arXiv:2601.11933v1 [math.GR] 17 Jan 2026

仿射变换群中连通适当对的分类

Shunsuke Miyauchi

2026年1月21日

摘要

设 (L, H) 是局部紧群 群 G 的闭子群。如果 群 G 在齐性空间 G/H 上的作用适当地进行，则称 (L, H) 为适当 对。

我们给出了 $\mathbb{R}^2$的仿射变换群中所有连通闭适当对的完整列表。该结果推广了 Kobayashi 对 $\mathbb{R}^2$ 的仿射变换群中在 $\mathbb{R}^2$上适当地作用的连通闭子群所作的分类。

MSC2020： 主要分类 57S30，次要分类 22F30。

关键词和短语： 真作用；不连续群；仿射变换群。

目录

1 引言 **2**

1.1 $G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的情形.3 1.2 $G = GL_2(\mathbb{R})$ 的情形.4 1.3 主要结果（ $G = GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的情形）.5 1.4 论文结构.7

2 预备知识 **7**

2.1 适当性关系 $\curlywedge$和等价关系 $\sim$ .7 2.2 (CI) 条件与适当性.8

3 符号 $\lesssim_+$， $\asymp_+$， $\lesssim_\times$， $\asymp_\times$ **9**

4 $G = SL_2$（$\mathbb{R}$） $\ltimes \mathbb{R}^2$ **11中适当对的分类**

4.1 群 G$(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的李子代数分类.11 4.2 $\sim$ 意义下的等价子群.12 4.3 连通对的适当性.12 4.4 关于关系 $\sim$ 的子群非等价性 15

5 群 G（$\mathbb{R}$） 中的适当对分类 16
5.1 $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ 的李子代数分类.16 5.2 关于关系 $\sim$ 的等价子群.16 5.3 $GL_2(\mathbb{R})$ 适当性判据回顾.17 5.4 连通对的适当性.18

6 GL_2（$\mathbb{R}$） $\ltimes \mathbb{R}^2$ 关于 $\sim$ 20 的连通子群的分类
6.1 共轭分类.20 6.2 关于关系 $\sim$ 的等价连通子群 22

7 定理 1.4–1.6 的证明 22
7.1 定理 1.4 的证明.23 7.2 定理 1.5 的证明.24 7.3 定理 1.6 的证明.25

8 定理 1.7 的证明 26
8.1 （**A**）当 $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)$ $\mathscr{L}(H) = A(\beta)$ 时.26 8.2 （**B**）当 $\mathscr{L}(L) = B(\alpha)$ $\mathscr{L}(H) = B(\beta)$ 时 .28 8.3 （**C**）当 $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)$ $\mathscr{L}(H) = B(\beta)$ 时 .33

A 连通子群对的适当性表 39

1 引言

考虑李群 G 的闭子群对 (L, H)。在变换群理论中，寻找适当性的有效判据至关重要（参见综述[Kob01] by Kobayashi；Kobayashi 开创了这一研究方向）。如果 (L, H) L 在齐性空间 G/H 上适当地作用，则称对 (L, H) 是适当的；等价地， H 在 G/L 上适当地作用。当 L 或 H 中任意一个为紧致时，对 (L, H) 总是适当的。然而，当 L 和 H 都是非紧致时，判定对 (L, H) 是否适当便变得困难。

借鉴 Kobayashi [Kob, Kob01]，的见解，我们简要回顾以往的研究工作。

Kobayashi [Kob89] 在 G, L, H 为约化群时建立了第一个可计算判据。后来，Benoist [B96] 和 Kobayashi [Kob96] 将这一结果推广到 G 为约化群、但 L, H 不一定为约化群的情形。

Lipsman [L95] 考察了约化群的适当性判据是否存在适用于幂零群的类似版本。在 G 为幂零群且 L 和 H 连通的情形下，他猜想 (CI) 条件（见定义 2.4）等价于适当性。Kobayashi [Kob92], 定义的 (CI) 条件一般而言弱于适当性，且更容易检验。Nasrin [N01], 、Yoshino [Y07a], 和 Baklouti-Khlif [BK05] 对满足$n \leq 3$的 n步幂零群肯定地解决了这一猜想；但 Yoshino [Y05] 在 $n = 4$的 n步情形下给出了一个反例。

另一方面，当 G 既非约化群也非幂零群时，目前没有可验证的判据。在这种情形下，我们考虑以下问题（小节 1.3）：

问题1.1. 对 L、 H) 进行分类，其中它们是 $\mathbb{R}^2$ 的仿射变换群的连通闭子群所构成的适当对。

我们简要回顾仿射变换群。 $\mathbb{R}^n$ 的仿射变换群，即 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$，可实现为 $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ 的如下子群:

$$GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} g & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : g \in GL_n(\mathbb{R}),\, v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

我们将这样的元素 $\begin{pmatrix} g & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 记作 (g, v)，并称 g 为线性部分， v为平移部分。对于元素 $(g, v) \in GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$，我们定义自然投影 $\mathscr{L}$: $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n \to GL_n(\mathbb{R})$ $\mathscr{U}$: $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 如下:

$$\mathscr{L}(g, v) \coloneqq g, \quad \mathscr{U}(g, v) \coloneqq v.$$

1.1 群 $G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的情形

当 $G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 时，关于关系 $\sim$（定义 2.1），连通子群只有有限多个等价类。因此，分类相对简单。相反，当 $G = GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 时，这些等价类的集合具有连续统的基数。

定理 1.2。 *(1)* 在等价关系 $\sim$ 下，非平凡的连通子群如下:

$$\mathbb{R}^2, SL_2(\mathbb{R}), S, L, M, N,$$

S、 L、 M、 N 的定义如下。

(2) $SL_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^2$、 S、 L、 M和 N 之间有序对的适当性总结于表*1*中。在表*1*中，如果相应的对是适当的，我们用 $\pitchfork$ 标记矩阵元素；否则矩阵元素留空。

这里， S, L, M, N表示 $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$的以下子群:

$$S \coloneqq \{ \begin{pmatrix} e^a & 0 & e \\ 0 & e^{-a} & 0 \end{pmatrix} : a, e \in \mathbb{R} \}, L \coloneqq \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & f \end{pmatrix} : b, f \in \mathbb{R} \},$$

$$M \coloneqq \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ b & 1 & e \end{pmatrix} : b, e \in \mathbb{R} \} \supset N \coloneqq \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ b & 1 & \frac{1}{2}b^2 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \}.$$

回顾一下， $\pitchfork$ 是 Kobayashi [Kob96]引入的一种二元关系，用以推广真作用的概念（定义 2.1）。

表1： $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$的连通子群对的适当性

L \ H	$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2$	S	L	M	N
$SL_2(\mathbb{R})$		⫛			⫛	⫛
$\mathbb{R}^2$	⫛					⫛
S						⫛
L						
M	⫛					
N	⫛	⫛	⫛			

1.2 群 $G = GL_2(\mathbb{R})$的情形

在这种情况下，对于约化群，可以直接应用适当性判据 [Kob89, Kob96, B96]来分类适当对。

定理 1.3. *(1)* 在等价关系 $\sim$下， $GL_2(\mathbb{R})$ 的非平凡连通子群如下：

$$Z, U, A(\alpha), B(\alpha),$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$和 Z、 U、 $A(\alpha)$ $B(\alpha)$ 定义如下。

（2）连通子群 Z、 U、 $A(\alpha)$ $B(\alpha)$ 之间各对的适当性如下表 2 所示。这里，表中每个针对参数 α、 β 给出条件的矩阵元素，都为相应的一对是适当的充要条件。

表 2： $GL_2(\mathbb{R})$ 中各对的适当性

L \ H	Z	$A(\beta)$	U	$B(\beta)$
Z		⫛	⫛	⫛
$A(\alpha)$	⫛	$\lvert\alpha\rvert \neq \lvert\beta\rvert$	⫛	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$
U	⫛	⫛		⫛
$B(\alpha)$	⫛	$\lvert\alpha\rvert < \lvert\beta\rvert$	⫛	

这里， $Z, U, A(\alpha)$ $B(\alpha)$表示 $GL_2(\mathbb{R})$ 的以下子群，其中 α 为实常数。

$$Z \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, U \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$A(\alpha) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-1)t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subset B(\alpha) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t} & 0 \\ s & e^{(\alpha-1)t} \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.3 主要结果（情形 $G = GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$）

作为超越 G 为约化或幂零情形的测试案例，Kobayashi [Kob92, 命题 A.2.1] 对当 $H = GL_2(\mathbb{R})$ 时，在 $G = GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 中适当的连通子群对 (L, H) 进行了分类。我们将 Kobayashi 的情形扩展到任意连-通子群 $H \subset GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$。表 3 根据线性部分 $\mathscr{L}(L)$ 和 $\mathscr{L}(H)$ 的类型，总结了确定对 (L, H) 适当性的步骤。

表 3： 根据线性部分确定适当性的步骤

$\mathscr{L}(L)$ \ $\mathscr{L}(H)$	$GL_2(\mathbb{R})$	D 或 B'	包含于在 $SL_2(\mathbb{R})$ 中	Z	$A(\beta)$	U	$B(\beta)$
$GL_2(\mathbb{R})$	[Kob92, 命题 A.2。1]						
D 或 B'	-	定理 1.4					
包含于在 $SL_2(\mathbb{R})$ 中	-	-	定理 1.2	定理 1.2 和 1.5			
Z	-	-	-	↯	◎	◎	◎
$A(\alpha)$	-	-	-	-	**(A)**	◎	**(C)**
U	-	-	-	-	-	↯	◎
$B(\alpha)$	-	-	-	-	-	-	**(B)**

下面我们解释表 3 中的符号，并陈述其中引用的定理。

符号 ◎ 表示我们应用定理1.3和1.6。

子群 Z， U， $A(\alpha)$ $B(\alpha)$ 在 $GL_2(\mathbb{R})(\alpha \in \mathbb{R})$ 中的定义见第1.2小节，它们的维数分别为 1、1、1、2。 $GL_2(\mathbb{R})$ 的连通子群 D， B' 定义如下：

$$D \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}, B' \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ s & e^t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

定理 1.4. 设 L 和 H 是 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的连通闭子群。如果 $L \pitchfork H$ 属于 G，那么 (L, H) 具有以下形式：

$$(L(D,1), N)$$

其中 L 是 $L(B', 1)$ 或 $L(D, 1)$。

子群 N 是 $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 中定义于小节 1.1 的一维连通子群，而 $L(B', 1)$ 和 $L(D, 1)$ 将在下文定义。

$$L(B',1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ s & e^t & u \end{pmatrix} : s,t,u \in \mathbb{R} \right\}, L(D,1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t+s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} & u \end{pmatrix} : s,t,u \in \mathbb{R} \right\}.$$

定理 1.5。设 $L \subset SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 是一个子集，且 $H \not\subset SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 是 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 的连通子群。那么，我们有以下等价关系：

$$L \pitchfork H \text{ in } GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n \iff L \pitchfork (H \cap SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n) \text{ in } SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

定理 1.6。设 L 是 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 中的一个闭子群，其线性部分 $\mathscr{L}(L)$ 是闭的，且 H 是 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 中的一个子集。若配对 $(L, \mathbb{R}^n)$ 满足 ***(CI)***，且 $\mathscr{L}(L) \pitchfork \mathscr{L}(H)$ 属于 $GL_n(\mathbb{R})$，则 $L \pitchfork H$ 属于 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$。

表 3 中的条件**(A)**, **(B)** 和**(C)** 将在下面的定理中阐述。该定理是本文的主要技术结果。

定理 1.7. 设 L 和 H 是 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$的连通闭子群。

(A) 假设 $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)$ 且 $\mathscr{L}(H) = A(\beta)$。那么，***(CI)*** 条件等价于这一对的适当性。

(B) 假设 $\mathscr{L}(L) = B(\alpha)$ 且 $\mathscr{L}(H) = B(\beta)$。如果对$(L, H)$ 是适当的，那么 L和 H中至少有一个是 $L(B(-3),3)$ 或 $L(B(-3), 6)$。此外，如果 H是这些子群，则有以下等价关系：

$$L \pitchfork H \iff (L,H) \text{ is (CI) and } |\alpha| < 3.$$

(C) 假设 $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)$ 且 $\mathscr{L}(H) = B(\beta)$。那么，对$(L, H)$ 的适当性见表 *4*。表中每个针对参数 α, β 给出条件的矩阵元素，都给出了相应的对为适当对的充要条件。

