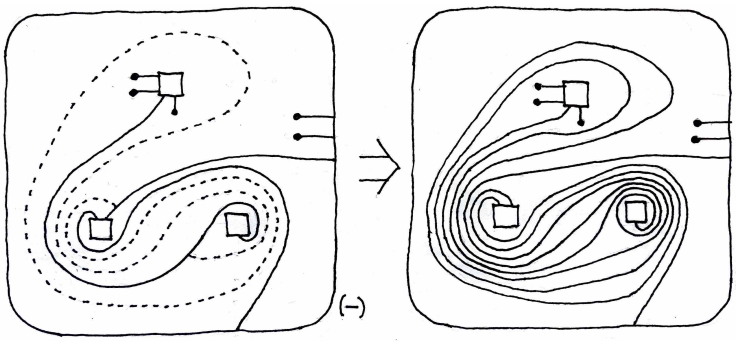


FIGURE 3.8

作为阶段 1 的最后一步，使用带毛的正双曲奇点，将 ξ_1 移至斜率为s_1的位置。 ξ_1、……、ξ_{n_3}的正端点现在全都位于 B_1上。参见图 3.9。我们暂停一下，看看在这个具体示例中，阶段 1 结束时 D 上的开书叶状结构是什么样子。参见图 3.10。

阶段 2。 在此阶段，我们反复利用带毛发的正奇点来移动弧

$$\xi_{n_3}, \xi_{n_3-1}, \ldots, \xi_2, \xi_1, \eta$$

（按此顺序）先将所有弧移至斜率 s_2，然后将所有弧移至斜率 s_3，依此类推，直到所有弧都达到斜率 $s_N = -p/q$。由于每个 q_i 都是奇数，本性嵌入弧的正端点总是会被移位

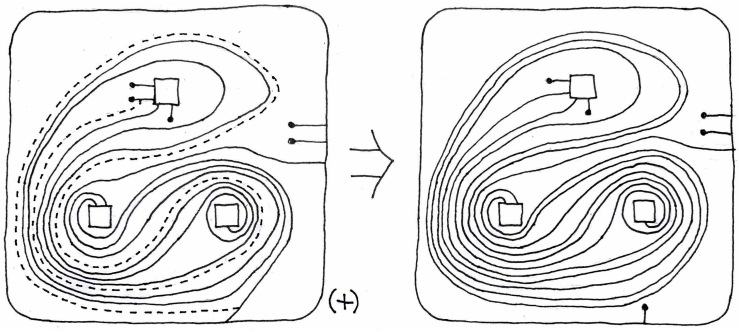


FIGURE 3.9. 太妃糖机?

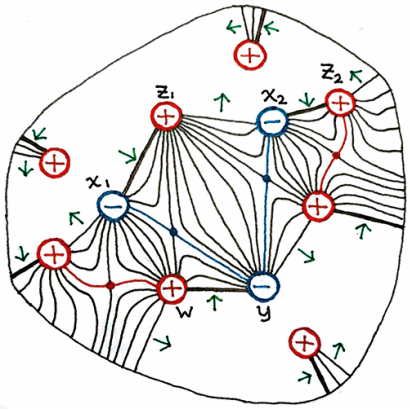
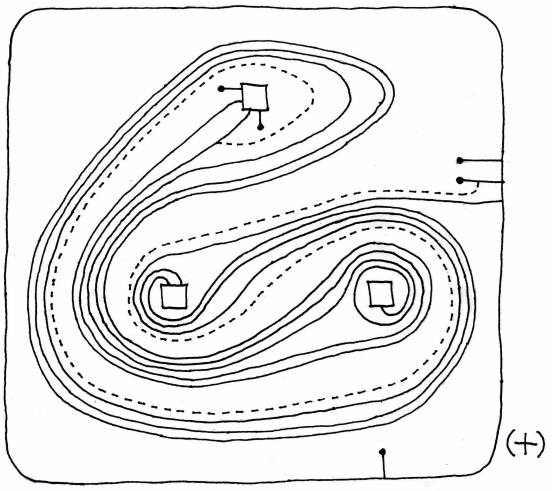


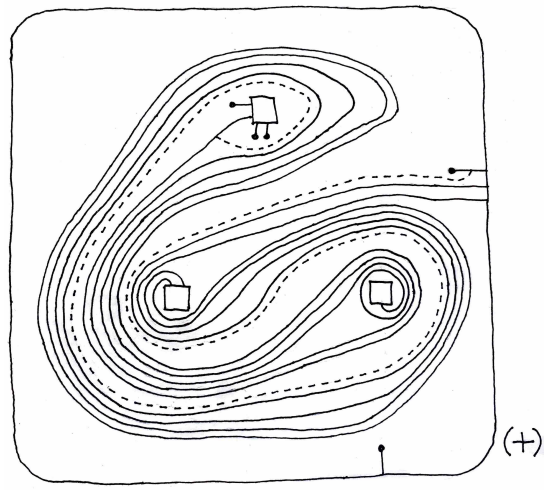
FIGURE 3.10. 椭圆奇点以空心圆表示。双曲奇点以点表示。奇点分别以红色或蓝色表示，代表正或负。位于 Σ_0 上的弧以粗体显示。绿色箭头表示 φ递增的方向。

至 B_1 或 B_4。这可以避免出现这样的情况： η 与某些 ξ_j 在 B_2 和 B_3之间平行延伸，从而阻碍彼此移动。（实际上，以下述方式可以稍微更为激进一些：先将 ξ_j 移至斜率 s_2，再将 η 移至斜率 s_3，然后将 ξ_j 移至斜率 s_4，依此类推。不过，如下文所述，在最后几步必须放慢速度。）

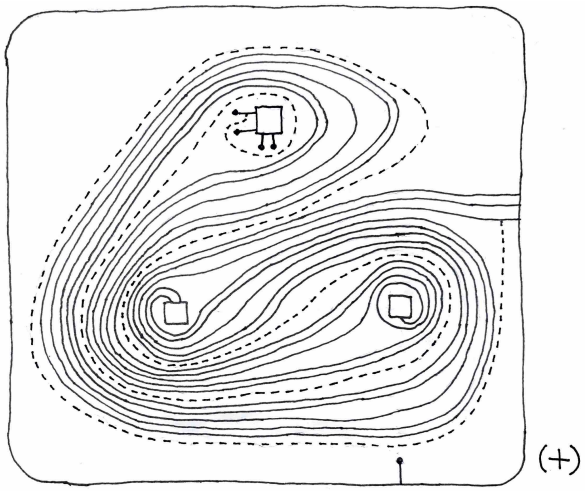
在最后几步之前， ξ_j 已实现斜率 s_{N-1} ，而 η 已实现斜率 s_{N-2}。由于p_{N-2} 为偶数且 p_{N-1} 为奇数，适当嵌入弧的所有正端点都位于 B_4上。因此，当我们将 η 移动到斜率 s_{N-1}时，便可以自由地让 η 绕 B_1 向左扭转任意多次。应以这样的方式进行操作：当每个 ξ_j 被移动到斜率 s_N 且正端点为z_j时，我们可以在 B_1处实现 FDTC n_1 。最后一步中，我们移动 η ，使其实现斜率s_N 且正端点为 w，从而在 B_4处实现 FDTC n_4 。对于当前情形，我们在图3.11中展示了这一过程



移动 ξ_2，使其斜率为 $-7/5$。

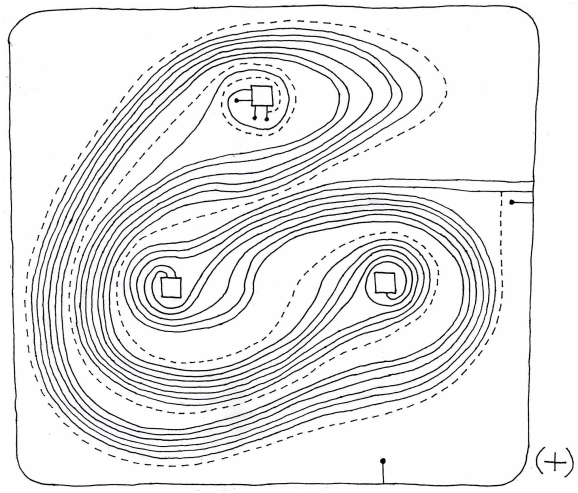


平移 ξ_1 以获得斜率 $-7/5$。

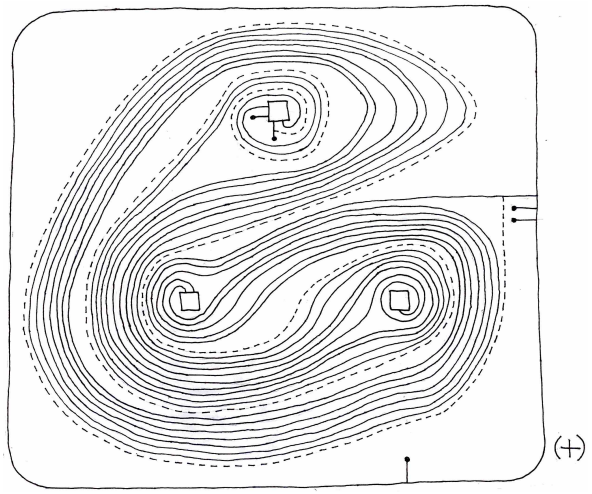


将 η 移至斜率为 $-7/5$的位置，并绕 B_1向左扭转。

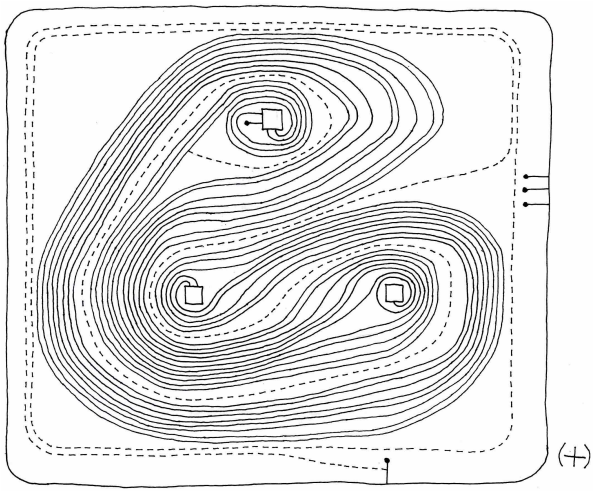
续见下页



将 ξ_2 移至斜率为 $-10/7$且正端点为 z_2的位置，从而在 B_1处实现分数 Dehn 扭转系数 $n_1 = 2$。

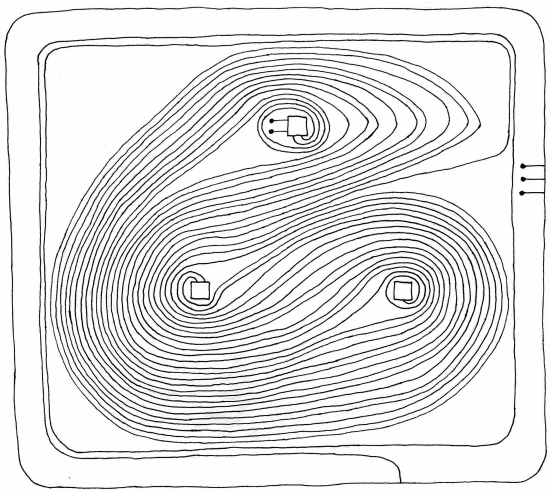


将 ξ_1 平移，使其斜率为 $-10/7$且正端点为 z_1，从而在 B_1处实现分数 Dehn 扭转系数 $n_1 = 2$。



移动 η 使其具有斜率 $-10/7$和正端点 w，从而在 B_4处实现分数 Dehn 扭转系数 $n_4 = 2$。

接下页



页 $\Sigma_{2\pi-\varepsilon}$。

FIGURE 3.11

注意，将单值化 f 应用于图 3.11中的最后一幅图，可得到图 3.2。因此， $\Sigma_{2\pi-\varepsilon}$ 上的弧与 Σ_0上的弧相互对应。通过追踪上述过程，可以发现这些弧描绘出一个圆盘 D，其开书叶状结构如图 3.12所示。

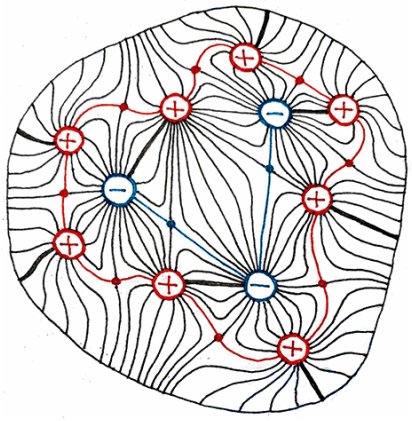


FIGURE 3.12. 采用与图 3.10 相同的约定。 G_{--} 图以蓝色显示， G_{++} 图以红色显示。

与特征叶状结构一样， D 上的开书叶状结构由D 的定向和页面的余定向确定定向。此约定使得在非奇异点处，沿叶的定向切向量与 φ 增大的方向依次构成 D 的定向标架。

确认上述电影表示总是产生圆盘而非高亏格曲面的一种方法，是注意以下性质：

- 曲面上的开书叶状结构在边界处指向外侧。
- 椭圆奇点的数量比双曲奇点多一个。

上述两条性质保证该曲面的欧拉示性数为 1，因此它必定是一个圆盘。

我们称一个非循环 双曲奇点，是指它没有任何离开后又返回同一奇点的分离轨。回顾 [IK14a] 中的一些定义。 G_{--} 图 $\mathcal{F}_{\mathrm{ob}}(D)$由负的非循环双曲奇点的不稳定分离轨的并集构成。我们将其视为一个图，其顶点是负椭圆奇点以及分离轨在 ∂D 上的端点。（负双曲奇点被视为边的一部分。） ∂D 上的顶点称为伪顶点。类似地， G_{++} 图 是正的非循环双曲奇点的稳定分离轨的并集。这些图在图 3.12 中以蓝色和红色标出。

最后，横截过扭曲圆盘是一个处于 D 一般位置的圆盘，其开书叶状结构$\mathcal{F}_{\mathrm{ob}}(D)$满足以下性质：

- G_{--} 是一棵没有伪顶点的连通树。
- G_{++} 同胚于 S^1 （并且必然围绕 G_{--}）。
- $\mathcal{F}_{\mathrm{ob}}(D)$不含闭正则叶。（这排除了循环双曲奇点的存在。）

上述构造总会得到一个横截过扭曲圆盘，其 G_{--} 图是一棵树，由一个中心顶点 y与 n_3 个叶（图论意义上的叶） $x_1,\dots,x_{n_3}$相连组成。电影表示中确保这一点的特征如下：

- 弧 η与每一条弧 ξ_1、.....、ξ_{n_3}之间恰有一个负奇点。这些就是适当嵌入弧之间形成的全部奇点。
- 每条毛与一条嵌入弧之间恰有一个正奇点，且没有其他奇点。

在 [IK14a], 中证明了，开书中存在横截过扭曲圆盘，意味着其支撑的接触结构是过扭的。简而言之，论证如下。由于 $\mathcal{F}_{\mathrm{ob}}(D)$ 是莫尔斯–斯梅尔的，因此存在一个与开书相容的接触结构 ξ ，使得由此诱导的特征叶状结构 $\mathcal{F}_{\xi}(D)$ 具有以下性质：

- 作为定向奇异叶状结构， $\mathcal{F}_{\xi}(D)$ 与 $\mathcal{F}_{\mathrm{ob}}(D)$ 拓扑共轭。
- $\mathcal{F}_{\xi}(D)$ 的每个双曲奇点的符号，都与 $\mathcal{F}_{\mathrm{ob}}(D)$ 中相应奇点的符号相同。

应用 Giroux 消去引理，消去符号相同的椭圆/双曲点对，随后便得到一个过扭曲圆盘。□

备注 3.7。 上述构造并不完全符合 [IK20] 中引入的扭转左偏弧系 的定义。在上述证明的设置中，若 $n_3 = 1$ ，则页 $\Sigma_{2\pi-\varepsilon}$ 上的本性嵌入弧 Γ 确实构成一个二重扭转左偏弧系。若 $n_3 \geq 2$，则 Γ 几乎构成一个（ n_3+1）重扭转左偏弧系，唯一的例外是基于边界的区域 R （ Γ， f （ Γ））可能只是浸入的，而非拓扑嵌入的。此外，f（Γ）与该区域相交，这是不允许的。

R（Γ， f（Γ））的形状仅取决于 n_3 和斜率 s_1。它是一个（$2n_3+2$）边形。若$n_3 = 1$ ，它始终是同一个矩形（无论 s_1 如何）。图 3.13 展示了在 $n_3 = 1$ 的情形下，以及在 $n_3 = 2$、 $s_1 = -4/3$ 的情形下，R（Γ， f（Γ））的形状。

下面的命题说明，定理 3.6 中至少有一个 r_j 不是 -2 这一条件不能被删去。

命题 3.8. 设 $f \in$ 映射类群$(\Sigma_{0,4},\partial\Sigma_{0,4})$ 满足

$$\pi(f) = \begin{bmatrix} p' & q' \\ p & q \end{bmatrix}$$

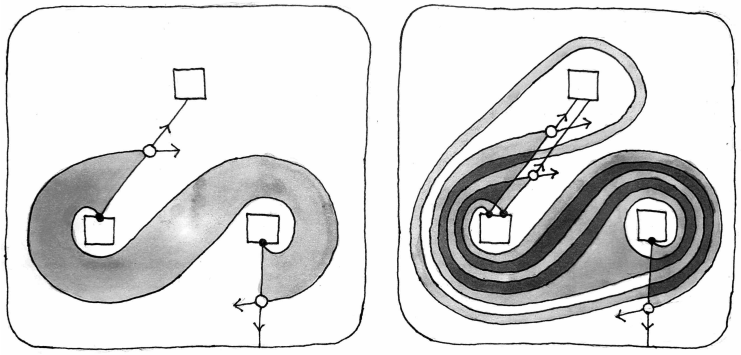


FIGURE 3.13. 我们展示了两种情况下的基于边界的区域 $R(\Gamma,\ f(\Gamma))$。左侧是 $n_3 = 1$ 的情形，其中 $R(\Gamma,\ f(\Gamma))$ 是一个嵌入矩形。右侧是 $n_3 = 2$, $s_1 = -4/3$ 的情形，其中 $R(\Gamma,\ f(\Gamma))$ 是一个浸入六边形。

其中 p、q、p'、$q' \geq 0$ 和 $p > q$。此外，假设 $-p/q$ 的连分数展开形式为

$$-\frac{p}{q} = [\underbrace{-2, -2, \ldots, -2}_{k+1 \text{ times}}].$$

根据 p 和 q 的奇偶性，数目 $k = 2\ell$ 为偶数。如果 f 的最小分数 ***Dehn*** 扭转系数为 ≥ 1，那么 f 可分解为正德恩扭转。

证明。 在这种情况下，有

$$\frac{p}{q} = \frac{k+2}{k+1},$$

因此

$$\pi(f) = \begin{bmatrix} k+1+2m(k+2) & k+2m(k+1) \\ k+2 & k+1 \end{bmatrix} \qquad \text{for some } m \geq 0.$$

由此可知， f 可分解为

$$f = \tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}^{n_3}\tau_{a_4}^{n_4}\tau_b^m\tau_d^\ell\tau_c^{-1} \qquad \text{for some } n_1, n_2, n_3, n_4,$$

其中， b、c、d是图 2.1 和图 3.1 中的闭曲线。单值化 $\tau_b^m\tau_d^\ell\tau_c^{-1}$的所有分数 Dehn 扭转系数均为 0，因为它将任意斜率为 0 的弧映至左侧，并将任意斜率为 ∞的弧映至右侧。后一说法成立，是因为斜率为 ∞ 的任意弧在 τ_c^{-1}作用下保持不变，因此这样的弧只“感受到”正德恩扭转。在图 3.14 中，我们验证了关于斜率为 0 的弧的说法。

相应地， f 的分数 Dehn 扭转系数为 n_i。因此

$$\min\{n_1, n_2, n_3, n_4\} \geq 1.$$

现在我们使用映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,\ 4},\ \partial\Sigma_{0,\ 4})$ 中的灯笼关系，其内容为

$$\tau_{a_1}\tau_{a_2}\tau_{a_3}\tau_{a_4} = \tau_b\tau_c\tau_d = \tau_c\tau_d\tau_b = \tau_d\tau_b\tau_c.$$

这使我们能够将 f 分解为正德恩扭转：

$$\begin{aligned} f &= \tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}^{n_3}\tau_{a_4}^{n_4}\tau_b^m\tau_d^\ell\tau_c^{-1} \\ &= \tau_{a_1}^{n_1-1}\tau_{a_2}^{n_2-1}\tau_{a_3}^{n_3-1}\tau_{a_4}^{n_4-1}\tau_b^m\tau_d^k\tau_{a_1}\tau_{a_2}\tau_{a_3}\tau_{a_4}\tau_c^{-1} \\ &= \tau_{a_1}^{n_1-1}\tau_{a_2}^{n_2-1}\tau_{a_3}^{n_3-1}\tau_{a_4}^{n_4-1}\tau_b^m\tau_d^{\ell+1}\tau_b. \end{aligned}$$

□

利用定理 3.6，现在我们可以证明定理 1.2。

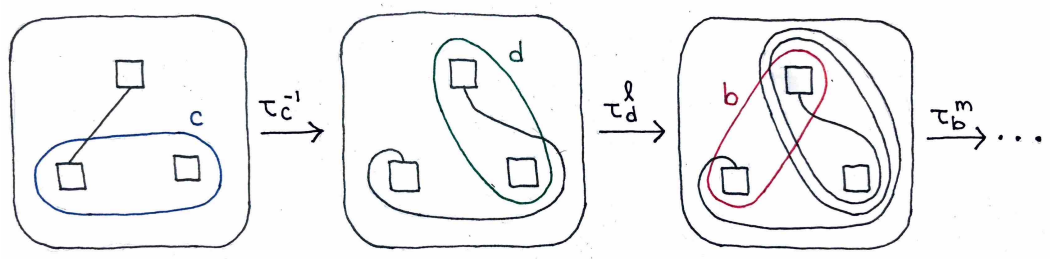


FIGURE 3.14. 在最右侧的图中，还需沿曲线 b进行 m次正德恩扭转。显然，无论进行多少次正德恩扭转，所得的弧都会保持在原弧的左侧。

定理 1.2。 如果 f 满足 (i)，那么根据定理1.1，它是紧的。如果 f 满足 (ii)，我们将在命题 4.1 中证明 f 可分解为正德恩扭转。因此， f 是 Stein 可填充的。反过来，假设 f 不满足 (i) 或 (ii)。那么 f 要么不是右转的，要么同伦于

$$\tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}^{n_3}\tau_{a_4}^{n_4}\tau_{\gamma}^{n_\gamma}, \qquad \min\{n_1,n_2,n_3,n_4\}=1,\ n_\gamma\le -2.$$

在后一种情况下，不妨在共轭意义下假设 $\gamma = c_0$。那么，这些单值化都满足定理 3.6 的判据，其中

$$-\frac{p}{q} = 2n_\gamma,$$

因此是过扭的 □

现在我们来描述第二个过扭单值化族。

定理 3.9。 假设 $f \in$ 映射类群$(\Sigma_{0,\ 4}, \partial\Sigma_{0,\ 4})$ 满足

$$\pi(f) = \begin{bmatrix} p' & q' \\ p & q \end{bmatrix}$$

其中 $p, q, p', q' \ge 0$和 $p > q$。此外，假设 f的最小分数 ***Dehn*** 扭转系数为 1，且满足以下条件之一:

(1) $-p/q$ 的连分数展开形式为

$$-\frac{p}{q} = [r_0, r_1, -2, r_3, -2, r_5, \dots, r_{k-2}, -2, r_k]$$

其中 $r_j < -1$、 $r_1 < -3$、 r_0 和 k 均为奇数。(允许出现 $k = 1$ 。)

(2) $-p/q$ 的连分数展开形式为

$$-\frac{p}{q} = [r_0, -3]$$

其中 $r_0 \le -5$ 为奇数，且一个分数 ***Dehn*** 扭转系数为 1 的绑定分量通过斜率为0 的弧与一个分数 ***Dehn*** 扭转系数为 $\le \frac{1}{2}(|r_0| - 3)$的绑定分量相连。

那么 f 是过扭的。

注记 3.10。 根据 p 和 q的奇偶性，若

$$-\frac{p}{q} = [r_0, r_1],$$

那么 r_0 和 r_1 必然都是奇数。

证明(1). 证明思路与定理 3.6 相同，也就是说，我们给出横截过扭曲圆盘 D 的电影表示。我们以与图 3.1 相同的方式绘制页。与之前一样，令 n_i 表示 f 在绑定分量 B_i 处的分数 Dehn 扭转系数。这一次，我们利用双曲 involution 的共轭来确保 $n_1 = 1$。 D 与 Σ_0 的交集如图 3.15 所示。这个交集由以下部分组成：

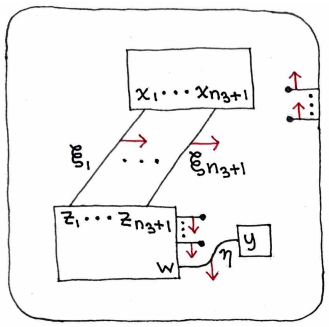


FIGURE 3.15. 边界分支已拉伸以适应标签。

- 本性嵌入弧 ξ_1、……、ξ_{n_3+1}从 B_1到 B_2，斜率为 0，
- 一条本性嵌入弧 η 从 B_3 到 B_2，斜率为 ∞，
- 条毛发，一端位于页的内部，另一端位于 B_2 或 B_4上。

与之前一样，红色箭头表示 D的（余）定向。注意， $x_1, \dots, x_{n_3+1}, y$是 D与粘合 B的负交点，而 $z_1, \dots, z_{n_3+1}, w$具有正号。（x_j 和z_j 的位置与定理 3.6 的证明中不同。）每条毛发在粘合分量上的端点都具有正号。

