arXiv:2601.11873v1 [math.LO] 17 Jan 2026

单的次直不可约弱双补格

Yannick Lea Jeufack Tenkeu[1*]和 Leonard Kwuida[2*†]喀麦隆雅温得第一大学数学系，邮政信箱 812 号，雅温得，喀麦隆。[2]伯尔尼应用科学大学商学院，Br¨uckenstrasse 73，瑞士伯尔尼 3005。

通讯作者。电子邮箱：
yannick.tenkeu@facsciences-uy1.cm；leonard.kwuida@bfh.ch；
†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

本文基于弱双补格（WDL）的骨架和对偶骨架，展示了其若干子类。我们研究正规滤子（分别为理想），并证明正规滤子（分别为理想）的集合构成一个完备格，但它并非所有滤子（理想）所成格的子格。我们刻画了由子集生成的正规滤子（理想），以及两个正规滤子（分别为理想）的并。我们进一步证明，正规滤子格与正规理想格同构，并且在 WDL 中，能够生成同余的滤子（或理想）仅为正规滤子这一类。对于分配 WDL，我们刻画了由滤子生成的同余。利用正规滤子，我们刻画了单、次直不可约和正则 WDL。此外，我们证明由正规滤子生成的同余可置换，并且正则分配 WDL 是同余可交换的，且满足同余扩张性质（CEP）。最后，我们证明，在一定条件下，正规滤子格与分配 WDL 的布尔中心的滤子格同构。我们还证明，WDL $\boldsymbol{L}$ 的正规滤子格嵌入其幂 $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{X}}$ 的 $\boldsymbol{L}$正规滤子格中。

关键词：弱双补格、形式概念分析、滤子、骨架、正交格、同余、单代数

2020年 MSC 分类：主要：06B05；次要：06B010，06B23，06B75

1 引言

双补格源自形式概念分析 [18]，由 Rudolf Wille 引入，用以刻画概念代数的等式理论。弱双补格（简称 WDL）在 [11]中被引入，其依据是那些生成了迄今已知在所有概念代数中均成立的全部等式的方程。WDL 将布尔代数和分配的双伪补格推广开来。概念代数是完备格，而 WDL 不一定是完备格[11]。从范畴论视角来看，研究子结构、积和态射十分重要，这有助于深入理解由给定背景产生的概念代数结构，并可能应用于计算机科学和数据分析。

在序代数结构中，同余、滤子、理想和同态是基础工具，已被广泛用于研究这些代数，并且受到众多研究者的特别深入研究。Grätzer 在 [5, 6], 中研究了格同余，并刻画了分配格中由滤子生成的同余，证明了分配格中的每个滤子都对应于某个同余的单位元类。这一刻画为分配格的分解提供了进一步的结果。R. Beazer 和 M.E. Adams 在 [1, 2], 中刻画了分配双 p-代数中由正规滤子生成的同余，并推导出了分配双 p-代数为单代数和次直不可约代数的刻画。Tenkeu 等人在 [15, 16] 中利用双布尔代数中特定滤子和理想生成的同余，刻画了单双布尔代数和次直不可约双布尔代数。Kalmbach 在 [8], 中利用由滤子生成的同余，研究并建立了正交模格的若干有趣性质。

由前述结果可明显看出，同余是分解代数结构的主要工具。因此，对同余作出良好描述，将有助于深入理解 WDL 的结构理论，并能直接刻画单概念代数和次直不可约概念代数。

对于 WDL，已有多项代数方面的研究。 [11],Kwuida 证明了 WDL 的素理想定理，并引入了若干类滤子（以及理想），如主滤子和正规滤子，从而开启了 WDL 中同余的研究，尤其是分配概念代数中的同余研究。

在有界分配格中，每个滤子 F 都是至少一个同余的余核；也就是说，存在一个格同余 θ，使得 $F = \{x \in L \mid (x,1) \in \theta\}$，记作 $[1]_\theta$。然而，这一性质通常并不适用于 WDL。因此，刻画 WDL 中那些作为同余余核的滤子、描述由这些滤子生成的同余，并利用这一刻画直接描述正则、单以及次直不可约分配 WDL，便显得十分重要。

本文着重研究 WDL 的若干子类，考察其骨架与对偶骨架的性质、正规滤子、由滤子生成的同余关系，以及正则、单和次直不可约 WDL。在这一框架下，我们还探讨正规滤子的重要方面，例如正规

子集生成的滤子、两个正规滤子的并，以及正规滤子与正规理想之间的关系。本研究得出以下成果：

(1) 构造一份内容丰富的 WDL 示例清单，并引入若干 WDL 子类。(2) 研究正规滤子的某些性质，以及正规滤子与正规理想之间的关系。(3) 分析由滤子生成的同余及其若干相关性质。(4) 刻画单、正则和次直不可约分配 WDL。

本文分为五节。第 2 节介绍 WDL 的基本背景概念以及格论中的一些已知结果。第 3 节引入 WDL 的新子类，并给出一系列示例。第 4 节证明，正规滤子格不是滤子格的子格，并且同构于给定 WDL 的正规理想格。本节还刻画由子集生成的正规滤子以及两个正规滤子的并。第 5 节证明，正规滤子是 WDL 中与某个同余的单位类相对应的唯一一类滤子。随后，本文刻画由正规滤子生成的同余，并推导出一些相关性质，包括两个诱导同余可交换这一事实。最后，本文利用正规滤子格刻画单分配 WDL 和次直不可约分配 WDL。本文最后考察由正规滤子生成的弱对补格的商的若干性质，并证明分配正则 WDL 类具有同余扩张性质。

2 预备知识

本文的主要结果涉及由滤子生成的同余的刻画，以及弱双补格簇中的简单性和次直不可约性概念。我们首先引入一些通用记号。假定读者熟悉等价关系、序关系、格、分配格和布尔代数。关于泛代数中的这些概念，更多信息请参阅 [3]。

我们用 A 表示一个代数（A; F），其中 A（论域）是一个非空集合，F（基本运算集）是 A上的有限元运算集。我们分别用 $\Delta_A := \{(x,\ x) \mid x \in A\}$ 和 $\nabla_A := A \times A$ 表示 A上的最小和最大等价关系。 A 上的同余关系是 A 上的等价关系，并且与 A的基本运算相容。我们用 Con(A) 表示 A的所有同余构成的集合。按包含关系排序后，该集合构成一个完备格，其最小元为 Δ_A，最大元为 ∇_A。我们用 $\prod_{i\in I} A_i$ 表示代数（A_i）$_{i\in I}$的直积。若代数 A 不同构于若干个各自至少含有两个元素的代数的直积，则称其为（直接）不可分解的。

Birkhoff 引入了次直积这一概念，将直积有力地推广了。代数 A 是 $(A_i)_{i\in I}$ 的次直积，当且仅当：(a) A 是

$\prod_{i\in I} A_i$的子代数；并且 (b) 对每个 $i \in I$, $\_\pi_i(A) = A_i$ ，其中 π_i 表示第 i 个投影。映射 $\alpha: A \to \prod_{i\in I} A_i$ 称为次直嵌入，若 $\alpha(A)$ 是 $(A_i)_{i\in I}$的次直积。若对每个次直嵌入 $\alpha: A \to \prod_{i\in I} A_i$，都存在某个 $i \in I$，使得复合映射$\pi_i \circ \alpha: A \to A_i$ 是同构（见 [3], 第 57 页），则代数 $\_A$ 称为次直不可约。Birkhoff 的一个经典定理（见 [3], 第 58 页）凸显了这类代数的重要性：该定理指出，在任意代数等式类中，每个代数都可以嵌入到次直不可约代数的直积中。单代数是次直不可约代数的一个特例，其同余格构成一个含两个元素的链 $\{\Delta_A, \nabla_A\}$。代数的分解与其上某些同余的存在之间有着紧密联系。在本文余下部分，我们假设A 至少有两个元素。在此情形下，Garrett Birkhoff 给出了次直不可约性的一个简便刻画：若 $Con(A)\setminus\{\Delta_A\}$ 有最小元，则代数 A 是次直不可约的（[3], 定理 8.4，第 57 页）；该最小元称为 $Con(A)$的单核。本节最后，我们回顾弱双补格（WDL）和形式概念分析的一些基本定义与结果，并将概念代数介绍为 WDL 的一个大子类。

定义 1 一个**形式背景** $\mathbb{K} := (G, M, I)$由两个集合 G 和 M 以及一个关系$I \subseteq G \times M$组成。 G 中的元素称为**对象**， M中的元素称为背景的**属性** 。为了表示对象 g与属性 m之间存在关系 I，我们写作 gIm 或$(g, m) \in I$，并将其读作“对象 g具有属性 m”。

对于对象集合 $A \subseteq G$，我们定义 $A' := \{m \in M \mid gIm$，对所有 $g \in A\}$，表示 A中对象共有的属性集合。相应地，对于属性集合 $B \subseteq M$，我们定义 $B' := \{g \in G \mid gIm$，对所有 $m \in B\}$，表示具有 B中属性的对象集合。

背景 $\mathbb{K} := (G, M, I)$的一个**形式概念** 是一个满足 $A \subseteq G$和 $B \subseteq M$，且 $A' = B$和 $B' = A$的有序对(A, B)。对于形式概念(A, B)，我们定义：

- 其**弱否定**定义为 $(A, B)^{\Delta} := ((G \setminus A)'', (G \setminus A)')$,
- 其**弱对立**定义为 $(A, B)^{\nabla} := ((M \setminus B)', (M \setminus B)'')$,
- 空元 $0 := (M', M)$,
- all $1 := (G, G')$ 。

代数 $\mathcal{A}(\mathbb{K}) := (\mathfrak{B}(\mathbb{K}); \wedge, \vee, ^{\Delta}, ^{\nabla}, 0, 1)$ 称为背景 $\mathbb{K}$ 的**概念代数**，其中 $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 是 $\mathbb{K}$ 的形式概念集合， $\wedge$ 和 $\vee$ 表示由以下内容定义的概念格的下确界和上确界运算

$$(A, B) \vee (C, D) = ((A \cup C)'', B \cap D) \text{ and } (A, B) \wedge (C, D) = (A \cap C, (B \cup D)'').$$

定义 2 [11] 弱双补格是一个代数 $(L; \wedge, \vee, ^{\Delta}, ^{\nabla}, 0, 1)$，其类型为 $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$，且 $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$ 是满足以下性质的有界格：

(1) $x^{\Delta\Delta} \leq x$, (2) $x \leq y \implies y^{\Delta} \leq x^{\Delta}$, (3) $(x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\Delta}) = x$,

(1') $x^{\nabla\nabla} \geq x$,
(2') $x \leq y \implies y^{\nabla} \leq x^{\nabla}$,
(3') $(x \vee y) \wedge (x \vee y^{\nabla}) = x$.

我们称 x^{Δ} （分别称 x^{∇}）为 x 的**弱**（分别为**对偶弱**）**补**。运算 $^{\Delta}$,$^{\nabla}$ 和 ($^{\Delta}$,$^{\nabla}$) 称为**弱补运算**、**对偶弱补运算**和**弱双补运算**。我们回顾一些与弱双补格相关的重要概念和序代数结构。

• 设（L，$\leq$）为一个偏序集。 L 上的**闭包算子** c 是一个映射c：(L，$\leq$) $\to$(L，$\leq$)，使得对于所有 x，$y \in L$，以下三个条件成立：(i) $x \leq c(x)$，(ii) $x \leq y$ 蕴含 $c(x) \leq c(y)$，以及(iii) $c(c(x)) = c(x)$。

• 若将条件(i)替换为(i)' $c(x) \leq x$，则 c 称为 L上的**内部算子**。

• ([14]) **正交补格**（简称**正交格**）是带有一元运算 $^{\perp}$： $L \to L$ 的有界格，且对于所有 a，$b \in L$:

$$(i)\ a \leq b \implies b^{\perp} \leq a^{\perp},\ (ii)\ (a^{\perp})^{\perp} = a,\ (iii)\ a \vee a^{\perp} = 1 \text{ and } (iv)\ a \wedge a^{\perp} = 0.$$

• 若正交格满足正交模律，则成为**正交模格**（OML）：

$$(\text{OML}) \quad a \leq b \Rightarrow b = a \vee (a^{\perp} \wedge b).$$

• 设 L 为一个有界格且 $x \in L$。若元素 $x^{*} \in L$ （分别为 $x^{+} \in L$）是 x 的伪补（分别为对偶伪补），则

$$x \wedge y = 0 \Leftrightarrow y \leq x^{*}(\text{resp. } x \vee y = 1 \ \Leftrightarrow y \geq x^{+}), \text{for all } x \in L.$$

• ([2]) **A伪补格** (分别为**对偶伪补格**)，也称为 p-代数（分别为 **对偶p-代数**），是一种代数（L; $\wedge$，$\vee$，*，0，1）（分别为（L; $\wedge$，$\vee$，$^{+}$，0，1））， 其类型为（2，2，1，0，0），其中每个元素 x 都有一个伪补（分别为对偶伪补），且该补为 x^{*} （分别为 x^{+}）。当格是分配的时，该 p-代数（分别为对偶p-代数）称为**分配的**。

• 双 p-**代数** 是一种代数（L; $\wedge$，$\vee$，*，$^{+}$，0，1），其类型为（2，2，1，1，0，0），且（L; $\wedge$，$\vee$，*，0，1）是一个 p-代数，而（L; $\wedge$，$\vee$，$^{+}$，0，1）是一个**对偶** p-**代数** ([9, 10] 已证明每个分配的双重 p-代数都是 WDL，但并非所有双重p-代数都是 WDL（见 [11]中的例 1.1.3）。

映射 $x \mapsto x^{\nabla\nabla}$ （分别地， $x \mapsto x^{\Delta\Delta}$）在**L**上定义了一个闭包算子（分别地，内部算子）。

集合

$$S(\mathbf{L}) := \{x \in L \mid x^{\nabla\nabla} = x\} \quad (\text{resp. } \overline{S}(\mathbf{L}) := \{x \in L \mid x^{\Delta\Delta} = x\})$$

称为**L**的**骨架**（分别地，**对偶骨架**），而集合

$$B(L) := \{x \in L \mid x^{\Delta} = x^{\nabla}\}$$

称为带否定元素的子集，或称为 L 的**中心** 。

在 L 上定义运算 $\sqcap$、 $\sqcup$、 $\overline{\sqcap}$ 和 $\underline{\sqcup}$ 如下:

$$x\sqcap y := (x^{\nabla}\vee y^{\nabla})^{\nabla},\quad x\sqcup y := (x^{\nabla}\wedge y^{\nabla})^{\nabla},\quad x\overline{\sqcap}y := (x^{\Delta}\vee y^{\Delta})^{\Delta},\quad \text{and } x\underline{\sqcup}y := (x^{\Delta}\wedge y^{\Delta})^{\Delta}.$$

设 $\mathcal{L}_1 = (L_1, \leq_1)$ 和 $\mathcal{L}_2 = (L_2, \leq_2)$ 为两个格。格 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 在序意义下**同构**，当且仅当存在一个映射 ϕ: $L_1 \to L_2$，该映射为满射且满足等价关系

$$a \leq_1 b \iff \phi(a) \leq_2 \phi(b), a, b \in L_1.$$

设 $(L; \wedge, \vee, {}^{\Delta}, {}^{\nabla}, 0, 1)$ 是一个 WDL，我们用 $Con(L)$ 表示其同余集。对于 $\theta \in Con(L)$ 和 $a \in L$，我们将包含 a 的等价类记为 $[a]_\theta := \{x \in L \mid (a, x) \in \theta\}$。

命题 1 *([11], Prop. 1.3.4) For any WDL* $\boldsymbol{L}$ *the following statements hold:*

(1) 代数 $(S(\boldsymbol{L}); \wedge, \sqcup, {}^{\nabla}, 0, 1)$ 和 $(S(\boldsymbol{L}); \sqcap, \vee, {}^{\Delta}, 0, 1)$ 是正交格。*(2)* 代数 $(B(L); \vee, \wedge, {}', 0, 1)$ 以 $x' := x^{\Delta} =: x^{\nabla}$ 为运算，是一个布尔代数，称为 L *([11],* 的布尔中心（推论 *3.3.8*）。

从现在起， L 表示一个 WDL（$L \wedge$， $\vee$， ${}^{\Delta}$， ${}^{\nabla}$， 0， 1）。以下命题汇总了 WDL 的一些基本性质。

命题 2 *[11] Let* x, $y \in L$. *The following statements hold:*

(4) $(x \wedge y)^{\Delta} = x^{\Delta} \vee y^{\Delta}$.
(5) $x\overline{\sqcap}y = (x \wedge y)^{\Delta\Delta}$.
(6) $x^{\Delta} \leq y \Leftrightarrow y^{\Delta} \leq x$.
(7) $y \wedge x = 0 \Rightarrow y^{\Delta} \geq x$.
(8) $x \vee x^{\Delta} = 1$.
(9) $x^{\nabla} \leq x^{\Delta}$.