这里，连通子群 $L(A(\alpha)\ i)$ $L(B(\beta)\ j)$ 的定义见第 6 节。

该定理通过利用 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 中 [CKZ 定理 11] 给出的连通子群的分类，并逐案检验关系 $\pitchfork$（定义 2.1）来证明。由于外围群 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的维数较低，这项检验所需的计算相对较少。一般而言，直接检验二元关系 $\pitchfork$ 是困难的。

表 4： $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)$ 和 $\mathscr{L}(H) = B(\beta)$

L \ H	$L(B(\beta),\ 1)$	$L(B(1),\ 2)$	$L(B(-3), 3)$	$L(B(\beta),\ 4)$	$L(B(-1),\ 5)$	$L(B(-3), 6)$	$L(B(\beta),\ 7)$
$L(A(\alpha),\ 1)$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert \geq 1$	$\lvert\alpha\rvert \neq 3$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\alpha \neq 0$	$\lvert\alpha\rvert \neq 3$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$
$L(A(1),\ 2)$	$\pitchfork$		$\pitchfork$	$-1 \leq \beta < 1$		$\pitchfork$	$1 > \lvert\beta\rvert$
$L(A(\alpha), 3)$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert > 1$	$\lvert\alpha\rvert \neq 3$				
$L(A(1),\ 4)$	$\pitchfork$		$\pitchfork$				
$L(A(\alpha),\ 5)$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert > 1$	$\lvert\alpha\rvert > 3$				

1.4 论文结构

在第2节中，我们回顾 $\pitchfork$ 和 $\sim$ 的基本性质，它们由 [Kob96] 引入。二元关系 $\pitchfork$ 是真作用的一种推广，而 $\sim$ 是保持关系 $\pitchfork$ 的最粗等价关系。

在第3节中，我们引入记号 $\lesssim_+$，$\asymp_+$，$\lesssim_\times$ 和 $\asymp_\times$。这些记号用于分析渐近行为，并验证关系 $\pitchfork$ 和 $\sim$，主要见定理1.2和1.7的证明。

在第4节和第5节中，我们分别证明定理1.2和1.3。

在第 6 节中，我们回顾 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 中连通子群的分类，该分类已在 [CKZ, Thm. 11] 中得到证明。

在第7节中，我们证明定理1.4–1.6。

在最后一节中，我们证明定理 1.7。

在附录A中，我们给出所有满足 L 在 G/H 上适当地作用（即在 G 中，模 $\sim$）的连通闭子群对 $(L,\ H)$ 的完整列表。

致谢

作者谨向小林俊行教授致以诚挚的谢意，感谢他深刻的见解、慷慨的支持和始终如一的鼓励。作者还要感谢奥田贵之、青山天马和桧川达郎给予的宝贵建议和意见。

本研究得到 JST SPRING 资助，资助编号 JPMJSP2108。

2 预备知识

2.1 适当性关系 $\pitchfork$ 与等价关系 $\sim$

本节回顾 Kobayashi [Kob96] 引入的等价关系 $\sim$。

定义 2.1. ([Kob96]) 设 L, H 是局部紧群 G 中的子集。

(1) 若对 G 的任意紧子集 S，交集 $L\cap SHS^{-1}$ 都是相对紧的，则记作 $L \pitchfork H$。此时称这对 (L, H) 是适当的。

(2) 如果存在紧子集 S，使得 $L \subset SHS^{-1}$，$H \subset SLS^{-1}$，则我们记为 $L \sim H$。

我们得到关于 $\pitchfork$ 和 $\sim$ 的以下命题。

命题 2.2。*([Kob96])* 设 H、L、L' 是局部紧群 G 的子集。

(1) 如果 $L \sim L'$、$L \pitchfork H$，则有 $L' \pitchfork H$。

(2) 特别地，如果子集 L、H 是闭子群，则以下三个条件等价：

- $L \pitchfork H$。
- 群作用 $L \curvearrowright G/H$ 是适当的。
- 群作用 $H \curvearrowright G/L$ 是适当的。

根据命题 2.2 (1)，将适当群作用分类等价于将适当对分类。将子群按此等价关系 $\sim$ 进行识别，根据命题 2.2 (2)有助于简化对适当性的研究。

此外，该关系被称为保持适当性的最粗关系。Kobayashi [Kob96]将其表述如下：

事实 2.3。（不连续性对偶定理）设 L、L' 是李群 G中的子集。若方程

$$\pitchfork (L, G) = \pitchfork (L', G)$$

成立，则得到 $L \sim L'$。这里，我们将 G 的子群集合 $\pitchfork$ （L、G） 定义如下：

$$\pitchfork (L, G) = \{H \subset G \colon L \pitchfork H\}.$$

对偶定理表明，L 关于 $\sim$ 的等价类完全由适当性决定。Kobayashi [Kob96], 证明了 G 为约化群的情形，而 Yoshino[Y07b]证明了 G 为一般李群的情形。

2.2 (CI) 条件与适当性

本小节回顾 (CI) 条件。

定义 2.4。([Kob92]) 李群 G 的两个闭子群 $(L,\ H)$ 满足 (CI) 条件，是指对所有 $g \in G$，子群 $L \cap gHg^{-1}$ 都是紧致的。

由此立即可知，若一对 $(L,\ H)$ 是适当的，则它是 (CI)。反过来的推论通常并不成立。

3 记号 $\lesssim_+$、$\asymp_+$、$\lesssim_\times$、$\asymp_\times$

为了研究渐近行为，本节将定义一些记号并证明其基本性质。

定义 3.1。设 $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为实数序列。

(1) 如果存在正数 $C>0$，使得当 n充分大时有 $b_n-a_n<C$，则记作 $a\lesssim_+ b$。(2) 如果 $a\lesssim_+ b$ 且 $b\lesssim_+ a$，则记作 $a\asymp_+ b$。(3) 假设当 n充分大时 b 非零。如果存在常数 $C>0$，使得当 n充分大时有 $\frac{a_n}{b_n}<C$，则记作 $a\lesssim_\times b$。(4) 如果 $a\lesssim_\times b$ 且 $b\lesssim_\times a$，则记作 $a\asymp_\times b$。(5) 如果对于任意 $R>0$，都存在 N，使得当 $n>N$时有 $\frac{a_n}{b_n}>R$，则记作 $a\gtrsim_\times b$。

首先，我们证明关于记号 $\lesssim_\times$ 的一些基本性质。

命题 3.2。设 $a=(a_n)_n$、$b=(b_n)_n$、$c=(c_n)_n$、$d=(d_n)_n$ 是实数序列。

(1) 若 $a\lesssim_+ b$ 且 $b\lesssim_\times c$，则 $a\lesssim_\times c$。*(2)* 若 $a\lesssim_\times b$，则 $b\asymp_\times a+b$。*(3)* 若 $|a|\lesssim_\times |b|$，则 $b\asymp_\times b-a$。*(4)* 若 $a\lesssim_\times b$ 且 $c\lesssim_\times d$，则 $a\cdot b\lesssim_\times c\cdot d$。*(5)* 若 $a\lesssim_\times b$ 且 $c\lesssim_\times d$，则 $a+b\lesssim_\times c+d$。

证明。除了陈述（3）之外，这是显然的。

由于 $a\lesssim_\times b$，当 n充分大时，有 $a_n<\frac{1}{2}b_n$。因此，我们有

$$\frac{b_n}{b_n-a_n}<\frac{b_n}{b_n-\frac{1}{2}b_n}=2,$$

这意味着 $b\lesssim_\times b-a$。 □

注 3.3. 记号 $\lesssim_\times$ 不允许进行“重新排列各项”的操作，也就是说，计算 $a\lesssim_\times b$ 并不意味着 $a-c\lesssim_\times b-c$ 对于序列 a,b,c成立。例如，由 $a_n=2n,b_n=c_n=n$ 定义的序列满足 $a\lesssim_\times b$，但不满足 $a-c\lesssim_\times b-c$。

接下来，我们陈述关于 $\asymp_+$ 的一些性质，以及 $\lesssim_+$ 和 $\lesssim_\times$ 之间的关系。证明显而易见，故略去。

命题 3.4. *(1)* 若 $a\lesssim_+ b,b\lesssim_+ c$，则 $a\lesssim_+ c$。

(2) 若 $a \lesssim_+ b$，则 $a + c \lesssim_+ b + c$。

(3) 若 $a \lesssim_+ b, c \lesssim_+ d$，则 $a + c \lesssim_+ b + d$。*(4)* 若 a, b 随着 $n \to \infty$ 趋于无穷，则条件 $a \asymp_+ b$ 蕴含 $a \asymp_\times b$。*(5)* $a \lesssim_+ b \iff$ 指数 $a \lesssim_\times$ 指数 b。*(6)* 对所有 $\alpha > 0$, $a \lesssim_\times b \iff a^\alpha \lesssim_\times b^\alpha$.

本节最后给出一个命题，后文将反复用到它。

命题 3.5。设 $G = GL_N(\mathbb{R})$ 和 S 是 G 的一个紧子集。设 $v = (v_n)_n \subset \mathbb{R}^N, s = (s_n)_n \subset S$ 是序列。则有

- $||sv|| \asymp_\times ||v||$,
- $||^t vs|| \asymp ||^t v||$.

证明。我们证明第一个结论。第二个结论的证明类似。

对所有 $v_n \in \mathbb{R}$，存在 $k_n \in K := O(N)$，使得 $k_n v_n = \begin{pmatrix} ||v_n|| \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$。由于序列 $s_n k_n^{-1}$包含在紧集 SK中，因此我们可以假设 $v_n = \begin{pmatrix} t_n \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$ 对某个 $t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$成立。这里，我们证明以下估计。

断言。序列 s_n 的第一列 $(s_{*1})_n := \begin{pmatrix} (s_{11})_n \\ \\ (s_{N1})_n \end{pmatrix}$ 满足 $||(s_{*1})_n|| \asymp_\times 1$.

证明。由于 s 包含在紧集 S中，每个矩阵元素的绝对值都被某个正数 $M > 0$所界，因此范数 $||(s_{*1})_n||$ 有上界。此外，由于 $|\det s_n| \asymp_\times 1$，我们有

$$\begin{aligned} ||(s_{*1})_n|| &\asymp_\times |(s_{11})_n| + \cdots + |(s_{N1})_n| \\ &\geq \frac{|(s_{11})_n||(\tilde{s}_{11})_n| + \cdots + |(s_{N1})_n||(\tilde{s}_{N1})_n|}{M^{N-1}} \\ &\geq \frac{|\det s_n|}{M^{N-1}} \asymp_\times 1, \end{aligned}$$

其中 $(\tilde{s}_{ij})_n$ 表示 $(s_{ij})_n$ 的余子式。这就是所需的下界估计。 □

利用上述断言，我们有

$$||s_n v_n|| = |t_n| \cdot ||(s_{*1})_n|| \asymp_\times |t_n| = ||v_n||.$$

□

4 群 $G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 中适当对的分类

本节旨在证明定理 1.2。首先，我们约定全文中 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的元素采用何种记法；对于 $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的元素，我们也采用相同的记法。

约定 4.1。 设 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ 且 $v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$。如引言所述，仿射变换群 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的元素写作

$$\begin{pmatrix} g & v \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right).$$

本文改用如下记法:

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix}.$$

4.1 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的李子代数分类

本小节回顾 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的李子代数分类。[CKZ]，并未明确陈述该分类，但我们可以用同样的方法证明，因此省略证明。

记

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

引理 4.2。 在共轭意义下，$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的李子代数具有以下形式:

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R}^2, \quad \mathfrak{s} = \langle e_2, f_1 \rangle, \quad \mathfrak{l} = \langle e_1, f_1 \rangle,$$
$$\mathfrak{m} = \langle e_1 + f_1,\ f_2 \rangle \supset \mathfrak{n} = \langle e_1 + f_1 \rangle,$$
$$\mathfrak{so}(2), \quad \langle e_1 \rangle, \quad \langle e_2 \rangle, \quad \langle e_2, e_1 \rangle,$$
$$\mathbb{R}^2, \quad \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}^2, \quad \langle f_1 \rangle,$$
$$\langle e_2 \rangle \oplus \mathbb{R}^2, \quad \langle e_1 \rangle \oplus \mathbb{R}^2, \quad \langle e_1, e_2, f_2 \rangle, \quad \langle e_1, e_2, f_1, f_2 \rangle.$$

这里我们写作 $\mathfrak{so}(2) = \langle e_1 + e_3 \rangle$ 和 $\mathbb{R}^2 = \langle f_1, f_2 \rangle$。

4.2 关于等价子群 $\sim$

在本小节中，我们汇总引理 4.2 中所述的两两等价的连通子群。事实上，以下关系成立。

命题 4.3. （*1*） $\{e\} \sim SO$（2）。

(2) $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R} \sim SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$.