在 φ 的奇异值之外，总会有 $n_3 + 2$ 条位于 Σ_φ上的本性嵌入弧，每条弧的一端都位于某个负椭圆奇点$x_{n_1}, \dots, x_{n_3+1}, y$处。我们将这些弧称为 $\xi_1, \dots, \xi_{n_3+1}, \eta$。我们沿用记号

$$-\frac{p}{q} = s_N < s_{N-1} < \cdots < s_1 < s_0 = -1$$

并使用引理 3.3 中的 $s_i = p_i/q_i$。我们当前的假设必然要求 $N \geq |r_0| + 2$。我们在正文中描述一般情形，并演示这种情形

$$\pi(f) = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$$

使用 $n_1 = 1$ 和 $n_2 = n_3 = 2$。（n_4 的值不会影响电影表示。）在这种情况下，

$$-\frac{p}{q} = -\frac{14}{5} = [-3, -5]$$

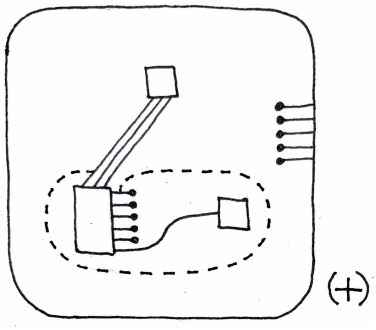
and

$$s_0 = -1, \qquad s_1 = -2, \qquad s_2 = -\frac{5}{2}, \qquad s_3 = -\frac{8}{3}, \qquad s_4 = -\frac{11}{4}, \qquad s_5 = -\frac{14}{5}.$$

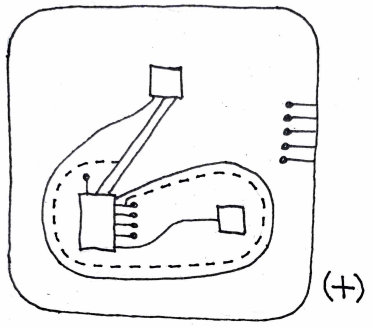
依次使用带毛发的正奇点移动弧 $\xi_1, \dots, \xi_{n_3+1}$，使其斜率为

$$s_1 = -2, s_3 = -4, \dots, s_{|r_0|-2} = r_0 + 1.$$

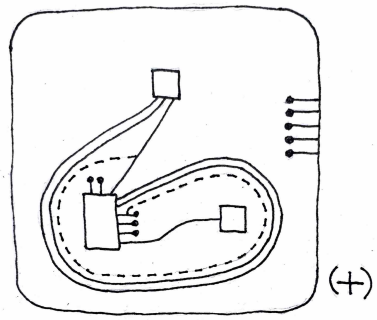
下面我们针对当前情形说明这一过程。



平移 ξ_1 使其斜率为 -2。



将 ξ_2 移至斜率为 -2的位置。



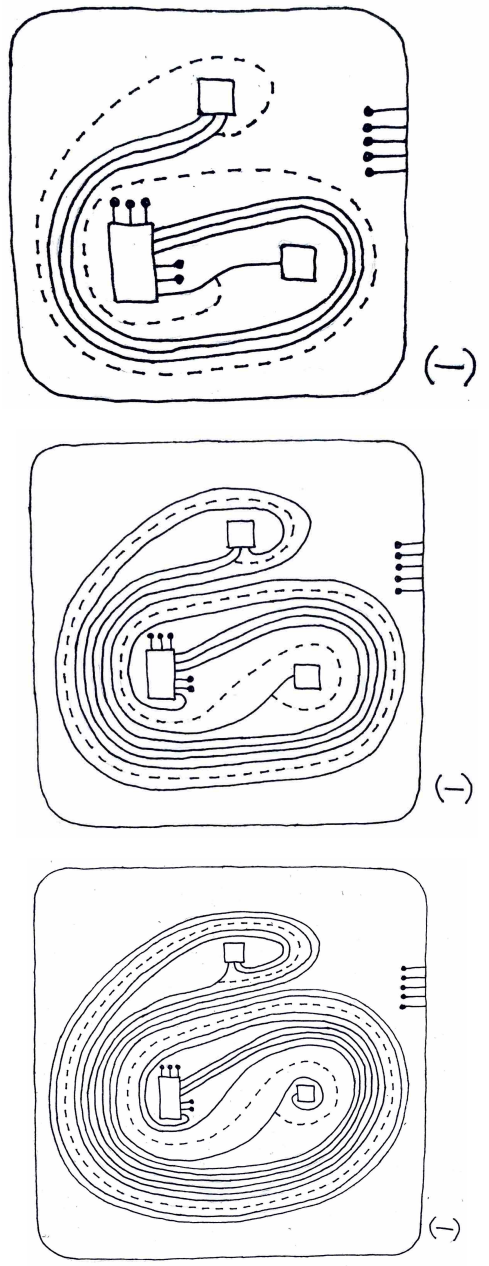
将 ξ_3 移至斜率为 -2的位置。

FIGURE 3.16

在接下来的步骤中，我们依次在 η和 ξ_{n_3+1}、……、 ξ_1之间形成负奇点。这样做是为了使奇点形成后，

- η 的斜率为 $s_{|r_0|-1} = r_0 + \frac{1}{2}$，
- ξ_1、……、 ξ_{n_3}的斜率为 $s_{|r_0|} = r_0 + \frac{1}{3}$，
- ξ_{n_3+1} 的斜率为 $s_{|r_0|-2} = r_0 + 1$。

每增加一个由 η 形成的负奇点， η 就会绕着 B_3 向左扭转。如下所示。



在 ξ_3 和 η 之间形成一个负奇点。

在 ξ_2 和 η之间形成一个负奇点。

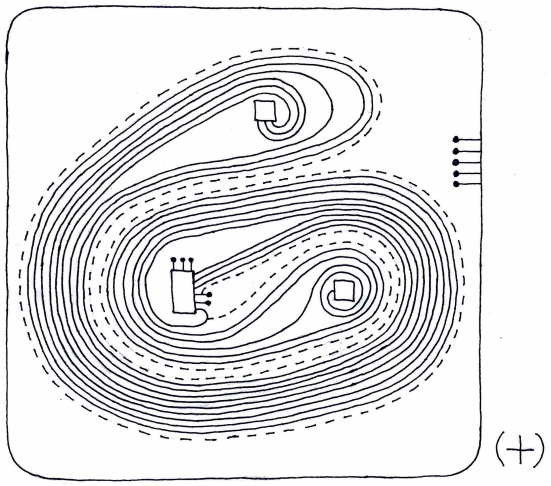
在 ξ_1 和 η之间形成一个负奇点。

FIGURE 3.17

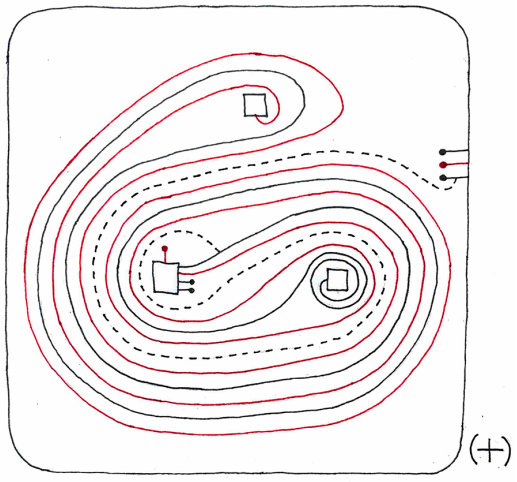
接下来，我们将 ξ_{n_3+1}，η （按此顺序）移动，使其斜率为 $s_{|r_0|}$。随后，我们反复移动弧 ξ_1，ξ_2、……、ξ_{n_3+1}，η，以使其斜率依次为 $s_{|r_0|+1}$、……、s_N，。对于 $|r_0|-1 \le i \le N$， p_i或 q_i 之一为偶数。因此，每条本性嵌入弧的正端点都会被移动到 B_2或 B_4。这样可以避免出现 η 与某条 ξ_j 在 B_1 和 B_3 之间平行延伸、彼此阻碍移动的情况。最后，我们移动 η，使其斜率为 $-p'/q'$。与定理

3.6 的证明中一样，在这一过程中，我们有足够的自由度来实现关于每个绑定分量的适当分数 Dehn 扭转系数。

下面我们将针对当前情形进行说明。为简便起见，我们用一条红弧表示 ξ_1，ξ_2，ξ_3，前提是它们彼此平行。我们允许在一步中移动这条红弧，但要明白，这只是简写，实际操作是像上面前三步那样，先移动 ξ_1，再移动ξ_2，然后移动 ξ_3。红色毛发也用来简写三根彼此相邻的毛发。

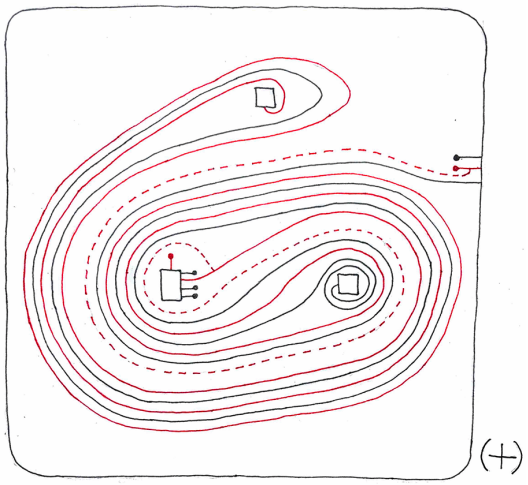


移动 ξ_3，使其斜率为 $-8/3$。

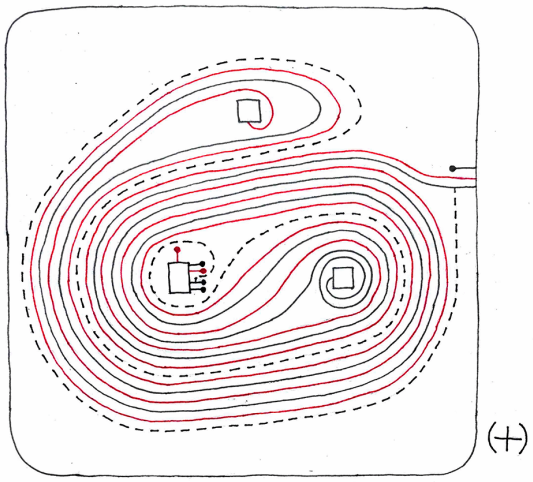


平移 η 使其斜率为 $-8/3$。

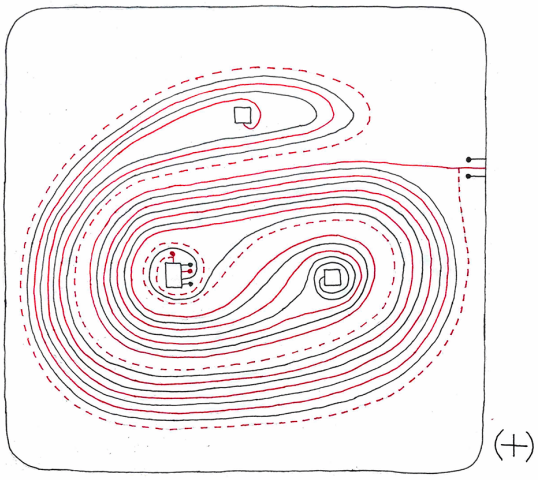
续见下页



将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 移动，使斜率为 $-11/4$。

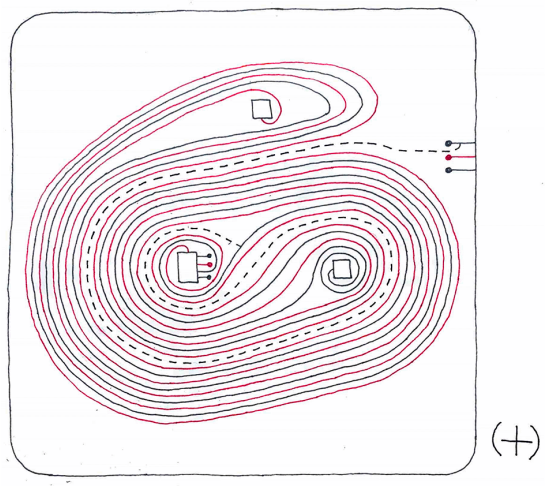


平移 η 使其斜率为 $-11/4$，绕 B_2 向左扭转。

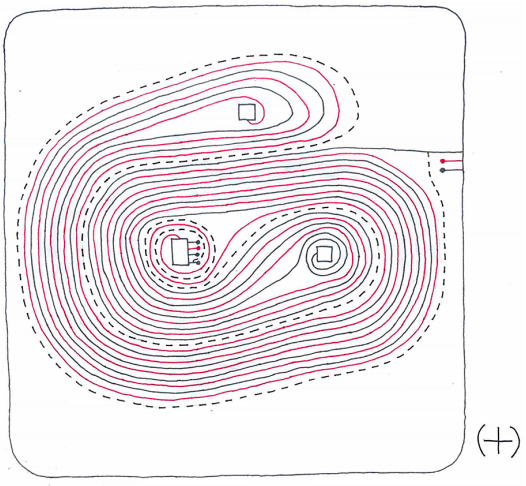


将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 移动，使斜率为 $-14/5$，且正端点为 z_1, z_2, z_3，从而在 B_2处实现分数 Dehn 扭转系数 $n_2 = 2$。

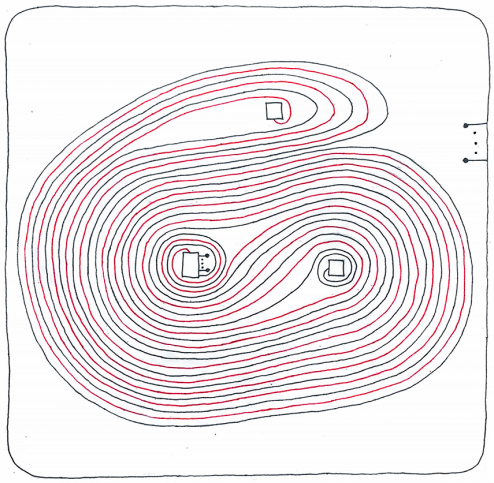
续见下页



移位 η 使其斜率为 $-14/5$。



平移 η，使其斜率为 $-17/6$，正端点为 w，
并在 B_2处实现分数 Dehn 扭转系数 $n_2 = 2$。



第 $\Sigma_{2\pi-\varepsilon}$ 页。

FIGURE 3.18

上述电影表示指定了一个横截过扭曲圆盘 D，其 G_{--} 图由一个中心顶点 y 构成，该顶点与 n_3+1 个叶 x_1、.....、x_{n_3+1}相连。□

（2）的证明。我们继续使用与上文相同的记号。我们将 f 共轭，使得 $n_1=1$ 和 $n_2\le\frac{1}{2}(|r_0|-3)$。如果在此情形下仿照（1）的证明策略，我们会发现，负奇点形成后，弧 ξ_1、.....、ξ_{n_3}具有其最终斜率。然而，在此阶段，它们尚未在 B_2 处实现适当的分数 Dehn 扭转系数。为解决这一问题，我们对 η 执行某种扭转操作，使其绕 B_3 将 η 向右扭转，并绕 B_2 向左扭转。这样一来，我们就能在负奇点形成之前，将 ξ_j 绕 B_2 向左扭转。

我们有 $\vdash 2(|r_0|-3)$ 次机会执行此扭转操作。每执行一次，B_2 上可实现的分数 Dehn 扭转系数就增加 1（因此得到关于 n_2 的界）。不过，作为交换，η 也会多绕 B_3 向右扭转一次。为此，我们从 n_2+n_3+1 条弧 ξ_1、.....、$\xi_{n_2+n_3+1}$ 开始。（我们仍使用图 3.15 中相同的标记方案。）除此之外，电影表示与（1）的证明没有变化。下文展示最简单的情形，即

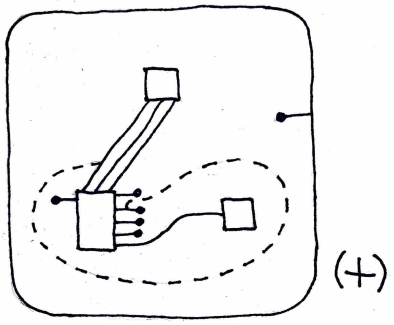
$$\pi(f)=\begin{bmatrix}19 & 4\\ 14 & 3\end{bmatrix}$$

以及 $n_1=n_2=n_3=1$。（n_4 的值不影响电影表示。）在这种情况下

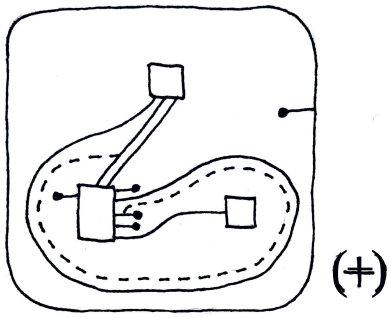
$$-\frac{p}{q}=-\frac{14}{3}=[-5,-3]$$

and

$$s_0=-1,\quad s_1=-2,\quad s_2=-3,\quad s_3=-4,\quad s_4=-\frac{14}{3}.$$

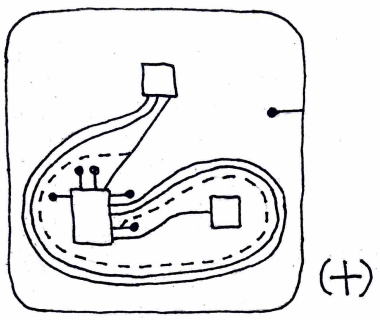


将 ξ_1 平移为斜率 -2。

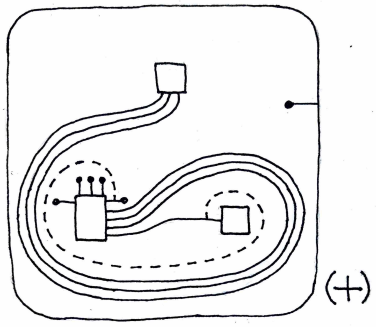


平移 ξ_2，使其具有斜率 -2。

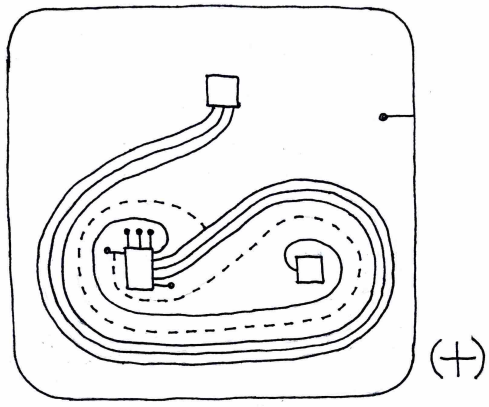
续于下一页



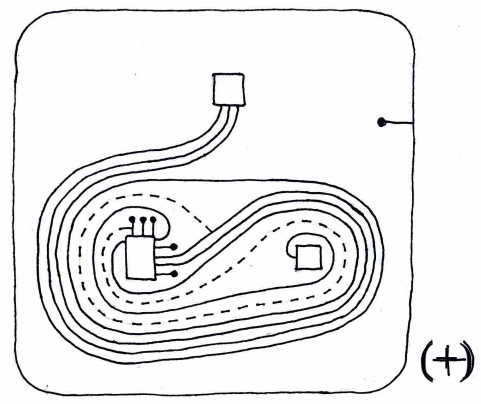
平移 ξ_3，使其具有斜率 -2。



对 η 执行扭转操作。

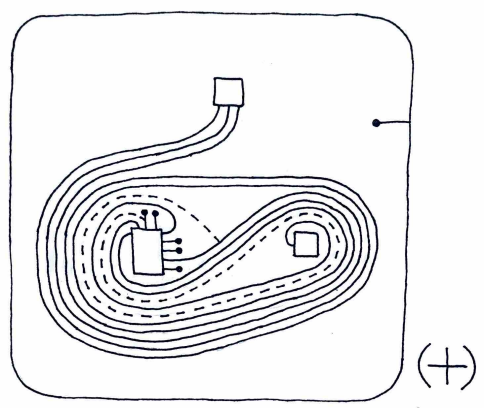


移动 ξ_1，使其斜率为 -4，并绕B_2向左扭转。

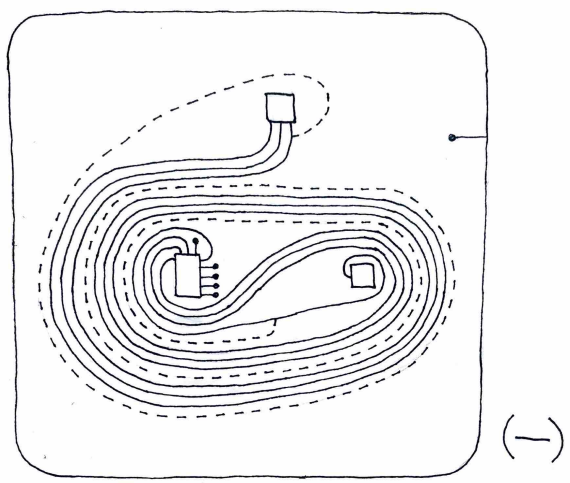


平移 ξ_2，使其斜率为 -4，且正端点 z_1 [sic], 绕 B_2向左扭转。

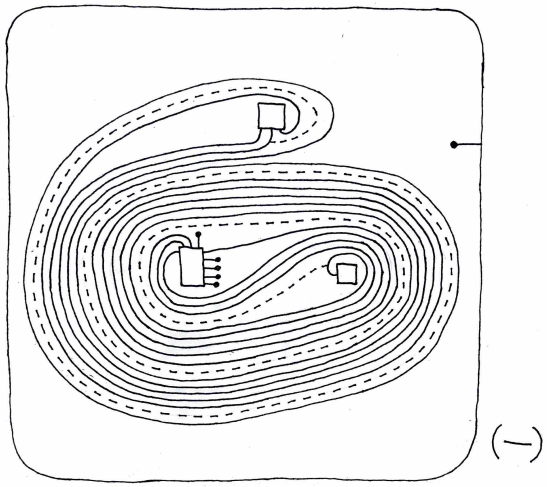
续见下一页



平移 ξ_3，使其斜率为 -4，且正端点 z_2 [sic], 绕 B_2向左扭转。

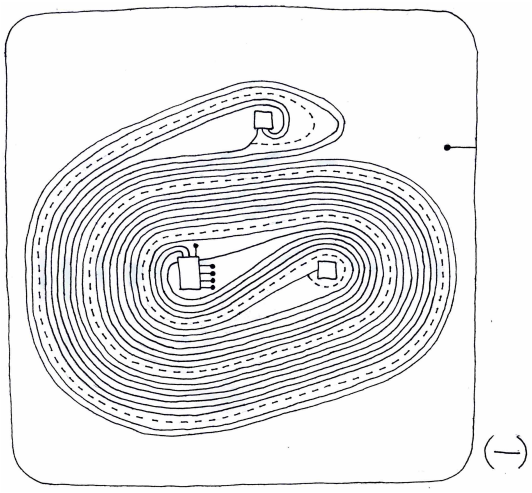


在 ξ_3 和 η之间形成一个负奇点。

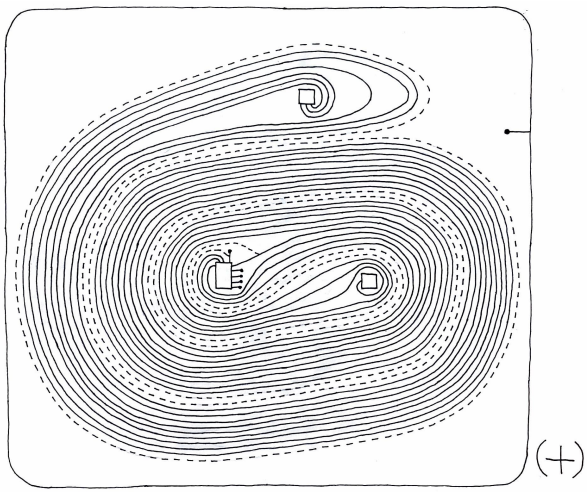


在 ξ_2 和 η之间形成一个负奇点。

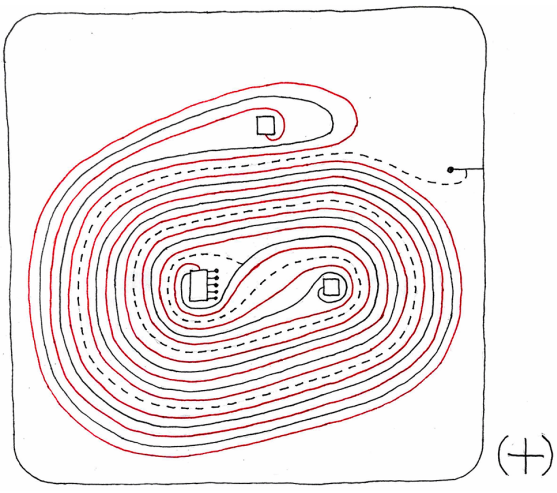
续于下一页



在 ξ_1 和 η之间形成一个负奇点。

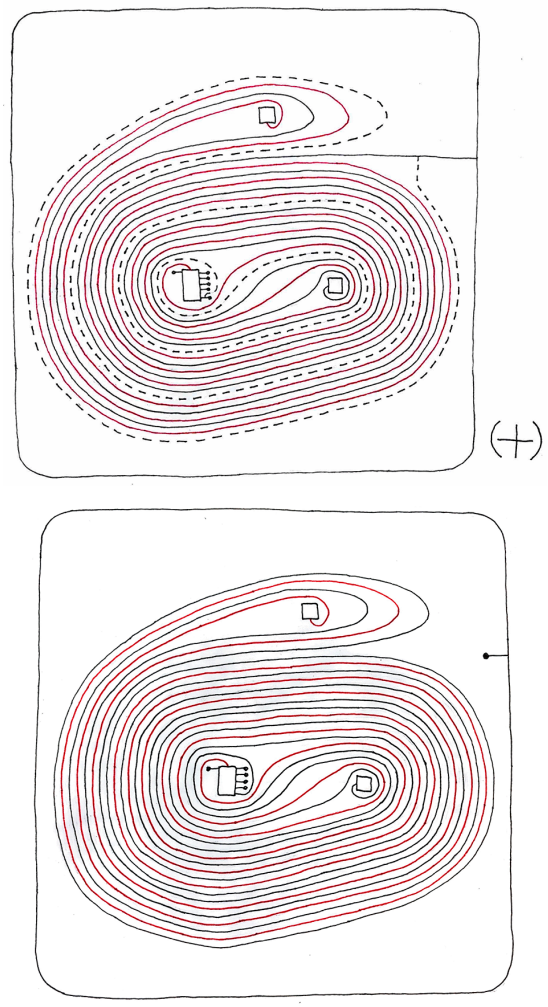


将 ξ_3 平移，使其斜率为 $-14/3$，正端点为 z_3，从而在 B_2处实现分数 Dehn 扭转系数 $n_2 = 1$ 。



将 η 平移，使其斜率为 $-14/3$。（此后，我们用一条红弧表示 ξ_1、ξ_2、ξ_3 。）

下页继续



将 η 平移，使其斜率为 $-10/4$，且正端点为 w，从而在 B_2 处实现分数 Dehn 扭转系数 $n_2 = 1$。

页 $\Sigma_{2\pi-\varepsilon}$。

FIGURE 3.19

上述电影表示指定了一个横截过扭曲圆盘，其 G_{--} 图由一个中心顶点及与之相连的 $n_2 + n_3 + 1$ 个叶构成。□

备注3.11。证明 (1) 中的电影表示由一个基于边界的区域构造而成，该区域仅取决于 n_3 和 r_0。它是一个浸入的 $(2n_3 + 4)$ 边形。在图 3.20 中，我们展示了 $r_0 = 3$ 和 $n_3 = 2$ 情况下的基于边界的区域。