(4') $(x \vee y)^{\nabla} = x^{\nabla} \wedge y^{\nabla}$.
(5') $x \sqcup y = (x \vee y)^{\nabla\nabla}$.
(6') $x^{\nabla} \geq y \Leftrightarrow y^{\nabla} \geq x$.
(7') $y \vee x = 1 \Rightarrow y^{\nabla} \leq x$.
(8') $x^{\nabla} \wedge x = 0$.

容易证明， L 满足恒等式（$\star$）： $x = x^{\Delta\nabla}$ 当且仅当 $L = B(L)$。称 L 的非空子集 F 为一个**序滤子**，如果 $x \in F$， $x \leq y \Rightarrow y \in F$， $\forall x$， $y \in L$。**序理想**的定义是对偶的。若 F 是一个序滤子，并且对所有 x， $y \in L$ 都有： x， $y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$，则称 F 为一个**滤子**。**理想**的定义是对偶的。一个**真滤子**（分别地，**理想**）是不同于 L的滤子（分别地，理想）。众所周知，WDL 的所有滤子（分别地，理想）在集合包含关系下构成一个完备格，记为 $F(L)$（分别地， $I(L)$）。两个滤子（分别地，理想）的并按照格的情形计算（见 [5]）、布尔代数（[3], 引理 3.9）。

3 弱对补格的子类

为研究单且次直不可约 WDL，我们首先给出若干 WDL 的例子，考察弱双补格的一些特定子类，并探讨它们的一些性质。

3.1 WDL 的一些例子

以下已知结果给出了一种在给定有界格中构造弱双补格的有用方法。对于完备格 $\mathcal{L}$ 中的元素 $v:=(L,\ \leq)$，我们定义

$$v_*:=\bigvee\{x\in L\mid x<v\}\text{ and }v^*:=\bigwedge\{x\in L\mid v<x\}.$$

称 v $\bigvee$-不可约（或上确界不可约）（分别地，$\bigwedge$-不可约，或下确界不可约），如果 $v\neq v_*$（分别地，$v\neq v^*$）。$J(L)$ 表示所有 $\bigvee$-不可约元素的集合，而 $M(L)$ 表示所有 $\bigwedge$-不可约元素的集合。若子集 $X\subseteq L$ 在**中上确界稠密**，L 如果 L 中的每个元素都可以表示为该子集X的上确界；对偶地，**下确界稠密**指 $v=\bigwedge\{x\in X\mid v\leq x\}$ ([4], 第7页）。

命题

3 *([13] Proposition 3) Let L be a finite lattice. Define two unary operations $^{\Delta}$ and $^{\nabla}$ on L by*

$$x^{\Delta}:=\bigvee\{a\in J(L)\mid a\not\leq x\}\ \text{and}\ x^{\nabla}:=\bigwedge\{m\in M(L)\mid x\not\leq m\}.$$

Then L $\wedge$ $\vee$ 0 1 for J L $\subseteq G$ and M L $\subseteq H$ the operations$(;\ ,\ ,\ ^{\Delta},\ ^{\nabla},\ ,\ )$ $^{\Delta_G}$ and x^{∇_H} defined by is a WDL. In general, $(\ )(\ )$,

$$x^{\Delta_G}:=\bigvee\{a\in G\mid a\not\leq x\}\ \text{and}\ ^{\nabla_H}:=\bigwedge\{m\in H\mid x\not\leq m\}$$

turn$(L;\wedge,\ \vee,\ ^{\Delta_G},\ x^{\nabla_H},\ 0,\ 1)$ into a WDL.

Example 1 1. ([11]) 对于布尔代数 $(B;\wedge,\ \vee,\ ',\ 0,\ 1)$，代数 $(B;\wedge,\ \vee,\ ',\ ',\ 0,\ 1)$（补运算重复，即 $x^{\Delta}:=x'=:x^{\nabla}$）是一个 WDL。
2. 给定背景 $\mathbb{K}$ 的概念代数 $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ 是一个 WDL ([18])。
3. 在含有 n 个元素的链 $n\geq 2$上存在唯一的 WDL 结构。$x\in L$ 的平凡弱补（分别为对偶弱补）定义为：若 $x\neq 1$，则为 $x^{\Delta}=1$；否则为 $x^{\Delta}=0$（分别为若 $x\neq 0$，则为 $x^{\nabla}=0$；否则为 $0^{\nabla}=1$）。
4. 考虑图 1 中的有界格 $\mathcal{M}_4$,2。可以验证，$J(M_4,2)=\{a,b,1\}$且 $M(M_4,2)=\{e,a,b\}$。根据命题 21，我们在 $M_{4,2}=\{0,a,b,e,1\}$ 上定义一元运算 $^{\Delta}$和 $^{\nabla}$：$x^{\Delta}=1$，$x\in\{0,a,b,e\}$，$1^{\Delta}=0$，以及 0^{∇} =1，$x^{\nabla}=0$，其中 $x=e$, 1，$a^{\nabla}=b$，$b^{\nabla}=a$。根据命题 3，代数 $\mathcal{M}_{4,2}$ =$(M_4,2;\vee,\wedge,^{\Delta},^{\nabla},0,1)$ 是一个分配 WDL。此外，$S(M_4,2)$ $=\{0,a,b,1\}$ 和$S(M_4,2)=\{0,1\}$，二者都是布尔代数。
5. 考虑二元素布尔代数 $\mathcal{C}_2$ 和赋予唯一 WDL 结构的三元素链 $\mathcal{C}_3$。那么，$\mathcal{P}_6=\mathcal{C}_2\times\mathcal{C}_3$ 与 P_6 =$\{0,u,v,a,b,1\}$（如图2所示）作为 WDL 的积构成一个 WDL。一元运算 $^{\Delta}$ 和 $^{\nabla}$ 由 (T:2) 中给出的凯莱表定义。可以得到$S(\mathcal{P}_6)=S(\mathcal{P}_6)$ $=\{0,u,b,1\}$，它构成一个布尔代数。
6. 考虑图2中所示的格 L_6，其中有 $L_6=\{0,u,v,a,b,1\}$，一元运算 $^{\Delta}$ 和 $^{\nabla}$ 由 (T:1) 中给出的凯莱表定义。代数 $(L_6;\wedge,\ \vee,\ ^{\Delta},\ ^{\nabla},\ 0,\ 1)$ 是一个 WDL，其中 $S(L_6)=\{0,u,v,1\}$，且 $S(L_6)=\{0,u,b,1\}$。$S(L_6)$ 和 $S(L_6)$ 都是布尔代数，它们的交集是由三个元素组成的链 $C_3=\{0,u,1\}$。此外，$L_6\neq S(L_6)\cup S(L_6)$）。

7. 考虑图3所示的格 $\mathcal{K}_7$，其中有 $K_7 = \{0, u, v, a, b, w, 1\}$。可以证明， $J(K_7) = \{w, u, v\}$，且 $M(K_7) = \{u, v, a, b\}$。利用命题 3，可在 K_7 上定义运算 $^{\Delta}$ 和 $^{\nabla}$： $u^{\nabla} = v$、 $v^{\nabla} = u$、 $x^{\nabla} = 0$、 $x \in \{a, b, w, 1\}$ 和 $0^{\nabla} = 1$，以及 $u^{\Delta} = b$、 $v^{\Delta} = a$、 $a^{\Delta} = v$、 $b^{\Delta} = u$、 $w^{\Delta} = 1$、 $1^{\Delta} = 0$ 和 $0^{\Delta} = 1$。根据命题 21，$(K_7; \vee, \wedge, ^{\Delta}, ^{\nabla}, 0, 1)$ 是一个 WDL。

可以验证， $S(K_7) = \{0, u, v, 1\}$ and $S(K_7) = \{0, u, \overline{v}, a, b, 1\}$ 分别是一个布尔代数和一个正交格，其中 $S(K_7) \subseteq S(K_7)$。

8. 考虑格 $\mathcal{L}_7$，其 $L_7 = \{0, u, v, a, b, w, 1\}$如图3所示。可得 $J(L_7) = \{d, b, a, c\}$ and $M(L_7) = \{e, a, b, c\}$。一元运算 $^{\Delta}$ and $^{\nabla}$由表（T:3）定义。代数（L_7; $\vee$, $\wedge$, $^{\Delta}$, $^{\nabla}$, 0, 1）是一个WDL，其中$S(L_7) = \{0, 1, u, v\}$ and $S(L_7) = \{0, 1, a, b\}$ 分别构成布尔代数。

9. 设 M_7 和 N_5 分别为具有 7 个和 5 个元素、如图4和图5所示的有界格。 $J(M_7) = \{d, b;\ a、\ c\}$、 $M(M_7) = \{e, a, b, c\}$。利用命题 3，我们为 M_7定义了式 (T:4) 中给出的 $^{\Delta}$ 和 $^{\nabla}$ 一元运算。代数 $\mathcal{M}_7$是一个 WDL，其骨架 $S(M_7) = \{0, 1, e, c\}$ 和 $S(M_7) = \{0, d, c, 1\}$均为布尔代数。此外， $\mathcal{L}_5$ 是 $\mathcal{M}_7$的一个 WDL 子代数。进一步地，$S(M_7) \cap S(M_7) = \{0, c, 1\}$ 是一个三元链，而 $S(M_7) \cup S(M_7) = N_5$。

(T:1)

x	0	u	v	a	b	1
x^{Δ}	1	b	1	b	u	0
x^{∇}	1	v	u	0	0	0

(T: 2)

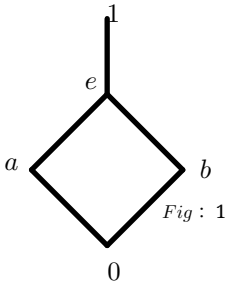
x	0	u	v	a	b	1
x^{Δ}	1	b	1	b	u	0
x^{∇}	1	b	u	0	u	0

(T: 3)

x	0	u	v	a	b	w	1
x^{Δ}	1	1	1	b	a	1	0
x^{∇}	1	v	u	0	0	0	0

(T: 4)

x	0	d	a	b	e	c	1
x^{Δ}	1	1	1	1	c	e	0
x^{∇}	1	c	0	0	0	d	0



Fig：1

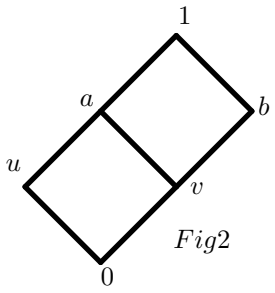


*Fig*2

Remark 1 1。每个含 n 个元素的链 $\mathcal{C}_n$ 在满足 $n \geq 3$ 的条件下，都满足 $\{0, 1\} = S(\overline{\mathcal{C}_n}) = S(\mathcal{C}_n) \neq \mathcal{C}_n$。此外，如果 WDL L 是布尔代数，那么 $S(L) = S(L) = L$。

2. 对于每个 WDL $L \in \{\mathcal{N}_5, \mathcal{M}_7, L_6\}$，都有 $S(L) \neq S(L)$； $S(L)$ 和 $S(L)$ 都是布尔代数，而它们的交集 $S(L) \cap S(L) = \{0, \star, 1\}$ 是一个三元链，既不是正交格，也不是布尔代数。

3. 对于 *WDL* $\mathcal{M}_{4,2}$， $S(\mathcal{M}_{4,2})$ 和 $S(\mathcal{M}_{4,2})$ 都是布尔代数，其中$S(\mathcal{M}_{4,2}) \subseteq S(\mathcal{M}_{4,2})$，且 $\overline{\mathcal{M}}_{4,2} \neq S(\mathcal{M}_{4,2}) \cup S(\mathcal{M}_{4,2})$。

4. 对于每个 WDL $L \in \{L_7, L_5\}$, $S(L)$和 $S(L)$ 都是布尔代数，其中$S(L)\cap S(L) = \mathcal{C}_2$. 此外， $S(L_7)\cup S(L_7) \neq L_7$，而 $N_5 = S(N_5)\cup S(N_5)$。5. 图2第11页 [11] 中给出的 WDL $\mathcal{L}_{16}$ 是分配的，其骨架是非布尔代数的正交格（见 [11] 第22页图4）。这些正交格的交集构成一个论域为 $\{0, c, a^{\nabla}, 1\}$. 的四元布尔代数

在 [11], 中推论 3.3.8 的证明里，已证明 $B(L)$ 是包含于 $S(L)$ 和 $S(L)$ 中的 L 的最大子代数。注意， $B(L) \subseteq S(L) \cap S(L)$ 的包含关系可能是严格的，例如 WDL $\mathcal{M}_7$。