(3) $SL_2(\mathbb{R}) \sim \{\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^{-a} & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\} \sim \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\}$

$\sim \{\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ b & e^{-a} & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}.$

(4) $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 \sim \{\begin{pmatrix} e^a & 0 & e \\ 0 & e^{-a} & f \end{pmatrix} : a, e, f \in \mathbb{R}\}$

$\sim \{\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ b & e^{-a} & e \end{pmatrix} : a, b, e \in \mathbb{R}\} \sim \{\begin{pmatrix} e^a & 0 & e \\ b & e^{-a} & f \end{pmatrix} : a, b, e, f \in \mathbb{R}\}$

$\sim \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ b & 1 & f \end{pmatrix} : b, e, f \in \mathbb{R}\}.$

我们将定理 1.2（1）作为命题 4.3 的推论得出。

该命题可由以下事实直接推出。

事实 4.4。（*1*）（*KAK* 分解，*[Kn02*，定理 *7.39]*）设 G 是一个约化李群，$G = K \times \mathfrak{p}$ 是一个嘉当分解，且 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}$中的一个极大阿贝尔子代数。那么，我们有 $G = K\exp(\mathfrak{a})K$。

（*2*）（*Kostant* 分解，*[Kos73]*）设 G 是一个半单李群，且 $G = KAN$是一个 *Iwasawa* 分解。那么，我们有 $G = KNK$。

4.3 连通对的适当性

在本小节中，我们确定 $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 中的对在等价关系 $\sim$ 下的适当性。我们的目标是定理 1.2 (2)，下面回顾其陈述。

定理 1.2。*(2)* $SL_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^2$、 S、 L、 M 和 N 中各对的适当性汇总于表*1*。在表*1* 中，如果相应的对是适当的，我们就用 $\pitchfork$ 标记矩阵元素；否则该矩阵元素留空。

注 4.5. 我们不明确提及外围群 G，因为无论 $G = GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 还是 $G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$，上述适当性都不会改变。现在我们在假设 $G = GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的条件下证明定理 1.2 (2)，但在假设 $G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的条件下也可进行类似的讨论。

表1： $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$的连通子群对的适当性

L \ H	$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2$	S	L	M	N
$SL_2(\mathbb{R})$		⫛			⫛	⫛
$\mathbb{R}^2$	⫛					⫛
S						⫛
L						
M	⫛					
N	⫛	⫛	⫛			

利用下面的引理，我们只需证明 $SL_2(\mathbb{R}) \pitchfork N, S \pitchfork N$和 $L \not\pitchfork N$。第一条由定义立即得出，第二条已在 [Kob92, 命题 A.2.1]中证明。

引理 4.6. *(1)* 如果拓扑群中的一对子集的交集非紧致，则该对不适当。

(2) 与 $SL_2(\mathbb{R})$ 构成适当对的连通子群为 $\mathbb{R}^2$、 M 和 N。

我们证明定理 1.2 (1) 的剩余部分。

引理 4.7. *(1)* $\mathbb{R}^2 \pitchfork N$。

(2) $S \pitchfork N$。

(3) $L \not\pitchfork N$。

证明。 (1) 我们证明作用 $N \curvearrowright GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^2 \cong GL_2(\mathbb{R})$ 是适当的。考虑连续群同构

$$\mathscr{L}\colon N \to \mathscr{L}(N) \coloneqq \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 1 & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

同构 $\mathscr{L}$ 与群作用相容，即对于所有 $s \in N$，下列交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\cong} & GL_2(\mathbb{R}) \\ {\scriptstyle s\cdot}\downarrow & \circlearrowright & {\scriptstyle \mathscr{L}(s)\cdot}\downarrow \\ GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\cong} & GL_2(\mathbb{R}) \end{array}$$

由于 $\mathscr{L}(N)$ 是 $GL_2(\mathbb{R})$ 的闭子群，作用 $\mathscr{L}(N) \curvearrowright GL_2(\mathbb{R})$ 是适当的。因此，作用 $N \curvearrowright GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^2$ 也是适当的。

(2) 假设相反。存在序列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_n \\ t_n & 1 & \frac{1}{2}t_n^2 \end{pmatrix} \in N$ 和 $\begin{pmatrix} a_n & c_n & e_n \\ b_n & d_n & f_n \end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix} A_n & C_n & E_n \\ B_n & D_n & F_n \end{pmatrix}$ 它们包含于 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的某个紧集中，使得乘积

$\begin{pmatrix} a_n & c_n & e_n \\ b_n & d_n & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_n \\ t_n & 1 & \frac{1}{2}t_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & C_n & E_n \\ B_n & D_n & F_n \end{pmatrix} \in S$和 $|t_n| \to \infty$。我们有

$$\begin{pmatrix} a_n & c_n & e_n \\ b_n & d_n & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_n \\ t_n & 1 & \frac{1}{2}t_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & C_n & E_n \\ B_n & D_n & F_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & C_n(a_n + c_n t_n) + c_n D_n & * \\ A_n(b_n + d_n t_n) + d_n B_n & * & (b_n + d_n t_n)E_n + d_n F_n + b_n t_n + \frac{1}{2}d_n t_n^2 + f_n \end{pmatrix}$$

由于 (2,3)项为零，我们有

$$|d_n| \leq \frac{2}{t_n^2}(|b_n| + |d_n||E_n||t_n| + |b_n||t_n| + |f_n|) \lesssim_\times \frac{1}{|t_n|},$$

and

$$|d_n t_n + b_n| \geq |b_n| - |2(\frac{1}{2}d_n t_n + b_n)| \asymp_\times 1.$$

最后的计算由以下计算得出；

$$|b_n| \geq \frac{\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} - |a_n||d_n|}{|c_n|} \gtrsim_\times 1,$$

$$|\frac{1}{2}d_n t_n + b_n| \leq \frac{1}{|t_n|}(|b_n| + |d_n||E_n||t_n| + |d_n||F_n| + |f_n|) \lesssim_\times \frac{1}{|t_n|}.$$

类似地，我们有 $|c_n| \asymp_\times 1$。由于 (1,2)项 为零，我们有

$$|C_n| \leq \frac{|c_n||D_n|}{|c_n||t_n| - |a_n|} \lesssim_\times \frac{1}{|t_n|}.$$

因此，我们有 $|A_n| \asymp_\times 1$。于是，(2,1) 矩阵元素

$$|A_n(b_n t_n + d_n) + d_n B_n| \geq |A_n||b_n t_n + d_n| - |d_n||B_n| \gtrsim_\times |t_n|$$

is 非零，这与 (2,1) 矩阵元素为零矛盾。因此，我们有 $S \pitchfork N$.

(3) 对于 $|t|>1$，我们有

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{t} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ t & 1 & \frac{1}{2}t^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \frac{2}{t} & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -t & 1 & \frac{1}{2}t^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in L.$$

由于矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{t} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1 & \frac{2}{t} & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$ 的所有元素都有界，且 $\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ t & 1 & \frac{1}{2}t^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in N$。因此，我们有 $L\not\subset N$.

□

4.4 关于关系 $\sim$ 的子群非等价性

我们通过证明以下命题来结束本节。

命题 4.8。 $SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$, $\{e\}$, $SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$, $SL_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^2$, S,L, M, N 中的子群按照记号 $\sim$ 的含义两两非等价。

根据命题 2.2 和定理 1.2 (2)，只需证明以下引理。

引理 4.9. $L\not\sim SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$.

证明。 我们证明 $S'\cap L$，其中 S' 是 $SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$ 中由下式定义的非紧子集

$$S':=\{\begin{pmatrix}1 & 0 & t^2\\ t & 1 & 0\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\}.$$

反设，则存在序列 $\begin{pmatrix}a_n & c_n & e_n\\ b_n & d_n & f_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}A_n & C_n & E_n\\ B_n & D_n & F_n\end{pmatrix}$，它包含于某个紧集内，并且满足

$$\begin{pmatrix}a_n & c_n & e_n\\ b_n & d_n & f_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & t_n^2\\ t_n & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_n & C_n & E_n\\ B_n & D_n & F_n\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(a_n+c_nt_n)A_n+c_nB_n & (a_n+c_nt_n)C_n+c_nD_n & (a_n+c_nt_n)E_n+c_nF_n+a_nt_n^2+e_n\\ * & * & *\end{pmatrix}\in L$$

由于 (1,3) 项为零，我们有

$$|a_n|\le\frac{1}{|t_n|^2}(|e_n|+|c_n||F_n|+|a_n||E_n|+|c_n||E_n||t_n|)\lesssim_\times\frac{1}{|t_n|}.$$

因此，我们有 $|c_n| \asymp_\times 1$. 由于 (1,2) 矩阵元素为零，我们有

$$|C_n| \leq \frac{|c_n||D_n|}{|c_n||t_n| - |a_n|} \lesssim_\times \frac{1}{|t_n|}.$$

因此，我们有 $|A_n| \asymp_\times 1$. 因此，我们有

$$|(a_n + c_n t_n)A_n + c_n B_n| \gtrsim_\times |c_n||A_n||t_n| - |a_n||A_n| - |c_n||B_n| \gtrsim_\times |t_n|,$$

这与 (1,1) 矩阵元素为 1 矛盾。因此，我们有 $S' \pitchfork L$。

显然， $S' \not\pitchfork (SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2)$，因此根据命题 2.2，我们有 $L \not\sim SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$. □

5 $G = GL_2$（$\mathbb{R}$） 中适当对的分类

5.1 $\mathfrak{gl}_2$（$\mathbb{R}$） 的李子代数分类

本节回顾 $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ 的李子代数分类（例如，参见[PW77]）。

事实 5.1. 在共轭意义下，群 $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ 的李子代数具有以下形式：

$$\mathfrak{z} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \mathfrak{a}(\alpha) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}\alpha+1 & 0\\ 0 & \alpha-1\end{pmatrix}, \mathfrak{u} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{b}(\beta) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}\beta+1 & 0\\ 0 & \beta-1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \mathfrak{b}' = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{d} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \mathfrak{o}'(\gamma) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}\gamma & -1\\ 1 & \gamma\end{pmatrix}, \mathfrak{co} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{p} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \mathfrak{u}' = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}).$$

我们用相应的大写字母表示与每个李子代数相关联的解析子群。

5.2 关于关系 $\sim$ 的等价子群

本小节的目标是证明以下命题。它可直接由 KAK 分解或 Kostant 分解推出（见事实 4.4）。

命题 5.2。 我们有以下等价关系：

(1) $GL_2(\mathbb{R}) \sim B' \sim D \sim P$.

(2) $\{e\} \sim O'(0)$.

(3) $Z \sim O'(\gamma) \sim CO$ *if* $\gamma \neq 0$.

(4) $SL_2(\mathbb{R}) \sim U'$.

5.3 回顾群 $GL_2(\mathbb{R})$ 的适当性判据

现在我们回顾 $G = GL_2(\mathbb{R})$ 情形下的适当性判据。首先，为了陈述该判据，我们先介绍一些概念。

定义 5.3. (1) 空间 $\mathfrak{a}_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y\}$ 配备由$\mathbb{R}^2$诱导的度量。

(2) Cartan 投影 μ: $G \to \mathfrak{a}_+$ 定义为

$$\mu(g) = \left(\frac{1}{2}\log(\sigma_1(g)), \frac{1}{2}\log(\sigma_2(g))\right),$$

其中，数值 $\sigma_i(g)$ 是正定对称矩阵 ${}^t gg$ 的特征值，并且满足 $\sigma_1(g) > \sigma_2(g)$。

我们回顾 $G = GL_2(\mathbb{R})$ 情形下的适当性判据。

事实 5.4. *(*适当性判据，*[Kob89*、*Kob96*、*B96])* 设 H、L、L' 是 $GL_2(\mathbb{R})$ 的子集。

(1)

$$\begin{aligned} H \pitchfork L \text{ in } G &\iff \mu(H) \pitchfork \mu(L) \text{ in } \mathfrak{a} \\ &\iff \mu(H) \cap \bar{B}_r(\mu(L)) \text{ is bounded for all } r > 0 \text{ in } \mathfrak{a}_+ \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} L \sim L' \text{ in } G &\iff \mu(L) \sim \mu(L') \text{ in } \mathfrak{a}, \\ &\iff \mu(L) \subset \bar{B}_R(\mu(L')), \mu(L') \subset \bar{B}_R(\mu(L)) \\ &\qquad \text{in } \mathfrak{a}_+ \text{ for some } R > 0. \end{aligned}$$