注意，定理 3.9 不包括 $-p/q = [-3, -3]$ 这一情形。下一个命题表明，在这种情形下，单值化是 Stein 可填充的。

命题 3.12。设 $f \in$ 映射类群$(\Sigma_{0,4}, \partial\Sigma_{0,4})$ 满足

$$\pi(f) = \begin{bmatrix} p' & q' \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

其中有 p'、$q' \geq 0$。如果 f 的最小分数 *Dehn* 扭转系数为 ≥ 1，那么 f 可分解为正德恩扭转。

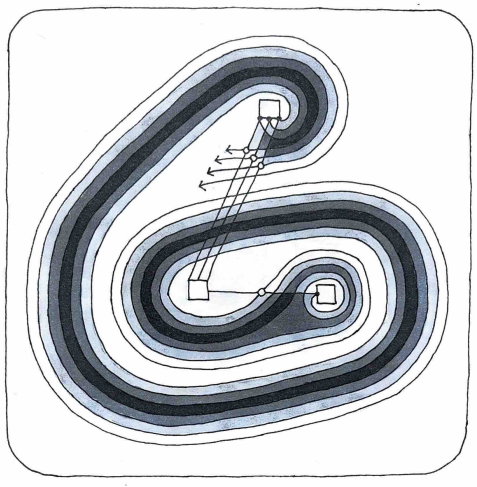


FIGURE 3.20. 当 $n_3 = 2$ 且$r_0 = 3$时，（1）的证明中出现的基于边界的区域。它是一个浸入八边形。

证明。 在这种情况下，

$$\pi(f) = \begin{bmatrix} 16m+11 & 6m+4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{for some } m \geq 0.$$

由此可得， f 可分解为

$$f = \tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}^{n_3}\tau_{a_4}^{n_4}\tau_b^{m+1}\tau_e \qquad \text{for some } n_1, n_2, n_3, n_4,$$

其中， b 如图 3.1 所示，且 e 为一个斜率为 -2 的嵌入圆，如图3.21所示。

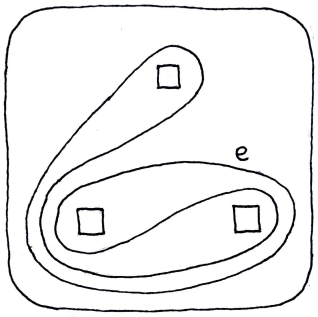


FIGURE 3.21

通过用弧探测，可以验证 $\tau_b^{m+1}\tau_e$ 的所有分数 Dehn 扭转系数都等于 1。不过，这样做有些繁琐，因此我们采用另一种方法。 τ_b^{m+1} 和 τ_e 的所有分数 Dehn 扭转系数都等于 0。利用分数 Dehn 扭转系数是缺陷为 1 [的拟态射这一事实（ IK17a，推论 4.17], ），可得 $\tau_b^{m+1}\tau_e$ 的分数 Dehn 扭转系数均属于 $\{-1, 0, 1\}$。另一方面， $\tau_b^{m+1}\tau_e$是一个右转的伪阿诺索夫同胚，因此其所有分数 Dehn 扭转系数必定严格为正（HKM07，命题 3.1]）。由此我们得出， $\tau_b^{m+1}\tau_e$的所有分数 Dehn 扭转系数均为 1。因此， f的分数 Dehn 扭转系数为 $n_1 + 1$，……， $n_4 + 1$。特别地， n_1，……， $n_4 \geq 0$，因此 f可分解为正德恩扭转。□

注记 3.13。 作者不知道定理 3.9 的条件 (2) 中对分数 Dehn 扭转系数的限制是否可以去掉。

注记 3.14。 为了找到定理 3.9 中出现的过扭单值，作者借助了 [KMHMW25]提供的 Sage 程序 hf-hat-obd。更具体地说，作者将各种分数 Dehn 扭转系数均为 1 的单值输入 hf-hat-obd。当 $-p/q$ 的连分数分解如注记 3.10 所述时，程序 hf-hat-obd 找到了一个会消去 Heegaard Floer 接触不变量的环带区域。（当 $n_3 = 1$时，这个区域或多或少是注记 3.11 中讨论的基于边界的区域的浸入像。）借助这个环带，作者找到了定理 3.9 证明中使用的电影呈示。

同一篇论文中的程序 hf-hat-obd-nice 表明，在 $\Sigma_{0,\ 4}$ 上其余的右转伪阿诺索夫单值化中，既有 Heegaard Floer 不变量为零的，也有不为零的。附录 C 中收录了一些数据。

问题 3.15。 未被定理 3.6 和 3.9 涵盖的$\Sigma_{0,\ 4}$ 上的右转伪阿诺索夫单值化中，哪些是过扭的?

第2. 可约单值化的接触不变量

4. Proof of Theorem 1.3

本文其余部分将借助带边接触不变量重新证明定理 1.3。此后，我们将 $f \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{0,\ 4},\ \partial\Sigma_{0,\ 4})$ 视为一个可约单值化，它固定图 2.1 中的曲线 b；我们在图 4.1 中再次展示了该图。因此， f 具有 (4.1) 所示的形式。

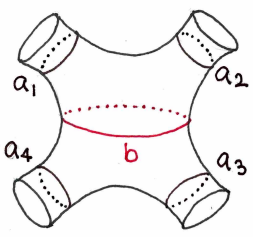


Figure 4.1

$$f = \tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}^{n_3}\tau_{a_4}^{n_4}\tau_b^{n_b} \qquad \text{for some } n_1, n_2, n_3, n_4, n_b. \tag{4.1}$$

命题 4.1. 若满足以下条件，则单值化 (4.1) 是 *Stein* 可填充的：

$$\min\{n_1, n_2, n_3, n_4\} \geq \max\{-n_b, 0\}.$$

证明. 若 $n_b \geq 0$，则单值化

$$f = \tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}^{n_3}\tau_{a_4}^{n_4}\tau_b^{n_b}$$

显然可分解为正德恩扭转，因此相应的接触结构是 Stein 可填充的。若 $n_b < 0$，利用灯笼关系，我们可以写成

$$\begin{aligned} f &= \tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}^{n_3}\tau_{a_4}^{n_4} = \tau_{a_1}^{n_1+n_b}\tau_{a_2}^{n_2+n_b}\tau_{n_3}^{n_3+n_b}\tau_{a_4}^{n_4+n_b}(\tau_b^{-1}\tau_{a_1}\tau_{a_2}\tau_{a_3}\tau_{a_4})^{-n_b} \\ &= \tau_{a_1}^{n_1+n_b}\tau_{a_2}^{n_2+n_b}\tau_{a_3}^{n_3+n_b}\tau_{a_4}^{n_4+n_b}(\tau_c\tau_d)^{-n_b}. \end{aligned}$$

我们再次看到， f 可分解为正德恩扭转。 □

注 4.2。 在 [Lek11], Lekili 使用了一个更精细的论证，借助灯笼关系证明，任何具有以下形式的单值化

$$\tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}^{n_3}\tau_{a_4}^{n_4}\tau_c^{C_k}\tau_b^{B_k}\cdot\ldots\cdot\tau_c^{C_1}\tau_b^{B_1}$$

可分解为正德恩扭转，当且仅当

$$\min\{n_1,n_2,n_3,n_4\}\geq\sum_{i=1}^{k}\max\{-B_i,-C_i,0\}.$$

相对映射类群 Mod(Σ, ∂Σ) 中的任意单值化，都可以唯一地写成上述形式。利用这一事实以及 Baldwin 的封帽结果，Lekili 证明了任意形如

$$\tau_{a_1}^{n_1}\tau_{a_2}^{n_2}\tau_{a_3}\tau_{a_4}\tau_b^{n_b}\tau_c^{n_c}$$

的单值化是 Stein 可填充的，当且仅当其接触不变量非零。这恰好发生在

$$\min\{n_1,n_2,n_3,n_4\}\geq\min\{0,-n_b,-n_c\}.$$

现在，若

(i) $\min\{n_1,n_2,n_3,n_4\}<0$ 或 (ii) $n_b<0$ 且 $\min\{n_1,n_2,n_3,n_4\}=0$,

那么 f 不是右转的，因此相应的接触结构是过扭的。要证明定理 1.3，还需证明以下内容。

定理 4.3. 设 f 为(4.1)中的单值化。那么，只要满足以下条件， f 的 *Heegaard Floer* 接触不变量就消失：

$$0<\min\{n_1,n_2,n_3,n_4\}<-n_b.$$

事实上，由于接触不变量在 (-1) Legendrian 手术下具有自然性，只需证明只要满足以下条件，接触不变量就会消失：

$$0<\min\{n_1,n_2,n_3,n_4\}=-n_b-1,$$

不过，一般情形也不会难多少。我们将在接下来的章节中证明定理 4.3。

5. Splitting the open book

给定一个具有非空边界的紧曲面 Σ，以及一个单值化 $f\in\text{Mod}(\Sigma,\partial\Sigma)$，我们用 $Y(f)$ 表示相应的开书。我们默认将其视为配备了由该开书支撑的接触结构的接触流形。我们还用 $c(f)\in\widehat{HF}$ *Heegaard Floer* 同调 $\big(-Y(f)\big)$表示该接触结构的 Heegaard Floer 不变量。接下来我们的主要策略如下。我们可以选择一条曲线 σ，它与 b 同伦，并且具有一个被 f逐点固定的环带邻域，如图 5.1 所示。

曲线 σ 在 $Y(f)$ 中描绘出一个环面。我们可以在每一页上同时将 σ 实现为勒让德，从而使该环面在相应的接触流形中成为预拉格朗日的。尽管这是一个标准过程，我们仍在下文概述其细节，因为稍后将需要用到这些细节。

命题 5.1。 可以在 $Y(f)$ 上选取一个相容的接触结构，使得曲线 σ描绘出一个预拉格朗日环面。

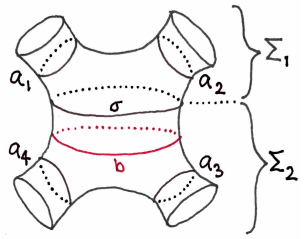


FIGURE 5.1

证明。这只是对 Thurston–Winkelnkemper 构造 [TW75]的轻微修改。令 Σ表示该页。注意，σ 将 Σ 分隔为两个紧子流形 Σ_1, Σ_2，其中 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \sigma$，如图 5.1 所示。我们将领圈邻域

$$A \cong [-2,0]_t \times \partial\Sigma \subset \Sigma, \qquad B \cong [-2,2]_t \times \sigma \subset \Sigma$$

其中 $\partial\Sigma$ 与 $\{0\} \times \partial\Sigma$等同， σ 与 $\{0\} \times \sigma$也同样等同。此外，我们对 B的 $[-2,2]_t$因子定向，使得 $\Sigma_1 \cap B = [-2,0]_t \times \sigma$。我们选择足够小的 A和 B，使它们互不相交，且 f在 $A \cup B$上为恒等映射。

设 $\partial_i\Sigma$ 为 $\partial\Sigma$ 中平行于 a_i的分量。为 $\partial_i\Sigma$选取一个角坐标 θ_i，其取值于$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$，并与 $\partial\Sigma$上的边界定向一致。此外，令 θ 为 σ上的一个角坐标。对 σ 定向，使得 B 上的乘积定向与 Σ的定向一致。令 $S \subset \Omega^1(\Sigma)$表示满足下列条件的 1-形式 β

(i) 2-形式 $d\beta$ 是 Σ 上的正面积形式，(ii) 在领圈 $[-\frac{3}{2}, 0]_t \times \partial_i\Sigma$ 上有 $\beta = e^t\, d\theta_i$，(iii) 在领圈 $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]_t \times \sigma$ 上有 $\beta = -\frac{1}{10} t\, d\theta$。

容易看出，S 是凸的。要证明 S 非空，先取任意一个满足条件的1-形式 $\beta_0 \in \Omega^1(\Sigma)$。

(i) $\beta_0 = e^t d\theta_i$ 在 $[-2,0]_t \times \partial_i\Sigma$ 上，(ii) $\beta_0 = \frac{1}{10} t\, d\theta$ 在 $[-2,2]_t \times \sigma$上。

令 $\omega \in \Omega^2(\Sigma)$ 为一个正面积形式，其在 $A \cup B$ 上与 $d\beta_0$ 一致，并且还满足

$$\int_{\Sigma_1} \omega = \int_{\Sigma_2} \omega = 4\pi.$$

注意，这样的 2-形式存在，因为 $d\beta_0$ 是 $A \cup B$ 上的正面积形式。

$$\int_{(A \cup B) \cap \Sigma_i} d\beta_0 < 4\pi \qquad \text{for} \qquad i = 1, 2.$$

现在，$\omega - d\beta_0$ 在开曲面中具有紧支集

$$\Sigma' = \Sigma \setminus \Big(\big([-\tfrac{3}{2}, 0]_t \times \partial\Sigma\big) \cup \big([-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}]_t \times \sigma\big) \Big).$$

此外，根据斯托克斯定理，对于 $i = 1,\ 2$

$$\int_{\Sigma_i} (\omega - d\beta_0) = \int_{\Sigma_i} \omega - \int_{\partial\Sigma_i} \beta_0 = 0.$$

因此，上同调类 $[\omega - d\beta_0]$ 在 $H^2_c(\Sigma'; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$中是平凡的。因此，存在一个紧支撑 1-形式 $\beta_1 \in \Omega^1_c(\Sigma')$，使得 $\omega - d\beta_0 = d\beta_1$。接下来

$$\beta := \beta_0 + \beta_1 \in S.$$

由于 f逐点固定 $A\cup B$，我们看到 $f^*\beta$也属于 S。令 $\mu\colon [0,2\pi]\to[0,1]$为一个在 0 附近恒等于 0、在 2π附近恒等于 1 的光滑函数。这个形式

$$\mu(\varphi)\beta+\big(1-\mu(\varphi)\big)f^*\beta \qquad \text{on} \qquad \Sigma\times[0,2\pi]_\varphi$$

下降为映射环面上的一个 1-形式

$$\Sigma(f):=\Sigma\times[0,2\pi]_\varphi/(x,2\pi)\sim(f(x),0).$$

稍微滥用一下记号，我们也将这个 1-形式称为 β。注意， β 在 $\Sigma(f)$ 的每个纤维上的限制都属于 S。特别地， $d\varphi\wedge d\beta$ 是 $\Sigma(f)$ 上的一个正体积形式，因此当 $C>0$ 足够大时，1-形式 $\alpha=\beta+Cd\varphi$ 将在 $\Sigma(f)$ 上成为一个接触形式。注意， $d\alpha$ 在 $\Sigma(f)$ 的每个纤维上限制为一个正面积形式。此外，关于这个接触形式，由 σ 描出的环面是预拉格朗日的。

剩下的工作是将 α从 $\Sigma(f)$ 延拓到 $Y(f)$。我们将 $Y(f)$ 看作一个商空间 o f

$$\Sigma(f)\sqcup\coprod_{i=1}^{4}(\partial_i\Sigma\times D_2^2).$$

上文中， D_2^2 表示半径为 2 的闭二维圆盘。如果 $(r,\ \varphi)$ 是 D_2^2 上的极坐标，那么我们将

$$\partial_i\Sigma\times(D_2^2-\operatorname{int}D^2) \qquad \text{and} \qquad [-1,0]_t\times\partial_i\Sigma\times S^1_\varphi\subset\Sigma(f)$$

通过令左侧的点 $(\theta_i,\ r,\ \varphi)$ 等同于右侧的点 $(1-r,\ \theta_i,\ \varphi)$ 来进行识别。为了将接触形式 α 延拓到实心环面上，我们采用如下试探形式

$$\alpha=h_1(r)\,d\theta_i+h_2(r)\,d\varphi \qquad \text{on} \qquad \partial_i\Sigma\times D_2^2.$$

为了使 α 满足我们所期望的性质，我们要求如下：

(i) $h_1(r)=e^{1-r}$ 且 $h_2(r)=C$ 对 $r\in[1,2]$成立，(ii) 在 $r=0$*附近， $h_1(r)=2-r^2$且 $h_2(r)=r^2$，使得 α在 $\partial_i\Sigma\times\{0\}\subset\partial_i\Sigma\times D_2^2$上非奇异，且 $\partial_i\Sigma\times\{0\}$ 是一个正向横截结),

(iii) 行列式

$$\det\begin{bmatrix}h_1(r) & h_1'(r)\\ h_2(r) & h_2'(r)\end{bmatrix}$$

对 $r>0$ 始终不为零（从而 α 是一个接触形式），

(iv) $h_1'(r)<0$ 对于 $r>0$ （使得 $d\alpha$ 在每一页的内部都限制为正面积形式）。

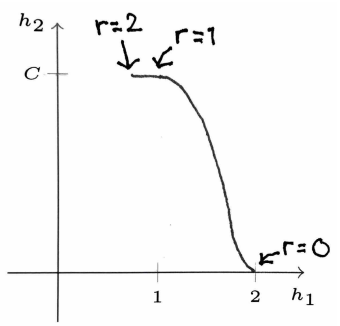


FIGURE 5.2

这些条件确保 α 可下降为 $Y(f)$ 上的光滑接触形式，并且该形式受其开书结构支撑。我们在图 5 中绘制了参数图 $r \mapsto \big(h_1(r)\ h_2(r)\big)$ 。2 □

将上面的预拉格朗日环面扰动为凸环面，使其具有两条分割曲线，然后切开，得到带边界接触流形， Y_1， Y_2，使得 Y_1 包含与 a_1 和 a_2平行的绑定分支。现在，我们以一种使所得闭流形具有自然开书分解的方式，在 Y_i 上粘合一个实心环面。对于每个 n， $m \in \mathbb{Z}$，考虑单值化

$$g_{n,m} = \tau_\gamma^n \tau_\delta^m$$

在裤形曲面上，其中 γ 和 δ 是图 5.3 所示的曲线。从拓扑上看，

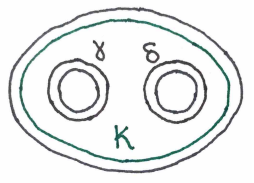


FIGURE 5.3

$$Y(g_{n,m}) \cong L(n,-1)\#L(m,-1).$$

在 $Y(g_{n,\ m})$ 中，将上面所示的曲线 K 在一页上实现为勒让德曲线。（这是可行的，因为该页还有其他绑定分支，并非只有与 K平行的那一个。）取 $Y(g_{n,\ m})$ 中 K 的一个标准管状邻域的补集，并将所得的带边界接触流形记为 $Y(n,\ m)$。

命题 5.2. 作为带凸边界的接触流形，$Y_1 \cong Y(n_1, n_2)$ 与 $Y_2 \cong Y(n_3, n_4)$.

证明。 我们赋予 $Y(f)$ 与命题 5.1 中构造的 α 上相同的接触结构。沿着由 σ 描绘出的预拉格朗日环面切开 $Y(f)$，不对其作扰动使之变为凸。将所得的两部分记为Y_1', Y_2'。令 (r, φ) 表示圆盘 D_2^2 上的极坐标。考虑 $Y_1' \sqcup (\sigma \times D_2^2)$, 的商空间，其中我们作如下识别

$$\sigma \times (D_2^2 - \operatorname{int} D^2) \qquad \text{and} \qquad [-1,0]_t \times \sigma \times S_\varphi^1 \subset Y_1'$$

将左侧的点 (θ, r, φ) 与右侧的点 $(1-r, \theta, \varphi)$ 视为相同。所得流形具有一个开书分解，因此与 $Y(n_1, n_2)$ 微分同胚。我们希望以一种与开书结构相容的方式，将 Y_1' 上的接触形式延拓到 $Y(g_{n_1,n_2})$ 上。

我们再次采用试探形式

$$\alpha = h_1(r)\, d\theta + h_2(r)\, d\varphi \qquad \text{on} \qquad \sigma \times D_2^2$$

这一次，我们要求

(i) $h_1(r) = \frac{1}{10}(1-r)$ 和 $h_2(r) = C$对于 $r \in [1,2]$, (ii) $h_1(r) = 1 - r^2$ 以及 $h_2(r) = r^2$ 在 $r = 0$附近，(iii) 行列式

$$\det \begin{bmatrix} h_1(r) & h_1'(r) \\ h_2(r) & h_2'(r) \end{bmatrix}$$

对于 $r > 0$ 永不为零，

(iv) $h_1'(r) < 0$ 对于 $r > 0$。

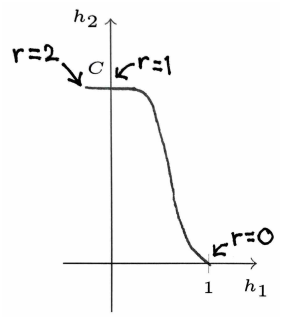


FIGURE 5.4

参见图 5.4

这样，我们将 Y_1' 视为 $Y(g_{n_1,n_2})$ 的接触子流形。在接触流形$Y(g_{n_1,n_2})$ 内，对 $\partial Y_1'$ 作扰动，使其成为具有两条分割曲线的凸环面。这个凸环面一侧以 Y_1 为界，另一侧则是一个实心环面。此外，环面上的分割曲线平行于一页的边界。因此，该实心环面与上文所述勒让德 K 的一个标准邻域接触同伦。这就证明了命题的第一部分。

令 $-\sigma$ 表示带有反向定向的 σ。我们给 σ 配上角坐标 $\theta = -\theta$。考虑 $Y_2' \sqcup \left((\overline{-\sigma}) \times D_2^2\right)$ 的商空间，其中我们作如下识别

$$(-\sigma) \times (D_2^2 - \operatorname{int} D^2) \qquad \text{and} \qquad [0,1]_t \times \sigma \times S^1_\varphi \subset Y_2'$$

将左侧的点 (θ, r, φ) 与右侧的点 $(r-1, -n_b\varphi - \theta, \varphi)$ 视为相同。（由于 σ 的定向与 $\partial Y_2'$ 相反，我们将 σ 的定向反向。）所得流形具有一个开书分解，使其与 $Y(n_3, n_4)$ 微分同胚。我们希望将 Y_2' 上的接触形式延拓到 $Y(n_3, n_4)$，并使其与开书结构相容。

我们采用如下试探形式

$$\alpha = h_1(r)\, d\overline{\theta} + h_2(r)\, d\varphi \qquad \text{on} \qquad (-\sigma) \times D_2^2$$

并要求满足上述条件 (ii) 至 (iv)，但将 (i) 改为

(i') $h_1(r) = \frac{1}{10}(1-r)$ and $h_2(r) = C + \frac{1}{10} n_b (1-r)$ for $r \in [1,2]$.