前述注记使我们能够根据 WDL 的骨架和对偶骨架的性质，在 WDL 类中引入新的子类。

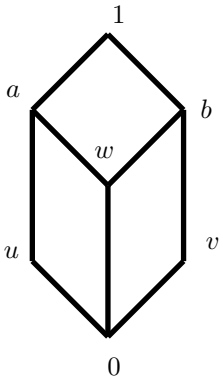


Fig 3

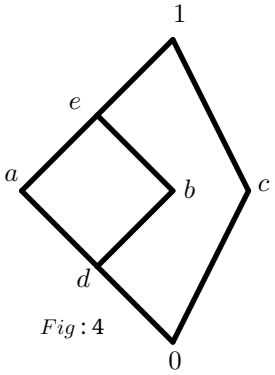


Fig : 4

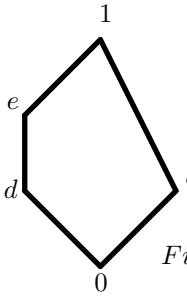


*Fig*5

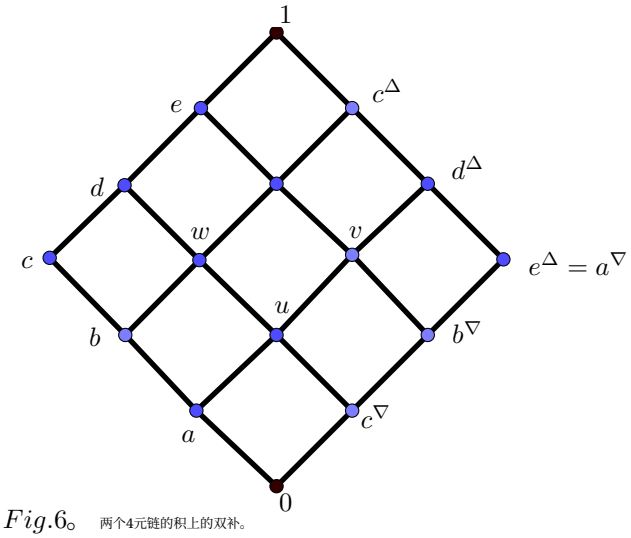


Fig.6。 两个4元链的积上的双补。

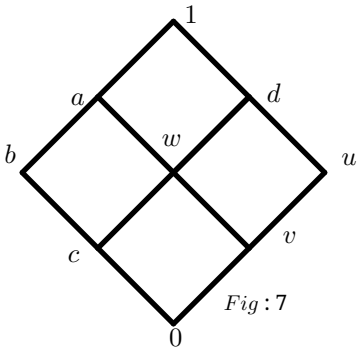


Fig : 7

3.2 WDL 的一些新类

在 [12], Kwuida 等人概述了布尔代数的推广（即带有满足某些布尔性质的一元运算的格

否定）。他们建立了已知的布尔代数扩张与 WDL 类之间的联系，而后者也推广了布尔代数。在他们工作的最后，他们指出，双 p-代数中使用的方法有助于理解 WDL 的结构，并建议对 WDL 中骨架和对偶骨架的结构作出精确描述。这一建议促使我们首先根据骨架和对偶骨架所满足的性质，描述 WDL 的各种类型。

根据注记 1，我们依据骨架和对偶骨架的结构，确定了 WDL 的一些新子类。回顾一下，分配的双 p-代数和布尔代数构成了已知的 WDL 子类。

(1) 若一个 WDL 中的 $(L; \vee, \wedge, 0, 1)$ 是有界分配格，则称其为分配 WDL。WDL 类包含许多根据骨架和对偶骨架结构划分的子类。(2) 若 WDL L 满足等式 $S(L) = S(L) = B(L)$，则称其为布尔 WDL，例如，WDL $\mathcal{P}_6$ 是布尔的。(3) 若 WDL L 中的 $S(L)$ 和 $S(L)$ 是布尔代数（即使 $S(L) \neq S(L)$），则称其为 S- 布尔 WDL，例如，$\mathcal{M}_7$ 是 S-布尔的，但不是布尔的，因为 $S(\mathcal{M}_7) \neq S(\mathcal{M}_7)$，且其骨架和对偶骨架都是布尔代数。(4) 若 WDL L 满足 $L = S(L) \cup S(L)$，则称其为纯的。（例如，N_5 是纯的、非分配的且为 S-布尔的。）(5) 若 WDL 的 $S(L)$ 或 $S(L)$ 是布尔代数，则称其为弱 S-布尔 WDL（例如，K_7）。

对于纯的 WDL，还可以进一步区分为：（i）不是布尔代数的情形（例如 $\mathcal{L}_5$）；（ii）其骨架不是布尔代数的情形；（iii）其骨架是布尔代数的情形。例如 $\mathcal{L}_5$。

对于非纯的 WDL，存在以下情形：L 是布尔的但并非纯的，例如 n-链和平凡 WDL。

在 $S(L)$ 和 $S(L)$ 是并非全为布尔代数的正交格时，可能出现以下情形：

(i) $S(L) \cap S(L) = \{0, \star, 1\}$，其中 $\star^{\Delta} \neq \star^{\nabla}$；(ii) $S(L) \cap S(L) = B(L)$。

Example 2 1。对于每个 $n \geq 3$，$\mathcal{C}_n$ 以及每个布尔代数都是布尔 WDL。特别是，$\mathcal{P}_6$ 也是布尔 WDL。2. 代数 M_4,2, $\mathcal{N}_5$, $\mathcal{L}_7$, $\mathcal{M}_7$, $\mathcal{L}_6$ 和 $\mathcal{P}_6$ 是 S-布尔 WDL。3. 代数 $\mathcal{M}_4$, 2, $\mathcal{M}_6$, $\mathcal{M}_7$, $\mathcal{L}_7$ 和 $\mathcal{C}_n, n \geq 3$ 是非纯的 S-布尔 WDL。4. WDL $\mathcal{N}_5$ 和 $\mathcal{L}_7$ 是非分配的 S-布尔 WDL。5. 考虑图6所示的两个 4 元链的积上的弱二补。所有大于 u 的元素都被 $^{\nabla}$ 映射为 0。元素 c, b 和 a 各自都是其像的像。运算 $^{\Delta}$ 是 $^{\nabla}$ 的对偶。可以验证，$S(L) = \{a, b, c, a^{\nabla}, b^{\nabla}, c^{\nabla}, 0, 1\}$ 且 $S(L) = \{c, d, e, c^{\Delta}, d^{\delta}, e^{\Delta}, 0, 1\}$。$S(L_{16})$ 和 $S(L_{16})$ 是非布尔代数的正交格。（参见 [11] 中第 11 页图 1.2 和第 22 页图 1.4。）

6. 设 $L = B \times \mathcal{C}_n$ 为 WDL 的积，其中 B 是一个布尔代数，$\mathcal{C}_n$ 是一个含 n 个元素的链。那么 L 是一个布尔弱双补格，且 $B(L) = B \times \mathcal{C}_2$。注意，$(a,b)^{\Delta} = (a', b^{\Delta})$ 且 $(a,b)^{\nabla} = (a', b^{\nabla})$，其中 $a \in B$ 和 $b \in \mathcal{C}_n$。

7. 更一般地，若考虑一个 WDL $L = (L; \vee, \wedge, {}^{\Delta}, {}^{\nabla}, 0, 1)$ 和一个布尔代数 $\mathcal{B} = (B; \vee, \wedge, {}', 0, 1)$，则可在 $P = B \times L$ 上定义 ${}^{\Delta}$ 和 ${}^{\nabla}$，如下所示：

$$(a,b)^{\tilde{\Delta}} = (a', b^{\Delta}), \quad (a,b)^{\tilde{\nabla}} = (a', b^{\nabla}).$$

那么 $(P; \vee, \wedge, {}^{\Delta}, {}^{\nabla}, \tilde{0}, \tilde{1})$ 是一个 WDL，其中 $\tilde{0} = (0, 0)$，$\tilde{1} = (1, 1)$。此外，P 是布尔的、分配的、纯的且为真的（分别地，S-布尔），当且仅当 L 是布尔的（分别地，S-布尔）。

设 L 为一个 WDL，X 为一个非空集。令 L^X 表示从 X 到 L 的所有映射构成的集合。L 上的运算逐点扩展到 L^X，如下所示：对于 $f, g \in L^X$ 和 $x \in X$：

- $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x), \quad (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x),$
- $f^{\Delta}(x) = (f(x))^{\Delta}, \quad f^{\nabla}(x) = (f(x))^{\nabla}.$

特别地，对于任意 $a \in L$，定义 $\phi_a : X \to L$ by $\phi_a(x) = a$ for all $x \in X$。代数 $\mathcal{D} = (L^X; \vee, \wedge, {}^{\Delta}, {}^{\nabla}, \phi_0, \phi_1)$ 是一个 WDL，称为 WDL L 的幂。相应的序关系定义如下

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

有 $a \leq b \Leftrightarrow \phi_a \leq \phi_b, \ \forall a, \ b \in L$。容易验证：

$$\phi_{a \wedge b} = \phi_a \wedge \phi_b, \quad \phi_{a \vee b} = \phi_a \vee \phi_b, \quad (\phi_a)^{\Delta} = \phi_{a^{\Delta}}, \quad (\phi_a)^{\nabla} = \phi_{a^{\nabla}}.$$

下面的命题展示了 L 与 L^X 之间的一些联系。我们考虑 L 的以下特定子集，

$$D(L) := \{x \in L \mid x^{\nabla} = 0\} \text{ and } \overline{D}(L) = \{x \in L \mid x^{\Delta} = 1\}.$$

可以验证，$D(L)$（分别地，$(D(L))$）是 L 的序滤子（分别地，序理想）。

命题 4 *The following statements hold:*

1. (a) $S(L^X) = \{f \in L^X \mid f(X) \subseteq S(L)\} = (S(L))^X$. *(b)* $S(L^X) = \{f \in L^X \mid f(X) \subseteq S(L)\} = (S(L))^X$. *2. (i)* $(B(L))^X = B(L^X)$, *(ii)* $D(L^X) = (D(L))^X$, *(iii)* $\overline{D}(L^X) = (\overline{D}(L))^X$. *3.* L 是布尔的（分别地，S-布尔的）当且仅当 L^X 是布尔的（分别地，S-布尔的）。*4.* L 是纯的当且仅当 L^X 是纯的。*5.* L 是分配的当且仅当 L^X 是分配的。

Proof(1) (a) 设 $M = \{f \in L^X \mid f(X) \subseteq S(L)\}$。显然， $M \subseteq S(L^X)$。为证明反向包含，取 $f \in S(L^X)$。于是 $f \in L^X$且 $f^{\nabla\nabla} = f$。令 $x \in X$。则 $f^{\nabla\nabla}(x) = (f(x))^{\nabla\nabla} = f(x)$。由于 $f(x)^{\nabla\nabla} \in S(L)$，我们推得 $f \in M$。因此， $S(L^X) \subseteq M$，从而 $M = S(L^X)$。类似的论证表明 $S(L^X) = \{f \in L^X \mid f(X) \subseteq S(L)\}$，由此完成了(1)的证明。

(2) (i) 设 $\phi \in (B(L))^X$。则 $\phi: X \to B(L)$，因此对所有 $x \in X$， $\phi(x) \in B(L)$，即 $\phi(x) = \phi(x)^{\Delta\nabla}$。所以，$\phi^{\Delta\nabla} = \phi$ 和 $\phi: X \to L$，故 $\phi \in B(L^X)$。

对于反向包含，设 $\phi \in B(L^X)$。则 $\phi^{\Delta\nabla} = \phi$。对任意 $x \in X$，我们有 $\phi(x) = (\phi(x))^{\Delta\nabla}$，因此 $\phi(x) \in B(L)$。所以， $\phi \in B(L)^X$。这就证明了所需的等式。(ii) 和 (iii) 中的结论也可类似证明。

(3) 假设 L是一个布尔 WDL，即 $S(L) = \overline{S(L)}$ 是一个布尔代数。我们证明 $S(L^X) = S(L^X)$。由于 $S(L) = S(L)$，由 (1) 可得结论。

反过来，假设 L^X是布尔 WDL，即 $S(L^X) = S(L^X)$。我们证明 $S(L) \subseteq S(L)$。令 $a \in S(L)$。则 $a^{\Delta\Delta} = a$，因此 $\phi_a^{\Delta\Delta} = \phi_a$。由此可得 $\phi_a \in \overline{S}(L^X)$ $S\ L^X$ $\phi_a{}^{\nabla\nabla} = \phi_a$ $\phi_{a^{\nabla\nabla}} = \phi_a$ $a^{\nabla\nabla} = a$ $a \in S\ L$ $=$ ( )，于是 ( )，即 。我们推得 ，因此 ( )。故 $S(L) \subseteq S(L)$。对偶论证表明 $S(L) \subseteq S(L)$，因此 $S(L) = S(L)$。这就完成了 (3) 的证明。

(4) 和 (5) 很容易验证 . □

*Example 3*考虑具有 $C_3 = \{0, e, 1\}$ 的 WDL $\mathcal{C}_3$。令 $X = \{0, 1\}$ 和 $L_9 = C_3^X$ 为图7中所示的 $\mathcal{C}_3$ 的幂。我们有 $L_9 = \{0, a, b, c, d, u, v, w, 1\}$，其中 $a = (e, 1)$ $b = (0, 1)$ $c = (0, e)$ $d = (1, e)$ $u = (1, 0)$ $v = (e, 0)$ $w = (e, e)$ 且 $1 = (1, 1)$。此外， L_9 和 $\mathcal{C}_3$ 是布尔 WDL。事实上，有 $S(L_9) = S(L_9) = \{0, 1, u, b\}$，它是一个布尔代数。

x	0	a	b	c	d	u	v	w	1
x^{Δ}	1	u	u	1	b	b	1	1	0
x^{∇}	1	0	u	u	0	b	b	0	0

4 弱双补格中的正规滤子

本节研究任意 WDL 中正规滤子（分别地，正规理想）这一类，并探讨它们的一些代数性质，以期解决 WDL 中的同余问题。我们证明，WDL L的正规滤子格与 L的正规理想格同构，但它不是 $F(L)$ 的子格。此外，我们刻画由子集生成的正规滤子，并描述两个正规滤子（分别地，正规理想）的并与交。我们还考察主正规滤子并讨论其性质。

定义 3 1. 滤子 F 称为正规滤子，如果对每个 $x \in L$， $x \in F$ 蕴含$x^{\Delta\nabla} \in F$。

2. 理想 I 称为正规理想，如果对每个 $x \in L$， $x \in I$ 蕴含 $x^{\nabla\Delta} \in I$。

根据命题2中的 (9)，对于任意 $x \in L$，都有

$$(**) \quad x^{\Delta\nabla} \leq x^{\Delta\Delta} \leq x \leq x^{\nabla\nabla} \leq x^{\nabla\Delta}.$$

由此可知，对于 L 的任意正规滤子（分别地，理想）， $x \in F$ （分别地， $x \in I$）蕴含 $x^{\Delta\Delta}$, $x^{\nabla\nabla} \in F$（分别地， $x^{\Delta\Delta}$, $x^{\nabla\nabla} \in I$）。接下来，我们考虑由下式定义的一元运算 η_Δ, η_∇ : $L \to L$, 以及二元运算 $\wedge$, $\tilde{\vee}$: $L^2 \to L$:

$$\eta_\Delta(x) = x^{\Delta\nabla},\ \eta_\nabla(x) = x^{\nabla\Delta},\ x\overline{\wedge}y = (x \wedge y)^{\Delta\nabla},\ x\tilde{\vee}y = (x \vee y)^{\nabla\Delta}.$$

给定 $a \in L$, 我们归纳定义 $a^{n(\Delta\nabla)}$ 和 $a^{n(\nabla\Delta)}$ 如下:

- $a^{1(\Delta\nabla)} = a^{\Delta\nabla}$, 并且 $a^{(k+1)(\Delta\nabla)} = \left(a^{k(\Delta\nabla)}\right)^{\Delta\nabla}$ 对每个 $k \geq 1$都成立。
- $a^{1(\nabla\Delta)} = a^{\nabla\Delta}$, 并且 $a^{(k+1)(\nabla\Delta)} = \left(a^{k(\nabla\Delta)}\right)^{\nabla\Delta}$ 对每个 $k \geq 1$都成立。

链 $a \geq a^{\Delta\nabla} \geq \cdots \geq a^{n(\Delta\nabla)} \geq \cdots$ 称为由a确定的正规链 。
$a \leq a^{\nabla\Delta} \leq \ldots \leq a^{n\nabla\Delta} \ldots$ 称为由 a确定的对偶正规链 。由 a 定义的正规链称为有限 , 如果存在 $n \geq 1$ 使得 $a^{(n+1)(\Delta\nabla)} = a^{n(\Delta\nabla)}$.