¯ ¯这里，闭的 R 邻域 B_R（S）定义为 B_R（S）：$= \{x \in \mathfrak{a}_+$: d（x，S）$\leq R\}$。

下文中，我们将以如下事实的形式使用适当性判据。

事实 5.5. *([B96*，命题 *5.1])* 对于 $GL_2(\mathbb{R})$ 中的任意紧集 C，存在 $R > 0$ 使得¯ $\mu(CgC) \subset B_R(\mu(g))$。

表 2： $GL_2(\mathbb{R})$中各对的适当性

L \ H	Z	$A(\beta)$	U	$B(\beta)$
Z		$\pitchfork$	$\pitchfork$	$\pitchfork$
$A(\alpha)$	$\pitchfork$	$\lvert\alpha\rvert \neq \lvert\beta\rvert$	$\pitchfork$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$
U	$\pitchfork$	$\pitchfork$		$\pitchfork$
$B(\alpha)$	$\pitchfork$	$\lvert\alpha\rvert < \lvert\beta\rvert$	$\pitchfork$	

5.4 连通对的适当性

在本小节中，我们证明定理 1.3 (2)

定理 1.3。 *(2)* 连通子群 $Z, U, A(\alpha)$ $B(\alpha)$之间各对的适当性见下表 *2*。表中每个关于参数 α, β 的矩阵元素所指定的条件，都是对应的对为适当对的充要条件。

$Z, A(\gamma)$ $GL_2(\mathbb{R})$ 的 Cartan 投影可以很容易地计算。为了分析 Cartan 投影 $U, B(\gamma)$, 我们先给出以下引理。

引理 5.6。 *(1)* 设 $(x, y) \in \mu(U)$。对于固定的 $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，有

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}x < y \text{ and } y + \log|y| < x \quad \text{for } x >> 0,$$

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1}x < y \text{ and } y < x - \log|x| \quad \text{for } x << 0.$$

(2) $\mu(B(\gamma)) = \{(x, y) \in \mathfrak{a}_+ \colon y \leq \frac{\gamma-1}{\gamma+1}x, \quad y \leq \frac{\gamma+1}{\gamma-1}x\}$

证明。 (1) 根据 Cartan 投影的定义，我们有

$$\mu\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+2+\sqrt{t^4+4t^2}}{2}\right) \\ t + \frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+2-\sqrt{t^4+4t^2}}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

假设 $|t| > 1$. 那么，我们有

$$\begin{aligned} y &= t + \frac{1}{2}\log\frac{2}{t^2+2+\sqrt{t^4+4t^2}} \\ &< t + \frac{1}{2}\log\frac{2}{2t^2} \\ &= t - \log|t| < t, \end{aligned}$$

and

$$x > t + \frac{1}{2}\log(t^2) = t + \log|t|.$$

因此，我们有

$$x \geq y + \log|y| \quad \text{if } t > 1.$$

同理，当 $t < -1$ 时，我们得到 $y \leq x - \log|x|$。因此，我们得到 $\mu(H_3)$ 的上界估计。

另一方面，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有：

$$\begin{aligned} y &\geq t + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2t^2} \\ &= t - \frac{1}{2}\log 2 - \log|t| \geq (1-\varepsilon)t, \end{aligned}$$

and

$$x \leq (1+\varepsilon)t$$

当 $t > 0$ 充分大时。因此，我们有：

$$y \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}x$$

当 $x > 0$ 充分大时。类似地，我们有：

$$y \geq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}x$$

当 $x < 0$ 充分小时。因此，我们得到 $\mu(U)$ 的下界估计。

(2) 记 $g_{u,t} = \begin{pmatrix} e^{(\gamma+1)t} & 0 \\ u & e^{(\gamma-1)t} \end{pmatrix}$。经计算，我们有：

$$\mu(g_{u,t}) = \begin{pmatrix} \sigma_1(g_{u,t}) \\ \sigma_2(g_{u,t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\log(\frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - 4e^{4\gamma t}})) \\ \frac{1}{2}\log(\frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - 4e^{4\gamma t}})) \end{pmatrix},$$

其中我们记作 $A = e^{2(\gamma+1)t} + e^{2(\gamma-1)t} + u^2$。当 $u = 0$ 时，它位于分段线性直线 $\mu(H_2^\gamma)$ 上（见图1）。

固定 $t \in \mathbb{R}$。由于我们有

$$\sigma_1(g_{u,t}) + \sigma_2(g_{u,t}) = 2\gamma t,$$

$\mu(g_{u,\ t})$的像位于直线 $x+y = 2\gamma t$上。随着参数 $|u|$ 连续增大，第一坐标也连续增大。因此，$\mu(g_{u,\ t})$的像是从点（$(\gamma+1)t$，$(\gamma-1)t$）出发的射线。因此，我们得到了所需形式的 Cartan 投影。

□

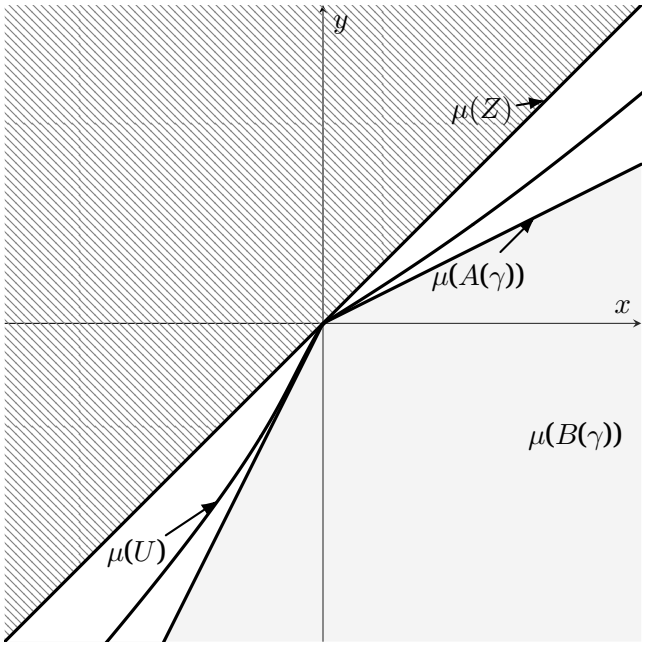

图1： Z的 Cartan 投影， $A(\gamma)$ U， $B(\gamma)$

定理1.3（2）的证明。我们在图1中展示了 Z、 $A(\gamma)$ U、 $B(\gamma)$的 Cartan 投影的像。注意，像 $\mu(B(\gamma))$ 包含其边界。由图可得$\mu(H_1) \pitchfork \mu(A(\gamma))$ $\mu(Z) \pitchfork \mu(B(\gamma))$。此外，对于任意 γ_1、 γ_2， $\mu(A(\alpha)) \pitchfork \mu(A(\beta))$当且仅当 $|\alpha| \neq |\beta|$， $\mu(A(\alpha)) \pitchfork \mu(B(\beta))$当且仅当 $|\alpha| > |\beta|$，并且 $\mu(B(\gamma_1)) \pitchfork \mu(B(\gamma_2))$。

由于直线 $x = y$ 的邻域无法包含曲线 $x = y + \log|y|$ 或 $x - \log|x| = y$，由引理 5.6 可得 $\mu(Z) \pitchfork \mu(U)$。

另一方面， $\mu(U)$ 可以用 $y = \frac{\gamma'-1}{\gamma'+1}x\,(x >> 1)$ 或 $y = \frac{\gamma'+1}{\gamma'-1}x\,(x << -1)$ 给出下界。由于当 $\gamma' > |\gamma|$ 时，它们的邻域无法与 $\mu(A(\gamma))$ 或 $\mu(B(\gamma))$ 有无界交集，因此对于任意 γ，有 $\mu(U) \pitchfork \mu(A(\gamma))$ 且 $\mu(U) \pitchfork \mu(B(\gamma))$。

□

注 5.7。 根据命题 2.2，按照记号 $\sim$ 的含义，连通子群 Z、 $A(\gamma)$ U、 $B(\gamma)$ 两两不等价。

6 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的连通子群按 $\sim$分类

6.1 按共轭分类

在本小节中，我们回顾 Chapovskyi-Koval-Zhur [CKZ, Thm. 11] 证明的 $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的子代数分类。

记

$$e_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$f_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},f_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

事实 6.1。 $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$ 的两两不共轭子代数的完整列表如下。除非另有说明， γ 表示一个实常数。

- 线性部分为 $\mathfrak{z}$ 的情形：

$$\begin{aligned}&\mathfrak{l}(\mathfrak{z},1)=\langle e_4\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{z},2)=\langle e_4,\ f_1\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{z},3)=\langle e_4,\ f_1,\ f_2\rangle.\end{aligned}$$

- 线性部分为 $\mathfrak{a}(\gamma)$的情形：

$$\begin{aligned}&\mathfrak{l}(\mathfrak{a}(\gamma),1)=\langle e_2+\gamma e_4\rangle\quad(\gamma\geq 0),\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{a}(1),2)=\langle e_2+e_4+f_2\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{a}(\gamma),3)=\langle e_2+\gamma e_4,\ f_1\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{a}(1),4)=\langle e_2+e_4+f_2,\quad f_1\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{a}(\gamma),5)=\langle e_2+\gamma e_4,\ f_1,\ f_2\rangle\quad(\gamma\geq 0)。\end{aligned}$$

- 线性部分为 $\mathfrak{u}$ 的情形：

$$\begin{aligned}&\mathfrak{l}(\mathfrak{u},1)=\langle e_1+e_4\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{u},2)=\langle e_1+e_4,\ f_2\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{u},3)=\langle e_1+e_4,\ f_1,\ f_2\rangle.\end{aligned}$$

- 线性部分为 $\mathfrak{b}(\gamma)$的情形：$\mathfrak{l}(\mathfrak{b}(\gamma),1)$
$=\langle e_2+\gamma e_4,\ e_1\rangle,\mathfrak{l}(\mathfrak{b}(1),2)$
$=\langle e_2+e_4+f_2,\ e_1\rangle,\mathfrak{l}(\mathfrak{b}(-3),3)$
$=\langle e_2-3e_4,\ e_1+f_1\rangle,\mathfrak{l}(\mathfrak{b}(\gamma),4)$
$=\langle e_2+\gamma e_4,\ e_1,\ f_2\rangle,\mathfrak{l}(\mathfrak{b}(-1),5)$
$=\langle e_2-e_4+f_1,\ e_1,\ f_2\rangle,\mathfrak{l}(\mathfrak{b}(-3),6)$
$=\langle e_2-3e_4,\ e_1+f_1,\ f_2\rangle,\mathfrak{l}(\mathfrak{b}(\gamma),7)$
$=\langle e_2+\gamma e_4,\ e_1,\ f_1,\ f_2\rangle.$

- 线性部分为 $\mathfrak{b}'$ 的情形：

$$\begin{aligned}&\mathfrak{l}(\mathfrak{b}',1)=\langle e_1,\ e_4,\ f_2\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{b}',2)=\langle e_1,\ e_4\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{b}',3)=\langle e_1,\ e_4,\ f_1,\ f_2\rangle.\end{aligned}$$

- 线性部分为 $\mathfrak{d}$ 的情形：

$$\begin{aligned}&\mathfrak{l}(\mathfrak{d},1)=\langle e_2,\ e_4,\ f_1\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{d},2)=\langle e_2,\ e_4\rangle,\\&\mathfrak{l}(\mathfrak{d},3)=\langle e_2,\ e_4,\ f_1,\ f_2\rangle.\end{aligned}$$

- 线性部分为$\mathfrak{o}'(\gamma)$ 的情形：

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{o}'(\gamma),\ 1)=\langle e_1+e_3+\gamma e_4\rangle,\ \mathfrak{l}(\mathfrak{o}'(\gamma),\ 2)=\langle e_1+e_3+\gamma e_4,\quad f_1,\quad f_2\rangle.$$

- 线性部分为 $\mathfrak{co}$ 的情况：

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{co},1)=\langle e_1+e_3,\ e_4\rangle,$$
$$\mathfrak{l}(\mathfrak{co},2)=\langle e_1+e_3,\ e_4,\ f_1,\ f_2\rangle.$$

- 线性部分为 $\mathfrak{p}$ 的情况：

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{p},1)=\langle e_1,\ e_2,\ e_4\rangle,$$
$$\mathfrak{l}(\mathfrak{p},2)=\langle e_1,\ e_2,\ e_4,\ f_1,\ f_2\rangle.$$