参见图 5.5。现在我们以与上文相同的方式得出结论。 □

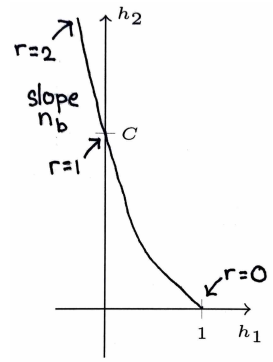


FIGURE 5.5. 当 $n_b < 0$ 时的情形。

注 5.3。 在 n_3， $n_4 \geq 0$ 和 $n_b > 0$的情形下，上述构造以及 $Y(n_3,\ n_4)$ 上的接触结构是紧的这一事实，意味着在定理 5.1 的证明中必须取$C > \frac{1}{10} n_b$ ，才能使 α 成为接触形式。

在第 6 节中，我们确定 $Y(n,\ m)$ 的带边接触不变量。随后在第 7 节中，我们通过配对带边接触不变量，计算 $Y(f)$ 的接触不变量。

6. 识别带边接触不变量

在上一节中，我们对于如何给页定向的说法并不明确。裤形曲面存在一个保向反微分同胚，它在每个边界分支上的限制都是自微分同胚。我们可以利用这样的微分同胚构造 $Y(g_{n,\ m})$ 的一个保向微分同胚，它将每一页映射到另一页，并翻转 Reeb 向量场的方向。它对接触结构造成的影响（在同痕意义下）是翻转其余定向。

我们希望以类似的方式翻转 $Y(n,\ m)$ 上接触结构的余定向。为了使由此得到的两个接触结构在 $\partial Y(n,\ m)$ 上诱导相同（定向的）分割集，我们将 $Y(n,\ m)$ 视为通过扰动一个具有预拉格朗日边界的接触流形 $Y'_{n,\ m}$ 的边界而得到。（根据命题 5.2 的证明，这是可行的。）

暂且令 ξ_1 表示 $Y'_{n,\ m}$ 上的接触结构，并令 ξ_2 表示余定向相反的同一接触结构。现在我们扰动 $Y'_{n,\ m}$ ，使其具有凸边界和两条分割曲线，从而得到 $Y(n,\ m)$。不过，我们分别以互补的方式处理 ξ_1 和 ξ_2：也就是说，在将 ξ_1 的边界向 “ 外 ” 推时，将 ξ_2 的边界向 “ 内 ” 推，反之亦然。由此得到的带边界流形可以自然地相互识别。完成这一识别后， ξ_1 和 ξ_2 在 $\partial Y(n,\ m)$ 上诱导相同的分割集。

与 $Y(g_{n,\ m})$ 一样，我们可以定义一个保向微分同胚

$$\Phi\colon Y(n,m) \to Y(n,m)$$

它保持 $\partial Y(n,\ m)$ 上的缝合结构，因此 $\Phi_*(\xi_1)$ 同伦于 ξ_2，且整个过程中接触结构在 $\partial Y(n,\ m)$ 上诱导相同的分割集。限制在环面边界上时，Φ 同伦于一个双曲 involution。令 $\mathcal{F}$ 为 $\partial Y(n,\ m)$ 上的一个带基点匹配圆，其包含一条与 $\xi_1,\ \xi_2$ 所诱导的缝合线相符的参数化弧；令 $\mathcal{F}'$ 为同一个带基点匹配圆，但将基点移至直径相对的位置。微分同胚 Φ 诱导一个等价

$$\Phi_*\colon \widehat{CFA}\big(-Y(n,m),\mathcal{F}\big) \to \widehat{CFA}\big(-Y(n,m),\mathcal{F}'\big)$$

将 A 型接触不变量 $c_A(\xi_1,\ \mathcal{F})$ 送至 $c_A(\xi_2,\ \mathcal{F}')$，并将 $c_A(\xi_2,\ \mathcal{F})$ 送至 $c_A(\xi_1,\ \mathcal{F}')$。同时记录 ξ_1 和 ξ_2 将会有所裨益。从这里开始，我们会稍微不那么严谨；当我们把 $Y(n,\ m)$ 称为接触流形时，默认其带有接触结构 ξ_1 或 ξ_2 之一。

在 $Y(n,\ m)$ 中，将拉格朗日 K 定向为与其平行的绑定分量具有相同的定向。（绑定是一条正向横截结，因此 K 的定向取决于接触结构的余定向。）现在，我们在 $Y(n,\ m)$ 的边界上附着一个基本切片，使得所得分割集由 K的子午线组成。如果旁路附着的符号选择正确，那么根据 Stipsicz–V´ertesi [SV09] 的工作，所诱导的缝合 Floer 同调映射

$$SFH\big(-Y(n,m),-\Gamma_\lambda\big) \to SFH\big(-Y(n,m),-\Gamma_\mu\big) \cong \widehat{HFK}\big(-Y(g_{n,m}),K\big) \tag{6.1}$$

将缝合接触不变量 $EH\big(Y(n,m)\big)$ [HKM09b] 映射为 LOSS 不变量 $\widehat{\mathcal{L}}(K)$ [LOSS09]。上方的 Γ_λ 和 Γ_μ 是由勒让德 K确定的 $\partial Y(n,m)$ 上的纵向和经向缝合线。（注意， K 是有理零同调的，因此 K 的 LOSS 不变量有定义。）

引理 6.1。 根据 $Y(g_{n,m})$ 上接触结构的余定向，*LOSS* 不变量 $\mathcal{L}(K) \in HFK^-\big(-Y(g_{n,m}),\ K\big)$ 由图 *6.1* 中两个双基点 *Heegaard* 图之一所示的生成元表示。我们将这些 *Heegaard* 图中的曲线着色

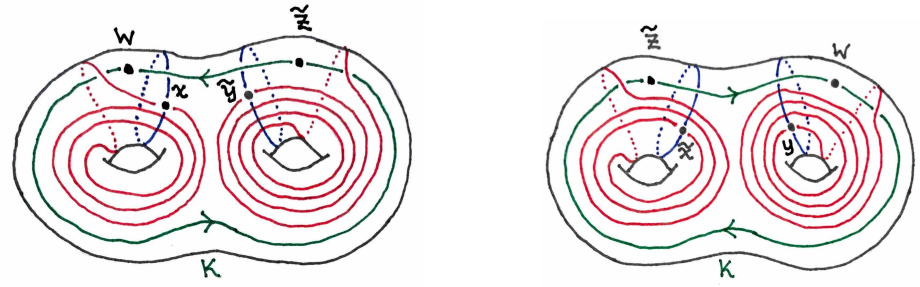


FIGURE 6.1. 情形 $n = 3, m = 4$

根据 $-Y(g_{n,m})$ 的通常约定，而不是 $Y(g_{n,m})$。

证明。 我们不直接按照 [LOSS09], 中的步骤识别 $\mathcal{L}(K)$，而是利用自然映射这一事实

$$HFK^-\big(-Y(g_{n,m}), K\big) \to \widehat{HF}\big(-Y(g_{n,m})\big) \tag{6.2}$$

将上同调类 $\mathcal{L}(K)$ 映至 $c(g_{n,m})$。为求得 $c(g_{n,m})$，我们按照 [HKM09a]中的步骤进行。图 6.2 展示了接触结构每种余定向选择下的情形。

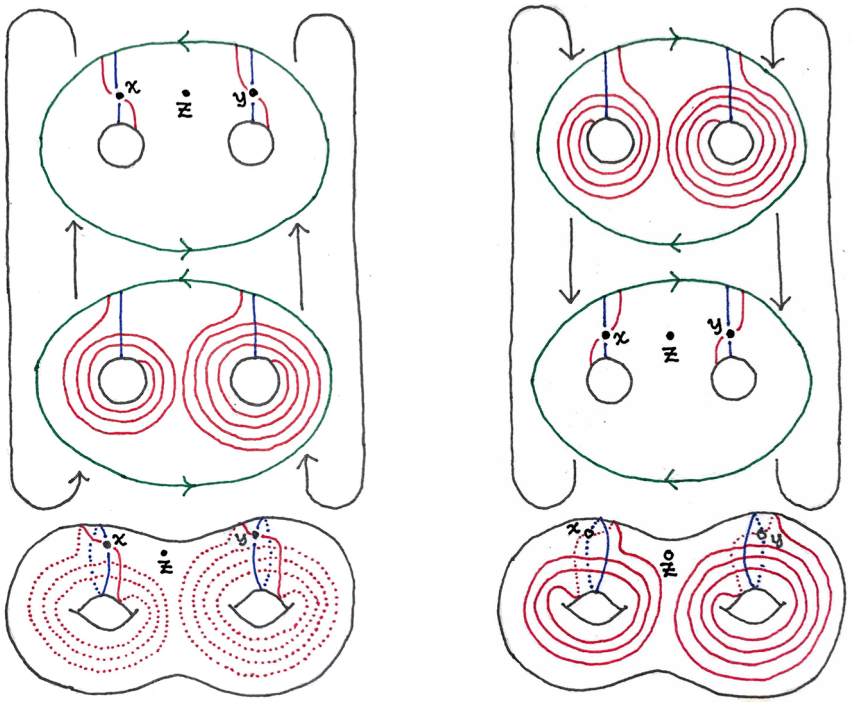


FIGURE 6.2

在这两种情况下，我们都可以通过同伦变形红色 α 曲线，得到图 6.3。要从图 6.2 的左侧得到图 6.3，我们并没有“将 Heegaard 曲面上下翻转”。

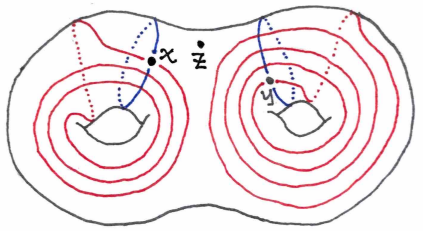


FIGURE 6.3

图 6.3 中的每个生成元都属于不同的旋量^c 结构。事实上，$\mathrm{Spin}^c\big(Y(g_{n,\ m})\big)$ 是阿贝尔群上的一个挠子

$$H_1\big(Y(g_{n,m})\big) \cong \langle \mu_1, \mu_2 \,|\, n\mu_1 = 0, m\mu_2 = 0\rangle \cong \mathbb{Z}/n \oplus \mathbb{Z}/m.$$

在图 6.3 中，μ_1 和 μ_2 由蓝色 β 曲线的对偶曲线表示。由此可见，每个 nm 生成元都属于不同的自旋^c 上同调类。

映射 (6.2) 忘掉了基点 w。因此，在图 6.3 中，我们应如图 6.1 所示，将基点 z 移至$\widetilde{z}$ 。注意，这会使生成元与自旋^c 结构之间的对应关系平移 PD[γ]，其中 γ 是图 6.4 中的曲线。为补偿这一点，我们可以将点 x 移至 $\widetilde{x}$ ，或将点 y 移至 $\widetilde{y}$。□

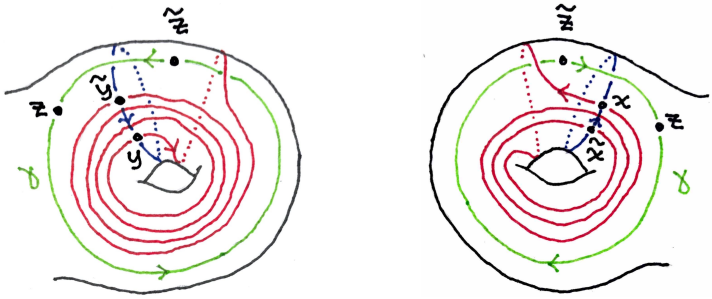


FIGURE 6.4

由于映射

$$HFK^-\big(-Y(g_{n,m}), K\big) \to \widehat{HFK}\big(-Y(g_{n,m}), K\big),$$

^通过设定 $U = 0$，将 $\mathcal{L}(K)$ 发送到 $L(K)$，我们可以将图 6.1 看作是在规定

$$\hat{L}(K) \in \widehat{HFK}\big(-Y(g_{n,m}), K\big) \cong SFH\big(-Y(n,m), -\Gamma_\mu\big).$$

在进入带边框情形之前，请读者参阅附录 A，以复习环面代数上的 A 型与 D 型模（部分也是为了建立记号）。在本文中，所有 A 型模均为右模。除非将 A 型模与 DD 型双模进行张量积，否则所有 D 型模均为左模。

引理 6.2. 令 $\mathcal{F}$ 为 $\partial\big(-Y(n,m)\big)$ 的一个框架，其中一条弧平行于页的边界，另一条弧平行于 K的一条子午线。根据基点的选择以及 α 型或 β 型的选择，共有 *8* 种这样的框架。考虑同构

$$\widehat{HFA}\big(-Y(n,m), \mathcal{F}\big) \cdot \iota \to SFH\big(-Y(n,m), -\Gamma_\mu\big)$$

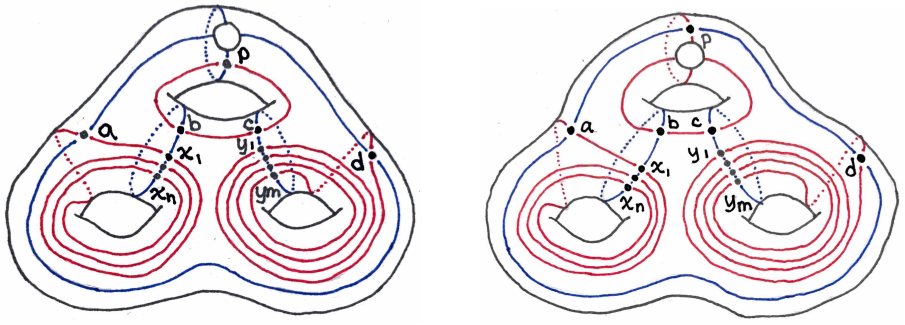


FIGURE 6.5

通过附加适当的缝合帽 [Zar10], 得到，其中 ι 是环面代数中的相应幂等元(取决于基点)。在此同构下， $\mathcal{L}(K)$ 在图 6.5中的某个带边图里由 $\{p, x_1, y_1\}$ 或 $\{p, x_n, y_m\}$ 表示。

关于 α 型和 β 型图之间的区别，详见注 6.7。

证明。 我们关注 β 型框架。（ α 型框架的论证类似。）要将缝合帽附加到带边图上，首先要将带边图转换为带边缝合图，方法是用一条小的绿色弧替换基点，如图 6.6 所示。（我们用绿色表示缝合线。）

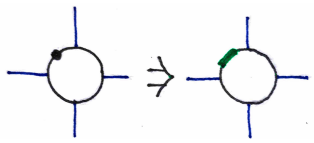


FIGURE 6.6

为了实现缝合线 Γ_λ，我们现在附加图 6.7 所示的两个缝合帽之一，使边界的黑色部分相匹配。我们选择哪个缝合帽取决于基点的选择。所有情况下得到的结果都是图 6.8 左侧所示的部分。

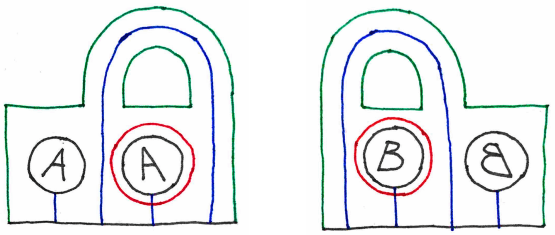


FIGURE 6.7

我们希望对这个图进行两次去稳定化，以回到图 6.1。为此，我们先进行两次 α手柄滑动和两次 β手柄滑动，得到图 6.8 右侧的图。随后即可进行两次去稳定化，得到图 6.1。（回想一下，通过对基点 z 和 w打孔，可以将双基点 Heegaard 图变成缝合图。）

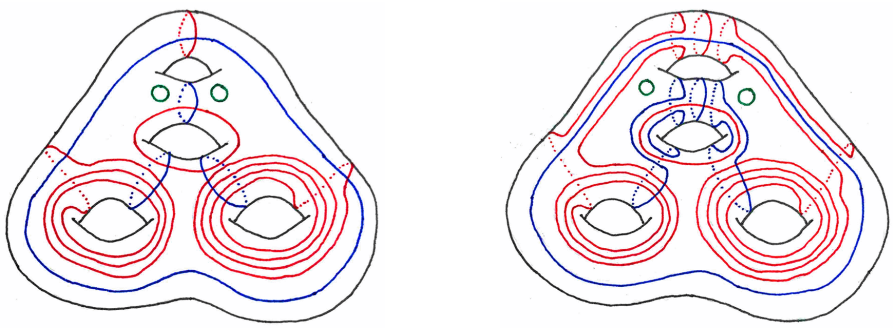


FIGURE 6.8

这些手柄滑动和去稳定化所导致的伪梯度向量场在 $Y(n、\ m)$ 上的变化，发生在远离 $\partial Y(n、m)$ 的两个三维球内。因此，图 6.8 左侧的生成元与图 6.1 中的生成元之间的自然双射保持自旋^{c}上同调类。此外，这两个图中的生成元分别属于不同的自旋^c 上同调类。事实上，$\mathrm{Spin}^c\big(-Y(n、\ m)\ -\Gamma_\mu\big)$ 是阿贝尔群上的一个挠子

$$H_1\big(Y(n,m)\big) \cong \langle \mu_1, \mu_2 \,|\, n\mu_1 = m\mu_2 \rangle \cong \mathbb{Z}/(n,m) \oplus \mathbb{Z}.$$

在图 6.1 中，μ_1 和 μ_2 由蓝色 β 曲线的对偶曲线表示。据此可知，每个 nm 生成元都属于不同的自旋^c 上同调类。由此即可得出推论。□

注 6.3。更自然的理解方式是将图 6.5 中的 α型图示为图 6.9 所示。与图 6.5 中的 β型图类似，在此图中，β 把手体在 $\mathbb{R}^3$中是“可见的”。

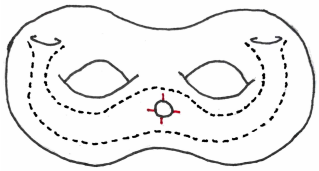


FIGURE 6.9

这两个图均由图 6.10 所示的 $S^3\ \big(Y(g_{n,\ m})\ K\big)$ 的链环手术图得到。

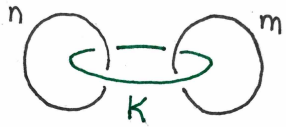


FIGURE 6.10

将图 6.5 中 β 型和 α 型图的四种可能基点选择按图 6.11 所示标记。我们将所得框架标记为 $\mathcal{F}_{\mathrm{I}、\beta}$ 等。标签的选取方式保证，例如，$\mathcal{F}_{\mathrm{I}、\beta}$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{I}、\alpha}$ 在 $\partial Y(n、\ m)$ 上诱导出相同的带基点匹配圆。在附录 B 中，我们计算得出，若 $\mathcal{F}$ 是这些框架中的任意一个，则 A 型模 $\widehat{CFA}\big(-Y(n、m)\ \mathcal{F}\big)$ 的模型由图 6.12 中的某个装饰图给出。

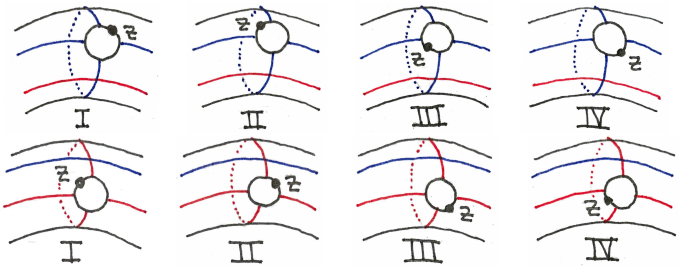


FIGURE 6.11

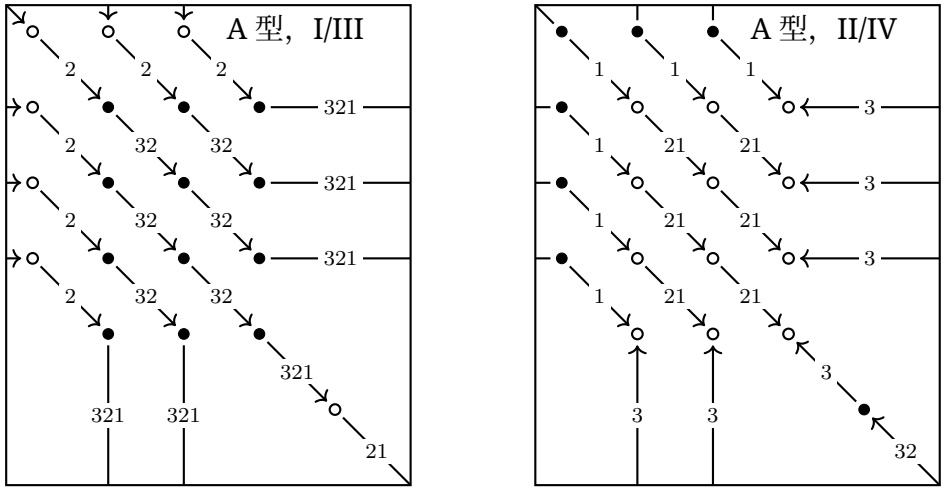


FIGURE 6.12. 情形 $n = 3, m = 4$。两个装饰图都应视为位于环面上。（我们只在环面上绘制这些图，以避免自交。）

这里我们使用 [HW23] 中的约定，以装饰图表示 CFA。具体来说，图中的顶点对应生成元。标记为 $\bullet$ 的顶点允许幂等元 ι_0 作用且作用非平凡；标记为 $\circ$ 的顶点允许 ι_1 作用且作用非平凡。不存在 m_1 作用。要读出 $k \geq 2$ 的 m_k，需要查看有向路径。假设存在一条从生成元 $\mathbf{x}$ 到生成元$\mathbf{y}$的有向路径。从 $\mathbf{x}$ 出发，将路径上的所有标签串接成字符串I。接下来，将 I 分解为若干子串 $I = I_1 \cdots I_k$，使得每个 $I_1, \ldots, I_k$ 都属于 $\{1, 2, 3, 12, 23, 123\}$。并以使 k 最小的方式进行分解。根据这些数据，可以读出

$$m_{k+1}(\mathbf{x}, \rho_{I_1}, \ldots, \rho_{I_k}) = \mathbf{y}.$$

例如，路径 $\bullet \xrightarrow{32} \bullet \xrightarrow{321} \bullet$ 对应于 m_5 作用

$$m_5(\mathbf{x}, \rho_3, \rho_{23}, \rho_2, \rho_1) = \mathbf{y}.$$

我们注意到，由于右侧的装饰图没有有向环，相应的 $CFA\big(-Y(n,\ m)\ \mathcal{F}_{\mathrm{II/IV}}\big)$ 模型按照附录 A 中的定义是有界的。

识别 HFLOS 上述模型中，我们将使用分次论证。先做几点初步观察。首先，表示 $-Y(n,\ m)$ 的带边 Heegaard 图的周期区域群同构于

$$H_2\big(Y(n,m), \partial Y(n,m)\big) \cong H^1\big(Y(n,m)\big) \cong \mathbb{Z}.$$

我们将图 6.5 的一个生成周期域与图 6.13 中取值为 $n = 3, m = 4$ 且框架为 $\mathcal{F}_{\mathrm{I},\ \beta}$ 的生成周期域对应起来。

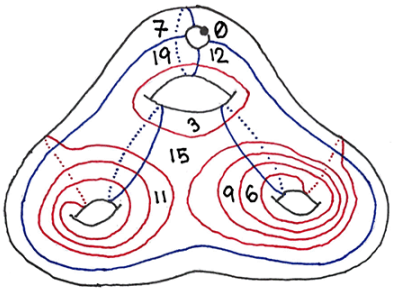


FIGURE 6.13. 尽管看起来并非如此，上方所有区域都已标注！

从这里开始，为了同时绘制图 6.5 中 α 型和 β 型图示的域，我们在图 6.14 所示的“节点图”中绘制域。

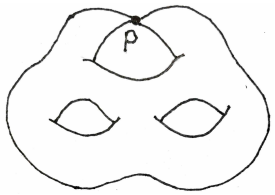


FIGURE 6.14

一般来说，图 6.5 中图示的一个生成周期域在与带基点匹配圆相邻的区域中的重数如图 6.15 所示。

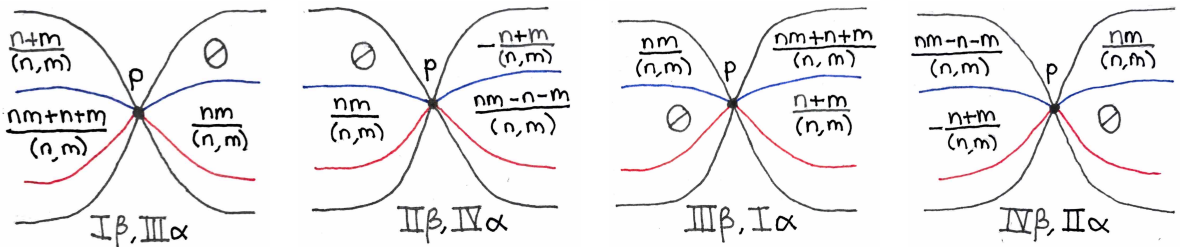


FIGURE 6.15

回顾一下，若一个周期域在与带基点匹配圆相邻的区域上的重数均为 0，则称其为省级的。从图 6.15 可知，不存在省级周期域，因此 6.5 中的两个图表都是省级容许的。（这也可由 $H_2\big(Y(n,\ m)\big) = 0$ 这一事实推出。）

接下来，图 6.5 中的两个图都不含 m_1 作用。要看出这一点，可以利用 spin^c 结构进行论证，也可以注意到图 6.5 中生成元的数量与图 6.12 中相同。现在我们找出一些可能对高阶微分有贡献的指标为 1 的简单域。图 6.16 展示了其中两个这样的域。

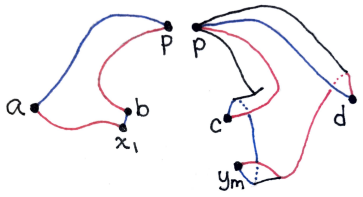


FIGURE 6.16

图 6.16 左侧的域对以下计数有贡献:

$$\begin{aligned}
&\text{For } \mathcal{F}_{\mathrm{II},\beta} \text{ and } \mathcal{F}_{\mathrm{IV},\alpha}, \quad \big[m_2(\{a,b,y_j\},\rho_1);\{p,x_1,y_j\}\big],\\
&\text{For } \mathcal{F}_{\mathrm{I},\beta} \text{ and } \mathcal{F}_{\mathrm{III},\alpha}, \quad \big[m_2(\{a,b,y_j\},\rho_2);\{p,x_1,y_j\}\big], \qquad 1\le j\le m.\\
&\text{For } \mathcal{F}_{\mathrm{IV},\beta} \text{ and } \mathcal{F}_{\mathrm{II},\alpha}, \quad \big[m_2(\{a,b,y_j\},\rho_3);\{p,x_1,y_j\}\big],
\end{aligned}$$

另一方面，对于 $\mathcal{F}_{\mathrm{III},\ \beta}$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{I},\ \alpha}$，若将同一域的补集 视为对计数有贡献（可能为零），则其指标为 1

$$\big[m_4(\{p,x_1,y_j\},\rho_3,\rho_2,\rho_1);\{a,b,y_j\}\big], \qquad 1\le j\le m.$$

类似地，图 6.16 右侧的域对以下计数有贡献 :

$$\begin{aligned}
&\text{For } \mathcal{F}_{\mathrm{IV},\beta} \text{ and } \mathcal{F}_{\mathrm{II},\alpha}, \quad \big[m_2(\{c,d,x_i\},\rho_1);\{p,x_i,y_m\}\big],\\
&\text{For } \mathcal{F}_{\mathrm{III},\beta} \text{ and } \mathcal{F}_{\mathrm{I},\alpha}, \quad \big[m_2(\{c,d,x_i\},\rho_2);\{p,x_i,y_m\}\big], \qquad 1\le i\le n.\\
&\text{For } \mathcal{F}_{\mathrm{II},\beta} \text{ and } \mathcal{F}_{\mathrm{IV},\alpha}, \quad \big[m_2(\{c,d,x_i\},\rho_3);\{p,x_i,y_m\}\big],
\end{aligned}$$