我们在下面的注记中列出映射 $\wedge$、 $\overline{\vee}$、 η_Δ 和 η_∇ 的一些性质。

Remark 2 令 $x, y \in L$。以下陈述成立:

(1) (i) η_Δ 和 η_∇ 是递增映射。(ii) $x \leq \eta_\nabla(x)$。(iii) $\eta_\Delta(x) \leq x$。(2) (i) $\eta_\Delta(x \wedge y) = \eta_\Delta(x) \wedge \eta_\Delta(y)$。(ii) $\eta_\Delta(x \overline{\wedge} y) = \eta_\Delta(x) \wedge \eta_\Delta(y)$。(3) (i) $\eta_\nabla(x \vee y) = \eta_\nabla(x) \vee \eta_\nabla(y)$。(ii) $\eta_\nabla(x \tilde{\vee} y) = \eta_\nabla(x) \tilde{\vee} \eta_\nabla(y)$。(4) L 是布尔代数，当且仅当 $\eta_\Delta \circ \eta_\Delta = \eta_\Delta$ 且 $\eta_\nabla \circ \eta_\nabla = \eta_\nabla$。(5) $x \wedge y \leq x \sqcap y \leq x \wedge y$，且 $x \vee y \leq x \sqcup y \leq x \tilde{\vee} y$。(6) $x^\Delta \wedge x = 0$ 且 $x \tilde{\vee} x^\nabla = 1$。(7) 若 $x \leq y$ 且 $a \leq b$, 则对所有 $\gamma \in \{\wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \sqcup, \sqcap\}$, $a \gamma x \leq b \gamma y$。(8) 若 $n \leq m$, 则 $a^{m(\Delta\nabla)} \leq a^{n(\Delta\nabla)}$。(9) $(a \wedge b)^{n(\Delta\nabla)} = a^{n(\Delta\nabla)} \wedge b^{n(\Delta\nabla)}$, 且 $(a \vee b)^{n(\nabla\Delta)} = a^{n(\nabla\Delta)} \vee b^{n(\nabla\Delta)}$。

Proof 利用定义和命题 2中的（9）易证。 □

可以观察到，在 WDL 中， $\mathcal{P}_6$、 $F_1 = \{1, a, u\}$ 和 $F_2 = \{b, 1\}$ 是正规滤子，而 $F = F_1 \vee F_2 = \{v, u, a, b, 1\}$ 是 L 的一个非正规滤子。事实上，有 $v \in F$ 和 $v^{\Delta\nabla} = 0 \notin F$; 这一观察使我们能够在正规滤子（理想）格中引入并运算，并刻画由子集生成的正规滤子。对于 $a \in L$和 $X \subseteq L$, 用 $N[a)$（分别用 $N(a]$）表示由 a生成的 L 的主正规滤子（分别为正规理想）; 用 $N[X)$（分别用$N(X]$）表示 L 的由 X生成的正规滤子（分别为正规理想）; 用$F_1 \vee F_2$ （分别用$I_1 \tilde{\vee} I_2$）表示 L的正规滤子（分别为理想）格 $NF(L)$（分别为$NI(L)$)中的并。$NF(L)$（分别为 $NI(L)$）表示 L的正规滤子（分别为正规理想）集合。设a、 $b \in L$、 $X \subseteq L$、 F、 $G \in NF(L)$ I、 $J \in NI(L)$。

命题 5 *The following statements hold:*

1. $N[X) = \{x \in L \mid \exists x_1, \ldots, x_n \in X,\ n, m \geq 1,\ (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)^{m(\Delta\nabla)} \leq x\}$。特别是，

$$F\overline{\vee}G = \{x \in L \mid \exists a \in F, \exists b \in G,\ a\overline{\wedge}b \leq x\}.$$

2. $N(X] = \{x \in L \mid \exists x_1, \ldots, x_n \in X,\ n, m \geq 1,\ x \leq (x_1 \vee \ldots \vee x_n)^{m(\nabla\Delta)}\}$. 尤其是，

$$I\tilde{\vee}J = \{x \in L \mid \exists a \in I, \exists b \in J,\ x \leq a\tilde{\vee}b\}.$$

3. (i) $N[a) = \{x \in L \mid \exists n \geq 1,\ a^{n\Delta\nabla} \leq x\}$.

(ii) $N(a] = \{x \in L \mid \exists n \geq 1,\ x \leq a^{n\nabla\Delta}\}$。

4. 若 $a \leq b$，则 $N[b) \subseteq N[a)$ 且 $N(a] \subseteq N(b]$。

5. (i) $N[a) = N[a^{\Delta\nabla})$. *(ii)* $N(a] = N(a^{\nabla\Delta}]$.

6. (i) $N[a)\overline{\vee}N[b) = N[a\overline{\wedge}b)$. *(ii)* $N[a) \cap N[b) \subseteq N[a \vee b)$.

7. (i) $N(a]\overline{\vee}N(b] = N(a\overline{\vee}b]$. *(ii)* $N(a] \cap N(b] \subseteq N[a\overline{\vee}b)$.

8. $N[a)\overline{\vee}N[a^{\Delta}) = L$ 且 $N(a]\tilde{\vee}N(a^{\nabla}] = L$.

9. (i) $N[a) = L$ 当且仅当 $\exists n \geq 1, a^{n\Delta\nabla} = 0$. *(ii)* $N(a] = L$ 当且仅当 $\exists n \geq 1, a^{n\nabla\Delta} = 1$.

Proof (1) 若 $X = \emptyset$，则 $N[X) = \{1\}$。假设 $X \neq \emptyset$。令

$$M = \{x \in L \mid \exists x_1, \ldots, x_n \in X,\ n, m \geq 1,\ (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)^{m(\Delta\nabla)} \leq x\}.$$

显然，$X \subseteq M$，因为对于所有 $x \in L$，$x^{\Delta\nabla} \leq x$。同样显然，若 $x \leq y$ 且 $x \in M$，则由 $\leq$ 的传递性和 M 的定义可得 $y \in M$。

设 $x, y \in M$。那么存在 $n, m, k, l \geq 1$ 和 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in X$，使得

$$(\star_1) \qquad (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)^{k(\Delta\nabla)} \leq x \text{ and } (\star_2)\ (b_1 \wedge \ldots \wedge b_m)^{l(\Delta\nabla)} \leq y.$$

注意到 $(\star_3)$ $a^{n(\Delta\nabla)} \wedge b^{n(\Delta\nabla)} = (a \wedge b)^{n(\Delta\nabla)}$ 且若 $n \leq m$, then $(\star_4)$ $a^{n(\Delta\nabla)} \geq a^{m(\Delta\nabla)}$.$(\star_4)$ 由注记2得出。不失一般性，假设 $k \leq l$。令

$$c = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)^{l(\Delta\nabla)} \wedge (b_1 \wedge \ldots \wedge b_m)^{l(\Delta\nabla)}.$$

我们有 $c \leq (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)^{k(\Delta\nabla)} \wedge (b_1 \wedge \ldots \wedge b_m)^{l(\Delta\nabla)} \leq x \wedge y$. 由 $(\star_3)$，得到

$$c = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge \ldots \wedge b_m)^{l(\Delta\nabla)} \leq x \wedge y.$$

因此 $x \wedge y \in M$，所以 M 是 L 的滤子。

接下来，我们证明 M 是一个正规滤子。由于 η_Δ 是递增函数，因此有

$$[(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)^{k(\Delta\nabla)}]^{\Delta\nabla} = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)^{(k+1)(\Delta\nabla)} \leq x^{\Delta\nabla},$$

这意味着 $x^{\Delta\nabla} \in M$。因此，M 是包含 X的 L 的一个正规滤子。

设 H是包含 X的 L的任意正规滤子。我们证明 $M \subseteq H$。设 $z \in M$。则存在 $a_1, \ldots, a_n \in X$和 $k,\ m \geq 1$，使得

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)^{k(\Delta\nabla)} \leq z.$$

由于 H是一个正规滤子，且有 $a_1, \ldots, a_n \in X \subseteq H$，因此有 $z \in H$。于是 $M \subseteq H$，从而 $N[X) = M$。现在，令

$$H = \{x \in L \mid \exists u \in F, \exists v \in G,\ u\overline{\wedge}v \leq x\}.$$

类似于上述论证可知，所要求的等式成立。

条目（2）是条目（1）的对偶。

(3) (i) 设 $K = \{x \in L \mid \exists n \geq 1,\ a^{n\Delta\nabla} \leq x\}$。显然，$a,\ a^{\Delta\nabla} \in K$。此外，若 $x \leq y$ 且

$x \in K$，则 $y \in K$。假设 x，$y \in K$。那么存在 n，$m \geq 1$，使得 $a^{n\Delta\nabla} \leq x$ 且 $a^{m\Delta\nabla} \leq y$。若 $n \leq m$，则 $a^{m\Delta\nabla} \leq x \wedge y$，因此 $x \wedge y \in K$。显然，K 是包含 a 的最小正规滤子，故 $K = N[a)$。
(ii) 可用对偶论证证明。
(4) 和 (5) 容易验证。
(6)(i) 现在我们证明 $N[a) \vee N[b) = N[a \overline{\wedge} b)$。由 (4)，可得 $N[a) \vee N[b) \subseteq N[a \wedge b)$。对于反向包含，设 $z \in N[a \wedge b)$，则存在 $n \geq 1$ 使得 $(a \wedge b)^{n\Delta\nabla} \leq z$，并且由注记 2 中的 (9) 可得$a^{n\Delta\nabla} \wedge b^{n\Delta\nabla} \leq a^{n\Delta\nabla} \wedge b^{n\Delta\nabla} = (a \wedge b)^{n\Delta\nabla} \leq z$。利用 (2) 可推出 $z \in N[a) \vee N[b)$，因此 $N[a \wedge b) \subseteq \overline{N}[a) \vee N[b$。于是由 5 可知 6. (i) 成立。

由于 $a \vee b \in N[a) \cap N[b)$，根据包含 $a \vee b$ 的正规滤子 $N[a \vee b)$ 的最小性，我们有 $N[a \vee b) \subseteq N[a) \cap N[b)$。

条目（7）是条目（6）的对偶。通过在（6）（i）中取 $b = a^{\Delta}$ 并使用注记2中的（6），即可得到（8）（i）。类似地，可以证明（8）（ii）。
对于（9）（ii），利用（5）（i）和（3）（i）即可完成证明。（9）（i）可以类似地证明。

□

给定 L的一个滤子 F 和一个理想 J，Kwuida 在 [11] 中考虑了如下集合

$$J(F) := \{z \in L \mid z \leq x^{\nabla} \text{ for some } x \in F\} \quad \text{and} \quad F(J) := \{z \in L \mid z \geq x^{\Delta} \text{ for some } x \in J\}.$$

我们有以下已知结果。

命题 6 *([11], Props. 2.4.3 and 2.4.4) Let $x \in L$: $F \in NF(L)$ and $J \in NI(L)$. The following statements hold:*

(i) $J(F)$ 是 L的正规理想。此外，如果 $x \in F$，则 $x^{\Delta}, x^{\nabla} \in J(F)$。*(i)* $F(J)$ 是 L的正规滤子。此外，如果 $x \in J$，则 $x^{\nabla}, x^{\Delta} \in F(J)$。*1.* $F = F(J(F))$ 和 $J = J(F(J))$。

接下来，我们证明 L 的正规滤子格与 L的正规理想格同构。为此，我们考虑以下两个映射:

$$\Psi : NI(L) \to NF(L), \quad J \mapsto \Psi(J) = F(J), \text{ and } \Phi : NF(L) \to NI(L),\ F \mapsto \Phi(F) = J(F).$$

显然，由命题6的第 (1) 和 (2) 项，映射 Ψ 和 Φ 是良定义的。现在我们陈述以下有用的引理。

*Lemma 7*令 $F, G \in NF(L)$ 和 $I, J \in NI(L)$。以下陈述成立:

1. 若 $I \subseteq J$，则 $\Psi(I) \subseteq \Psi(J)$。2. (i) $\Psi(I \cap J) = \Psi(I) \cap \Psi(J)$。
(ii) $\Psi(I \veebar J) = \Psi(I) \vee \Psi(J)$。3. Ψ 是一个双射，其逆映射为 Φ。

*Proof*断言 (1) 很容易验证。(2) 对于 (i)，利用 (1) 可知 $\Psi(I \cap J) \subseteq \Psi(I) \cap \Psi(J)$。令 $z \in \Psi(I) \cap \Psi(J)$。于是存在 $u \in I$和 $v \in J$，使得 $z \geq u^{\Delta}$和 $z \geq v^{\Delta}$。由命题 2 的 (4) 可得 $z \geq u^{\Delta} \vee v^{\Delta} = (u \wedge v)^{\Delta}$。由于 $u \wedge v \in I \cap J$，我们推出 $z \in \Psi(I \cap J)$。因此，$\Psi(I) \cap \Psi(J) \subseteq \Psi(I \cap J)$。故 $\Psi(I \cap J) = \Psi(I) \cap \Psi(J)$。

我们有 $\Psi(I)\ \Psi(J) \subseteq \Psi(I\tilde{\vee}J)$，因此 $\Psi(I)\vee\Psi(J) \subseteq \Psi(I\tilde{\vee}J)$。

对于反向包含，设 $z \in \Psi\ I\tilde{\vee}J$ $x \in I\tilde{\vee}J$ $z \geq x^{\Delta}$ $\star$ $x \in I\tilde{\vee}J$ $u \in I$ $v \in J$ $x \leq u\vee v^{\nabla\Delta}$ $\star\star$ 4 ()。那么存在，使得 ()。由于，存在和，使得 () ()。根据命题 2 的 (')，由 ($\star\star$) 可得

$$x^{\Delta} \geq (u \vee v)^{\nabla\Delta\Delta} \geq (u \vee v)^{\nabla\Delta\nabla} = (u^{\nabla} \wedge v^{\nabla})^{\Delta\nabla},$$

因为 $x^{\nabla} \leq x^{\Delta}$ 在 L中总是成立。由于 I和 J是正规理想，我们有 $u^{\nabla\Delta} \in I$和 $v^{\nabla\Delta} \in J$。此外，$u^{\nabla} \geq u^{(\nabla\Delta)\Delta}$和 $v^{\nabla} \geq v^{\nabla\Delta\Delta}$。因此，$z \geq x^{\Delta} \geq (u^{\nabla} \wedge v^{\nabla})^{\Delta\nabla}$，并且由于 $u^{\nabla} \in \Psi(I)$和 $v^{\nabla} \in \Psi(J)$，我们推得 $z \in \Psi(I)\vee\Psi(J)$。因此，$\Psi(I\tilde{\vee}J) = \Psi(I)\vee\Psi(J)$，且 (ii) 成立。

(3) 现在证明 Ψ是一个双射。

Injectivity. $\Psi\ I = \Psi\ J$ $I \subseteq J$ $u \in I$ $u^{\nabla} \in$ 假设 () ()。$\Psi\ I = \Psi\ J$ 2 6 $v \in J$ $u^{\nabla} \geq v^{\Delta} \geq v^{\nabla}$ 对于包含关系，令。由命题 的 () 可得 () ()。因此，存在 使得。由此可得 $u \leq u^{\nabla\nabla} \leq v^{\nabla\nabla}$。由于 J是一个正规理想，$v^{\nabla\nabla} \in J$。此外，由于 J是一个向下集，我们得出 $u \in J$。因此，$I \subseteq J$。类似的论证表明 $J \subseteq I$，故 $I = J$。因此，Ψ 是单射。