- 线性部分为 $\mathfrak{u}'$ 的情形：

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{u}',1)=\langle e_1\rangle,$$
$$\mathfrak{l}(\mathfrak{u}',2)=\langle e_1+f_1\rangle\quad(=\mathfrak{n}),$$
$$\mathfrak{l}(\mathfrak{u}',3)=\langle e_1,\ f_2\rangle\quad(=\mathfrak{l}),$$
$$\mathfrak{l}(\mathfrak{u}',4)=\langle e_1+f_1,\ f_2\rangle\quad(=\mathfrak{m}),$$
$$\mathfrak{l}(\mathfrak{u}',5)=\langle e_1,\ f_1,\ f_2\rangle.$$

这里，子代数 $\mathfrak{l}$、$\mathfrak{m}$、$\mathfrak{n}$ 定义于第*4*节。

- 线性部分为 $\mathbf{0}$ 的情形：

$$\mathfrak{l}(\mathbf{0},1)=\langle f_1\rangle,$$
$$\mathfrak{l}(\mathbf{0},2)=\langle f_1,\ f_2\rangle.$$

•线性部分为$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$的情况：

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}),\quad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$$

•线性部分为$\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$的情况：

$$\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}),\quad \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2.$$

62. 关于该关系的等价连通子群 $\sim$

在本小节中，我们的目标是证明以下命题。它可由 KAK-分解或 Kostant 分解立即得到。

命题 6.2。 以下等价关系在关系 $\sim$ 的意义下成立。

(1) $L(Z,1)\sim L(O'(\gamma),1)\sim L(CO,1)$ 当 $\gamma\neq 0$ 时。
(2) $L(Z,2)\sim L(Z,3)\sim L(O'(\gamma),2)\sim L(CO,2)$ 当 $\gamma\neq 0$ 时。(3) $GL_2(\mathbb{R})\sim L(B',2)\sim L(D,2)\sim L(P,1)$。(4) $GL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\sim L(B',3)\sim L(D,3)\sim L(P,2)$。

注 6.3。 根据命题 6.2，当线性部分为 $O'(\gamma)$ $CO,$ P 时，可归结为线性部分为 $Z,$ $GL_2(\mathbb{R})$ 的情形。因此，在考察适当性时，我们无需考虑这类情形。

7 定理 1.4-1.6 的证明

本节讨论较容易的情形，该情形的证明不依赖于群 $GL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$ 的连通子群分类。

7.1 定理 1.4 的证明

本小节对线性部分任一者为B'， D时的连通子群进行分类。首先，我们回顾 H 适当地作用在$\mathbb{R}^2$上的连通子群分类。

事实 7.1. *([Kob92，命题 A.2.1])* 在关系 $\sim$ 下等价的意义下，适当地作用于 $\mathbb{R}^2$ 的连通子群具有以下形式。

$$\mathbb{R}^2, M = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 1 & u \end{pmatrix} : t, u \in \mathbb{R}\}, N = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 1 & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\},$$

$$L(A(1), 2) = \{\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} \subset L(A(1), 5) = \{\begin{pmatrix} e^t & 0 & u \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} : u, t \in \mathbb{R}\}.$$

在本小节余下部分，我们证明以下定理。

定理 1.4. 设 L 和 H 是 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的连通闭子群。若 $L \pitchfork H$ 属于 G，则 (L, H) 具有以下形式：

$$(L(D, 1), N)$$

其中 L 是 $L(B', 1)$ 或 $L(D,1)$。

注 7.2. (1) 子群 $L(B',1)$ 和 $L(D, 1)$ 包含模 $\sim$的 $GL_2(\mathbb{R})$.

(2) 假设 $\mathscr{L}(L)$ 是 B' 或 D。在其余情况下， L 关于关系 $\sim$ 等价于 $GL_2(\mathbb{R})$ 或 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 。前者可归结为 Kobayashi [Kob92，命题 A.2。1]，而后者不可能出现在适当对中。因此，要完成这一情形的分类，只需证明定理 1.4。

定理 *1.4* 的证明。我们只证明 $L(B'，1) \pitchfork N$、 $L(D，1) \not\pitchfork N$以及 $L(D，1) \not\pitchfork L(A(1)，2)$，因为其他对不满足 (CI) 条件。

为了证明 $L(B'，1) \pitchfork N$和 $L(D，1) \not\pitchfork N$，我们使用定理 1.5。由于$N \subset SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 而

$$L(B', 1) \cap (SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2) = \{\begin{pmatrix} e^t & 0 & u \\ 0 & e^{-t} & 0 \end{pmatrix} : t, u \in \mathbb{R}\},$$

$$L(D, 1) \cap (SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2) = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{R}\},$$

根据定理 1.2 和 1.5，我们有 $L(B'，1) \pitchfork N$和 $L(D，1) \not\pitchfork N$。

我们证明 $L(D，1) \not\pitchfork L(A(1)，1)$。根据定理 1.3，由于 $\mathscr{L}(L(D，1)) \not\pitchfork \mathscr{L}(N)$ 属于 $GL_2(\mathbb{R})$，存在 S 的一个紧集 $GL_2(\mathbb{R})$，以及序列 t_n， t'_n， u'_n， a_n， b_n，c_n， d_n， A_n， B_n， C_n，$D_n \in \mathbb{R}$ ，使得

- $t_n \to \infty$ as $n \to \infty$,
- $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \in S$,
- $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t'_n} & 0 \\ u'_n & e^{t'_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

当我们令 $e_n = f_n = F_n = 0$, $E_n = \frac{b_n t_n}{e^{t'_n}}$, $v'_n = d_n t_n - \frac{b_n t_n}{e^{t'_n}} u'_n$ 时，有

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n & e_n \\ c_n & d_n & f_n \\ a_n & b_n & e_n \\ c_n & d_n & f_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{t'_n} & 0 & 0 \\ u'_n & e^{t'_n} & v'_n \\ A_n & B_n & E_n \\ C_n & D_n & F_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & B_n & E_n \\ C_n & D_n & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_n^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t_n \end{pmatrix},$$

且元素 $\begin{pmatrix} a_n & b_n & e_n \\ c_n & d_n & f_n \\ a_n & b_n & e_n \\ c_n & d_n & f_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_n & B_n & E_n \\ C_n & D_n & F_n \end{pmatrix}$ 对于所有 n 都包含在$GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的某个紧集中。因此，我们有 $L(D, 1) \not\pitchfork N$属于 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$。

□

7.2 定理 1.5 的证明

本小节致力于证明定理 1.5。

定理 1.5. 假设 $L \subset SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 是一个子集，且 $L' \not\subset SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 是 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 的一个连通子群。那么，我们有以下等价关系：

$$L \pitchfork L' \text{ in } GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n \iff L \pitchfork (L' \cap SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n) \text{ in } SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

证明. 正向显然，因此我们证明反向。假设$L \pitchfork H$属于 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$。那么，存在一个紧集 S属于 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$、一个趋于无穷的序列$g'_i \in H$，以及一个序列 s_i, $s'_i \in S$，使得

$$s_i g'_i s'_i \in L.$$

由于 $H \not\subset SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$，存在 $X \in \mathrm{Lie}(H)$，使得 $\det(\mathscr{L}(\exp X)) \neq 1$。定义 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 的子集 C 为

$$C \coloneqq \{\exp tX : -\log(\max_{s \in S} \det(\mathscr{L}(s))) \leq t \leq -\log(\min_{s \in S} \det(\mathscr{L}(s))\},$$

它是一个紧集。我们有

$$s_i g'_i s'_i = (s_i \exp(-t_i X)) \left(\exp(t_i X) g'_i \exp(t'_i X)\right) \left(\exp(-t'_i X) s'_i\right),$$

其中

$$\det(\mathscr{L}(s_i)) = \det(\mathscr{L}(\exp(t_i X))), \quad \det(\mathscr{L}(s'_i)) = \det(\mathscr{L}(\exp(t'_i X))).$$

由于序列 $s_i\exp(-t_iX)$ 和 $\exp(-t_i'X)s_i'$ 包含在紧集$CSC \cap (SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2)$ 中，而 $\exp(t_iX)g_i'\exp(t_i'X)$ 是 $H \cap (SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n)$ 中的一个无界序列，因此我们有

$$L' \not\pitchfork (H \cap SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n) \text{ in } SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

□

7.3 定理 1.6 的证明

We 证明定理 1.6，该定理可推广到
任意维
张量。

定理 1.6。设 L 是 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 中的闭子群，其线性部分 $\mathscr{L}(L)$ 是闭的，并且 H 是 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 中的子集。若对偶 $(L, \mathbb{R}^n)$ 满足 *(CI)*，且 $\mathscr{L}(L) \pitchfork \mathscr{L}(H)$ 属于 $GL_n(\mathbb{R})$，则 $L \pitchfork H$ 属于 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$。

为了证明该定理，我们先准备以下命题。

命题 7.3。在上述定理的情形下，序对 $(L、\ \mathbb{R}^n)$ 是 *(CI)*，当且仅当 $L \pitchfork \mathbb{R}^n$ 属于 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$。

证明。充分性显然，因此我们证明逆向结论。由于序对 $(L, \mathbb{R}^n)$ 是 (CI)，子群

$$\ker(\mathscr{L}|_L) = L \cap \mathbb{R}^n$$

是紧致的。由于它是 $\mathbb{R}$ 的子群，所以它是平凡群。因此，我们得到连续双射同态 $\mathscr{L}|_L$: $L \to \mathscr{L}(L)$。根据开映射定理（见 [HM06，附录 1]），该映射是同胚。

对于任意紧集 $S \subset (GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}^n \cong GL_n(\mathbb{R})$，我们得到

$$L_S = (\mathscr{L}|_L)^{-1}(\mathscr{L}|_L)(L_S) = (\mathscr{L}|_L)^{-1}(\mathscr{L}(L)_S).$$

子集 $\mathscr{L}(L)_S$ 是紧致的。事实上，作用 $\mathscr{L}(L) \curvearrowright GL_n(\mathbb{R})$ 是适当的，因为$\mathscr{L}(L)$ 是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的闭子群。因此，子集 L_S 也是紧致的。因此，序对 $(L, \mathbb{R}^n)$ 是适当的，因为作用 $L \curvearrowright GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^n$ 是适当的。 □

现在我们证明定理 1.6。

定理 *1.6* 的证明。对于 S in $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 中的一个紧子集，该子集

$$C \coloneqq \mathscr{L}(L) \cap \mathscr{L}(S)\mathscr{L}(H)\mathscr{L}(S^{-1})$$

是紧致的，因为 $\mathscr{L}(L) \pitchfork \mathscr{L}(H)$ 属于 $GL_n(\mathbb{R})$。因此，我们有

$$\begin{aligned} L \cap SHS^{-1} &\subset L \cap \big((\mathscr{L}(L) \cap \mathscr{L}(S)\mathscr{L}(H)\mathscr{L}(S^{-1})) \times \mathbb{R}^n\big) \\ &= L \cap (C \times \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

由于右边的子集由命题 7.3 可知是紧致的，因此子集 $L \cap SHS^{-1}$ 也是紧致的。因此，我们得到 $L \pitchfork H$。 □

8 定理 1.7 的证明

本节中，我们证明定理 1.7。首先给出以下注，这有助于简化对确定适当性的讨论。

注 8.1。 $L(A(\alpha)\ i)$ 与 $L(B(\beta)\ j)$ 之间的包含关系如图2所示。哈斯图中的顺序表示，对于某些参数 α 和 β 的取值，在等价关系 $\sim$意义下可以实现该包含关系。

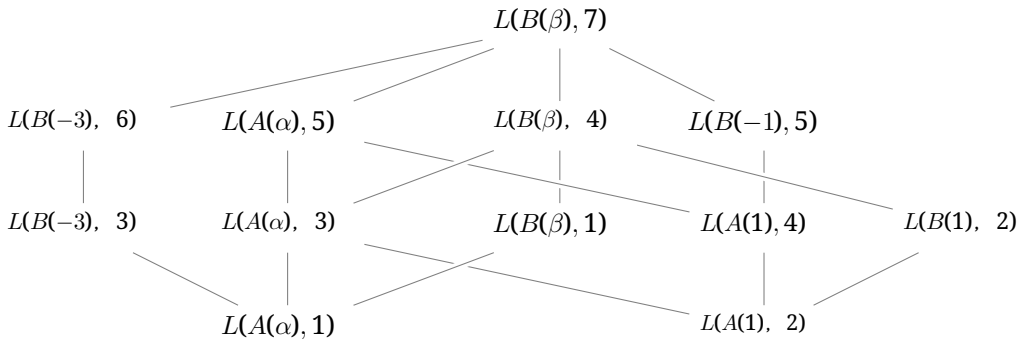

图2： $L(A(\alpha)\ i)\ L(B(\beta)\ j) \subset GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$之间的包含关系

8.1 (A) 情形 $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)\ \mathscr{L}(H) = A(\beta)$

在本小节中，我们证明定理 1.7(A)。现在回顾其陈述。

定理 1.7. (A) 假设 $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)\ \mathscr{L}(H) = A(\beta)$。那么，*(CI)* 条件等价于该对的适当性。

我们利用线性部分为 $A(\gamma)$ 的 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 连通子群的分类来证明。对于正向的证明，我们列出满足条件 (CI) 的对。

引理 8.2。 满足条件 *(CI)* 的连通对如下。

(1)

$$(L(A(\alpha),1), L(A(\beta),1)),\quad (L(A(\alpha),1), L(A(\beta),3)),\quad (L(A(\alpha),1), L(A(\beta),5)),$$
$$(L(A(1),2), L(A(\beta),3)),\quad (L(A(1),2), L(A(\beta),5)),\quad (L(A(\alpha),1), L(A(1),2)),$$
$$(L(A(\alpha),1), L(A(1),4)),$$

其中参数的绝对值彼此不同。

(2) $(L(A(1),2), L(A(1),3))$, $(L(A(1),1), L(A(1),2))$, $(L(A(1),1), L(A(1),4))$.