对于$\mathcal{F}_{\mathrm{I},\ \beta}$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{III},\ \alpha}$，若将同一域的补集视为对计数有贡献，则其指标为 1

$$\big[m_4(\{p,x_i,y_m\},\rho_3,\rho_2,\rho_1);\{c,d,x_i\}\big], \qquad 1\le i\le n.$$

接下来，考虑图 6.17 中的互补简单域

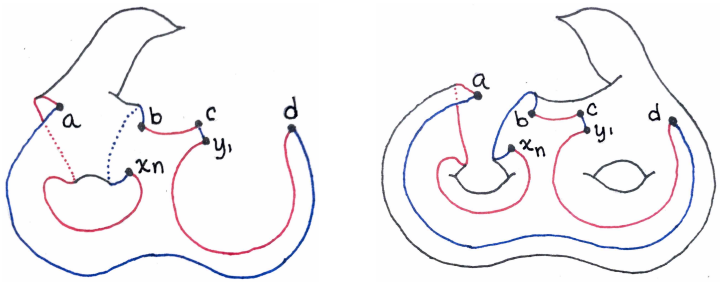


FIGURE 6.17

如果将图 6.17 左侧的域视为对以下计数作出贡献，则其指标为 1:

$$\begin{aligned}
&\text{For } \mathcal{F}_{\mathrm{I},\beta} \text{ and } \mathcal{F}_{\mathrm{III},\alpha}, \quad \big[m_3(\{c,d,x_n\},\rho_2,\rho_1);\{a,b,y_1\}\big],\\
&\text{For } \mathcal{F}_{\mathrm{IV},\beta} \text{ and } \mathcal{F}_{\mathrm{II},\alpha}, \quad \big[m_3(\{c,d,x_n\},\rho_3,\rho_2);\{a,b,y_1\}\big].
\end{aligned}$$

同一域的补集，即右侧的域，如果将其视为对以下计数作出贡献，则其指标为 1：

$$\begin{aligned}\text{For } \mathcal{F}_{\mathrm{III},\beta} \text{ and } \mathcal{F}_{\mathrm{I},\alpha}, &\quad \big[m_3(\{a,b,y_1\},\rho_2,\rho_1);\{c,d,x_n\}\big],\\ \text{For } \mathcal{F}_{\mathrm{II},\beta} \text{ and } \mathcal{F}_{\mathrm{IV},\alpha}, &\quad \big[m_3(\{a,b,y_1\},\rho_3,\rho_2);\{c,d,x_n\}\big].\end{aligned}$$

在确定 LOSS 不变量之前，我们先给出一个简明的定义。

定义 6.4. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\partial\big(-Y(n,m)\big)$ 的任意一个框架，其中一条弧构成某一页的边界。若基点位于页面一侧，且该侧由沿正 *Reeb* 方向稍微移动所确定，则称此框架 $\mathcal{F}$ 与接触结构的余定向相容 。

命题 6.5. *LOSS* 不变量 $\mathcal{L}(K)$由图 6.18 中的某个青色或粉色生成元给出，具体取决于 $Y(n,m)$ 上接触结构的余定向选择以及框架的选择。

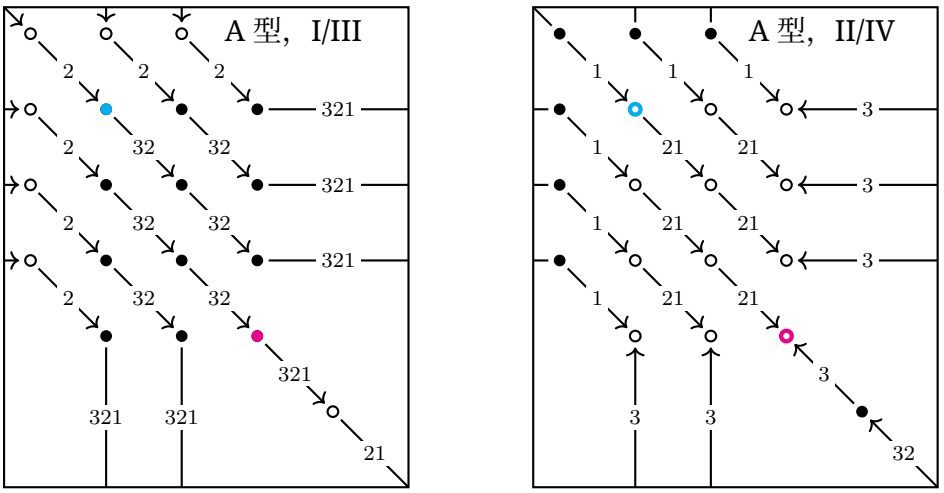


FIGURE 6.18

具体而言，青色生成元对应于 β型图中的一致框架选择，以及 α型图中的不一致选择（而粉色生成元则相反）。

证明。 我们利用*CFA*上的精细分次进行论证。我们在此回顾其定义，但如需更详细的讨论，请参见 [LOT18，第 10, 11] 章以及 [HRW22]。精细分次在每个自旋^c 分量上仅在整体平移的意义下定义。虽然完整的精细分次取值于一个非阿贝尔群，但就我们的目的而言，只需考虑精细分次的“自旋^c 分量”即可。下文中，我们将此分量简称为“分次”。

在具有环面边界的情形下，分次取值于群$\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$的一个商空间。该商空间由图中的周期域群决定。对于 I/III 基点，由上述观察可知，该商空间为

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2\Big/\Big\langle\Big(\frac{n+m}{(n,m)},\frac{nm}{(n,m)}\Big)\Big\rangle.$$

对于 II/IV 基点，商空间则为

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2\Big/\Big\langle\Big(\frac{nm}{(n,m)},-\frac{n+m}{(n,m)}\Big)\Big\rangle.$$

环面代数的 Reeb 元素通过设定 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$ 进行分次 –

$$\mathrm{gr}(\rho_1) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), \qquad \mathrm{gr}(\rho_2) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), \qquad \mathrm{gr}(\rho_3) = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

$\widehat{\ }$并施加 $\mathrm{gr}(\rho_I\rho_J) = \mathrm{gr}(\rho_I)\mathrm{gr}(\rho_J)$。于是，$CFA$ 上的分次满足

$$\mathrm{gr}\big(m_{k+1}(\mathbf{x}, \rho_{I_1}, \ldots, \rho_{I_k})\big) = \mathrm{gr}(\mathbf{x}) + \mathrm{gr}(\rho_{I_1}) + \cdots + \mathrm{gr}(\rho_{I_k}).$$

在表 6. 1 中，我们展示如何从 A 型装饰图中计算分次差 h.

标记边	分次变化	标记边	分次变化
$\mathbf{x} \overset{1}{\to} \mathbf{y}$	$\mathrm{gr}(\mathbf{y}) = \mathrm{gr}(\mathbf{x}) + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\mathbf{x} \overset{21}{\longrightarrow} \mathbf{y}$	$\mathrm{gr}(\mathbf{y}) = \mathrm{gr}(\mathbf{x}) + (1,0)$
$\mathbf{x} \overset{2}{\to} \mathbf{y}$	$\mathrm{gr}(\mathbf{y}) = \mathrm{gr}(\mathbf{x}) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\mathbf{x} \overset{32}{\longrightarrow} \mathbf{y}$	$\mathrm{gr}(\mathbf{y}) = \mathrm{gr}(\mathbf{x}) + (0,1)$
$\mathbf{x} \overset{3}{\to} \mathbf{y}$	$\mathrm{gr}(\mathbf{y}) = \mathrm{gr}(\mathbf{x}) + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\mathbf{x} \overset{321}{\longrightarrow} \mathbf{y}$	$\mathrm{gr}(\mathbf{y}) = \mathrm{gr}(\mathbf{x}) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

TABLE 6.1. A 型装饰图中的分次差

对于任意框架选择 $\mathcal{F}$，$\widehat{\ }CFA\big(-Y(n,m), \mathcal{F}\big)$ 中都有 (n,m) 个 spin^c 求和项。要看到这一点，可以数一数图 6.18 中连通分量的数量，或者观察

$$H_1\big(Y(n,m), \partial Y(n,m)\big) \cong \mathbb{Z}/(n,m).$$

我们先关注 I/III 情形。我们从 I/III 图中包含图 6.18 最左上方生成元的 spin^c 求和项开始。从该生成元出发，沿着有向循环前进时，我们会依次经过

$$\frac{n+m}{(n,m)} - 1, \frac{n+m}{(n,m)} - 1, \frac{nm-n-m}{(n,m)} + 1, 1$$

分别标记为 2、321、32、21 的箭头。沿该循环遍历一周，我们将分次“路径提升”至 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$，起点为 $(0,0)$。当分次从 (0,0) 变化到

$$\Big(\frac{n+m}{(n,m)}, \frac{nm}{(n,m)}\Big).$$

当我们经过标记为 21 的唯一箭头时，第二个分量才是平稳的。

假设我们进行 从任意其他自旋^c 上同调类中的生成元开始的相同游戏。我们经过

$$\frac{n+m}{(n,m)}, \frac{n+m}{(n,m)}, \frac{nm-n-m}{(n,m)}$$

分别标记为 2、321、32 的箭头。当我们进行路径提升时，随着分次从 (0,0) 变为与之前相同的值，两个分量都不减。这一次，第二个坐标严格增加。因此，I/III 图中的左上生成元和右下生成元被区分开来：它们是属于同一自旋^c 上同调类且其分次相差

$$(1,0) + \mathbb{Z}\Big(\frac{n+m}{(n,m)}, \frac{nm}{(n,m)}\Big).$$

类似的论证表明，II/IV 图中的左上生成元和右下生成元，是属于同一个自旋^c 上同调类且分次相差的唯一一对

$$(0,1) + \mathbb{Z}\Big(\frac{nm}{(n,m)}, -\frac{n+m}{(n,m)}\Big).$$

现在考虑图 6.5 中带框架$\mathcal{F}_{\mathrm{I},\ \beta}$的带边图。（其他框架的情形类似）。图 6.17 左侧指标为 1 的区域的存在性（将其视为对 $m_3(-,\ \rho_2,\ \rho_1)$作用的贡献）意味着

$$\mathrm{gr}\{a, b, y_1\} = \mathrm{gr}\{c, d, x_n\} + (1, 0).$$

我们得出，任何 A 型模的分次等价都必须分别将 $\{a, b, y_1\}$ 和 $\{c, d, x_n\}$ 映到图 6.18 中的左上生成元和右下生成元。利用图 6.16 左侧的域以及同一图中右侧域的补集，再次根据分次可得，$\{p, x_1, y_1\}$ 和 $\{p, x_n, y_n\}$ 必须分别映到图 6.18 中的青色生成元和粉色生成元。□

推论 6.6。 Y 的 *A* 型接触不变量（$n,\ m$）由图 *6.19* 所示的某个生成元给出，具体取决于 Y（$n,\ m$）上接触结构的余定向选择以及框架的选择。

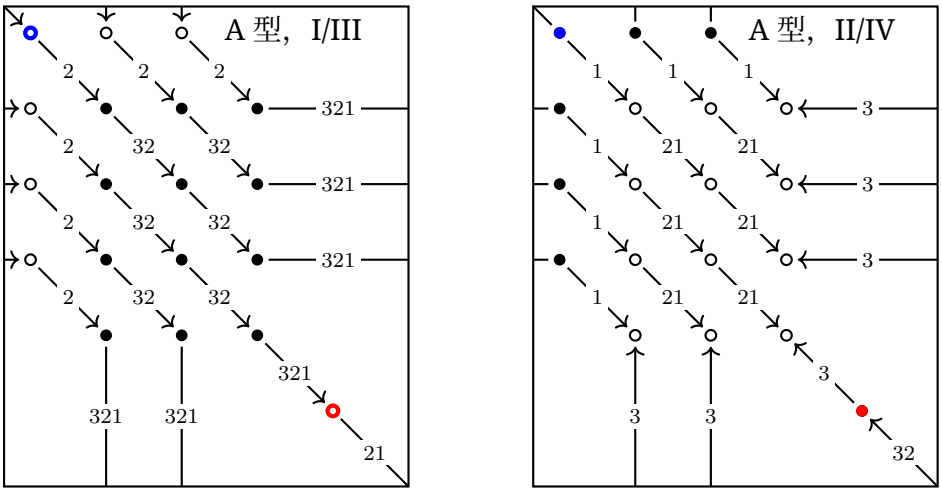


FIGURE 6.19

蓝色生成元对应于 β 型图示中一致的框架选择，以及 α 型图示中不一致的选择（红色生成元则相反）。

证明。 我们可以在 $Y(n, m)$ 的边界上附加两种基本切片，从而得到作为 K 子午线的缝合线。其中一种基本切片，对于接触结构在 $Y(n, m)$ 上的一种余定向选择，其符号对于 Stipsicz–V´ertesi 映射 (6.1) 是正确的；而对于另一种选择则是错误的（另一种基本切片的情况正好相反）。根据 [MV24],

- 对于 I/III 基点，其中一种基本切片对应一个 $m_2(-, \rho_2)$ 作用，而另一种在环面代数中没有对应项。（这是因为环面代数的元素对应于增厚的 带孔 环面上的接触结构。）
- 对于 II/IV 基点，其中一个基本切片对应于一个 $m_2(-,\ \rho_1)$ 作用，而另一个对应于一个 $m_2(-,\ \rho_3)$ 作用。

我们重点讨论 I/III 基点的情形。（II/IV 基点的情形类似，而且更简单。）由于青色的 LOSS 不变量仅被一次 ρ_2 作用击中，而粉色的 LOSS 不变量不会被任何 ρ_2 作用击中，因此我们可以将图 6.19 的 I/III 图中的蓝色生成元识别为接触不变量。（如果作者更仔细地阅读了关于基本切片符号的内容，就不需要这种小把戏了。）

要识别另一个接触不变量，请回想图 6.5 中带 $\mathcal{F}_{\mathrm{I},\ \beta}$框架的带边图：蓝色接触不变量对应于 $\{a, b, y_1\}$。命题 6.5 中的分次论证表明，在同一个带 $\mathcal{F}_{\mathrm{III},\ \beta}$框架的带边 Heegaard 图中，$\{a, b, y_1\}$ 对应于图 6.19 的 I/III 图中的红色生成元。请注意，这是带 $\mathcal{F}_{\mathrm{III},\ \beta}$ 框架的同一接触结构的接触不变量，因为将缝合帽附加到带边 Heegaard 图上会抹去关于基点的所有信息。□

注记 6.7。 人们可能会想当然地认为，将框架从 α型切换为 β型时，A 型接触不变量不会改变$\widehat{\ }$，因为相应的CFA 模并未改变。然而，将带边图从 α型切换为 β型时，连接缝合帽后， R_+ 与 R_- 的作用会互换。对于高亏格边界，这清楚地表明，从 α型图切换到 β型图时，曲面代数中对应于 A 型接触不变量的幂等元不可能保持不变。

7. Reparameterizing and gluing

本节中，我们通过配对带边接触不变量，完成对定理 1.3 的重新证明。关于 Type DD 和 DA 型双模，以及各种类型的盒张量积的回顾，请参见附录 A。我们先说明，按照 [LOT15], 的意义，本节中的所有双模都是左右有界的，因为它们是由左、右省级可容许 Heegaard 图计算得到的。事实上，这些图不存在左或右省级周期域。

为了进行配对，我们首先确定上一节中具有 8 种框架的 $Y(n,\ m)$ 的 D 型不变量。如果 $\mathcal{F}$ 是这样一种框架，那么我们在附录 B 中计算得出，模 $\widehat{\ }\,CFD\big(-Y(n,\ m)\ \mathcal{F}\big)$ 有一个由图 7.1 中某个装饰图给出的模型。

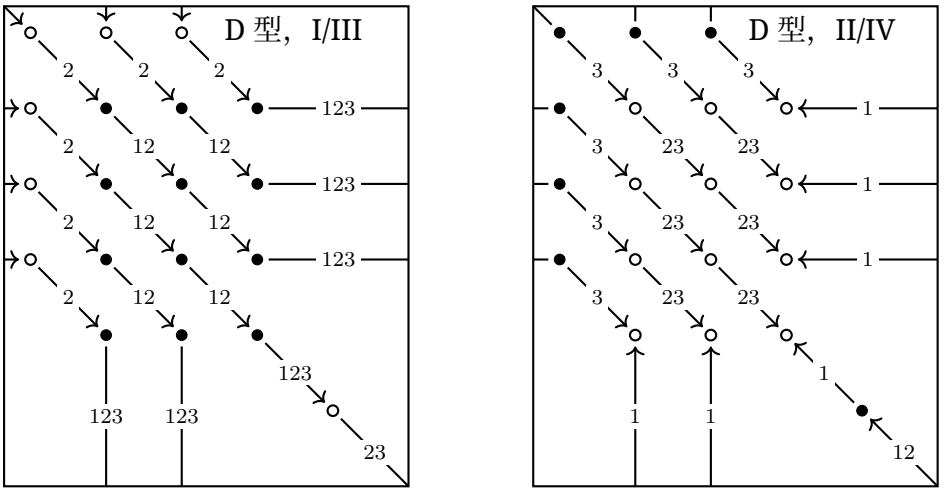


Figure 7.1. 情形 $n = 3, m = 4$。这两个装饰图都应理解为画在环面上。

对于左 D 型模，装饰图的解释有所不同。顶点的解释与之前相同。（回想一下，这些顶点是根据非平凡幂等元作用标记的，而不是根据生成元在图中所处的弧来标记的。）从生成元 $\mathbf{x}$ 到生成元 $\mathbf{y}$、长度为 k 且箭头标记为 $I_1, \dots, I_k$ 的有向路径，对应于一个微分

$$\delta^k(\mathbf{x}) = \rho_{I_k} \otimes \cdots \otimes \rho_{I_k} \otimes \mathbf{y}.$$

未标记的箭头对应于纯微分，即 $\delta^1(x) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{y}$。例如，一条路径 $\bullet \xrightarrow{12} \bullet \xrightarrow{123} \bullet$ 对应于 δ^2 微分

$$\delta^2(\mathbf{x}) = \rho_{12} \otimes \rho_{123} \otimes \mathbf{y}.$$

为了确定 D 型不变量，我们按照 [MV24] 中的步骤，与 $\widehat{BSDD}(\mathcal{TW}^+_{\mathcal{F}})$ 配对，其中 $\mathcal{TW}^+_{\mathcal{F}}$ 是扭转切片。在环面边界的情形下，$\mathcal{TW}^+_{\mathcal{F}}$ 的带边缝合 Heegaard 图如图 7.2 所示。

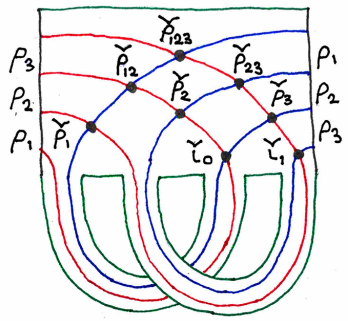


FIGURE 7.2

根据上图，可以计算出 $\widehat{BSDD}(\mathcal{TW}^+_{\mathcal{F}})$ 的如下模型。非平凡的幂等元作用如下：

$$\iota_0 \cdot \check{\rho}_{123} \cdot \iota_1 = \check{\rho}_{123}, \quad \iota_0 \cdot \check{\rho}_{23} \cdot \iota_0 = \check{\rho}_{23}, \quad \iota_1 \cdot \check{\rho}_{12} \cdot \iota_1 = \check{\rho}_{12}, \quad \iota_0 \cdot \check{\rho}_3 \cdot \iota_1 = \check{\rho}_3,$$
$$\iota_0 \cdot \check{\rho}_1 \cdot \iota_1 = \check{\rho}_1, \quad \iota_1 \cdot \check{\rho}_2 \cdot \iota_0 = \check{\rho}_2, \quad \iota_0 \cdot \check{\iota}_1 \cdot \iota_0 = \check{\iota}_1, \quad \iota_1 \cdot \check{\iota}_0 \cdot \iota_1 = \check{\iota}_0.$$

接下来，非零微分如下。

$$\delta^1(\check{\rho}_{123}) = \rho_3 \otimes \check{\rho}_{12} + \check{\rho}_{23} \otimes \rho_1, \quad \delta^1(\check{\rho}_{23}) = \rho_3 \otimes \check{\rho}_2 + \check{\rho}_3 \otimes \rho_2, \quad \delta^1(\check{\rho}_{12}) = \rho_2 \otimes \check{\rho}_1 + \check{\rho}_2 \otimes \rho_1,$$
$$\delta^1(\check{\rho}_3) = \rho_3 \otimes \check{\iota}_0 + \check{\iota}_1 \otimes \rho_3, \quad \delta^1(\check{\rho}_1) = \rho_1 \otimes \check{\iota}_0 + \check{\iota}_1 \otimes \rho_1, \quad \delta^1(\check{\rho}_2) = \rho_2 \otimes \check{\iota}_1 + \check{\iota}_0 \otimes \rho_2.$$

一般而言，有

$$\widehat{CFD}(-Y, \mathcal{F}) \cong \widehat{CFA}(-Y, \mathcal{F}) \boxtimes \widehat{BSDD}(\mathcal{TW}^+_{\mathcal{F}}).$$

要确定 D 型接触不变量，需要将 A 型不变量 $c_A(\xi, \mathcal{F})$ 与 $\check{\iota}_1$ 或 $\check{\iota}_0$ 张量相乘，具体取决于 $c_A(\xi, \mathcal{F})$ 是否分别受幂等元 ι_0 或 ι_1 的作用，即 [sic]。请注意，附加一个扭转切片会将 A 型图变为 D 型图，反之亦然。在我们的情形中执行这一构造，并通过消去纯微分来化简所得的 D 型模，可得到以下命题。

命题 7.1。对于 $Y(n, m)$，*D* 型接触不变量由图 7.3 中高亮显示的某个生成元给出，具体取决于接触结构在 $Y(n, m)$ 上的余定向选择以及框架的选择。蓝色生成元对应于对 β 框架的 *D* 型图所作的一致框架选择。（这里所说的“*D* 型图”是指附加基本切片后的图。）

图 7.3 中的 D 型模看起来与图 7.1 中的略有不同。这是因为有些纯微分尚未约化，以便保留 D 型接触不变量。

在粘合之前，我们必须重新参数化其中一个带边三维流形的边界，以实现图 4.1 中曲线 b 周围的负德恩扭转。此后，我们任意选择

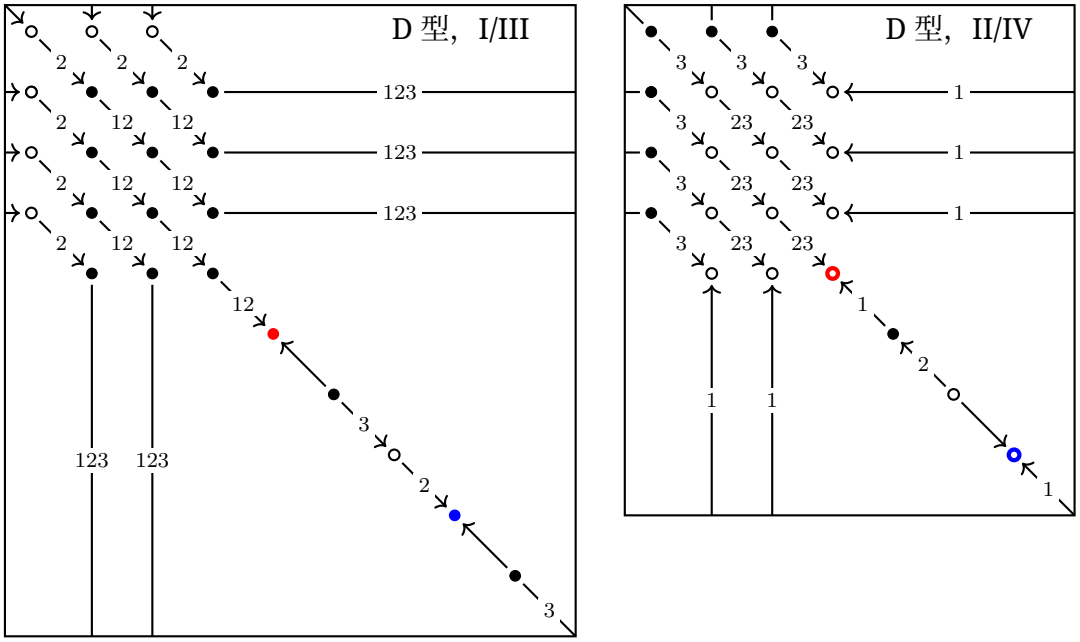


FIGURE 7.3

将 $-Y(n_1,\ n_2)$ 指定为具有 II/IV 边界的 A 型图。这迫使我们将 $-Y(n_3,\ n_4)$ 指定为具有 I/III 边界的 D 型图，其类型与 $-Y(n_1,\ n_2)$ 的图相同，即 β 型或 α 型。要实现绕 b 的单次负德恩扭转，我们将其与图 7.4 中的一个双模图配对（取决于我们选择 β 型还是 α 型图）。

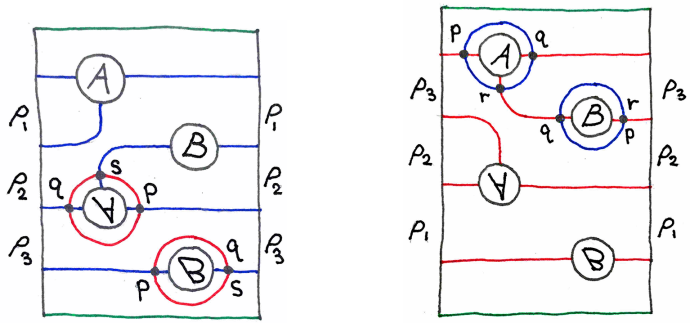


FIGURE 7.4

（遗憾的是，在这里追踪定向非常令人头疼。请记住，我们所有的 Heegaard 图都涉及定向反转。在确定应使用哪个双模图之前，先恢复到原始定向或许更为稳妥。具体做法是将 α 弧 重新着色为 β弧，反之亦然。同样重要的是要牢记，对于 α 型图，三维流形的边界是从内部观察的；对于 β 型图，边界则是从外部观察的。）