Surjectivity. 设 F是 L的一个正规滤子。我们要寻找 L的一个正规理想 I，使得 $\Psi(I) = F$。令 $I = J(F)$。由命题 6 的 (1)，I是 L的一个正规理想；由命题 6 的 (3)，$F = \Psi(I)$。因此，Ψ是满射。最后，由命题 6 的 (3)，Ψ和 Φ互为逆映射。□

下一个结果表明，在 WDL 中，正规理想和正规滤子成对出现。

定理 **8** *The lattice of normal ideals of L is isomorphic to the lattice of normal filters of L via the map Ψ with inverse given by the map Φ.* ,,

Proof 由引理 7 的 (1)、(2) 和 (3)，结论得证。□

命题 **9** *(Characterization of normal filters in WDLs) Let F be an order filter of L. The following statments are equivalent.*

1. 对任意 $x, y \in L$, $x, y \in F$，推出 $x\wedge y \in F$。*2.* F 是一个正规滤子。

Proof(1)⇒ (2) 假设 (1) 成立。令 $x, y \in F$，则 $x\wedge y \leq x \wedge y$；由于 F是序滤子，我们有 $x \wedge y \in F$。此外，根据假设，$x^{\Delta\nabla} = x\wedge x \in F$，因此 F是一个正规滤子。(2) ⇒ (1) 假设 F是一个正规滤子。令 $x, y \in F$，则 $x \wedge y \in F$；由于 F是正规，我们有 $(x \wedge y)^{\Delta\nabla} = x\wedge y \in F$，结论得证。□

现在令 M为 L的任意子代数，并考虑 $G \in NF(M)$。我们用 F_G表示由以下方式定义的 L的子集：

$$F_G := \{x \in L \mid \exists u \in G, u \leq x\}.$$

回顾一下，$B(L)$ 是 L 的子代数，满足 $x^{\Delta} = x^{\nabla}$，对任意 $x \in B$ 都成立；而 G 是 L 的子集，当且仅当 $F = \{x \in L \mid \exists v \in G, v \leq x\}$ 时，它是某个滤子 F 的基。

*Lemma 10*若 M 是 L 的子代数，且 G，$H \in NF(M)$。则：

1. (i) F_G 是 L的正规滤子。(ii) $G \subseteq H \Leftrightarrow F_G \subseteq F_H$。2. 若 $F \in NF(L)$，则 $F \cap M = E \in NF(M)$且 $F_E \subseteq F$。此外，若 $M = B(L)$，并且对每个 $f \in F$，都存在 $n \geq 1$使得 $f^{n\Delta\nabla} = f^{(n+1)\Delta\nabla}$，则 $F = F_E$。3. $B(L)$的每个滤子都是某个 L的正规滤子的基。4. $F_G = [G)_L$。 $F_G \cap F_H = F_{G\cap H}$, $F_G \vee F_H = F_{G\vee H}$。5. $B(M) \subseteq B(L)$。

Proof 1。(i) 假设 G 是 M中的正规滤子。显然 $1 \in F_G$。假设 $x \leq y$ 和$x \in F_G$，则存在 $u \in G$ 使得 $u \leq x \leq y$，于是 $y \in F_G$ （根据 F_G 的定义以及 $\leq$的传递性）。假设 $x, y \in F_G$，则存在 $u, v \in G$ 使得 $u \leq x$ 和$v \leq y$。由于 G 是正规且 $u, v \in G$，我们有$u \wedge v \in G$ 和 $u \triangle v \leq x \wedge y$。由 $u \wedge v \in G$，可推出$x \wedge y \in F_G$。根据命题 9 F_G， L是一个正规滤子。

(ii) 直接蕴含显然。设 $F_G \subseteq F_H$。令 $x \in G$，则 $x \in F_G = F_H$，于是存在 $v \in H$ 使得 $v \leq x$。由于 $v \in H$ 且 H 是一个序滤子，我们推得 $x \in H$。因此 $G \subseteq H$。所以等价关系成立。

2. 第一部分很容易验证，因为 M是 L的一个子代数。注意，该结论对 $M = B(L)$仍然成立。显然 $F_E \subseteq F$。设 $M = B(L)$，且对每个 $f \in F$，都存在 $n \geq 1$ 使得 $f^{n\Delta\nabla} = f^{(n+1)\Delta\nabla}$。最后一个等式表明，对每个 $f \in F$，$f^{\Delta\nabla} \in B\ L\ \cap F = E$ $f \in F_E$ ()，于是，所需的等式成立。

3. 当 $M = B(L)$时，由 1. 得出。

4. 回顾一下，$[G)_L$表示由 G生成的 L的滤子。(i) 根据 F_G的定义，有$F_G \subseteq [G)_L$。为证明反向包含，设 $x \in [G)_L$，则存在 u_1，.....，$u_n \in G$，$n \geq 1$，使得 $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n \leq x$ $^{\Delta\nabla}$ $u_1 \wedge \ldots \wedge\ ^{\Delta\nabla} \leq$。由于是递增映射，可推得( )；又因为是的正规滤子，所以( )；因此$[G)_L \subseteq F_G$。故 $F_G = [G)_L$。$x^{\Delta\nabla} \leq x$ G M $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n\ ^{\Delta\nabla} \in G$ $x \in F_G$

(ii) 显然有 $F_{G\cap H} \subseteq F_G \cap F_H$。设 $z \in F_G \cap F_H$，则存在 $u \in G$，$v \in H$，使得 u，$v \leq z$。有$(u \vee v)^{\Delta\nabla} \leq z^{\Delta\nabla} \leq z$且$(u \vee v)^{\Delta\nabla} \in G \cap H$。由此可得$z \in F_{G\cap H}$。因此 $F_G \cap F_H = F_{G\cap H}$。(iii) 显然有 $F_G \vee F_H \subseteq F_{G\vee G}$。为证明反向包含，设$z \in F_{G\vee H}$，则存在 $u \in G$，$v \in H$，使得 $u^{\Delta\nabla} \wedge v^{\Delta\nabla} = (u \wedge v)^{\Delta\nabla} \subseteq z$。由于 $u \in F_G$且$v \in F_H$，可推得 $z \in F_G \vee F_H$。故 $F_G \vee F_H = F_{G\vee H}$。性质（5）显然成立。 □

下述定理在一定条件下建立了格 $NF(L)$ 与格 $F(B(L))$ 之间的同构，其中后者是 L 的布尔中心的滤子格。这里，$F(B(L))$ 表示 L 的布尔中心 $B(L)$ 的滤子集。

定理 11 *1.* 如果 M 是 L 的子代数，那么 M 的正规滤子格嵌入 $\mathcal{L}$ 的正规滤子格中。*2.* 如果 L 是一个每条正规链都有限的 *WDL*，那么 N（F（L））与 F（B（L））是同构格。

*Proof*令 η： $NF(M) \to F(L)$ $G \mapsto \eta(F) = F_G$。根据引理 10 η 的第 1 条和第 4 条， $= F_G$ 是格嵌入。

2. 由于 $B(L)$ 是 L 的子代数，根据第 1 条， $\eta\colon\ NF(B(L)) \to NF(L)$ $G \mapsto \eta(G) = F_G$ 是嵌入。引理 10 中第 2 条的第二部分表明，在这些假设下， η 是满射的。因此，当该假设成立时， η 是 $NF(L)$ 与 $NF(B(L))$ 之间的同构。

□

推论 12 在每个有限 WDL 中， $L(L)$ 和 $NI(L)$ 是同构格。

Proof 这是显而易见的，因为在每个有限 WDL 中，每条正规链都是有限的。 □

例如，对于 WDL $\mathcal{P}_6$，有 $S(\mathcal{P}_6) = S(\mathcal{P}_6) = \{0, u, \overline{b}, 1\}$，它构成一个布尔代数。我们有 $NF(\mathcal{P}_6) \cong F(B(\mathcal{P}_6))$。

5 分配 WDL 中的同余

同余的刻画为简化 WDL 的研究提供了有用工具。次直不可约 WDL 和简单 WDL 的描述取决于给定 WDL 的同余格。由滤子生成的同余为获得所需的刻画提供了一种有效方法。正如我们将看到的，正规滤子在这些刻画中发挥着重要作用。

回想一下，概念代数是 WDL 的例子，尽管 WDL 不一定是概念代数。在 [11] (第 2.3.1 节)中，Kwuida 使用相容子上下文开始研究分配概念代数中的同余。

在[17],中，我们开始研究由分配弱补格中的 S-滤子生成的同余。回顾一下，弱补格 $(L; \vee, \wedge, ^{\Delta}, 0, 1)$ 是弱双补格 $(L; \vee, \wedge, ^{\Delta}, ^{\nabla}, 0, 1)$ 的代数约化。

在本文中，我们使用正规滤子刻画分配 WDL 中的同余。所得刻画比现有的分配概念代数刻画更一般、更简单。

5.1 WDL 中同余的一些预备结果

众所周知（见 [5]），格 $(L; \vee, \wedge)$ 上的等价关系 θ 是 L 上的同余关系，当且仅当对所有 $x, y, z \in L$,

$$(\star) \quad (x, y) \in \theta \Rightarrow (x \wedge z, y \wedge z), (x \vee z, y \vee z) \in \theta.$$

若 $F \in NF(L)$，则 $\Theta(F)$ 表示使 L 中的 F 合并的最小同余，而 $\theta(a, b)$ 表示 L 上使对 $a, b \in L$ 合并的主同余关系。以下，我们考虑定义在 L 上的二元关系 Φ，其定义如下:

$$\Phi := \{(x, y) \in L^2 \mid x^{\nabla} = y^{\nabla} \text{ and } x^{\Delta} = y^{\Delta}\}.$$

容易验证， $\Phi \in$ 属于 Con(L)。我们称之为 L 的**判定同余**。对于子集 $S \subseteq L$ 以及同余 $\theta, \psi \in \in$ Con(L)， θ_S 表示 θ 在 S 上的限制，而 $\theta \circ \psi$ 表示 θ 与 ψ 的关系积。

代数 A 是同余可交换的，如果 $\theta \circ \psi = \psi \circ \theta$ 对于所有同余 θ， ψ 在A上。正如我们将看到的，同余 Φ 在 WDL 的研究中发挥着基本作用。格 Con(L) 是 L 的所有同余构成的完备分配格（见[5]）。

命题 13 *Let θ be a congruence relation on a WDL L. The following statements hold:*

1. $F = [1]_\theta$ （分别为 $I = [0]_\theta$）是 L 的正规滤子（分别为正规理想）。此外，Ψ（I）$= F$ 且 Φ（F）$= I$。*2.* $\alpha = \theta_{|S(L)} \in$ *Con(S(L))* 和 $\beta = \theta_{|S(L)} \in$ *Con(S(L))*。*3. (i)* 若 *(0, 1)* $\in \theta$，则 $\theta = L^2$。*(i)* 若 $\overline{S}$（L）$= S$（L）$= \{0, 1\}$，则 $\theta = L^2$ 或 $[0]_\theta = \{0\}$ 且 $[1]_\theta = \{1\}$。*4.* 若 $G = [1]_\theta \cap S$（L），则 $[1]_\theta = N[G)$。*5.* $[1]_\theta = \{1\}$ 当且仅当 $[0]_\theta = \{0\}$。

Proof 1 Ψ I $= F$ $I =$第一部分 $[0]_\theta$ $F = [1]_\theta$ $z \in F$ 1 z $\in \theta$ 显然。对于第二部分，我们证明当 且 时， 。其余部分由对偶性可得。设， 则 (,)， 由与 $^\Delta$的相容性可知 $(0, z^\Delta) \in \theta$，即 $z^\Delta \in I$。由于 $z \geq z^{\Delta\Delta}$，取 $x = z^\Delta$，可得 $z \in \Psi(I)$。因此 $F \subseteq \Psi(I)$。对于反向包含，设 $z \in \Psi(I)$，则存在 $u \in I$使得$z \geq u^\Delta$。由于 $u \in U$，$(u, 0) \in \theta$，所以 $(u^\Delta, 1) \in \theta$，即 $u^\Delta \in F$，且 F是一个上集，因此 $z \in F$。故 $F = \Psi(I)$。
第 (2) 项显然。(3) (i) 假设 (0,1) $\in \theta$。则 $1 \in [0]_\theta$，又因为 $[0]_\theta$ 是 L的一个理想，所以 $[0]_\theta = L$，从而 $\theta = L^2$。
(ii) 假设 $S(L) = S(L) = \{\overline{0}, 1\}$。那么 $\theta_{|S(L)}$ 对应于以下划分之一： $\{\{0\}, \{1\}\}$ 或 $\{\{0, 1\}\}$。

- 在第一种情况下， $\{\{0\}, \{1\}\}$，我们有 $[0]_\theta = \{0\}$ 和 $[1]_\theta = \{1\}$。
- 在第二种情况下，(0,1) $\in \theta$，由 (3)(i) 可得 $\theta = L^2$。

(4) 令 $G = [1]_\theta \cap \overline{S}(L)$。我们证明 $[1]_\theta = N[G)$。显然， $N[G) \subseteq [1]_\theta$。反向包含方面，取 $z \in [1]_\theta$。那么 $(z,1) \in \theta$，因此 $(z^{\Delta\Delta},1) \in \theta$，从而 $z^{\Delta\Delta} \in G$。由于 $(z^{\Delta\Delta})^{\Delta\nabla} \leq z$，由命题 5 的 (1) 可推出 $z \in N[G)$。又因 $z^{\Delta\Delta} \in G$，所需等式即得证。

(5) 假设 $[1]_\theta = \{1\}$。令 $a \in [0]_\theta$。那么 $(a, 0) \in \theta$，并由与 $^\nabla$ 的相容性可得 $(a^\nabla, 1) \in \theta$。根据假设， $a^\nabla = 1$，因此 $a \leq a^{\nabla\Delta} = 0$，所以 $a = 0$。因此，$[0]_\theta = \{0\}$。反过来，假设 $[0]_\theta = \{0\}$。令 $a \in [1]_\theta$。那么 $(a,1) \in \eta$，并由 θ 与 $^\Delta$的相容性可得 $(a^\Delta,0) \in \theta$，所以 $a^\Delta = 0$。由此可得 $a^{\Delta\Delta} = 1 \leq a$，进而 $a = 1$。因此， $[1]_\theta = \{1\}$。□

5.2 由滤子生成的同余

正如布尔代数 [3] 和正交模格 [8], 的情形一样，我们

在分配 WDL 中建立滤子与同余之间的关系。设 F是 L的正规滤子，并考虑二元关系

$$\theta_F := \{(x,y) \in L^2 \mid \exists u \in F, x \vee u^{\Delta} = y \vee u^{\Delta}\}.$$

定理 14 *The binary relation θ_F is the least congruence relation on L that collapse F.*

Proof(1) 根据定义， θ_F显然具有自反性和对称性。对于传递性，设 $x,y,z \in L$ 满足 $(x,y),(y,z) \in \theta_F$。则存在 $u,v \in F$ 使得

$$(i) x \vee u^{\Delta} = y \vee u^{\Delta} \text{ and } (ii)\ y \vee v^{\Delta} = z \vee v^{\Delta}.$$

由于 $u \wedge v \in F$，利用命题 2 中的 (i)、(ii) 和 (4)，可得

$$x \vee (u \wedge v)^{\Delta} = x \vee u^{\Delta} \vee v^{\Delta} = y \vee u^{\Delta} \vee v^{\Delta} = z \vee v^{\Delta} \vee u^{\Delta} = z \vee (u \wedge v)^{\Delta}.$$

因此 $(x,z) \in \theta_F$，所以 θ_F具有传递性。因此， θ是一个等价关系。

(2) 我们证明 θ_F 保持 $\wedge$ 和 $\vee$。对于 $\wedge$，利用分配律可得

$$(x \wedge z) \vee u^{\Delta} = (x \vee u^{\Delta}) \wedge (z \vee u^{\Delta}) = (y \vee u^{\Delta}) \wedge (z \vee u^{\Delta}) = (x \wedge z) \vee u^{\Delta}.$$

因此， θ_F 与 $\wedge$相容。

设 $z \in L$，并假设 $(x,y) \in \theta_F$。根据 $\vee$ 和 (i) 的交换律与结合律,

$$(x \vee z) \vee u^{\Delta} = (x \vee u^{\Delta}) \vee z = (y \vee u^{\Delta}) \vee z = (y \vee z) \vee u^{\Delta}.$$

因此， θ_F 与 $\vee$ 相容。

(3) 接下来证明 θ_F 与运算 $^{\nabla}$ 和 $^{\Delta}$ 相容 .