定理 *1.7* 的证明（A）。 只需证明上述引理中的对是适当的。根据定理 1.6，引理 8.2（1）中的对是适当的。因此，我们可以证明以下各对是适当的:

(1) ($L(A(1),\ 1)\ L(A(1),\ 4)$),
(2) ($L(A(1),\ 2)\ L(A(1),\ 3)$)。

剩下的这一对 ($L(A(1),\ 1)\ L(A(1),\ 2)$) 是适当的，因为 $L(A(1),\ 2) \subset L(A(1),\ 4)$。假设这一对 (1) 不是适当的。那么存在一个发散序列 $\begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 2t_n \end{pmatrix} \in L(A(1),\ 4)$，以及序列 $s_n,\ s'_n$，它们都包含在 $GL_2(\mathbb{R})$ 的某个紧集中 $\ltimes \mathbb{R}^2$，使得

$$s_n \begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 2t_n \end{pmatrix} s'_n \in L(A(1),1)$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。考虑平移部分。于是，我们有

$$\begin{pmatrix} u_n \\ 2t_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathscr{U}(s'_n) \asymp_+ \mathscr{L}(s_n^{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \asymp_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

左侧的第二个矩阵元素无界，而右侧的第二个矩阵元素有界，这就产生了矛盾。

假设这一对 (2) 不是适当的。为证明这一点，我们先准备一个引理。

引理 8.3。假设序列 $\begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2t'_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, s'_n \in GL_2(\mathbb{R})$ 包含在 $GL_2(\mathbb{R})$ 的某个紧集中，并且满足 $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (s_n^{prime})^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t'_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 那么，我们有 *(1)* $t_n \asymp_+ t'_n$，*(2)* $|c_n| \lesssim_\times e^{-2t_n}$ 和 $|a_n|, |d_n| \asymp_\times 1$。

证明。 第一个结论由事实 5.5 得出。我们来证明第二个结论。我们有 e

$$\begin{pmatrix} a_n e^{2t_n} & b_n \\ c_n e^{2t_n} & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t'_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_n^{prime}.$$

根据命题 3.5，第二列 $|| \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} s_n^{prime} ||$ 的范数渐近等于 1，即 $|| \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} s_n^{prime} || \asymp_\times 1$。因此，左边的第二列范数

左边 $\left\| c_n e^{2t_n} \quad d_n \right\| \asymp_\times 1$。因此，我们有 $|c_n| \lesssim_\times e^{-2t_n}$. 由于 $\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \asymp_\times 1$，我们有

$$|a_n| \gtrsim_\times \frac{\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} - |b_n||c_n|}{|d_n|} \gtrsim_\times 1, \quad |d_n| \gtrsim_\times \frac{\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} - |b_n||c_n|}{|a_n|} \gtrsim_\times 1.$$

□

我们证明引理 8.2 (2)。假设该对不是适当的。那么，存在发散序列 $g_n = \begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t_n \end{pmatrix} \in L(A(1), 2)$、$g'_n = \begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 & v'_n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in L(A(1), 3)$，以及包含在 $GL_2(\mathbb{R})$ 的某个紧集中的序列 $s_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & * \\ c_n & d_n & * \end{pmatrix}$，$s'_n$，使得

(a) $\mathscr{L}(s_n)\mathscr{L}(g_n)\mathscr{L}(s'_n)^{-1} = \mathscr{L}(g'_n)$,(b) $\mathscr{U}(g'_n) + \mathscr{L}(g'_n)\mathscr{U}(s'_n) \asymp_+ \mathscr{L}(s_n)\mathscr{U}(g_n)$.

根据条件 (a) 和引理 8.3，我们有 $t_n \asymp_+ t'_n$ 和 $|a_n|, |d_n| \asymp_\times 1$。根据 (b)，我们有

$$\begin{pmatrix} v'_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t'_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathscr{L}(s'_n) \asymp_+ \frac{1}{|\det s_n|} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2t_n \end{pmatrix}.$$

左边的第二个矩阵元素有界，但右边的第二个矩阵元素 $\frac{1}{\det s_n} 2d_n t_n \asymp_\times t_n$ 无界，这就产生了矛盾。 □

8.2 (B) 情形 $\mathscr{L}(L) = B(\alpha)$ $\mathscr{L}(H) = B(\beta)$

本节证明定理 1.7(B)。我们回顾其表述。

定理 1.7。（B） 设 $\mathscr{L}(H) = B(\alpha)$ $\mathscr{L}(L) = B(\beta)$。如果偶对 (L, H) 是适当的，那么 L 或 H 必为 $L(B(-3),3)$ 或 $L(B(-3), 6)$。此外，如果 H 是其中之一，则以下等价关系成立：

$$L \pitchfork H \iff (L, H) \text{ is (CI) and } |\alpha| < 3.$$

前一个结论很容易由 (CI) 条件推出。为了证明该定理后一部分的逆向蕴含，我们先给出以下命题。

命题 8.4. 假设 $|\alpha| < |\beta|$，并且该子集

$$L_{|\det|\asymp_\times 1} := \{g \in L \mid |\det \mathscr{L}(g)| \asymp_\times 1\}$$

满足 $L_{|\det|\asymp_\times 1} \pitchfork L'$。若 $L \not\pitchfork L'$，则存在

- 一个形如以下形式的序列 $g_n \in L$

$$g_n = \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t_n} & 0 & * \\ u_n & e^{(\alpha-1)t_n} & * \end{pmatrix},$$

- 一个形如以下形式的序列 $g'_n \in H$

$$g'_n = \begin{pmatrix} e^{(\beta+1)t'_n} & 0 & * \\ u'_n & e^{(\beta-1)t'_n} & * \end{pmatrix},$$

- 一个序列 $k_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in K \subset GL_2(\mathbb{R})$，其中 K 是$GL_2(\mathbb{R})$的一个紧子集，

- 一个满足 $\|w_n\| \lesssim_\times 1$ 的序列 $w_n \in \mathbb{R}^2$，

使得以下条件成立：

(1) $t_n \to \infty$*(2)* $t'_n \asymp_+ {}^{\alpha}_{\beta} t_n$*, (3)* $\mathscr{U}($
$g'_n) + \mathscr{L}(g'_n)w_n \asymp_+ k_n\mathscr{U}(g_n)$*, (4)*
$|u'_n| \gtrsim_\times e^{(\alpha+1)t_n}$*, (5)*
$|b_n| \asymp_\times {}^{e^{(\alpha+1)t_n}}_{|u'_n|}$.

证明。由于 $L \not\pitchfork L'$，存在发散序列 $g_n \in L, g'_n \in L'$，使得 $g_n \in Sg'_nS^{-1}$ 对于某个紧集 $S \subset GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$成立。由于 $L_{|\det|\asymp_\times 1} \pitchfork L'$，$t_n$ 无界。如果 $t_n \to -\infty$，那么我们可以用其逆序列 g_n^{-1}替换序列 g_n，从而得到一个具有 $t_n \to \infty$的序列。

我们考察参数 t_n, s_n 的渐近行为。由 Cartan 投影的一致估计（事实 5.5），可得

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}(A_n + \sqrt{A_n^2 - 4e^{4\alpha t_n}})\right) \asymp_+ \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}(B_n + \sqrt{B_n^2 - 4e^{4\beta t'_n}})\right),$$
$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}(A_n - \sqrt{A_n^2 - 4e^{4\alpha t_n}})\right) \asymp_+ \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}(B_n - \sqrt{B_n^2 - 4e^{4\beta t'_n}})\right),$$

wh这里，依赖于 t_n, t'_n, u_n, u'_n 的以下量 A_n, B_n 定义如下 :

$$A_n \coloneqq e^{2(\alpha+1)t_n} + e^{2(\alpha-1)t_n} + u_n^2, \quad B_n \coloneqq e^{2(\beta+1)t'_n} + e^{2(\beta-1)t'_n} + (u'_n)^2.$$

将两边相加，得到估计

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{4}(A_n + \sqrt{A_n^2 - 4e^{4\alpha t_n}})(A_n - \sqrt{A_n^2 - 4e^{4\alpha t_n}})\right)\\ &\quad\asymp_+ \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{4}(B_n + \sqrt{B_n^2 - 4e^{4\beta t'_n}})(B_n - \sqrt{B_n^2 - 4e^{4\beta t'_n}})\right).\end{aligned}$$

因此，我们得到 $\alpha t_n \asymp_+ \beta t'_n$，即估计式 (2)。此外，由于 $t_n \to \infty$,

$$\begin{aligned}A_n + \sqrt{A_n^2 - 4e^{4\alpha t_n}} &\gtrsim_\times A_n + \sqrt{(A_n - 2e^{2\alpha t_n})^2}\\ &= 2(A_n - e^{2\alpha t_n}) \asymp_\times 2e^{2(\alpha+1)t_n},\\ B_n + \sqrt{B_n^2 - 4e^{4\beta t'_n}} &\lesssim_\times 2B_n \asymp_\times 2(e^{2(\beta+1)t'_n} + e^{2(\beta-1)t'_n} + (u'_n)^2).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}e^{2(\alpha+1)t_n} &\gtrsim_\times e^{2(\beta+1)\frac{\beta}{\alpha}t_n} \asymp_\times e^{2(\beta+1)t'_n},\\ e^{2(\alpha+1)t_n} &\gtrsim_\times e^{2(\beta-1)\frac{\beta}{\alpha}t_n} \asymp_\times e^{2(\beta-1)t'_n}\end{aligned}$$

对于 $|\alpha| < |\beta|$，我们得到 $e^{(\alpha+1)t_n} \lesssim_\times |u'_n|$，即估计式 (4)。

通过比较线性部分，我们有

$$\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{(\beta+1)t'_n} & 0\\ u'_n & e^{(\beta-1)t'_n}\end{pmatrix}C_n = \begin{pmatrix}e^{(\alpha+1)t_n} & 0\\ u_n & e^{(\alpha-1)t_n}\end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$ 和 C_n 是包含在 $GL_2(\mathbb{R})$ 的紧集 K 中的一个序列。将命题 3.5 应用于第一列，得到

$$\left\|a_n e^{(\beta+1)t'_n} + b_n u'_n \quad b_n e^{(\beta-1)t'_n}\right\| \asymp_\times e^{(\alpha+1)t_n}.$$

因此，

$$\left\|a_n \frac{e^{(\beta+1)t'_n}}{e^{(\alpha+1)t_n}} + b_n \frac{u'_n}{e^{(\alpha+1)t_n}} \quad b_n \frac{e^{(\beta-1)t'_n}}{e^{(\alpha+1)t_n}}\right\| \asymp_\times 1.$$

由于

$$\left|a_n \frac{e^{(\beta+1)t'_n}}{e^{(\alpha+1)t_n}}\right|, \quad \left|b_n \frac{e^{(\beta-1)t'_n}}{e^{(\alpha+1)t_n}}\right| \lesssim_\times 1$$

当 $|\alpha| < |\beta|$ 时，可得 $|b_n \frac{u'_n}{e^{(\alpha+1)t_n}}| \asymp_\times 1$. 因此，我们有 $|b_n| \asymp_\times \frac{e^{(\alpha+1)t_n}}{|u'_n|}$。——— □

这里，我们证明定理 1.7 （**B**）。

定理 *1.7* 的证明 (B)。 首先，我们证明正向。显然，适当对 (L,H) 是 (CI)，因此我们证明 $|\gamma|<3$. 假设 $|\gamma|\geq 3$. 且 $H=L(B(\gamma)\ j)$。

若 $j=2,\ 5$，则参数 γ 不满足 $|\gamma|\geq 3$。

若 $j=3,\ 6$，则对 $(L,\ H)$ 不是 (CI)。

若 $j=1,\ 4,\ 7$，则连通子群 $L(B(\gamma)\ j)$ 包含子集

$$L_0 \coloneqq \{\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \end{pmatrix} : t\in\mathbb{R}\}$$

模 $\sim$，其中 $|\gamma|\geq 3$。事实上，由事实 5.4 可得

$$A(-3)\subset B(\gamma) \quad \text{modulo}\sim \text{ in } GL_2(\mathbb{R})$$

对于 $|\gamma|\geq 3$。由于当 $j=1,\ 4,\ 7$ 时，$L(B(\gamma)\ j)$ 包含 $B(\gamma)\times\{0\}$，我们便得到上述包含关系。因此，对 $(L,\ H)$ 而言，适当所必需的条件是 $|\gamma|<3$。

我们证明反向。我们可以证明以下断言。其他适当对可通过包含关系 $L(B(\gamma),1)\subset L(B(\gamma),4)$ 和 $L(B(-3),3)\subset L(B(-3),6)$ 得到。

□

断言 8.5。 (1) $L(B(-3),3)\pitchfork L(B(\gamma),4)$ if $|\gamma|<3$。

(2) $L(B(-3),3)\pitchfork L(B(-1),5)$.