在这两个图示中，我们将左侧边界解释为以 D 型方式作用，将右侧边界解释为以 A 型方式作用。这样，上述图示就被赋予

$\widehat{\ }$同构的模，我们称之为 $CFDA(\tau)$。我们有

$$\widehat{CF}\big(-Y(f)\big) \cong \widehat{CFA}\big(-Y(n_1,n_2),\mathcal{F}_{\mathrm{II/IV}}\big) \boxtimes \underbrace{\widehat{CFDA}(\tau) \boxtimes \cdots \boxtimes \widehat{CFDA}(\tau)}_{|n_b| \text{ times}} \boxtimes \widehat{CFD}\big(-Y(n_3,n_4),\mathcal{F}_{\mathrm{I/III}}\big).$$

$\widehat{\ }$双模 $CFDA(\tau)$ 有三个生成元：$\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{s}$，其幂等元作用为

$$\iota_0 \cdot \mathbf{p} \cdot \iota_0 = \mathbf{p}, \qquad \iota_1 \cdot \mathbf{q} \cdot \iota_1 = \mathbf{q}, \qquad \iota_0 \cdot \mathbf{s} \cdot \iota_1 = \mathbf{s}.$$

在 [LOT15 第 10.2], 节中，计算得到非零微分为

$$\begin{aligned}
m_{0,1,2}(\mathbf{q},\rho_2,\rho_1) &= \rho_2 \otimes \mathbf{s}, & m_{0,1,2}(\mathbf{q},\rho_2,\rho_{12}) &= \rho_2 \otimes \mathbf{p},\\
m_{0,1,2}(\mathbf{q},\rho_2,\rho_{123}) &= \rho_{23} \otimes \mathbf{q}, & m_{0,1,1}(\mathbf{p},\rho_1) &= \rho_{12} \otimes \mathbf{s},\\
m_{0,1,1}(\mathbf{p},\rho_{12}) &= \rho_{12} \otimes \mathbf{p}, & m_{0,1,1}(\mathbf{p},\rho_{123}) &= \rho_{123} \otimes \mathbf{p},\\
m_{0,1,1}(\mathbf{p},\rho_3) &= \rho_3 \otimes \mathbf{q}, & m_{0,1,0}(\mathbf{s}) &= \rho_1 \otimes \mathbf{q},\\
m_{0,1,1}(\mathbf{s},\rho_2) &= \mathbf{p}, & m_{0,1,1}(\mathbf{s},\rho_{23}) &= \rho_3 \otimes \mathbf{q}.
\end{aligned}$$

命题 7.2。设 Y 是一个边界为环面且框架为 $\mathcal{F}$ 的紧致三维流形。设 Γ 是 ∂Y 上对应于幂等元 ι_0 的缝合线。考虑由下式给出的同构

$$\widehat{HFA}(Y,\mathcal{F}) \cdot \iota_0 \cong H_*\big(\widehat{CFA}(Y,\mathcal{F}) \boxtimes \widehat{CFDA}(\tau)\big) \cdot \iota_0 \cong SFH(Y,\Gamma)$$

它们由附加对应于 ι_0 的缝合帽所诱导。定义同构

$$\Phi\colon SFH(Y,\Gamma) \to SFH(Y,\Gamma)$$

by

$$\Phi([\mathbf{x}] \cdot \iota_0) = [\mathbf{x} \otimes \mathbf{p}] \cdot \iota_0, \qquad \mathbf{x} \in \widehat{CFA}(Y,\mathcal{F}),\ m_1(\mathbf{x}) = 0.$$

那么 Φ 保持自旋^c 结构。

证明。我们通过操作 Heegaard 图来证明这一点。这里展示 $(Y,\ \mathcal{F})$ 和 τ 的图为 β 型时的情形。将缝合帽附加到 $(Y,\ \mathcal{F})$ 的图上后，所得图经过可能的手柄滑动（如图 7.5 所示）即可进行一次去稳定化。若同时附加 τ 和缝合帽，则经过适当的手柄滑动后，所得图可以进行三次去稳定化，如图 7.6 所示。

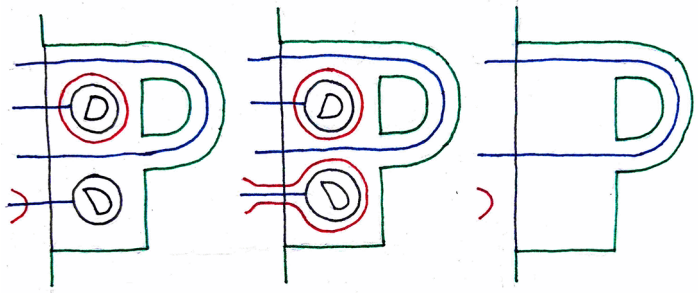


FIGURE 7.5

在这两种情况下，得到的都是同一个 Heegaard 图（$Y,\ \Gamma$）。每次手柄滑动和去稳定化都只会在远离 ∂Y 的三维球内改变 Y 上的伪梯度向量场。因此，上文定义的同构 Φ 保持旋量^c 结构不变。□

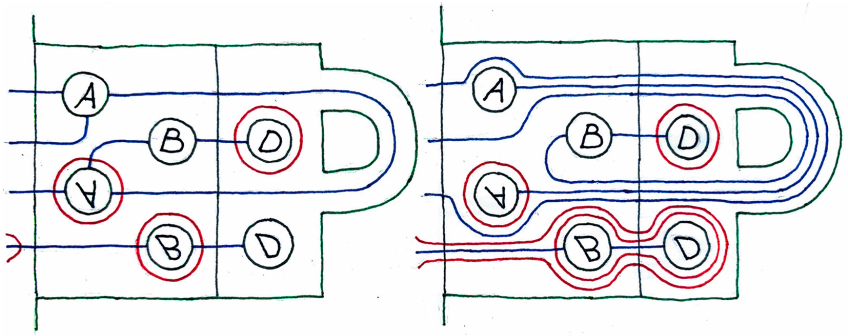


FIGURE 7.6. 右侧的图可以连续稳定化消去三次，从而得到图 7.5 中最右侧的图。

.

回忆一下，Γ_λ 表示 $\partial Y(n_1, n_2)$ 上一对与页平行的缝合线。缝合弗洛尔同调 $(-Y(n_1, n_2), -\Gamma_\lambda)$ 的生成元 $n_1 + n_2$各自具有不同的旋量^{c}结构。从图 6.5 可以看出这一点；注意，$\mathrm{Spin}^c(-Y(n_1, n_2), -\Gamma_\lambda)$ 是群的一个挠子

$$H_1\big(Y(n_1,n_2)\big) \cong \langle \mu_1, \mu_2 \,|\, n_1\mu_1 = n_2\mu_2 \rangle \cong \mathbb{Z}/(n_1,n_2) \oplus \mathbb{Z}.$$

在图 6.5 的 β 型图中，μ_1，μ_2 由曲线表示，这些曲线与其中一个 β 圆相交一次，而不与另一个 β 圆或 β 弧相交。对于 $i \geq 0$，令 $\mathcal{F}_{1,\,i}$ 表示通过将 τ 附着到 $(-Y(n_1, n_2), \mathcal{F}_{\mathrm{II/IV}})$ 共 i 次而得到的 $\partial(-Y(n_1, n_2))$ 上的框架。反复应用命题 7.2，我们得到

$$c_A(\xi, \mathcal{F}_{1,i}) = c_A(\xi, \mathcal{F}_{\mathrm{II/IV}}) \otimes \underbrace{\mathbf{p} \otimes \cdots \otimes \mathbf{p}}_{i \text{ times}}.$$

现在，我们终于可以证明所需的消失结果了。

定理 *4.3* 的证明。令 $\mathbf{x} \in \widehat{CFA}(-Y(n_1, n_2), \mathcal{F}_{\mathrm{II/IV}})$ 和 $\mathbf{y} \in \widehat{CFD}(-Y(n_1, n_2), \mathcal{F}_{\mathrm{I/III}})$ 分别表示图 6.19 和图 7.3 中的蓝色接触不变量。根据前面的讨论，我们有

$$c(f) = \mathbf{x} \otimes \underbrace{\mathbf{p} \otimes \cdots \otimes \mathbf{p}}_{|n_b| \text{ times}} \otimes \mathbf{y}.$$

对于 $i \geq 0$，令 $\mathcal{F}_{2,\,i}$ 表示通过将 τ 附加到 $(-Y(n_1, n_2), \mathcal{F}_{\mathrm{I/III}})$总共 i次而得到的 $\partial(-Y(n_3, n_4))$ 上的框架，并设

$$\mathbf{y}_i = \underbrace{\mathbf{p} \otimes \cdots \otimes \mathbf{p}}_{|i| \text{ times}} \otimes \mathbf{y} \in \widehat{CFD}\big(-Y(n_3,n_4), \mathcal{F}_{2,i}\big).$$

在图 7.7 中，我们用蓝色表示随着 i 增大而变化的 $\mathbf{y}_i$。我们只展示 $\widehat{CFD}(-Y(n_3, n_4), \mathcal{F}_{2,\,i})$ 的类型 D图的一部分。除两端的生成元外，我们画出了所有入射箭头和出射箭头。

对于 $i \geq 1$，$\widehat{CFD}(-Y(n_3, n_4), \mathcal{F}_{2,\,i})$ 是图 7.7 中所示的绿色生成元。我们声称，只要 $i > n_1$，$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_i$就是$\mathbf{x} \otimes \mathbf{z}_i$的边界，由此得到所需的消失结果。对于每个 $i \geq 1$，$\mathbf{x} \otimes \mathbf{z}_i$ 的边界都包含$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_i$ 这一项。然而，如果 $i \leq n_1$，那么

$$m_{i+1}(\mathbf{x}, \underbrace{\rho_{12}, \ldots \rho_{12}}_{i-1 \text{ times}}, \rho_1) = \mathbf{x}'_i$$

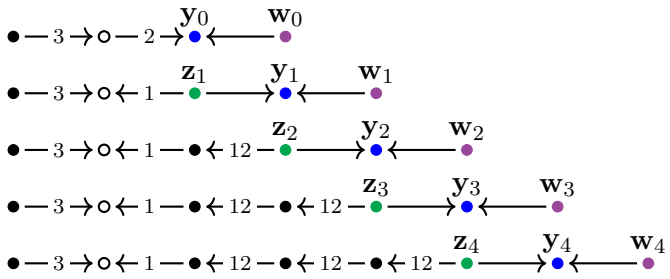


FIGURE 7.7

对于某个生成元 $\mathbf{x}'_i$，并且

$$\delta^i(\mathbf{z}_i) = \underbrace{\rho_{21} \otimes \cdots \otimes \rho_{21}}_{i-1 \text{ times}} \otimes \rho_1 \otimes \mathbf{z}'_i$$

对于某个生成元 $\mathbf{z}'_i$。在这些情况下，不难看出

$$\partial^{\boxtimes}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{z}_i) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_i + \mathbf{x}'_i \otimes \mathbf{z}'_i, \qquad 0 \le i \le n_1.$$

当 $i > n_1$ 时，$\partial^{\boxtimes}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{z}_i)$ 中的这一额外项消失。 □

注记 7.3. 此时，读者或许会问，为什么我们没有利用图 7.7 中的紫色生成元来消去接触不变量。令 $\mathbf{w}_i \in \widehat{CFD}(-Y(n_3, n_4), \mathcal{F}_{2,i})$ 表示这个生成元，并假设 $n_3 \le n_4$。事实证明，对于 $0 \le i < n_3$，有

$$\delta^2(\mathbf{w}_i) = \rho_3 \otimes \rho_2 \otimes \mathbf{w}'_i$$

对于某个生成元 $\mathbf{w}'_i$。此外

$$m_3(\mathbf{x}, \rho_3, \rho_2) = \mathbf{x}''$$

对于某个生成元 $\mathbf{x}''$。当 $i = n_3$ 时，则有

$$\delta^2(\mathbf{w}_{n_3}) = \rho_3 \otimes \rho_{23} \otimes \mathbf{w}'_{n_3}$$

对于某个生成元 $\mathbf{w}'_{n_3}$。另一方面

$$m_3(\mathbf{x}, \rho_3, \rho_{23}) = \mathbf{x}'''$$

对于某个生成元 $\mathbf{x}'''$。确实可以证明

$$\partial^{\boxtimes}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{w}_i) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_i + \mathbf{x}'' \otimes \mathbf{w}'_i \quad \text{for } i < n_3, \qquad \partial(\mathbf{x} \otimes \mathbf{w}_{n_3}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_i + \mathbf{x}''' \otimes \mathbf{w}'_{n_3}.$$

然而，当 $i > n_3$ 时，$\partial^{\boxtimes}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{w}_i)$ 中的这一附加项消失。因此，假设 $n_3 = \min\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$，这也给出了上述命题的另一种证明。沿着这些思路还可以作出若干论证。

APPENDIX A. MODULES OVER THE TORUS ALGEBRA

本附录简要回顾环面代数上的各种模。更详细的介绍请参见 [LOT18，第 2], [LOT15], 章，以及 [Zar10，附录 B]。我们首先定义环面代数 $\mathcal{A}$。这是一个定义在二元域 $\mathbb{F}_2$ 上的 8 维（含幺、结合、非交换）代数，其作为向量空间由以下生成元张成

$$\iota_0, \iota_1, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{123}.$$

生成元 ι_0, ι_1 是两两正交的极小幂等元。幂等元对其他生成元的作用如下:

$$\rho_1 = \iota_0\rho_1\iota_1, \qquad \rho_2 = \iota_1\rho_2\iota_0, \qquad \rho_3 = \iota_0\rho_3\iota_1,$$
$$\rho_{12} = \iota_0\rho_{12}\iota_0, \qquad \rho_{23} = \iota_1\rho_{23}\iota_1, \qquad \rho_{123} = \iota_0\rho_{123}\iota_1.$$

注意, $\mathbf{1} = \iota_0 + \iota_1$ 是一个恒等元。非幂等元生成元之间的非零乘积为

$$\rho_1\rho_2 = \rho_{12}, \qquad \rho_2\rho_3 = \rho_{23}, \qquad \rho_1\rho_{23} = \rho_{12}\rho_3 = \rho_{123}.$$

令 $\mathcal{I} \leq \mathcal{A}$ 表示由 ι_0 和 ι_1张成的子代数。注意, $\mathcal{I}$ 是一个交换含幺代数; 所有 $\mathcal{I}$-模都是含幺的, 并且我们不区分左 $\mathcal{I}$-模与右 $\mathcal{I}$-模。

A 型模。 $\mathcal{A}$ 上的右 A 型模是一个 $\mathcal{I}$-模 M , 并配备有"乘法"

$$m_k \colon M \otimes_{\mathcal{I}} \underbrace{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} \cdots \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{A}}_{k-1 \text{ times}} \to M, \qquad k \geq 1$$

它们满足 A_∞ 关系 (此处不予详述) 。此外, 若 M 满足以下条件, 则称其为严格含幺

$$m_2(\mathbf{x}, \mathbf{1}) = \mathbf{x}, \qquad m_k(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{1}, \ldots) = 0 \qquad \text{for all } \mathbf{x} \in M,\, k \geq 3.$$

A_∞ 关系之一保证了 m_1: $M \to M$ 是一个微分, 即 $m_1^2 = 0$。事实上, 若对 $k \geq 3$ 有 $m_k = 0$, 则可恢复 $\mathcal{A}$ 上的通常意义下的右微分模, 其中 m_1是微分, 而 m_2: $M \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{A} \to M$ 是 $\mathcal{A}$的右作用。

A 型 模称为有界, 如果对于所有$\mathbf{x} \in M$, 都存在某个 n , 使得 ll

$$k_1 + \cdots + k_i > n, \qquad a_{1,1}, \ldots, a_{i,k_i} \in \mathcal{A}$$

有

$$m_{k_i+1} \circ (m_{k_{i-1}+1} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{A}^{\otimes k_i}}) \circ \cdots \circ (m_{k_1+1} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{A}^{\otimes k_2+\cdots+k_i}})(\mathbf{x} \otimes a_{1,1} \otimes \cdots \otimes a_{i,k_i}) = 0.$$

讨论盒张量积时需要这一有界性条件。

D 型模。 $\mathcal{A}$ 上的左 D 型模是一个配备有"微分"的 $\mathcal{I}$-模 N

$$\delta^1 \colon N \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} N.$$

在环面代数的情形下, δ^1 应满足以下条件:

$$(\mu_2 \otimes \mathbb{I}_N) \circ (\mathbb{I}_{\mathcal{A}} \otimes \delta^1) \circ \delta^1 \colon N \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} N$$

为零, 其中 μ_2: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是代数乘法。(在一般情形下, 我们讨论微分代数上的 D 型模, 此时上述方程还包括一个涉及代数微分的附加项。)

给定这样的 D 型模 N, 可以通过将微分定义为, 使 $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} N$成为 $\mathcal{A}$ 上的左微分模

$$(\mu_2 \otimes \mathbb{I}_N) \circ (\mathbb{I}_A \otimes \delta^1) \colon \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} N \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} N.$$

(一般而言, 还存在一个涉及代数微分的附加项。) 我们常将 D 型模与其关联的微分模混为一谈。给定上述 D 型模, 我们归纳地定义映射

$$\delta^k \colon N \to \underbrace{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} \cdots \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{A}}_{k \text{ times}} \otimes_{\mathcal{I}} N, \qquad k \geq 0$$

通过设定 $\delta^0 = \mathbb{I}_N$ 并

$$\delta^k = (\mathbb{I}_{\mathcal{A}^{\otimes k-1}} \otimes \delta^1) \circ \delta^{k-1}, \qquad k \geq 2.$$

如果对于所有 $\mathbf{x} \in N$，都存在某个 n，使得 $\delta^k(\mathbf{x}) = 0$ 对所有 $k > n$ 均成立，则称该 D 型模是 有界 。

在讨论双模之前，我们先指出，双模的有界性概念更为微妙。具体而言，双模可以是左有界、右有界，或有界（有界比同时左有界和右有界要求更强）。我们不在此讨论这一问题，建议读者参阅 [LOT15, 第 2.2 节。4]。

D 型 DD 双模。 </style}在 $\mathcal{A}$ 上的 D 型 DD 双模是一个 $\mathcal{I}$-模 N，并配备一个结构映射

$$\delta^1 \colon N \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} N \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{A}.$$

对于环面代数的情形， δ^1 应满足以下条件:

$$(\mu_2 \otimes \mathbb{I}_N \otimes \mu_2) \circ (\mathbb{I}_{\mathcal{A}} \otimes \delta^1 \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{A}}) \circ \delta^1 \colon N \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} N \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$$

其结果为零。（一般而言，还会有一个涉及代数微分的附加项。）如上所述，这一结构可赋予 $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} N \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{A}$ 微分双模结构。我们再次通过迭代定义映射

$$\delta^k \colon N \to \underbrace{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} \cdots \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{A}}_{k \text{ times}} \otimes_{\mathcal{I}} N \otimes_{\mathcal{I}} \underbrace{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} \cdots \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{A}}_{k \text{ times}}, \qquad k \geq 0$$

其方式与上述类似。

DA 型双模。在 $\mathcal{A}$ 上的 DA 型双模是一个 $\mathcal{I}$-模 M，并配备结构映射

$$m_{0,1,k} \colon M \otimes_{\mathcal{I}} \underbrace{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} \cdots \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{A}}_{k-1 \text{ times}} \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} \otimes M, \qquad k \geq 1$$

它们满足适当的 $\mathcal{A}_\infty$ 关系。（在某些地方$m_{0,\ 1,\ k}$ 也记作 δ^1_k。）若M 满足严格含幺条件，则称其为

$$m_{0,1,2}(\mathbf{x}, \mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}, \qquad m_{0,1,k}(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{1}, \ldots) = 0 \qquad \text{for all } \mathbf{x} \in M,\ k \geq 3.$$

更多细节请参见 [LOT15 第 2.2 节4]。

将 A 型模与 D 型模配对。设 $(M,\ \{m_k\}_{k\geq 1})$ 是一个严格幺右 A 型模，$(N,\ \delta^1)$ 是一个左 D 型模，并且 M 和 N 中至少一个是有界的。我们定义一个微分 $\mathbb{F}_2$-向量空间 $(M \boxtimes N,\ \partial^{\boxtimes})$，其底层向量空间为 $M \otimes_{\mathcal{I}} N$，微分定义为

$$\partial^{\boxtimes}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \sum_{k \geq 0} (m_{k+1} \otimes \mathbb{I}_N) \circ (\mathbb{I}_M \otimes \delta^k)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}), \qquad \mathbf{x} \in M,\, \mathbf{y} \in N.$$

有界性假设保证上述求和是有限的。

将 A 型 DA 双模与 D 型模配对。 设 $(M, \{m_{0,1,k}\}_{k\geq 1})$ 是一个严格含幺的 A 型 DA 模，(N, δ^1) 是一个 D 型模，其中 N 有界或在右侧 M 有界。我们定义一个 D 型模 $(M \boxtimes N, \delta^1_{\boxtimes})$，其底层 $\mathcal{I}$-模为 $M \otimes_{\mathcal{I}} N$，其结构映射定义为

$$\delta^1_{\boxtimes}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \sum_{k \geq 0} (m_{0,1,k+1} \otimes \mathbb{I}_N) \circ (\mathbb{I}_M \otimes \delta^k)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}), \qquad \mathbf{x} \in M,\, \mathbf{y} \in N.$$

Pairi 将 A 型模与 DD 型双模配对。对每个 $k \geq 0$，定义

$$\pi_k \colon \underbrace{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} \cdots \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{A}}_{k \text{ times}} \to \mathcal{A}$$

通过设定

$$\pi_k(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_k, \qquad a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}.$$

当 $k = 0$ 时，将 $\pi_0 \colon \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ 解释为包含映射。设 $(M, \{m_k\}_{k \geq 1})$ 是一个严格幺右 A 型模，且 N 是一个 DD 型模，其中 M 有界或 N 在左侧有界。我们定义一个右 D 型模 $(M \boxtimes N, \delta^1_{\boxtimes})$，其底层 $\mathcal{I}$-模为 $M \otimes_{\mathcal{I}} N$，其结构映射定义为

$$\delta^1_{\boxtimes}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \sum_{k \geq 0} (\mathbb{I}_M \otimes \mathbb{I}_N \otimes \pi_k) \circ (m_{k+1} \otimes \mathbb{I}_N \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{A}^{\otimes k}}) \circ (\mathbb{I}_M \otimes \delta^k)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}), \qquad \mathbf{x} \in M, \mathbf{y} \in N.$$

对于环面代数的情形，利用 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \cong \mathcal{A}$ 这一事实，我们可以将 $(M \boxtimes N, \delta^1_{\boxtimes})$ 重新解释为 $\mathcal{A}$ 上的左 D 型模。

Appendix B. Calculating bordered Floer homology

在本附录中，我们描述模的计算

$$\widehat{CFA}\big(-Y(n,m), \mathcal{F}\big) \qquad \text{and} \qquad \widehat{CFD}\big(-Y(n,m), \mathcal{F}\big)$$

其中 $\mathcal{F}$ 是第 6 节中的一种框架。我们首先为 $-Y(n, m)$确定一个亏格更低的带边图。这个图源自 S^3 中如下的链环手术图：

$$\big(Y(g_{n,m})_0(K), K^*\big),$$

其中 $Y(g_{n,\,m})_0(K)$表示对 K 进行 0-手术，而 K^* 是该手术的对偶结，即粘入的实心环面的核。如图 B.1 所示。

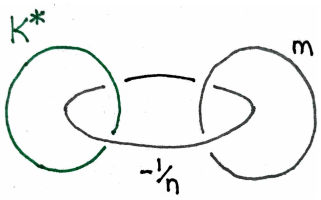


Figure B.1

（要得到这个链环手术图，可以沿图 6.10 中的 K 进行 0-手术，然后对 n框架的平凡结施展 slam-dunk 手法。或者，也可以把它看作封闭 $Y(g_{n.m})$ 中平行于 K 的粘合分量。）

从图中去掉 K^*的管状邻域 $N(K^*)$，便得到 $Y(n,\ m)$。$Y(n,\ m)$的页面与 $\partial N(K^*)$相交于 K^*的子午线。这给出了 $-Y(n,\ m)$的如下带边 Heegaard 图。

在图 B.2 中，有两条 α 曲线，α_1，α_2 分别以粉色和红色显示。有三条 β曲线，β_1，β_2，β_3 分别以青色、蓝色和绿色显示。可以看出，上述基点选择对应于第 6 节中的 I/III 位置。（根据同一节开头的讨论，I/III 的歧义无法消除，但得到的模相同。）图 B.3 展示的是同一张图，不过绘制时进行了两次手术，从而得到一个二亏格曲面。

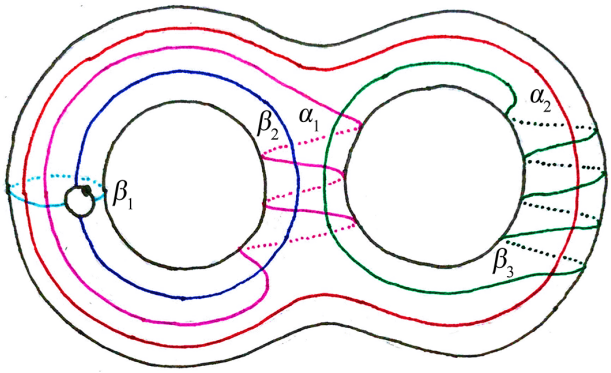


FIGURE B.2. 情形 $n = 3, m = 4$。

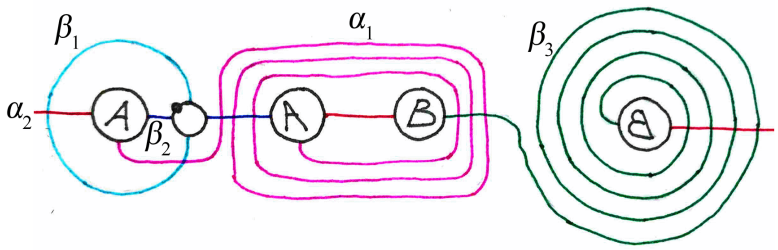


FIGURE B.3. 红色的 α 曲线应理解为经过无穷远点。

现在我们执行 Sarkar–Wang 算法 [SW10]，得到图 B.4 中的良好海加德图。换句话说，我们对上面的 β-曲线进行同痕（即“手指移动”），以确保每个不与基点相邻的区域都是正方形或双边形。与带基点匹配圆相邻的三个非基点区域是“正方形”，其中一条边位于带基点匹配圆上。从良好海加德图计算 Heegaard Floer 同调完全是组合性的。

在图 B.5、B.6 和 B.7 中，我们放大图中的部分区域，以展示如何标记点。为清晰起见，我们遵循以下约定，根据点所在的曲线来标记点。



我们描绘 c 形 $n = 3$ 和 $m = 4$，但尝试标明一般情形下的标签 .