对于 $^{\nabla}$，由 $x \vee u^{\Delta} = y \vee u^{\Delta}$，根据命题 2 的 (4')，可得

$$x^{\nabla} \wedge u^{\Delta\nabla} = y^{\nabla} \wedge u^{\nabla\Delta}.$$

由于对任意 $f \in F$，都有 $f \vee f^{\Delta} = 1 = 1 \vee f^{\Delta}$，因此对任意 $f \in F$，$(f,1) \in \theta_F$。由于 F 是正规 $(u^{\Delta\nabla},1) \in \theta_F$。此外，$(x^{\nabla} \wedge u^{\Delta\nabla}, x^{\nabla}) \in \theta_F$ 且 $(y^{\nabla} \wedge u^{\Delta\nabla}, y^{\nabla}) \in \theta_F$。由于 $x^{\nabla} \wedge u^{\Delta\nabla} = y^{\nabla} \wedge u^{\Delta\nabla}$ 和 θ_F 是传递的，我们推得 $(x^{\nabla}, y^{\nabla}) \in \theta_F$。因此 θ 与 $^{\nabla}$ 相容。对于 $^{\Delta}$，由 $x \vee u^{\Delta} = y \vee u^{\Delta}$，在两边与 $u^{\Delta\nabla}$ 取交，得到

$$(x \vee u^{\Delta}) \wedge u^{\Delta\nabla} = (y \vee u^{\Delta}) \wedge u^{\Delta\nabla}$$

也就是说

$$(x \wedge u^{\Delta\nabla}) \vee (u^{\Delta} \wedge u^{\Delta\nabla}) = (y \wedge u^{\Delta\nabla}) \vee (u^{\Delta\nabla} \wedge u^{\Delta\nabla}).$$

由命题 2 $u^{\Delta} \wedge u^{\Delta\nabla} = 0$ 的 (7)，可得 $x \wedge u^{\Delta\nabla} = y \wedge u^{\Delta\nabla}$ 对两边应用 $^{\Delta}$，得到 $x^{\Delta} \vee u^{\Delta\nabla\Delta} = y^{\Delta\nabla\Delta} \vee u^{\Delta\nabla\Delta}$. 由于 $u \in F$，且 F 是正规的，故 $u^{\Delta\nabla} \in F$，因此 $(x^{\Delta}, y^{\Delta}) \in \theta_F$。于是 θ_F 与 $^{\Delta}$ 相容。

由 (1)、(2) 和 (3)，我们得出 θ_F 是 L 的同余关系。

接下来我们证明 $F = [1]_{\theta_F}$。显然， $F \subseteq [1]_{\theta_F}$。令 $x \in [1]_{\theta_F}$。则 $(x,\ 1) \in \theta_F$，因此存在 $u \in F$ 使得 $x \vee u^{\Delta} = 1$。由命题2的 (7')， $u^{\Delta\nabla} \leq x$。由于 $u \in F$ 且 F 是正规的， $u^{\Delta\nabla} \in F$，故 $x \in F$。因此 $[1]_{\theta_F} = F$。

最后，我们证明 θ_F与由 F生成的同余相一致。由于 $[1]_{\theta_F} = F$，只需证明：若 ψ是 L 上的任意同余，且满足 $F \subseteq [1]_{\psi}$，则 $\theta_F \subseteq \psi$。设 ψ是这样的同余关系，并设 $(x,\ y) \in \theta_F$。那么存在 $u \in F$ 使得 $x \vee u^{\Delta} = y \vee u^{\Delta}$。在等式两边同取与 $u^{\Delta\nabla}$ 的交，得到

$$u^{\Delta\nabla} \wedge (x \vee u^{\Delta}) = (x \wedge u^{\Delta\nabla}) \vee (u^{\Delta\nabla} \wedge u^{\Delta}) = x \wedge u^{\Delta\nabla} = y \wedge u^{\Delta\nabla} \quad (\star_2).$$

由于 $(u^{\Delta\nabla},\ 1)\in\psi$，且 Ψ 与 $\wedge$相容，由 $(\star_2)$ 可得

$$(x\wedge u^{\Delta\nabla},x),(y\wedge u^{\Delta\nabla},y)\in\Psi.$$

由 ψ 的传递性可知，$(x,\ y)\in\psi$ 因此 $\theta_F\subseteq\Psi$，从而 $\theta_F=\Theta(F)$。 □

假设 F 是一个正规滤子，且 $(x,\ y)\in\theta_F$。那么，存在 $u\in F$ 使得 $x\vee u^{\Delta}=y\vee u^{\Delta}$。由于 F 是一个正规滤子，我们有 $u^{\Delta\nabla}\in F$。由分配律以及对所有 $x\in L$ 都有 $x\wedge x^{\nabla}=0$ 这一事实，可得

$$u^{\Delta\nabla}\wedge(x\vee u^{\Delta})=u^{\Delta\nabla}\wedge x \text{ and } u^{\Delta\nabla}\wedge(y\vee u^{\Delta})=u^{\Delta\nabla}\wedge y.$$

因此，$x\wedge u^{\Delta\nabla}=y\wedge u^{\Delta\nabla}$。由此我们得到如下注记。

Remark 3 对于任意 $F\in NF(L)$，若 $(x,\ y)\in\theta_F$，则存在 $f\in F$ 使得 $x\wedge f=y\wedge f$。

下一个结果给出了一条简单规则，用于计算两个同余的并，其中一个同余由滤子生成。

定理 15 *Let $F\in NF(L)$ and $\Psi\in Con(L)$. Then $\theta_F\vee\Psi=\theta_F\circ\Psi\circ\theta_F$.*

Proof 显然，我们有 $\theta_F\circ\Psi\circ\theta_F\subseteq\Psi\vee\theta_F$。要证明反向包含，只需证明

$$\Psi\circ\theta_F\circ\Psi\subseteq\theta_F\circ\Psi\circ\theta_F\quad(\ddagger).$$

事实上，由于

$$\Psi\vee\theta_F=\bigcup\{\alpha_{i_1}\circ\ldots\circ\alpha_{i_k},k\geq 1,\alpha_{i_l}\in\{\Psi,\theta_F\},\alpha_{i_1}=\Psi\}\ (\text{see [3]}).$$

包含关系 $(\ddagger)$ 表明

$$\Psi,\theta_F,\Psi\circ\theta_F,\theta_F\circ\Psi,\Psi\circ\theta_F\circ\Psi\circ\alpha_1\circ..\circ\alpha_k\subseteq\theta_F\circ\Psi\circ\theta_F,$$

对于任意 $\alpha_j\in\{\Psi,\theta_F\}$ 和 $1\leq j\leq k.$，因此所需的等式成立。

现在，我们来证明 $(\ddagger)$。设 $(a,b)\in\Psi\circ\theta_F\circ\Psi$。那么存在 $u,v\in L$ 使得 $a\Psi u\theta_F v\Psi b$。由于 $u\theta_F v$，由注记 3 可知存在 $t\in F$ 使得 $u\wedge t=v\wedge t$。由此可得

$$a\theta_F(a\wedge t),(a\wedge t)\Psi(u\wedge t)=(v\wedge t)\text{and }(v\wedge t)\Psi(b\wedge t),(b\wedge t)\theta_F b.$$

因此，

$$(a,a\wedge t)\in\theta_F,(a\wedge t,b\wedge t)\in\Psi\text{ and }(b\wedge t,b)\in\theta_F,$$

这意味着 $(a\ b\in\theta_F\circ\Psi\circ\theta_F\ \ b\wedge t\ b\in\theta_F\ \ b\wedge t\vee t^{\Delta}=,\ b\vee t^{\Delta}\ \ t\in F$. □ 。最后请注意，(，)，因为根据分配律有 ( ) 和 。证明至此完成。

回想一下，若代数 $\mathcal{A}$ 满足正则条件，则称其为**正则**；也就是说，对于每个 θ，$\beta\in Con(\mathcal{A})$，若存在 $a\in L$ 使得 $[a]_\theta=[a]_\beta$，则 $\theta=\beta$。

定理 16 *1.* Φ 是满足 $[1]_\eta=\{1\}$ 的 L 上的最大同余 η 。*2. WDL* L 是正则的，当且仅当 $\Phi=\Delta$。

Proof 1 $[1]_\Phi = \{1\}$ $a \in [1]_\Phi$ $a^\Delta = a^\nabla = 0$ $a^{\Delta\nabla} =$ ( ) 显 $1 \leq a$ $a = 1$ $[1]_\Phi = \{1\}$ η L $[1]_\eta = \{1\}$ 5 然有，事实上，令，则和，。因此。令为上一个满足的同余。由命题13的( )可知，有 $[0]_\eta = \{0\}$。下面证明 $\eta \subseteq \Phi$。令 $(a, b) \in \eta$。由对 $^\nabla$ 的相容性可知 $(a^\nabla, b^\nabla) \in \eta$，因此，对于任意 $x \in L$，$(x \vee a^\nabla, x \vee b^\nabla) \in \eta\,(\star)$。在 $(\star)$ 中取 $x = b^{\nabla\nabla}$，得到 $(b^{\nabla\nabla} \vee b^\nabla = 1, b^{\nabla\nabla} \vee a^\nabla) \in \eta$。根据假设，$b^{\nabla\nabla} \vee a^\nabla = 1$，由命题 2 的 (7') 可推得 $b^\nabla \leq a^\nabla$。类似地，在 $(\star)$ 中使用 $x = a^{\nabla\nabla}$，可得 $a^\nabla \leq b^\nabla$。因此 $a^\nabla = b^\nabla$。此外，$(a^\Delta, b^\Delta) \in \eta$ 蕴含 $(x \wedge a^\Delta, x \wedge b^\Delta) \in \eta\,(\star_1)$；在 $(\star_1)$ 中以 $b^{\Delta\Delta}$ 替换 x，然后由 $a^{\Delta\Delta}$ 并两次使用命题 2 的 (7)，可得 $a^\Delta = b^\Delta$。因此 $(a, b) \in \Phi$。故 $\eta \subseteq \Phi$。

（2）对于直接蕴含，显然，若 L 是正则的，则 $\Delta = \Phi$；事实上，$[1]_\Phi = \{1\}$ 和 $[0]_\Phi = \{0\}$ 以及 Δ 与 Φ属于同一个类，由正则性可得 $\Phi = \Delta$。现在假设$\Delta = \Phi$，并证明 L 是正则的。现在考虑 L 上的一个同余 θ，其中 $\{b\}$ 是一个类。令 $a \in I = [0]_\theta$，则（a，0）$\in \theta$，且（$a^{\nabla\nabla}$，0）$\in \theta$。由此可推出（$b \vee a^{\nabla\nabla}$，b）$\in \theta$，因此 $a^{\nabla\nabla} \vee b = b$，也就是说 $a^{\nabla\nabla} \leq b$。类似地，$a^\nabla \cong 1\ (\theta)$ 蕴含 $a^\nabla \wedge b \cong b\ (\theta)$，也就是说$a^\nabla \wedge b = b$，因此 $b \leq a^\nabla$，进而可得 $a \leq a^{\nabla\nabla} \leq a^\nabla$，所以 $a \leq a \wedge a^\nabla = 0$，于是 $a = 0$。因此 $I = [0]_\theta = \{0\}$，且 $[1]_\theta = \{1\}$。利用（1）可得 $\theta \subseteq \Phi = \Delta$，也就是说 $\theta = \Delta$。□

One can then define a regular WDL as a WDL that satisfies the condition $\Phi = \Delta_L$.

定理 17 *In a distributive WDL, the congruences generated by filters commute.*

Proof 设 F_1 和 F_2 是 L的两个正规滤子。我们证明 $\theta_{F_1} \circ \theta_{F_2} \subseteq \theta_{F_2} \circ \theta_{F_1}$。假设 $x\,\theta_{F_1}\,z\,\theta_{F_2}\,y$。那么存在 $f_1 \in F_1$ 和 $f_2 \in F_2$，使得

$$x \vee f_1^\Delta = z \vee f_1^\Delta \quad (\dagger_1) \quad \text{and} \quad z \vee f_2^\Delta = y \vee f_2^\Delta \quad (\dagger_2).$$

设 $\omega = (x \vee f_2^\Delta) \wedge (y \vee f_1^\Delta)$。注意到

$$(x \vee f_2^\Delta,\, x) \in \theta_{F_2} \quad (\dagger_3) \quad \text{and} \quad (y \vee f_1^\Delta,\, y) \in \theta_{F_1} \quad (\dagger_4).$$

由于 $(y, z) \in \theta_{F_2}$，我们有 $(y \vee f_1^\Delta,\, z \vee f_1^\Delta) \in \theta_{F_2}$。利用 $(\dagger_4)$，可得

$$((y \vee f_1^\Delta) \wedge (x \vee f_2^\Delta),\, (z \vee f_1^\Delta) \wedge x) \in \theta_{F_2}.$$

因此 $\omega\,\theta_{F_2}\,x$。

此外，由 $(x, z) \in \theta_{F_1}$，可得 $(x \vee f_2^\Delta,\, z \vee f_2^\Delta) \in \theta_{F_1}$。利用 $(\dagger_3)$，我们得到

$$(\omega,\, (z \vee f_2^\Delta) \wedge y) \in \theta_{F_1}.$$

由于 $(z \vee f_2^\Delta) \wedge y = y$，可得 $(\omega, y) \in \theta_{F_1}$ 且 $(x, \omega) \in \theta_{F_2}$，因此 $(x, y) \in \theta_{F_2} \circ \theta_{F_1}$。所以，

$$\theta_{F_1} \circ \theta_{F_2} \subseteq \theta_{F_2} \circ \theta_{F_1}.$$

类似的论证表明 $\theta_{F_2} \circ \theta_{F_1} \subseteq \theta_{F_1} \circ \theta_{F_2}$。因此，所需的等式成立。 □

推论 18 对于任意 $F_1, F_2 \in NF(L)$，有 $\theta_{F_1} \vee \theta_{F_2} = \theta_{F_1} \circ \theta_{F_2}$。

Proof 令 $\Psi = \theta_{F_2}$ 和 $\theta_F = \theta_{F_1}$ 代入定理 15 即可完成证明 . □

令 $h\colon\ NF(L) \to Con(L)$ 定义为 $h(F) = \theta_F$。

Lemma 19 设 L 为分配 WDL，且 F，$G \in NF(L)$。以下等价关系成立：

$$F \subseteq G \text{ if and only if } h(F) \subseteq h(G).$$

Proof 很容易验证，若 $F \subseteq G$，则 $\theta_F \subseteq \theta_G$。反过来，假设 $\theta_F \subseteq \theta_G$。于是 $[1]_{\theta_F} \subseteq [1]_{\theta_G}$，也就是说，$F \subseteq G$，因为 $[1]_{\theta_F} = F$ 和 $[1]_{\theta_G} = G$。□