(3) 若 $|\gamma|<3$, $L(B(\gamma),1)\pitchfork L(B(-3),6\}$。(4) $L(B(1),2)\pitchfork L(B(-3),6)$。

证明。 (1) 我们写作 $L=L(B(\gamma),4)$ $H=L(B(-3),3)$。我们取序列

$$g_n=\begin{pmatrix} e^{(\gamma+1)t_n} & 0 & 0 \\ u_n & e^{(\gamma-1)t_n} & v_n \end{pmatrix}\in L, g_n'=\begin{pmatrix} e^{-2t_n'} & 0 & u_n' \\ e^{-2t_n'}u_n' & e^{-4t_n'} & \frac{1}{2}(u_n')^2 \end{pmatrix}\in H,$$

k_n, w_n 满足命题 8.4 的条件。然后，命题 8.4 表明参数 u_n', t_n' 满足 (2),(4)

$$t_n'\asymp_+ -\frac{\gamma}{3}t_n, \quad |e^{-2t_n'}u_n'|\gtrsim_\times 1.$$

由命题 8.4 中的条件 (3) 可得

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e^{(\gamma+1)t_n} & 0 \\ u_n & e^{(\gamma-1)t_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (w_1)_n \\ (w_2)_n \end{pmatrix}\asymp_+ \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n' \\ \frac{1}{2}(u_n')^2 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

(*) 右侧的第一个矩阵元素满足

$$|a_n u_n' + \frac{1}{2} b_n (u_n')^2| \gtrsim_\times e^{(\frac{2\gamma}{3}+2)t_n}.$$

因此，根据命题 3.4 (4) 和方程 (*)，我们得到

$$|(w_1)_n| \gtrsim_\times \frac{e^{(\frac{2\gamma}{3}+2)t_n}}{e^{(\gamma+1)t_n}} = e^{(-\frac{1}{3}\gamma+1)t_n}.$$

当 $|\gamma| < 3$ 时，右边趋于无穷大，这与矛盾。

(2) 我们写作 $L = L(B(-1),\ 5)$ $H = L(B(-3),\ 3)$。我们取序列

$$g_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t_n \\ u_n & e^{-2t_n} & v_n \end{pmatrix} \in L, g_n' = \begin{pmatrix} e^{-2t_n'} & 0 & u_n' \\ e^{-2t_n'}u_n' & e^{-4t_n'} & \frac{1}{2}(u_n')^2 \end{pmatrix} \in H,$$

k_n，w_n，使其满足命题 8.4 的条件。然后，参数 t_n，u_n'，t_n' 满足

$$t_n' \asymp_+ \frac{t_n}{3}, \quad |e^{-2t_n'}u_n'| \gtrsim_\times 1.$$

以与 (1) 相同的方式，我们得到

$$\begin{pmatrix} 2t_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n & e^{-2t_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_1)_n \\ (w_2)_n \end{pmatrix} \asymp_+ \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n' \\ \frac{1}{2}(u_n')^2 \end{pmatrix}.$$

右边的第一个矩阵元素满足

$$|a_n u_n' + \frac{1}{2} b_n (u_n')^2| \gtrsim_\times e^{\frac{4}{3}t_n}.$$

然而，左侧的增长是多项式地增长的，这就产生了矛盾。

(3) 我们写作 $L = L(B(\gamma),1)$ $H = L(B(-3),6)$。我们取序列

$$g_n = \begin{pmatrix} e^{(\gamma+1)t_n} & 0 & 0 \\ u_n & e^{(\gamma-1)t_n} & 0 \end{pmatrix} \in L, g_n' = \begin{pmatrix} e^{-2t_n'} & 0 & u_n' \\ e^{-2t_n'}u_n' & e^{-4t_n'} & v_n' \end{pmatrix} \in H,$$

k_n, w_n 满足命题 8.4 的条件。于是，参数 t_n, u_n', t_n'满足

$$t_n' \asymp_+ -\frac{\gamma}{3}t_n, \quad |e^{-2t_n'}u_n'| \gtrsim_\times e^{(\gamma+1)t_n}.$$

考虑平移部分，我们有

$$\begin{pmatrix} u_n' \\ v_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-2t_n'} & 0 \\ e^{-2t_n'}u_n' & e^{-4t_n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_1)_n \\ (w_2)_n \end{pmatrix} \asymp_+ k_n^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

左边的第一个矩阵元素无界，因为

$$|u_n'| \gtrsim_\times e^{(\frac{\gamma}{3}+1)t_n} \gtrsim_\times e^{\frac{2\gamma}{3}t_n} \gtrsim_\times |e^{-2t_n'}(w_1)_n|,$$

并且当 $|\gamma| < 3$ 时 $|u_n'| \to \infty$。然而，右边有界，这就产生了矛盾。

(4) 我们写作 $L = L(B(1,\ 2)\ H = L(B(-3),\ 6)$。我们取序列

$$g_n = \begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 & 0 \\ u_n & 1 & 2t_n \end{pmatrix} \in L, g_n' = \begin{pmatrix} e^{-2t_n'} & 0 & u_n' \\ e^{-2t_n'}u_n' & e^{-4t_n'} & v_n' \end{pmatrix} \in H,$$

$k_n,\ w_n$，使其满足命题 8.4 的条件。于是，参数 $t_n,\ u_n',\ t_n'$ 满足

$$t_n' \asymp_+ -\frac{t_n}{3}, \quad |e^{-2t_n'}u_n'| \gtrsim_\times e^{2t_n}.$$

考虑平移部分，我们有

$$\begin{pmatrix} u_n' \\ v_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-2t_n'} & 0 \\ e^{-2t_n'}u_n' & e^{-4t_n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_1)_n \\ (w_2)_n \end{pmatrix} \asymp_+ k_n^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2t_n \end{pmatrix}.$$

通过与 (3) 类似的论证，左边的第一个矩阵元素呈指数增长，而右边的第一个矩阵元素至多呈多项式增长，这就产生了矛盾。 □

8.3 (C) 情形 $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)\ \mathscr{L}(H) = B(\beta)$

在本节中，我们证明定理 1.7（C）。考虑模 $\sim$ 的包含关系，我们可以证明以下陈述。

命题 8.6。（*a*） L（A（1），4）$\pitchfork L$（B（β），1）对所有 β。

（*b*） L（A（α），1）$\pitchfork L$（B（-1），5）当且仅当 $\alpha \neq 0$。

（*c*） （*1*） *L(A(α),3)* $\pitchfork$ *L(B(−3), 3)* 当且仅当 $|\alpha| \neq 3$。
（*2*） *L(A(1), 4)* $\pitchfork$ *L(B(−3), 3)*。（*3*） *L(A(α), 1)* $\pitchfork$ *L(B(−3),6)* 当且仅当 $|\alpha| \neq 3$（*4*） *L(A(1), 2)* $\pitchfork$ *L(B(−3), 6)*。

(d) $L(A(1),2)\ \pitchfork L(B(\beta),4)$ 当且仅当 $-1 \leq \beta < 1$。

(e) $L(A(\alpha),1)\ \pitchfork L(B(1),\ 2)$ 当且仅当 $|\alpha| \geq 1$。

(f) (1) $L(A(\alpha), 5)\ \pitchfork L(B(1)\ \beta)$ 如果 $|\alpha| > |\beta|$.
(2) $L(A(\alpha), 1)\ \pitchfork L(B(\beta),7)$ 如果 $|\alpha| > |\beta|$.
(3) $L(A(\alpha), 5)\ \pitchfork L(B(1),2)$ 如果 $|\alpha| > 1$.

(4) $L(A(\alpha), 5) \pitchfork L(B(-3),3)$ 如果 $|\alpha| > 3$. (5) $L(A(1), 2) \pitchfork L(B(\beta), 7)$ 如果 $|\beta| < 1$.(1)′ $L(A(\alpha),1) \not\pitchfork L(B(1)\ \beta)$ 如果 $|\alpha| \leq |\beta|$.(2)′ $L(A(\alpha),3) \not\pitchfork L(B(1), 2)$ 如果 $|\alpha| \leq 1$. (3)′ $L(A(\alpha),5) \not\pitchfork L(B(-3), 3)$ 如果 $|\alpha| \leq 3$. (4)′ $L(A(1), 2) \not\pitchfork L(B(\beta),$ 7) 如果 $|\beta| \geq 1$.

首先，我们证明陈述 (a) 和 (c)。

(a) 的证明。由 $L(A(1),4) \pitchfork GL_2(\mathbb{R})$，见 [Kob92, Prop. A.2.1], 以及 $L(B(\beta), 1) \subset GL_2(\mathbb{R})$ 对任意 β 成立。因此可得，对任意 β， $L(A(1),4) \pitchfork L(B(\beta),1)$。 □

(c) 的证明。由于 $L(A(1), 4) \subset L(B(-1), 5)$ $L(A(1), 2) \subset L(B(1),2)$ 模 $\sim$ 成立，陈述 (2)、(4) 由断言 8.5 (2)、(4) 得出。

我们证明 (1)′、(3)。若 $|\alpha| = 3$，则这些对不是 (CI)，因此也不适当。若$|\alpha| > 3$，则由定理 1.6 可知这些对是适当的。设 $|\alpha| < 3$。于是，我们有$L(A(\alpha),3) \subset L(B(\alpha),4)$ 且 $L(A(\alpha), 1) \subset L(B(\alpha), 1)$ 模 $\sim$ 成立。由断言 8.5 (1) 和 (3)，若 $|\alpha| < 3$，可得 $L(A(\alpha),3) \pitchfork L(B(-3), 3)$ 且 $L(A(\alpha),1) \pitchfork L(B(-3),$ 6)。 □

为证明（b），我们先准备一个引理。证明与命题 8.4 类似，因此略去。

引理 8.7。设 $|\alpha| \leq 1$。假设序列 $l_n = \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t_n} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-1)t_n} \end{pmatrix}$ 和 $l'_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u'_n & e^{-2t'_n} \end{pmatrix}$

满足 $l_n \in Sl'_nS^{-1}$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及某个 $GL_2(\mathbb{R})$中的紧集 S 均成立。则可得 $t'_n \asymp_+ -\alpha t_n$。

（*b*）的证明。若 $\alpha = 0$，则有

$$SL_2(\mathbb{R}) \sim \{ \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\} = L(A(0), 1),$$

$$SL_2(\mathbb{R}) \sim \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\} \subset L(B(-1), 5).$$

因此，可得 $L(A(0),\ 1) \not\pitchfork L(B(-1),\ 5)$。

假设 $\alpha \neq 0$，且 $L(A(\alpha),1) \not\pitchfork L(B(-1),5)$。那么，我们得到如下形式的序列 g_n, g'_n

$$g_n = \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t_n} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-1)t_n} & 0 \end{pmatrix}, \quad g'_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t'_n \\ u'_n & e^{-2t'_n} & v'_n \end{pmatrix},$$

以及 $s_n, s'_n \in S$，其中 S 是 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的紧子集，且满足 $s_n g_n = g'_n s'_n$。考察线性部分，由引理 8.7 可得 $t'_n \asymp_+ -\alpha t_n$。考察平移部分，可得

$$\begin{pmatrix} 2t'_n \\ v'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u'_n & e^{-2t'_n} \end{pmatrix} \mathscr{U}(s'_n) \asymp_+ \mathscr{L}(s_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \asymp_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