注记 B.1. 要安全地将 Sarkar-Wang 算法应用于 β 型带边 Heegaard 图，应对 α 曲线进行手指移动，首先按照 [LOT18 第 8] 章中的说明，在带基点匹配圆附近进行一次“保护性手指移动”。我们没有这样做，而是寻找了一系列 β 手指移动，使这些移动不会与带基点匹配圆发生碰撞。这样做是为了使手指移动的次数不依赖于 n 和 m。

命题 B.2. 模 $\widehat{CFD}\left(-Y(n,m)\ \mathcal{I}_{\mathrm{I/III}}\right)$ 的一个模型由图 7.1中的 *I/III* 装饰图给出。

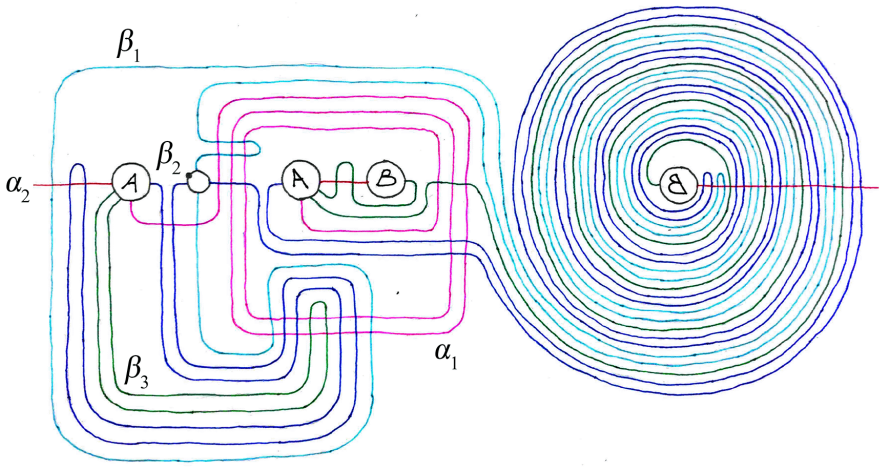


FIGURE B.4

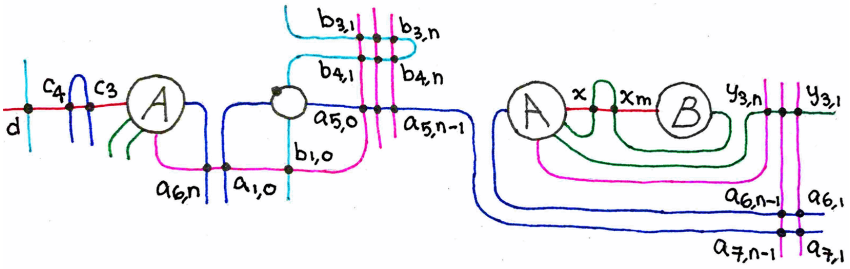


FIGURE B.5

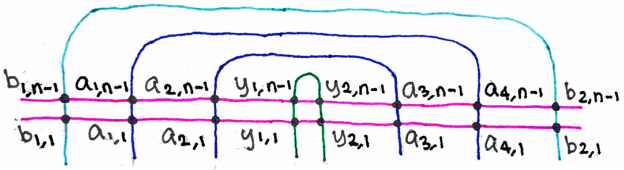


FIGURE B.6

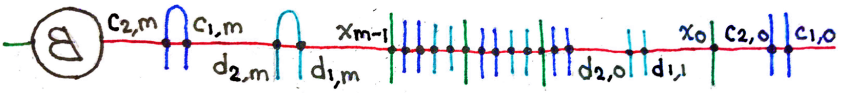


FIGURE B.7

证明。 我们统计图 B.4 中的正方形和双边形，以确定 $\widehat{CFD}\left(-Y(n,m)\ \mathcal{F}_{\mathrm{I/III}}\right)$的一个模型。然后，按照例如 [Lev12 第 2 节6]中的说明，通过约化纯微分来简化所得的 D 型模。

回顾一下，纯微分的形式为 $\delta^1(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{y}$。要从 D 型装饰图中的$\mathbf{x}$ 到$\mathbf{y}$ 移除纯微分，需要找出所有如下形式的之字形路径

$$\mathbf{z} \xrightarrow{\rho_I} \mathbf{y} \leftarrow \mathbf{x} \xrightarrow{\rho_J} \mathbf{w},$$

并将这样的之字形路径替换为

$$\mathbf{z} \xrightarrow{\rho_I \rho_J} \mathbf{w}.$$

这里允许标签 ρ_I，ρ_J 中的一个或两个为空。新标签 $\rho_I \rho_J$ 表示环面代数 $\mathcal{A}$ 中 ρ_I 与 ρ_J 的乘积。新的装饰图表示一个等价的 D 型模。如果消去多个纯微分，结果可能取决于消去它们的具体顺序。

现在我们概述一种系统的方法，用于简化由良好海加德图得到的 D 型装饰图。考虑 D 型装饰图的一个子图，它由所有仅有未标记箭头（纯微分）的顶点（生成元）构成。在这个子图的每个连通分支中，我们尝试尽可能地简化，同时不引入任何额外的非纯微分。（不过，我们可以移除非纯微分，或改变现有非纯微分的源点或目标点。）这样，我们就可以执行这些简化，而无需指定先简化哪个分支。我们在图 B.8 至 B.24 中展示这一过程。

请注意，这种简化并非只有一种方法。图中隐含地表示了对每个分量依次消去一系列纯微分。不过，为避免占用过多篇幅，我们省略了具体的消去顺序。（作者认为，许多不同的消去顺序都会得出相同的最终结果。）对于每个分量，我们展示以下内容：

- 我们给出初始的未简化分量，以及所有从其他分量指向该分量或从该分量指向其他分量的非纯微分。
- 如果该分量可以被完全消去，我们会注明这一点。如果不能，则用一个大写字母标记新简化分量中的生成元。
- 如果该分量不能被完全消去，我们会展示简化后的分量。在这个简化后的分量中，有些指入或指出的非纯微分可能因原分量的简化而被消去；不过，也有些可能是由于其他分量的简化而被消去的。