现在我们给出一些同余 θ 及其对应的正规滤子（分别为理想）的例子。

Example 4 考虑 WDL $\mathcal{P}_6$。

1. $F = \{b, 1\}$ 是 P_6 的一个正规滤子，而由其等价类定义的 P_6 和 θ_F 为 θ_F: $= \{\{0, u\}, \{b, 1\}\}$。2. 设 β 是 $\mathcal{P}_6$ 上的等价关系，其等价类为 $\{0, b, v\}$ 和 $\{u, a, 1\}$。那么 $\beta \in Con(\mathcal{P}_6)$，并且 $F = \{u, a, 1\} = [1]_\beta$ 是一个正规滤子。

5.3 简单分配WDL与次直不可约分配WDL

本节利用由滤子生成的同余，刻画简单分配 WDL 与次直不可约分配 WDL。

Lemma 20 令 $\theta, \beta \in Con(L)$。以下结论成立：

1. Φ 是 L 上最大的同余 θ，其对$S(L)$和 $S(L)$的限制均为平凡同余。 2. 若 $\Phi = \Delta$, 则对任意 $\theta \in Con(L)$，若 $[1]_\theta = \{1\}$，则 $\theta = \Delta_L$。 3. (i) $(\theta \vee \beta)|_{S(L)} = (\theta_{|S(L)}) \vee (\beta_{|S(L)})$，且 (ii) $(\theta \vee \beta)|_{S(L)} = (\theta_{|S(L)}) \vee (\beta_{|S(L)})$。 4. 若 θ 是 L上的极大同余，则 $\Phi \subseteq \theta$。 5. 包含于 Φ 中的每个格同余都是同余关系。此外，若 θ 是满足 $\Phi \vee \theta = L^2$ 的同余关系，则 $\theta = L^2$。

Proof 1。设 θ 是 L 上的一个满足所述条件的同余。我们证明 $\theta \subseteq \Phi$。设 $(x, y) \in \theta$。则 $(x^{\Delta\Delta}, y^{\Delta\Delta}) \in \theta_{S(L)} = \Delta_{S(L)}$ 且 $(x^{\nabla\nabla}, y^{\nabla\nabla}) \in \theta_{|S(L)} = \Delta_{|S(L)}$。因此，$x^{\Delta\Delta} = y^{\Delta\Delta}$ 且 $x^{\nabla\nabla} = y^{\nabla\nabla}$，这意味着 $(x, y) \in \Phi$。因此，$\theta \subseteq \Phi$。

第 2 项由定理 16. 中的第 1 项得出。

3. 对于 (i)，显然 $(\theta_{S(L)}) \vee (\beta_{S(L)}) \subseteq (\theta \vee \beta)_{S(L)}$。为证明反向包含，设 $a, b \in S(L)$，使得 $(a, b) \in (\theta \vee \beta)_{S(L)}$。于是 $(a, b) \in \theta \vee \beta$，并且存在 $a \equiv$
c_0 c_1 c_{n-1} $c_n = b$ c_i c_{i+1} $\in \theta \cup \beta$ $0 \le i \le n-1$ $\in$,,…,,使得
$\theta_{S(L)} \cup \beta_{S(L)}$ $0 \le i \le n-1$ a b $\in \theta_{S(L)} \vee \beta_{S(L)}$
(,) for 。因此，$(c_i^{\Delta\Delta}, c_{i+1}^{\Delta\Delta})$ for，这表明 (,) 。由此，所需的等式成立。(ii) 中的等式可仿照 (i) 证明。

4. 假设 θ 是 L上的极大同余。那么， $\theta \vee \Phi = \theta$ 或 $\theta \vee \Phi = L^2$。设 $\theta \vee \Phi = L^2$。利用 3.，我们得到 $(\theta \vee \Phi)_{|S(L)} = \theta_{|S(L)} \vee \Delta_{S(L)} = S(L)^2$ (因为 $\Phi_{|S(L)} = \Delta_{S(L)}$)。由此可得 $(0,1) \in \theta$，从而 $\theta = L^2$，这与假设矛盾。因此， $\Phi \vee \theta = \theta$，进而 $\Phi \subseteq \theta$。

5. 假设 θ 是一个与 $\vee$ 和 $\wedge$ 相容的等价关系，且 $\theta \subseteq \Phi$。令 $(x, y) \in \theta$。则 $x^{\Delta} = y^{\Delta}$ 和 $x^{\nabla} = y^{\nabla}$。由于 θ 是自反的，结论成立。□

命题 21 *Let L be a distributive WDL such that $\Delta = \Phi$. Then*

$$\cap\{\theta : \theta \in Con(L) \setminus \{\Delta_L\}\} = \{\theta_F : F \in NF(L) \setminus \{\{1\}\}\}.$$

Proof 回顾 $\Delta_L = \theta_{\{1\}}$ 和 $L^2 = \theta_L$。令

$$\gamma := \bigcap\{\theta : \theta \in Con(L) \setminus \{\Delta_L\}\}, \text{and } \psi := \bigcap\{\theta_F : F \in NF(L) \setminus \{\{1\}\}\}.$$

我们证明 $\gamma = \psi$。显然， $\gamma \subseteq \psi$。对于反向包含，设 $(x, y) \in \psi$。于是，对于 L 的任意正规滤子 $F \neq \{1\}$，有 $(x, y) \in \theta_F(\star)$。

设 θ 是 L 上的一个同余关系，满足 $\theta \neq \Delta_L$。由于 $\Delta_L = \Phi$ 且 θ 是真滤子，我们有 $F = [1]_\theta \neq \{1\}$，因此 F 是 L的一个真正规滤子，并由 $(\star)$ 得 $(x, y) \in \theta_F \subseteq \theta$。因此，对于 L 上的每个真同余 θ，都有 $(x, y) \in \theta$。于是 $\gamma = \psi$。□

下面的定理给出了单且次直不可约正则分配 WDL 的刻画。

定理 22 *If $\Phi = \Delta_L$, then the following statements hold:*

1. L是次直不可约的，当且仅当 $NF(L)$有唯一原子。*2.* L是单的，当且仅当$\mathrm{Card}(NF(L)) = 2$。

Proof 假设 $\Delta = \Phi$ 且 L 是次直不可约的。那么，在 $Con(L)$中存在唯一原子，记为 μ，且 $\mu \neq \Delta_L$。

如果 $[1]_\mu = \{1\}$，那么 $[0]_\mu = 0$ 且 $\mu \subseteq \Phi = \Delta$ (根据定理16的第1条)，这就产生了矛盾。因此，令 $F = [1]_\mu$。由于 μ 是一个原子，所以 $\theta_F = \mu$。因此， F是$NF(L)$中的一个原子。

若否，则假设存在 $G \subseteq F, G \neq F$，属于 $NF(L)$。于是 $\theta_G \subsetneq \theta_F \subseteq \mu$，矛盾。

现在，假设 $NF(L)$ 有唯一原子，记为 F。由命题 21，可得$\theta_F = \cap\{\theta \in Con(L) \setminus \{\Delta\}\}$，因此 θ_F 是 $Con(L)$ 的唯一原子，从而 L 是次直不可约的。

(2) 若 L是单的，则 $\{\Theta_F \mid F \in N(F)\} \subseteq Con(L) = \{\Delta_L, \nabla_L\}$，这意味着 $\mathrm{Card}(NF(L)) = 2$。反之，假设 $\mathrm{Card}(NF(L)) = 2$，且 L 上存在一个真同余 ϕ。由于 ϕ是真且 L 是正则的，必有 $L \neq [1]_\phi \neq \{1\}$，矛盾。因此， L是单的。□

Example 5 1. $\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_3$ 是单且次直不可约的 WDL。

2. $NF(P_6) = \{\{1\}, F_1 = \{b,1\}, F_2 = \{u,a,1\}, L\}$是一个四元布尔代数，而 $NF(P_6)$中有两个原子。因此， P_6不是次直不可约的。它是同余可交换的。由于 $\theta = \theta_{F_1}$和 $\Psi = \theta_{F_2}$满足 $\theta \vee \Psi = \nabla$和 $\theta \cap \Psi = \Delta$，可推得 P_6与 $C_2 \times C_3$同构。

3. WDL L_6是正则的，且 $NF(L_6) = \{\{1\}, L_6\}$。因此， L_6是单的。4. $NF(M_5) = \{\Delta_{M_5}, \nabla_{M_5}\}$，且 M_5是正则分配 WDL。因此， M_5是单的，因而也是次直不可约的。

设 g： $Con(L) \to NF(L)$ $\theta \mapsto [1]_\theta$，且 h： $NF(L) \to Con(L)$ $F \mapsto \theta_F$。 h和 g都有定义。

定理 23 *If L is a regular WDL, then $Con(L)$ and $NF(L)$ are isomorphic lattices.*

Proof h 是一个保序单射。由于 L 是正则的，根据命题 21 $Con(L)$ $=$ $\{\theta_F \mid F \in NF\ L\}$ Ψ L $F = [1]_\Psi$ θ_F ()。事实上，对于中的一个同余，令。则是一个同余，且 $[1]_{\theta_F} = F = [1]_\Psi$。由于 L 是正则的，我们有 $\theta_F = \Psi$。因此 h 是满射。于是 h 是一个序同构。□

Example 6在 L_9中， $B(L_9)$是一个四元布尔代数，而 $NF(L)$ $=$ $\{\{1\}, \{u,d,1\}, \{b,a,1\}, L_9\}$ 也是一个四元布尔代数。对于 P_6 L_9 $F_1 = \{u,a,1\}$ $F_2 = \{b,a,1\}$ $F_1 \cap F_2 =$，也有类似的结果。特别地，在中，令 $\{1\}$ $F_1 \vee F_2 =$ L_9 L_9 $L_9/F_1 \times L_9/F_2$ 和，则有：，，因此与同构。

命题 24 *For any WDL L, the quotient algebra L/Ψ is a regular WDL. In particular, $\mathcal{C}_n/\Phi$ is isomorphic to $\mathcal{C}_3$ for any $n \geq 3$.*

Proof 根据 Φ 的定义，第一部分是显然的。注意， Φ 是 $\mathcal{C}_n$ 上的最大真同余，并且将不属于 $\{0,1\}$ 的所有元素坍缩。因此， $\mathcal{C}_n/\Phi \cong \mathcal{C}_3$， $n \geq 3$. □

定理 25 *A WDL $\mathcal{C}_n$, $n \geq 2$, is subdirectly irreducible if and only if $n \leq 4$.*

*Proof*注意，对于 $\mathcal{C}_n$ 中的任意真同余 θ，都有 $[1]_\theta = \{1\}$ 和 $[0]_\theta = \{0\}$。事实上，假设 $a \in \mathcal{C}_n \setminus \{0,1\}$ 且 $(1, a) \in \theta$。则 $(1^\Delta, a^\Delta) = (0, 1) \in \theta$，这意味着 $\theta = (\mathcal{C}_n)^2$，，矛盾。因此， $[1]_\theta = \{1\}$。类似地，可以证明 $[0]_\theta = \{0\}$。

现在，假设 $n \leq 4$。分为三种情况： $n = 2$, 3 或 4。

• **情况** $n = 2$**:** 这是显然的，因为 $\mathcal{C}_2$ 是一个含两个元素的布尔代数，所以 $\mathcal{C}_2$ 是单的，因而是次直不可约的。

• **情形** $n = 3$**:** 根据证明开头的观察， $\mathcal{C}_3$上不存在真同余。因此， $\mathcal{C}_3$ 是单的，因而是次直不可约的。

• **情形** $n=4$**:** 设 $0<c_1<c_2<1$。 $\mathcal{C}_4$ 上唯一的真同余将 c_1和 c_2合并。由于 $c_1^{\Delta}=c_2^{\Delta}=1$ 和 $c_1^{\nabla}=c_2^{\nabla}=0$，这个同余恰好是 Φ_4。由此可得

$$Con(\mathcal{C}_4)=\{\Delta,\Phi_4,\nabla\},$$

并且由于 Φ_4 是 $Con(\mathcal{C}_4)$ 的唯一原子，因此 $\mathcal{C}_4$ 是次直不可约的。

现在，假设 $n\geq 5$，且 $0<c_1<c_2\leq c_3<\ldots<1$。考虑等价关系 $\theta_1=\Delta_{\mathcal{C}_n}\cup\{(c_1,\ c_2),\ (c_2,\ c_1)\}$，$\theta_2=\Delta_{\mathcal{C}_n}\cup\{(c_2,\ c_3),\ (c_3,\ c_2)\}$. 可以验证，$\theta_1,\ \theta_2\in Con(\mathcal{C}_n)$ 且 $\theta_1\cap\theta_2=\Delta_{\mathcal{C}_n}$.。因此，对于 $n\geq 5$，$\mathcal{C}_n$ 不是次直不可约的。 □

众所周知（[11]），给定的有界格可以赋予不同的弱双补格结构。

定义 4 （[11], 定义 1.2.2）设 $(^{\Delta_1},\ ^{\nabla_1})$ 和 $(^{\Delta_2},\ ^{\nabla_2})$ 是 L 上的两个弱双补运算。若 $(^{\Delta_1},\ ^{\nabla_1})$ 比 $(^{\Delta_2},\ ^{\nabla_2})$ **更细**（记作 $(^{\Delta_1},\ ^{\nabla_1})\preceq(^{\Delta_2},\ ^{\nabla_2})$），则</output>

$$x^{\Delta_1}\leq x^{\Delta_2}\quad\text{and}\quad x^{\nabla_1}\geq x^{\nabla_2}\quad\text{for all } x\in L.$$

有时称 WDL $(L;\wedge,\ \vee,\ ^{\Delta_1},\ ^{\nabla_1},\ 0,\ 1)$ 细于 $(L;\ \wedge,\ \vee,\ ^{\Delta_2},\ ^{\nabla_2},\ 0,\ 1)$。在固定有界格上，所有弱双补运算构成的类上，“细于”关系是一种序关系。它有一个顶元，即顶结构或平凡弱双补运算。对于分配 WDL，它也有一个底元，即其双 p-代数结构 ([11])。

命题 26 *1.* 设 $(^{\Delta_1},^{\nabla_1})$ 和$(^{\Delta_2},^{\nabla_2})$ 是有界格 L 上的两个弱双补运算。若$(^{\Delta_1},^{\nabla_1})$ 细于$(^{\Delta_2},\ ^{\nabla_2})$，且 F 是$(^{\Delta_2},^{\nabla_2})$的正规滤子，则 F 是$(^{\Delta_1},^{\nabla_1})$的正规滤子。反之则不总成立。

2. 假设 $(^{\Delta_1},^{\nabla_1})$ 细于 $(^{\Delta_2},^{\nabla_2})$，并且 $(L;\ \wedge,\vee,^{\Delta_1},^{\nabla_1},0,1)$ 和 $(L;\ \wedge,\vee,^{\Delta_2},^{\nabla_2},0,1)$ 均为正则的。若 $(L;\wedge,\vee,^{\Delta_1},^{\nabla_1},0,1)$ 是单的，则 $(L;\ \wedge,\vee,^{\Delta_2},^{\nabla_2},0,1)$ 也为单的。

Proof(1) 假设 $(^{\Delta_1},\ ^{\nabla_1})$ 细于 $(^{\Delta_2},\ ^{\nabla_2})$，且 F 是 $(^{\Delta_2},\ ^{\nabla_2})$ 的正规滤子。令 $x\in F$。根据假设，$x^{\Delta_2\nabla_2}\in F$。由于 $x^{\Delta_1}\leq x^{\Delta_2}$ 和 $^{\nabla_2}$ 是反序的，我们有

$$x^{\Delta_2\nabla_2}\leq x^{\Delta_1\nabla_2}\leq x^{\Delta_1\nabla_1}.$$

由于 F 是一个上集，因此可得 $x^{\Delta_1\nabla_1}\in F$。所以，$F$ 对于 $(^{\Delta_1},\ ^{\nabla_1})$ 是正规的。.

为说明反过来并非总是成立，考虑 WDL L_6 和 M_6，其弱双补运算分别为 $(^{\Delta_L},\ ^{\nabla_L})$ 和 $(^{\Delta_M},\ ^{\nabla_M})$。可以验证

$$x^{\Delta_M}\leq x^{\Delta_L}\quad\text{and}\quad x^{\nabla_M}\geq x^{\nabla_L}\quad\text{for all } x\in L=\{0,u,v,a,b,1\}.$$

因此，$(^{\Delta_M},\ ^{\nabla_M})$ 细于 $(^{\Delta_L},\ ^{\nabla_L})$。令 $F=\{u,a,1\}\subseteq L$。那么 F 对于 P_6 是正规的，但对于 L_6 不是，因为在 L_6 中，$u\in F$ 且 $u^{\Delta_L\nabla_L}=0\notin F$。

(2) 假设 L 对于 $(^{\Delta_1},\ ^{\nabla_1})$ 是单的。那么，对于 $(^{\Delta_1},\ ^{\nabla_1})$，$L$ 上不存在真同余，因此对于 $(^{\Delta_1},\ ^{\nabla_1})$，也不存在真正规滤子。根据正则性，可得

$$Con(L;\wedge,\vee,^{\Delta_2},^{\nabla_2},0,1)\subseteq Con(L;\wedge,\vee,^{\Delta_1},^{\nabla_1},0,1)=\{\Delta_L,\nabla_L\}.$$

因此，$(L;\ \wedge$、$\vee$、$^{\Delta_2}$、$^{\nabla_2}$、0、1) 也是单的。 □

显然，若 θ 是 L 上的同余关系，则商集 $L/\theta := \{[a]_\theta \mid a \in L\}$ 继承 WDL 的结构。此外，若 ϕ 是 L/θ 上的同余关系，则 $\phi := \beta/\theta = \{([a]_\theta, [b]_\theta) \mid (a,b) \in \beta\}$，其中 β 是包含 θ 的 L 上的同余。由对应定理（参见 [3]，定理 6.20）可知，L/θ 上的每个同余都具有这种形式。

若真正规滤子是 $(NF(L) \subseteq)$ 中的极大元，则称其为**纯极大的**。对于 L 的任意正规滤子 F，我们用 L/F 表示代数 L/θ_F。

命题 **27** *Let $F \in NF\ L$ then the algebra L/θ_F is simple if and(). If L is regular, () only if F is a maximal element in $NF\ L$.*

Proof 假设 L 是正则的，且 L/F 是单的。那么，包含 θ_F 的 L 上唯一的同余是 L^2，这意味着 L 上不存在包含 F 的真正规滤子。因此，F 是极大的。

反过来，假设 F 是 $(NF(L) \subseteq)$ 中的极大元。根据对应定理，L/θ_F 中的同余具有 β/θ_F 的形式，其中 $\theta_F \subseteq \beta$。由于 L 是正则的，L 上的所有同余都具有 θ_H 的形式，其中 $H \in NF(L)$。由于 F 是 $NF(L)$ 中的极大元，可知 L/F 上不存在真同余。因此，L/F 是单的。□

定理 **28** *Let θ and β be congruence relations on L such that $\theta_{S(L)} = \beta_{S(L)}$ and $\beta_{S(L)} = \theta_{S(L)}$. Then there exists a natural isomorphism given by: $\phi : (L/\theta)/\Phi \to (L/\beta)/\Phi$, $([x]_\theta)_\Phi \mapsto ([x]_\beta)_\Phi$.*

Proof 首先，我们证明 ϕ 定义良好。设 $[y]_\theta \in [x]_\theta)_\Phi$。那么

$$[x^\Delta]_\theta = [y^\Delta]_\theta \quad \text{and} \quad [x^\nabla]_\theta = [y^\nabla]_\theta.$$

由于 $\theta_{S(L)} = \beta_{S(L)}$ 和 $\beta_{S(\overline{L})} = \theta_{S(\overline{L})}$，可得

$$[x^\Delta]_\beta = [y^\Delta]_\beta \quad \text{and} \quad [x^\nabla]_\beta = [y^\nabla]_\beta,$$

这意味着 $[x]_\beta \Phi [y]_\beta$。因此，$[x]_\beta/\Phi = [y]_\beta/\Phi$，从而证明 ϕ 定义良好。

利用商代数上运算的定义，可以直接验证 ϕ是一个同态。满射性由 $\phi^{-1}\Big([x]_\beta/\Phi\Big) = [x]_\theta/\Phi$. 得出。还需证明 ϕ 是单射。设 $[x]_\theta/\Phi \neq [y]_\theta/\Phi$. 。那么，要么 $[x^\Delta]_\theta \neq [y^\Delta]_\theta$，要么 $[x^\nabla]_\theta \neq [y^\nabla]_\theta$，而根据对 θ 和 β的假设，这意味着 $([x]_\beta,\ [y]_\beta) \notin \Phi$. 。因此，$\phi\Big([x]_\theta/\Phi\Big) \neq \phi\Big([y]_\theta/\Phi\Big)$，从而证明 ϕ 是单射。因此，ϕ 是一个同构。□

设 $X \neq \emptyset$ 和 $x \in X$。对于 $S \subseteq L$，定义

$$L^X(x,S) = \{f \in L^X \mid f(x) \in S\},$$

并且对于 $Y \subseteq L^2$，令 $L^X(x,\ Y) = \{(f,\ g) \in (L^X)^2 \mid (f(x)\ g(x)) \in Y\}$.定义映射

$$\gamma : F(L) \to F(L^X), \quad F \mapsto \gamma(F) = L^X(x,F), \text{and } \mu : Con(L) \to Con(L^X), \quad \theta \mapsto L^X(x,\theta).$$

命题 29 *Let F, $G \in F(L)$ and θ, $\beta \in Con(L)$. The following statements hold:*

1. γ 是格嵌入。特别地，若 F 是正规的，则 $\gamma(F)$ 是正规的。*2.* $Con(L)$ 通过 μ 嵌入到 $Con(L^X)$ 中。特别地，若 $\theta = \Theta(F)$，则 $\mu(\theta) = \theta_{L^X(x,F)}$。*3.* $\{L^X(x, F) \mid F \in NF(L)\} \subseteq NF(L^X)$。

Proof(1) 显然，γ定义良好，并且满足：$F \subseteq G$当且仅当 $\gamma(F) \subseteq \gamma(G)$。因此，$\gamma$是保序单射。若 F是正规的且 $f \in \gamma(F)$，则 $f(x) \in F$。由于 F是正规的，

$$f^{\Delta\nabla}(x) = f(x)^{\Delta\nabla} \in F,$$

因此 $f^{\Delta\nabla} \in \gamma(F)$。所以，$\gamma(F)$ 是正规的 .

(3) 由 (1) 立即得出 .

(2) 显然，μ 定义良好且保序：$\theta \subseteq \beta$ 当且仅当 $\mu(\theta) \subseteq \mu(\beta)$.

事实上，根据 $\mu(\theta) \subseteq \mu(\beta)$，设 $(a, b) \in \theta$，这表明那么 $(\phi_a, \phi_b) \in L^X(x, \theta) \subseteq L^X(x, \beta)$，因此 $\phi_a(x) = \phi_b(x)$。设 $a \neq b$，则 $\phi_a(x) \neq \phi_b(x)$，

反过来，若 $\theta \subseteq \beta$，则根据 μ 的定义，有 $\mu(\theta) \subseteq \mu(\beta)$. □

回顾一下，如果对于任意的 $A, B \in K$（其中 A 是 B 的子代数）以及 A 的任意同余 θ，都存在 B 上的同余 β 使得 $\beta_{|A} = \theta$，则称代数类 K 具有同余扩张性质（CEP）。

定理 30 *( ) Let M L be* 分配 ***WDL*** 的同余 *two regular and distributive WDLs such that M is a subalgebra of L. If $\theta \in Con\ M$ then* 扩张性质,()*there exists $\beta \in Con\ L$ such that $\theta = \beta_{|M}$. Moreover if L is a regular WDL then $Con\ M$ () ,,() embeds in $Con(L)$*。

Proof 令 $\theta \in Con(M)$。由于 M 是正则 WDL，存在 M 的正规滤子 G，使得 $\theta = \theta_G$。令 $F = F_G$。根据引理 10 的第 1 条，F_G 是 L 的正规滤子；根据定理 14，

θ_{F_G} L $[1]_{\theta_{F_G}} = F_G$ $F_G \cap M = G$ $G \subseteq F_G$ 是 的同余。此外，有 和 。由于 ，我们推得 $\theta \subseteq \theta_{F_G}$。映射 ϕ：$Con(\mathcal{M}) \to Con(\mathcal{L})$ $\theta = \theta_G \mapsto \phi(\theta) = \theta_{F_G}$，根据定理 11 和定理 23 的第 1 条，是一个嵌入。□

推论 31 设 M 和 L 是两个 WDL，且 M 是 L的子代数。

1. 若 L是正则 WDL，则 M 是正则 WDL。2. 若 L是简单 WDL，则 L 的任何子代数都是简单的。3. 分配 WDL L 的滤子 F 是正规的，当且仅当它是某个 WDL 同态的余核。

Proof 1。假设 L 是一个正则 WDL，那么根据（2）定理 16，$\Phi_L = \Delta_L$，由于 M 是 L的子代数，$\Phi_M \subseteq \Phi_L = \Delta_L$，因此可得 $\Phi_M = \Delta_M$，并且根据定理 16 M 是一个正则 WDL。

2. 假设 L 是一个单分配 WDL。那么 $Con(L) = \{\Delta_L, \nabla_L)\}$，并且根据同余扩张性质 $Con(M) = \{\Delta_M, \nabla_M\}$。

3. 假设 L 是分配的，且 F是 L的正规滤子。那么， θ_F是 L 的一个同余，并且 π_F: $L \to L/\theta_F$， $x \mapsto [x]_{\theta_F}$是 WDL 的同态，且满足 $co - ker(\pi_F) = F$。反之，若 h : $L \to L'$ 是 WDL 的同态，则 $F = \{x \in L \mid f(x) = 1\}$ 是 L的正规滤子。□

定理 32 *(Maximal congruences and semi-simple WDLs)*

1. 同余 θ 是极大的，当且仅当 $[1]_\theta$ 是 L的极大正规滤子。*2.* 正则 *WDL* L 是半单的，如果$\bigcap\{max(NF(L))\} = \{1\}$。

6 结论

在这项工作中，我们首先给出了 WDL 的完整列表，并从中引入了若干 WDL 子类。我们还刻画了由子集生成的正规滤子以及两个正规滤子的并，表明正规滤子构成一个完备格，但它不是 $F(L)$的子格。 L 的布尔中心的滤子格嵌入正规滤子格，并且在某些条件下，这一嵌入成为同构。此外，我们研究了 WDL 中正规滤子的若干性质，并证明正规滤子格与正规理想格同构。我们刻画了由正规滤子生成的同余，并在分配 WDL 的情形下建立了其他性质。最后，我们利用由正规滤子生成的同余刻画了单分配 WDL 和次直不可约分配弱对补格，并由此得出了关于这类格的若干进一步结果。我们还证明了分配 WDL 子类具有同余扩张性质。

未来的研究中，我们将重点构造与分配 WDL 对应的 Priestley 空间。

作者贡献声明

补充信息。 没有补充文件。

致谢。 本研究部分得到了 IMU 和 Simons Foundation 的资助，资助编号为 N° 640，用于访问伯尔尼应用科学大学。

声明

利益冲突声明 作者不存在利益冲突。

声明

利益冲突声明 作者不存在利益冲突。**资助：** 本研究部分由 IMU 和西蒙斯基金会资助，资助编号为 N°640，用于访问伯尔尼应用科学大学。**利益冲突/利益冲突：** 不适用。**发表同意**

数据可用性：不适用。**材料可用性：**不适用。如果其中任何部分与您的稿件无关，请保留该标题，并在相应部分填写“不适用”。

参考文献

[1] M.E. Aams，R. Beazer，分配双 p-代数的同余性质，《捷克斯洛伐克数学杂志》41（116），1991年，布拉格[2] R. Beazer，双 p-代数上的判定同余。《代数学宇宙》**6**（1976）121–129。https://doi.org/10.1007/BF02485824。[3] S. Burris，H.P. Sankappanavar，《普适代数教程》，施普林格纽约公司，（1981年）。[4]B. Ganter，R. Wille，《形式概念分析：数学基础》，第二版，（2024年）https:// doi.org/10.1007/978-3-031-63422-2[5] G. Gr$\ddot{a}$tzer。《一般格论》，第二版。施普林格自然（2003年）。[6] G.Gr$\ddot{a}$tzer。《格论：基础》。施普林格巴塞尔公司（2011年）。[7] I. D$\ddot{u}$ntsch，L. Kwuida，双补格的离散表示，《信息学基础》**156**（2017年）281–295。DOI 10. 3233/FI-2017-1609。[8]G. Kalmbach，《正交模格》，学术出版社公司（伦敦），伦敦数学学会专著，编者：D.A. Edwards 和 P.M. Cohn（1983年）。[9] T. Katri$\check{}$$n\acute{a}$k，分配双 p-代数的结构：正则性与同余。《代数学宇宙》**3**（1973年）238–246。https://doi.org/10.1007/BF02945123[10] T. Katri$\check{}$$n\acute{a}$k，次直不可约双 p-代数，《代数学宇宙》**10**（1980年）195–219。[11] L. Kwuida。《双补格：布尔代数的语境推广》。博士论文，德累斯顿工业大学，（2004年）。[12] L. Kwuida，C. pech，H. Reppe，布尔代数的推广：属性探索。MATH-AL-02（2004年）。[13] L. Kwuida，H. Machida，关于概念代数的同构问题，《数学与人工智能年刊》（2010年）59：223–239，doi.org/ 10.1007/s10472-010-9194-x[14] S. Pulmannov´a，K. Svozil，正交格中的理想、贝尔不等式与同时定义的性质，《国际理论物理学杂志》第36卷，第°7期（1997年）。

[15] G.K.Tenkeu，Y. L. J. Tenkeu，E. R. A. Temgoua，L. Kwuida，双布尔代数：构造、子结构与态射，《国际近似推理杂志》（2025）https: doi.org/10.1016/j.ijar.2025.109519。[16]Y. L. J. Tenkeu，J. Djoumessi，E. R. A. Temgoua，由双布尔代数中的滤子（理想）导出的剩余格，《代数超结构与逻辑代数杂志》（2022）25–45，https://https://doi.org/10.52547/HATEF.JAHLA.3.2.3 [17]Y.L.J. Tenkeu，L. Kwuida，弱补格中的滤子与同余，预印本，Arxiv:6862482。[18]R. Wille。B. Ganter，G.W. Mineau（编）《布尔概念逻辑》，收录于《概念结构中的语言学：逻辑语言学与计算问题》论文集，施普林格 LNAI 1867（2000）317–331。