图从下一页开始。

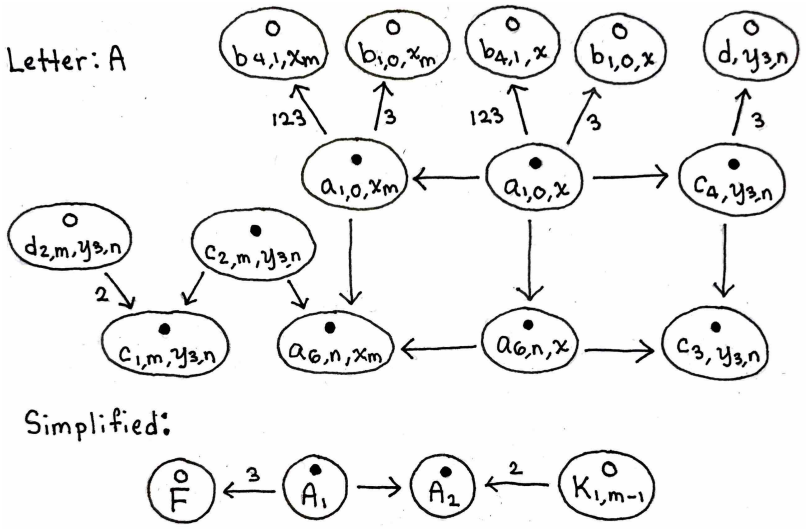


FIGURE B.8

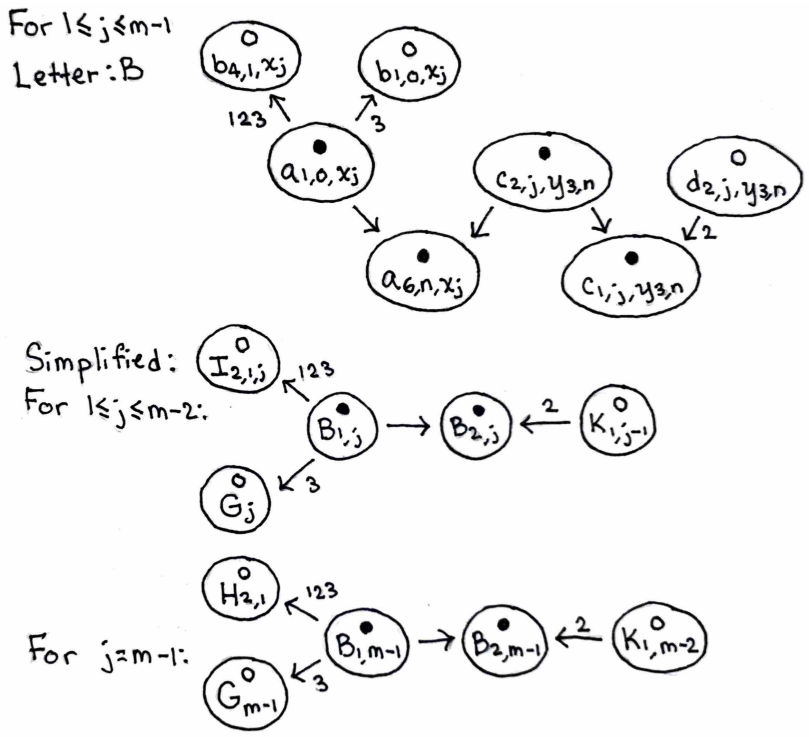


FIGURE B.9

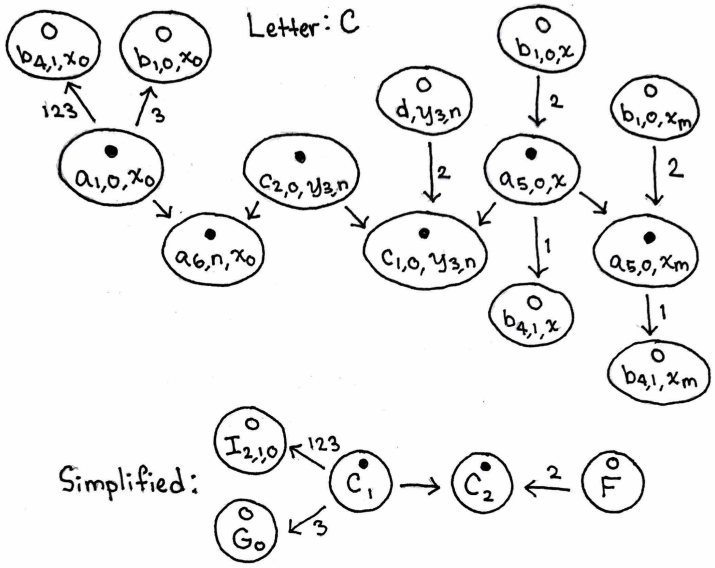


FIGURE B.10

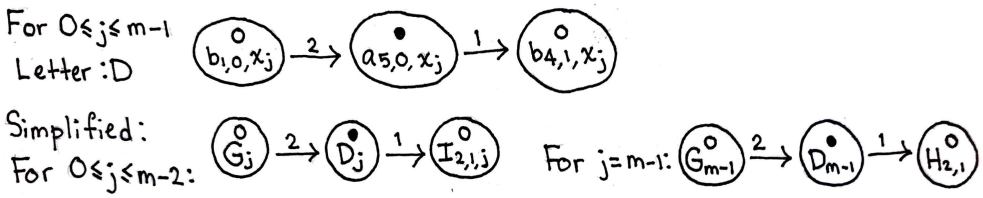


FIGURE B.11

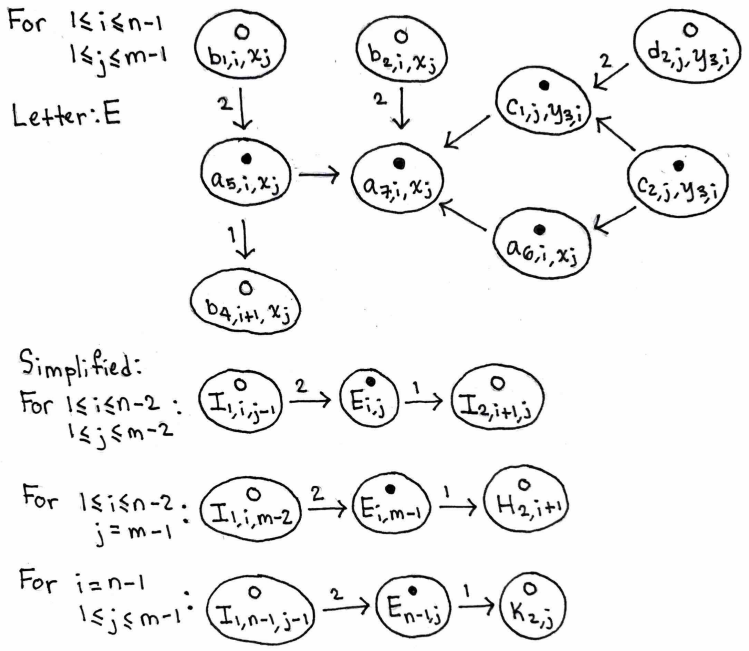


FIGURE B.12

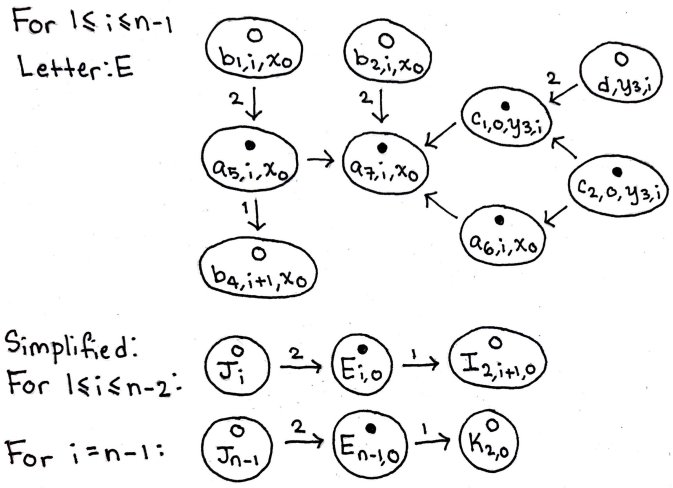


FIGURE B.13

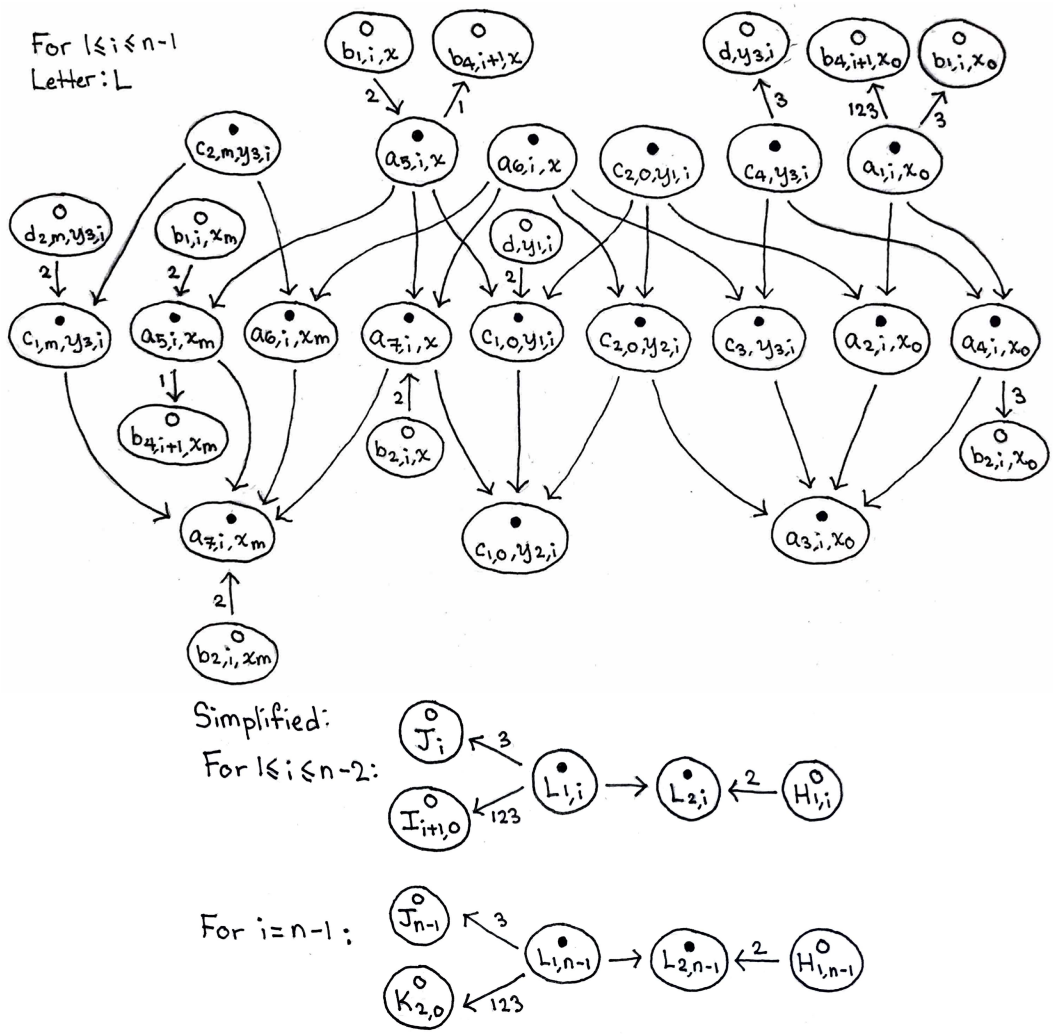


FIGURE B.14

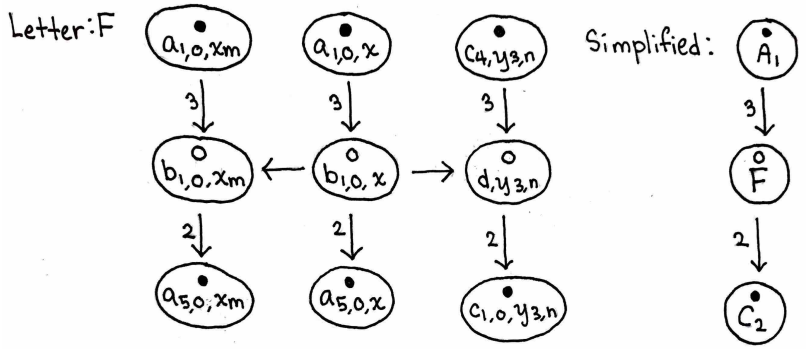


FIGURE B.15

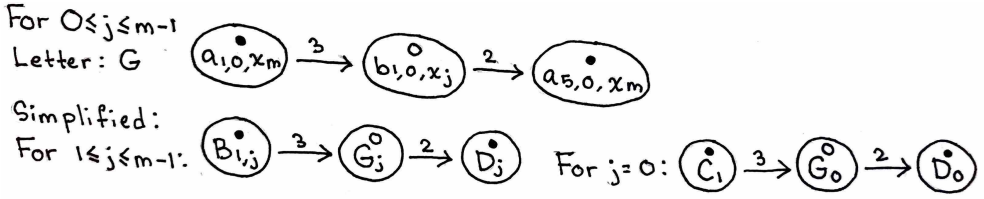


FIGURE B.16

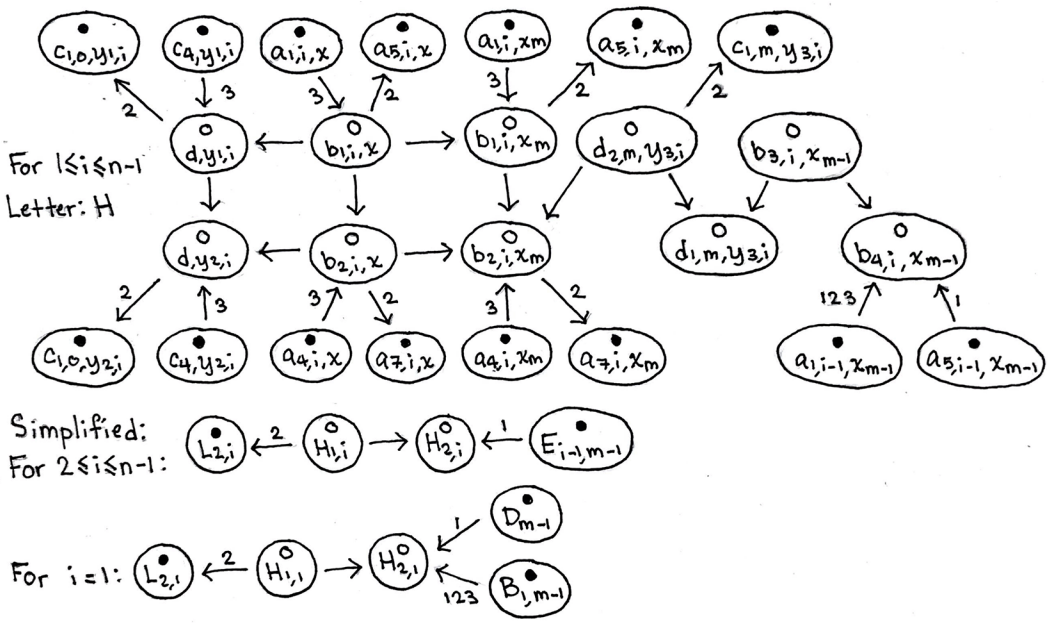


FIGURE B.17

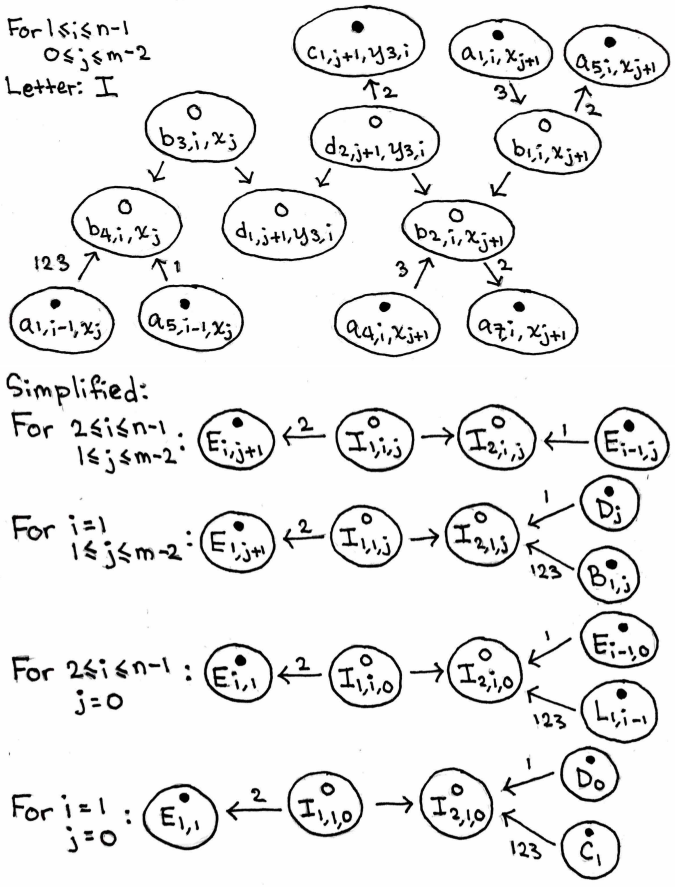


FIGURE B.18

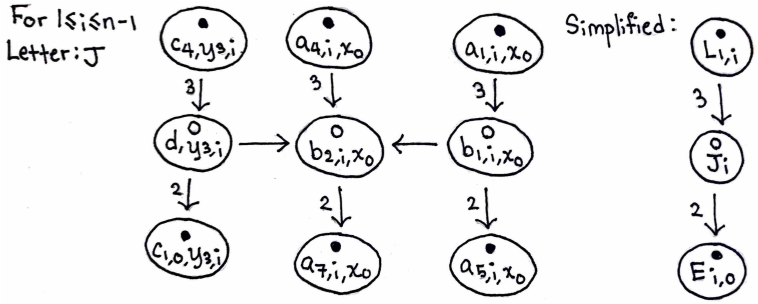


FIGURE B.19

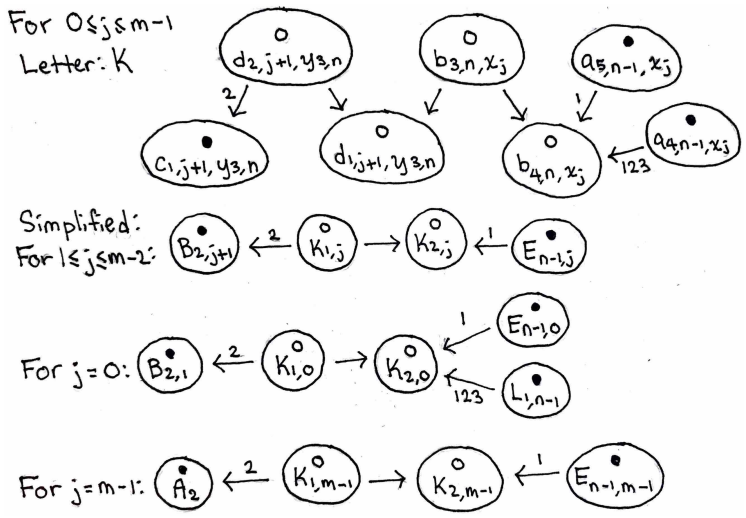


FIGURE B.20

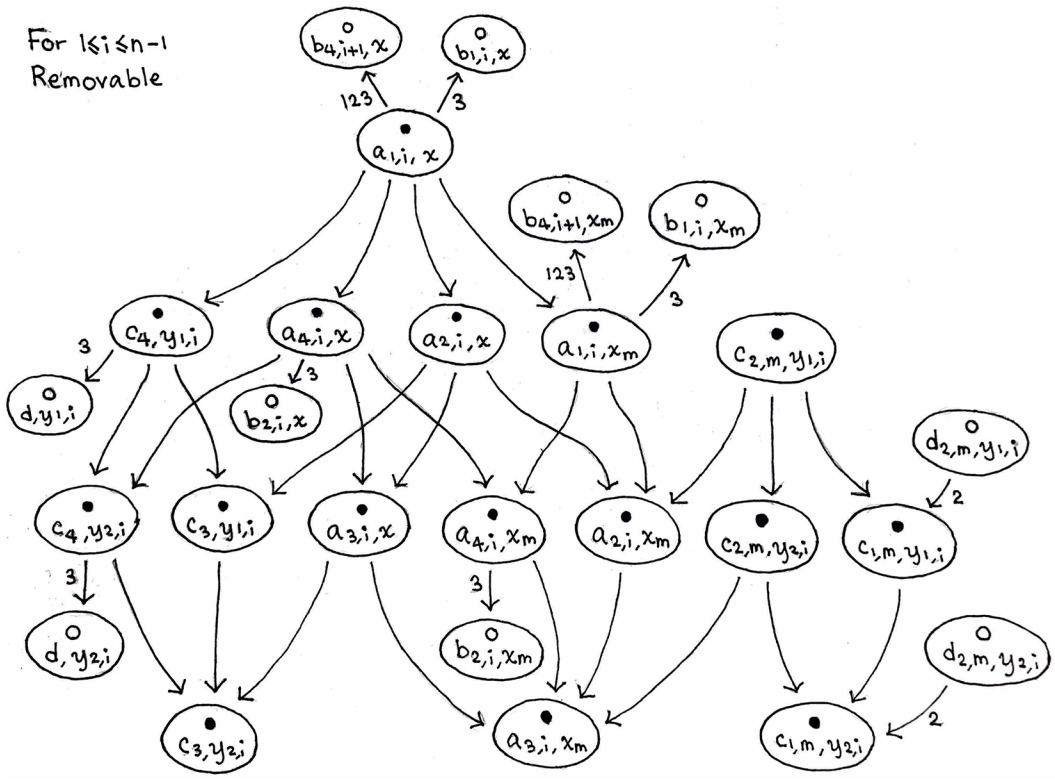


FIGURE B.21

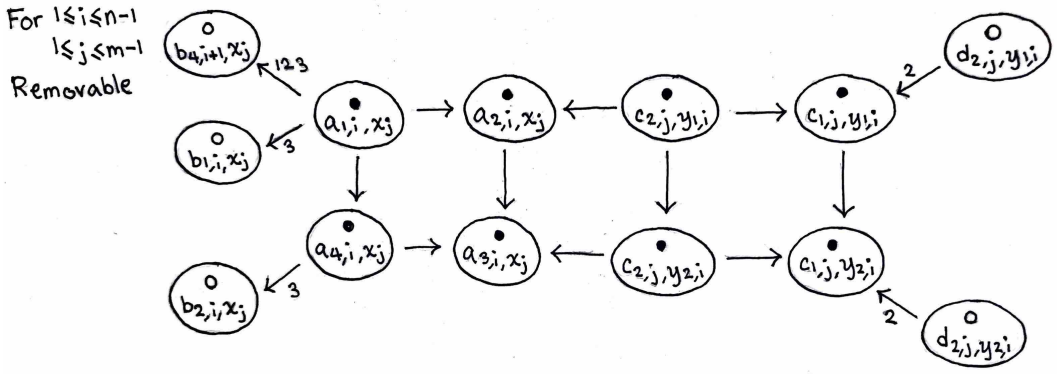


FIGURE B.22

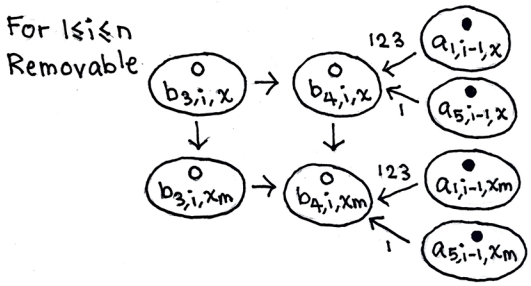


FIGURE B.23

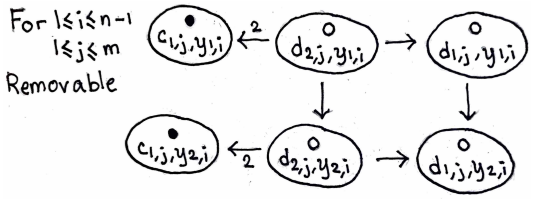


FIGURE B.24

Ga将所有简化分量粘合起来，得到图 B.25 中的装饰图 .

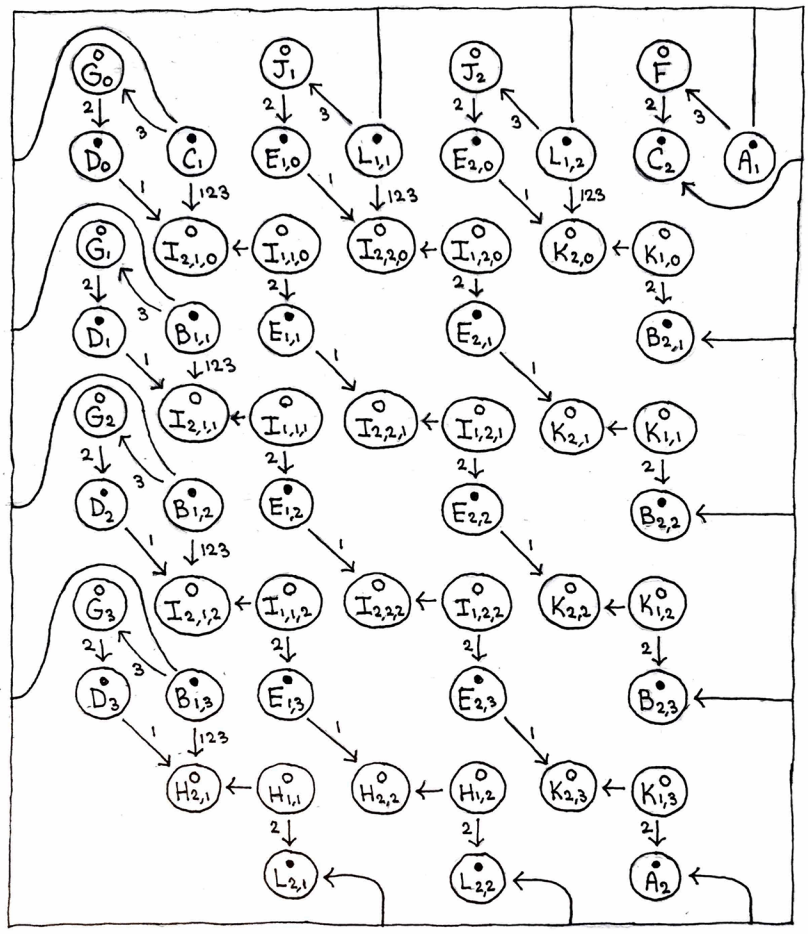


FIGURE B.25. 情形 $n = 3, m = 4$。应将该装饰图理解为位于环面上。

以任意顺序消去该装饰图中的纯微分，便得到图 7.1 中的 I/III 图。□

文献 [HL16] 说明了如何将没有纯微分的CFD 的 D 型装饰图转化为CFA 的 A 型装饰图（没有 m_1 作用）。简言之，只需进行标签更改$1 \to 3$ 和 $3 \to 1$。执行这一过程即可得到以下推论。

推论 B.3。 模 $\widehat{CFA}\big(-Y(n,m)\ \mathcal{F}_{\mathrm{I/III}}\big)$ 有一个由图6.12中的 *I/III* 装饰图给出的模型。

将上述推论中的 A 型模与 [LOT15 第 10 节2] 和 [LOT14 第 5], 节中的双模进行张量积，可以改变基点的位置。（尽管上述 A 型模不是有界的，但由于第 7 节开头所述的相同原因，这些双模在左侧和右侧都是有界的。）由此得到如下结果。

推论 B.4。 模 $\widehat{CFD}\left(-Y(n,m)\ \mathcal{F}_{\mathrm{II/IV}}\right)$ 的一个模型由图 7.1中的 *II/IV* 装饰图给出。

最后，我们再次应用 [HL16] 中的步骤，得到如下结果。

推论 B.5. 模 $\widehat{CFA}\left(-Y(n,m)\ \mathcal{F}_{\mathrm{II/IV}}\right)$ 有一个由图6.12中的 *I/III* 装饰图给出的模型。

Appendix C. Data from `hf-hat-obd-nice`

在本附录中，我们给出从 hf-hat-obd-nice [KMHMW25] 获得的一些数据。首先，我们给出一个 Python 程序，它可以输出一个与单值化为 $f \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4},\partial\Sigma_{0,4})$ 的开书相对应的 Heegaard 图的区域列表，其分数 Dehn 扭转系数均为 1，且

$$\pi(f) = \pm\begin{bmatrix} r & s \\ p & q \end{bmatrix}, \qquad r,s,p,q>0,\ p>q. \tag{C.1}$$

```
定义 区域_列表 (r , s, p , q):
    一个 = 1 +q + ((r *  q) //  p) // 2
    b = 1 +(p  - q) + ((r * (p  - q)) //  p) // 2
    n = 1 +p +r // 2
    最后 = 2 *n + q + s //2 + 2
    rlist = [
        [3, 2, 2*n + 1 , n + a + 1, n +a + 2, 4],
        [n + 2, 2, last , a + 2, a + 3, n + 3],
        [2 *n + 1 , 0, 3, 2*n + 2] ,
        [最后一个 , 1, n + 2, 最后一个- 1],
        [b + n + 1, 0, n + 1, b +n + 2] ,
        [b + 2, 1, 2*n , b + 3]]
    for i范围内(a-1):
        rlist.append([i + 4,  2*n + 3 + i,  2*n + 2 + i,  i + 3])
        rlist.append([n + 3 +i,  last -2-i,  last -1-i,  n + 2 + i])
    for i在范围内(b-3):
        rlist.append([i + 4,  n + a + 2 + i, n + a + 3 + i, i + 5])
        rlist。追加（[n + 3 +i,  a + 3 + i, a + 4 + i, n + 4 + i])
    for i范围(a-3):
        rlist.append([b + 3 +i,  2*n  -i,  2*n  -1-i,  b + 4 + i])
    rlist.append([0,  2 * n + 1, 2, n + 2, 1, b + 2, b + 1, 2 * n, 1, 最后,  2, 3,
   0, n +b + 1 , n +b , n + 1])
    返回 rlist
```

Listing 1. 生成区域列表的代码

更具体地说，考虑图 3.1 所示的页$\Sigma_{0,\ 4}$，其平行于 a_i 的绑定分量标记为 B_i。我们取该页的弧基，由以下弧组成：

- 一条斜率为 0 的弧 β_0，从 B_2 到 B_1,
- 一条斜率为 0 的弧 β_1，从 B_3 到 B_4,
- 一条斜率为 ∞ 的弧 β_2，从 B_2 到 B_3。

接着，对于 $i=0,\ 1,\ 2$，我们设定 $\alpha_i = f^{-1}(\beta_i)$。$\alpha_i$与 β_i之间的接触交点标记为 i。随后，将其余交点按如下方式排序：

(i) β_0 上的交点从 B_2 到 B_1依次递增标记（从 3 开始） .

(ii) 接下来， β_1 上的交点按照从 B_3 到 B_4的顺序递增编号。

(iii) Fin 此外， β_2 上的交点从 B_2 到 B_3依次标记为递增编号。
根据 [KMHMW25] 中的约定，可以从这些编号生成区域列表。所得区域列表可以输入 hf-hat-obd 和 hf-hat-obd-nice，具体说明见同一论文。对于 hf-hat-obd-nice，必须先使用 makenice 处理区域列表。

注记 C.1。 上文描述的 Heegaard 图几乎是 nice 图，只有 2 个六边形区域例外。可以通过两次简短的手指移动来处理这些区域。直接将 nice 图输入 hf-hat-obd-nice 可能会更高效。遗憾的是，作者尚未完成为这种 nice 图生成区域列表所必需的工作。

我们给出了使用 hf-hat-obd-nice 获得的结果表，用于判断 Heegaard Floer 接触不变量 $c(f)$ 是否为零，其中 f 如上所述。我们再次强调， f 的所有分数 Dehn 扭转系数均等于 1。在这些单值化中，我们只考虑不属于定理 3.6、3.9 以及命题 3.8、3.12所涵盖范围的那些单值化。此外，如果 p， q， r， s如 (C.1) 中所述，那么对于给定的 p， q，我们只考虑 r 和 s可能取到的最小值。（回顾一下， $\pi(f)$ 被约束为属于 PSL(2， $\mathbb{Z}$) 的子群 (2.1)。）

$\pi(f)$	$-p/q$的连分数	$c(f) = 0$?
$\pm\begin{bmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{bmatrix}$	$[-2,-3,-2]$	No
$\pm\begin{bmatrix}23 & 14\\ 18 & 11\end{bmatrix}$	$[-2,-3,-4]$	No
$\pm\begin{bmatrix}33 & 20\\ 28 & 17\end{bmatrix}$	$[-2,-3,-6]$	Yes
$\pm\begin{bmatrix}7 & 4\\ 12 & 7\end{bmatrix}$	$[-2,-4,-2]$	No
$\pm\begin{bmatrix}7 & 4\\ 26 & 15\end{bmatrix}$	$[-2,-4,-4]$	Yes
$\pm\begin{bmatrix}25 & 14\\ 16 & 9\end{bmatrix}$	$[-2,-5,-2]$	No
$\pm\begin{bmatrix}43 & 24\\ 34 & 19\end{bmatrix}$	$[-2,-5,-4]$	No
$\pm\begin{bmatrix}11 & 4\\ 30 & 11\end{bmatrix}$	$[-3,-4,-3]$	Yes
$\pm\begin{bmatrix}11 & 4\\ 52 & 19\end{bmatrix}$	$[-3,-4,-5]$	Yes
$\pm\begin{bmatrix}29 & 8\\ 18 & 5\end{bmatrix}$	$[-4,-3,-2]$	No
$\pm\begin{bmatrix}51 & 14\\ 40 & 11\end{bmatrix}$	$[-4,-3,-4]$	No
$\pm\begin{bmatrix}15 & 4\\ 26 & 7\end{bmatrix}$	$[-4,-4,-2]$	Yes

续见下一页

$\pm \begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 56 & 15 \end{bmatrix}$	$[-4, -4, -4]$	Yes
$\pm \begin{bmatrix} 53 & 14 \\ 34 & 9 \end{bmatrix}$	$[-4, -5, -2]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{bmatrix}$	$[-2, -2, -3, -3]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 39 & 28 \\ 32 & 23 \end{bmatrix}$	$[-2, -2, -3, -5]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 49 & 34 \\ 36 & 25 \end{bmatrix}$	$[-2, -2, -5, -3]$	Yes
$\pm \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 34 & 21 \end{bmatrix}$	$[-2, -3, -3, -3]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 23 & 10 \\ 16 & 7 \end{bmatrix}$	$[-3, -2, -2, -3]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 37 & 16 \\ 30 & 13 \end{bmatrix}$	$[-3, -2, -2, -5]$	Yes
$\pm \begin{bmatrix} 31 & 12 \\ 18 & 7 \end{bmatrix}$	$[-3, -3, -2, -2]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 21 & 8 \\ 34 & 13 \end{bmatrix}$	$[-3, -3, -3, -2]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 43 & 10 \\ 30 & 7 \end{bmatrix}$	$[-5, -2, -2, -3]$	Yes
$\pm \begin{bmatrix} 23 & 18 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}$	$[-2, -2, -2, -3, -2]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 41 & 32 \\ 32 & 25 \end{bmatrix}$	$[-2, -2, -2, -3, -4]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 22 & 17 \end{bmatrix}$	$[-2, -2, -2, -4, -2]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 48 & 37 \end{bmatrix}$	$[-2, -2, -2, -4, -4]$	Yes
$\pm \begin{bmatrix} 47 & 36 \\ 30 & 23 \end{bmatrix}$	$[-2, -2, -2, -5, -2]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 25 & 16 \\ 14 & 9 \end{bmatrix}$	$[-2, -3, -2, -2, -2]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 47 & 30 \\ 36 & 23 \end{bmatrix}$	$[-2, -3, -2, -2, -4]$	No
$\pm \begin{bmatrix} 19 & 12 \\ 30 & 19 \end{bmatrix}$	$[-2, -3, -2, -3, -2]$	No

下一页继续

$\pm\begin{bmatrix}17 & 10\\ 22 & 13\end{bmatrix}$	$[-2,-4,-2,-2,-2]$	No
$\pm\begin{bmatrix}37 & 10\\ 48 & 13\end{bmatrix}$	$[-4,-4,-2,-2,-2]$	Yes
$\pm\begin{bmatrix}39 & 32\\ 28 & 23\end{bmatrix}$	$[-2,-2,-2,-2,-3,-3]$	No
$\pm\begin{bmatrix}49 & 36\\ 34 & 25\end{bmatrix}$	$[-2,-2,-3,-2,-2,-3]$	No
$\pm\begin{bmatrix}35 & 16\\ 24 & 11\end{bmatrix}$	$[-3,-2,-2,-2,-2,-3]$	No

TABLE C.2. 从 hf-hat-obd-nice 获得的数据。 f 的所有分数 Dehn 扭转系数均为 1。

REFERENCES

[Ali+23] Akram Alishahi 等，《边界 Floer 同调与接触结构》，《Forum Mathematicum Sigma》11（2023），论文编号 e30，44 页。[Bal07] John A. Baldwin，《紧接触结构与亏格一纤维结》，《代数几何与拓扑》7（2007），701–735。[Bal13] John A. Baldwin，《封闭开书分解与 Ozsv´ath-Szab´o 接触不变量》，《J. Symplectic Geom.》11（2013），525–561。[Ben83] Daniel Bennequin，《缠结与 ´Pfaff 方程》，第三届 Schnepfenried 几何会议，第 1 卷（Schnepfenried，1982），107–108。Ast´erisque，法国数学会，巴黎，1983，87–161。[BHH24] Joseph Breen、Ko Honda 和 Yang Huang，《任意维数下的 Giroux 对应》，预印本，2024。arXiv: 2307.02317。[BM90] Joan S. Birman 和 William W. Menasco，《通过闭辫研究链环。IV. 复合链环与分裂链环》，《数学发明》102（1990），115–139。[BM91] Joan S. Birman 和 William W. Menasco，《通过闭辫研究链环。II. 关于 Bennequin 定理》，《Topology Appl.》40（1991），71–82。[BM92a] Joan S. Birman 和 William W. Menasco，《通过闭辫研究链环。I. 有限性定理》，《《Pacific Journal of Mathematics》》154（1992），17–36。[BM92b] Joan S. Birman 和 William W. Menasco，《通过闭辫研究链环。V. 平凡链环》，《Trans. Amer. Math. Soc.》329（1992），585–606。[BM92c] Joan S. Birman 和 William W. Menasco，《通过闭辫研究链环。VI. 非有限性定理》，《《Pacific Journal of Mathematics》》156（1992），265–285。[BM93] Joan S. Birman 和 William W. Menasco，《通过闭辫研究链环。III. 闭 3-辫链环的分类》，《《Pacific Journal of Mathematics》》161（1993），25–113。[FM12] Benson Farb 和 Dan Margalit，《映射类群入门》，第 49 卷，普林斯顿数学丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012。[Gir02] EmmanuelGiroux，《接触几何：从三维到高维》(G´eom´etrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions sup´erieures

，

国际数学家大会论文集，第 *II* 卷（北京，*2002*）。高等教育出版社，北京，2002，405–414。[HKM07] Ko Honda, William H. Kazez, andGordana Mati´c,带边界紧曲面的右转微分同胚，《数学发明》**169**（2007），427–449。

[HKM08] Ko Honda, William H. Kazez, andGordana Mati´c，带边界紧曲面的右转微分同胚。II，《几何与拓扑》12（2008），2057–2094。[HKM09a] Ko Honda, William H. Kazez, and Gordana Mati´c, Heegaard Floer 同调中的接触类，《微分几何杂志》83（2009），289–311。[HKM09b] Ko Honda, William H. Kazez, and Gordana Mati´c，缝合 Floer 同调中的接触不变量，《数学发明》176（2009），637–676。[HL16] Matthew Hedden and Adam Simon Levine，结补空间的拼接与边界 Floer 同调，《纯粹与应用数学杂志》720（2016），129–154。[HRW22] Jonathan Hanselman, Jacob Rasmussen, and Liam Watson，带环面边界流形的 Heegaard Floer 同调：性质与例子，《伦敦数学会会刊》（3）125（2022），879–967。[HW23] Jonathan Hanselman and Liam Watson，边界 Floer 同调的一种演算，《几何与拓扑》27（2023），823–924。[IK14a] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，开书叶状结构，《几何与拓扑》18（2014），1581–1634。[IK14b] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，开书叶状结构上的运算，《代数几何与拓扑》14（2014），2983–3020。[IK14c] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，在开书分解中可视化过扭圆盘，《数学科学研究所刊》50（2014），169–180。[IK15a] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，横截链环的自链接数，《低维拓扑与映射类群之间的相互作用》。19。《几何与拓扑专著》，《几何与拓扑》出版社，考文垂，2015，157–171。[IK15b] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，平面开书分解中的过扭圆盘，《国际数学杂志》26（2015），1550027，29。[IK16] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，开书覆盖，《数学科学进展》。6。女性数学家协会丛书。施普林格，[Cham], 2016, 139–154。[IK17a] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，本质开书叶状结构与分数德恩扭转系数，《几何奉献》187（2017），17–67。[IK17b] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，论 Etnyre 和 Van Horn-Morris 的一个问题，《代数几何与拓扑》17（2017），561–566。[IK19a] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，对称映射类的正分解，《日本数学会杂志》71（2019），309–327。[IK19b] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，拟右转辫与非松弛链环，《代数几何与拓扑》19（2019），2989–3032。[IK20] Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro，扭转左转开书、过扭转性、松弛性与虚松弛性，预印本，2020。电子版：arXiv:1909.05993。[KMHMW25] Cagatay Kutluhan, Gordana Mati´c, Jeremy Van Horn-Morris, and Andy Wand，从开书分解计算闭接触三维流形的 Heegaard Floer 不变量，预印本，2025。电子版：arXiv:2502.02403。[Lek11] Yankı Lekili，具有四个绑定分支的平面开书分解，《代数几何与拓扑》11（2011），909–928。[Lev12] Adam Simon Levine，结加倍算子与边界 Heegaard Floer 同调，《拓扑学杂志》5（2012），651–712。[LOSS09] Paolo Lisca, Peter Ozsv´ath, Andr´as I. Stipsicz, and Zolt´an Szab´o，接触三维流形中勒让德结的 Heegaard Floer 不变量，《欧洲数学会杂志》（JEMS）11（2009），1307–1363。[LOT14] Robert Lipshitz, Peter S. Ozsv´ath, and Dylan P. Thurston，通过映射类分解计算 HF，《几何与拓扑》18（2014），2547–2681。[LOT15] Robert Lipshitz, Peter S. Ozsv´ath, and Dylan P. Thurston，边界 Heegaard Floer 同调中的双模，《几何与拓扑》19（2015），525–724。[LOT18] Robert Lipshitz, Peter S. Ozsvath, and Dylan P. Thurston，边界 Heegaard Floer 同调，《美国数学会回忆录》254（2018），viii+279。

[LV24a] Joan Licata 和 Vera V´ertesi, 《Heegaard 分解与紧的 Giroux 对应》, 《Journal of Symplectic Geometry》22 (2024), 1349–1396。[LV24b] Joan Licata 和 Vera V´ertesi, 《三维中的 Giroux 对应》, 预印本, 2024。arXiv: 2408.01079。[MV24] HyunkiMin 和Konstantinos Varvarezos, 《边界 Floer 同调中的接触不变量》, 预印本, 2024。arXiv: 2410.05511。[OS05] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o, 《Heegaard Floer 同调与接触结构》, 《Duke Mathematical Journal》129 (2005), 39–61。[Pav08] Elena Pavelescu, 《辫子与开书分解》, 博士论文, 宾夕法尼亚大学。ProQuest LLC, 安娜堡, 密歇根州, 2008。[SV09] Andr´as I. Stipsicz 和 Vera V´ertesi, 《关于勒让德结的不变量》, 《Pacific Journal of Mathematics》239 (2009), 157–177。[SW10] Sucharit Sarkar 和 Jiajun Wang, 《一种计算某些 Heegaard Floer 同调的算法》, 《Annals of Mathematics》（第 2 辑）171 (2010), 1213–1236。[TW75] W. P. Thurston 和 H. E. Winkelnkemper, 《关于接触形式的存在性》, 《美国数学会会刊》52 (1975), 345–347。[Zar10] Rumen Zarev, 《缝合 Floer 同调的连接与粘合》, 预印本, 2010。arXiv: 1010.3496。[Zar11] Rumen Zarev, 《边界缝合 Floer 同调》, 博士论文, 哥伦比亚大学。ProQuest LLC, 安娜堡, 密歇根州, 2011。

University of California, Los Angeles, Los Angeles, CA 90095
Email address: harahmpark@math.ucla.edu