右边有界，而左边当 $t_n \to \infty$ since$t'_n \asymp_+ -\alpha t_n$ and $\alpha \neq 0$ 时发散。这是一个矛盾。

□

为证明 (d)，我们准备以下引理。

引理 8.8。假设序列 $l_n = \begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u'_n & e^{-2t'_n} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ 和 $r_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, r'_n$ 满足

- $t_n \to \infty$,
- $l_n r_n = r'_n l'_n$,
- 序列 r_n、r'_n 包含在 $GL_2(\mathbb{R})$ 中的某个紧集内。

于是，我们有 $|b_n| \asymp_\times 1.$

证明。由于 r_n 包含在 $GL_2(\mathbb{R})$ 中的某个紧集内，b_n 有上界。根据卡当投影的一致估计（事实 5.5），我们得到 $t'_n \asymp_+ -t_n$。我们有

$$\begin{pmatrix} a_n e^{2t_n} & b_n \\ c_n e^{2t_n} & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u'_n & e^{-2t'_n} \end{pmatrix} r'_n.$$

考虑第一列的范数，可得

$$\left\| a_n e^{2t_n} \quad b_n \right\| \asymp_\times 1.$$

因此，我们有 $|a_n| \lesssim_\times e^{-2t_n}$，从而

$$|b_n| \gtrsim_\times \frac{\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} - |a_n||d_n|}{|c_n|} \gtrsim_\times 1.$$

□

我们证明命题 8.6 (d)。

(d) 的证明。若 $|\beta|<1$，则根据定理 1.6，配对 $(L(A(1),2)\ L(B(\beta),4))$ 是适当的。若 $\beta=1$，则可以验证该配对不是 (CI)，因而不是适当的。

假设 $\beta=-1$。我们证明该对是适当的。否则，我们可以取序列

$$g_n=\begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2t_n\end{pmatrix}\in L(A(1),2)\ g'_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ u'_n & e^{-2t'_n} & v'_n\end{pmatrix}\in L(B(\beta),4)\text{ 和 }\ s_n,s'_n,$$

它们包含于 $GL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$ 的某个紧集内，并满足 $s_ng_n=g'_ns'_n$。根据上述引理，我们得到 $|b_n|\asymp_\times 1$。考虑方程 $s_ng_n=g'_ns'_n$ 的平移部分，我们得到

$$\begin{pmatrix}0\\ v'_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ u'_n & e^{-2t'_n}\end{pmatrix}\mathscr{U}(s'_n)\asymp_+\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2t_n\end{pmatrix},$$

其中我们记 $\mathscr{L}(s_n)=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$。左边的第一个矩阵元素有界，但根据引理 8.8，右边的第一个矩阵元素 $2b_nt_n$ 无界，矛盾。因此，我们得到 $L(A(1),2)\pitchfork L(B(-1),4)$ 属于 $GL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$。

最后，我们证明当 $|\beta|>1$ 时，$(L(A(1),\ 2)\ L(B(\beta),\ 4))$ 不适当。根据适当性判据（事实 5.4），$A(1)\not\pitchfork B(\beta)$ 属于 $GL_2(\mathbb{R})$，因此存在序列

$$l_n=\begin{pmatrix}e^{2t_n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},l'_n=\begin{pmatrix}e^{(\beta+1)t'_n} & 0\\ u'_n & e^{(\beta-1)t'_n}\end{pmatrix}$$

and

$$r_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix},r'_n$$

包含于 $GL_2(\mathbb{R})$ 中的某个紧集，使得 $t_n\to\infty$ 且 $r_nl_n=l'_nr'_n$。由引理 8.7 可得 $t'_n\asymp_+{}^{t_n}_{\beta}$ 且 $u'_n\asymp_\times\exp(2t_n)$。我们令

$$g_n=\begin{pmatrix}e^{2t_n} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2t_n\end{pmatrix},g'_n=\begin{pmatrix}e^{(\beta+1)t'_n} & 0 & 0\\ u'_n & e^{(\beta-1)t'_n} & d_nt_n-u'_n\frac{b_nt_n}{e^{(\beta+1)t'_n}}\end{pmatrix},$$

$$s_n=\begin{pmatrix}r_n & 0\\ 0 & \end{pmatrix},s'_n=\begin{pmatrix}r'_n & \frac{b_nt_n}{e^{(\beta+1)t'_n}}\\ 0 & \end{pmatrix}.$$

于是可得 $s_ng_n=g'_ns'_n$。此外，当 $t_n\to\infty$ 时，$\frac{b_nt_n}{e^{(\beta+1)t'_n}}$ 有界。事实上，我们有

$$\left|\frac{b_nt_n}{e^{(\beta+1)t'_n}}\right|\asymp_\times\frac{|b_n||t_n|}{e^{(\frac{1}{\beta}+1)t_n}}\lesssim_\times 1.$$

最后一个计算成立，因为 _ $\frac{1}{\beta}+1>0$ $|\beta|>1$ L A 1 ,2 ⋔ 对于 。因此，对于 $|\beta|>1$, 我们有 (( )) ((β), 4)。 □

在证明 (e) 之前，我们先准备一个关于线性部分渐近行为的引理。该引理可由卡当投影的一致估计（事实 5.5）立即推出，因此省略其证明。

引理 8.9。 假设序列 l_n, l'_n 具有如下形式

$$l_n=\begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t_n} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-1)t_n}\end{pmatrix},\quad l'_n=\begin{pmatrix} e^{(\beta+1)t'_n} & 0 \\ u'_n & e^{(\beta-1)t'_n}\end{pmatrix},$$

并且对于某些取值于某个紧集$GL_2(\mathbb{R})$中的序列 r_n, r'_n ，满足 $r_n l_n = l'_n r'_n$ ，则：

(1) 若 $|\alpha|<|\beta|$，则有以下估计

$$t'_n \asymp_+ \frac{\alpha}{\beta}\, t_n, \qquad u'_n \asymp_\times \exp\big((\alpha+1)t_n\big).$$

(2) 若 $|\alpha|=|\beta|$，则仍有

$$t'_n \asymp_+ \frac{\alpha}{\beta}\, t_n,$$

而且

$$u'_n \lesssim_\times \exp\big((\alpha+1)t_n\big).$$

(e) 的证明。 由定理 1.6，我们得到 $L(A(\alpha),1) \pitchfork L(B(1),2)$，若 $|\alpha|>1$。

我们证明 $L(A(1),1) \pitchfork L(B(1),2)$。反设不然，则可取序列$g_n = \begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \in L(A(1),1)$

$g'_n = \begin{pmatrix} e^{2t'_n} & 0 & 0 \\ u_n & 1 & 2t'_n\end{pmatrix} \in L(B(1),2)$，以及包含在 $GL_2(\mathbb{R})$ 中某个紧集内的序列s_n, s'_n，使得 $s_n g_n = g'_n s'_n$

对所有 $n\in\mathbb{N}$均成立。考虑平移部分，我们得到

$$\begin{pmatrix} e^{2t'_n} & 0 \\ u'_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(w_1)_n \\ (w_2)_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2t'_n\end{pmatrix} \asymp_+ \mathscr{L}(s_n)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \asymp_+ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

其中我们记作 $\begin{pmatrix}(w_1)_n \\ \\ n\end{pmatrix} = \mathscr{U}(w_2)\,(s'_n)$。注意，$(w_i)_n$ 是有界序列。由于$|(e^{2t'_n})(w_1)_n|$ 有界，由引理 8.9 (2)可得 $|(u'_n)(w_1)_n| \lesssim_\times |(e^{2t'_n})(w_1)_n| \lesssim_\times 1$ 。因此，左边 $(u'_n)(w_1)_n + (w_2)_n + 2t'_n \asymp_+ 2t'_n$ 的第二个矩阵元素无界。然而，右边的第二个矩阵元素有界，这就产生了矛盾。由于 $L(A(1),\ 1) \sim L(A(-1),\ 1)$，我们也得到 $L(A(-1),\ 1) \pitchfork L(B(1),\ 2)$。

我们证明，若 $|\alpha|<1$，则 $L(A(\alpha),\ 1)\not\pitchfork L(B(1),\ 2)$。若 $|\alpha|=0$，它们有非紧交集。假设 $0<|\alpha|<1$。于是我们得到序列 $l_n,\ l'_n,\ r_n,\ r'_n$，满足引理 8.9 中的假设。我们设

$$g_n=\begin{pmatrix} l_n & 0\\ & 0\end{pmatrix},\quad g'_n=\begin{pmatrix} l'_n & 0\\ & 2t'_n\end{pmatrix}$$

$$s_n=\begin{pmatrix} r_n & -2\frac{t'_n e^{2t'_n}}{u'_n}\\ & 0\end{pmatrix},\quad s'_n=\begin{pmatrix} r'_n & -\frac{2t'_n}{u'_n}\\ & 0\end{pmatrix}.$$

于是，我们有 $s_ng_n=g'_ns'_n$ 和

$$\left|\frac{-2t'_n}{u'_n}\right|\asymp_\times \frac{|\alpha||t_n|}{\exp((\alpha+1)t_n)}\lesssim_\times 1,$$

$$\left|-2\frac{t'_ne^{2t'_n}}{u'_n}\right|\asymp_\times \alpha t_n\exp((\alpha-1)t_n)\lesssim_\times 1$$

由引理 8.9 (2)，对于 $|\alpha|<1$。因此，$s_n,\ s'_n$ 包含在某个紧集中，故当 $0<|\alpha|<1$ 时，我们有 $L(A(\alpha),\ 1)\not\pitchfork L(B(1),\ 2)$。

□

本节末尾，我们证明命题 8.6 (f)。

(*f*) 的证明。由定理 1.6 可立即得到陈述 (1)、⋯、(5)。

陈述 (1)′ 成立，因为根据适当性判据（事实 5.4），线性部分在 $GL_2(\mathbb{R})$中不适当，且平移部分是平凡的。

当 $|\alpha|=0,\ 1$ 时，陈述 (2)′ 成立，因为这两个子群的交集非紧致；即使当 $0<|\alpha|<1$ 时，由于 (e)，仍可得出结论，因为 $L(A(\alpha),\ 1)\subset L(A(\alpha),\ 3)$。

我们证明 (4)′。根据适当性判据（事实 5.5），存在序列

$$l_n=\begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in A(1),\quad l'_n=\begin{pmatrix} e^{(\beta+1)t'_n} & 0\\ u'_n & e^{(\beta-1)t'_n}\end{pmatrix}\in B(\beta),$$

以及 $r_n,\ r'_n$，它们包含在 $GL_2(\mathbb{R})$ 中的某个紧集内，使得

$$t_n\to\infty,\quad r_nl_n=l'_nr'_n.$$

令

$$s_n=\begin{pmatrix} r_n & 0\\ & 0\end{pmatrix},\quad s'_n=\begin{pmatrix} r'_n & 0\\ & 0\end{pmatrix},$$

$$g_n=\begin{pmatrix} e^{2t_n} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2t_n\end{pmatrix},\quad g'_n=\begin{pmatrix} e^{(\beta+1)t'_n} & 0 & r_n\begin{pmatrix}0\\2t_n\end{pmatrix}\\ u'_n & e^{(\beta-1)t'_n}\end{pmatrix}$$

于是，我们有 $s_n g_n = g'_n s'_n$， $g_n \in L(A(1), 2)$ 和 $g'_n \in L(B(\beta), 7)$。因此，我们有$L(A(1), 2) \not\cap L(B(\beta), 7)$。

（3）的证明′ 与上述讨论类似。

□

A 连通子群对的适当性表

本节以表格形式完整总结了所有连通子群对的适当性。当单元格中写有涉及参数的条件时，这表示相应有序对适当的充要条件。

表5： 在 $\mathscr{L}(L) = Z$， $\mathscr{L}(H) \subset SL_2(\mathbb{R})$ 情形下有序对的适当性

L \ H	$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2$	S	L	M	N
$L(Z, 1)$	⋔	⋔	⋔	⋔	⋔	⋔
$L(Z, 2)$	⋔					⋔

表6： $\mathscr{L}(L) = A(\gamma)$ $\mathscr{L}(H) \subset SL_2(\mathbb{R})$情况下的有序对适当性

L \ H	$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2$	S	L	M	N
$L(A(0), 1)$		⋔			⋔	⋔
如果 $\gamma \neq 0$，则 $L(A(\gamma), 1)$	⋔	⋔	⋔	⋔	⋔	⋔
$L(A(1), 2)$	⋔	⋔	⋔	⋔	⋔	⋔
$L(A(0), 3)$						⋔
$L(A(\gamma), 3)$，当 $\gamma \neq 0$ 时	⋔					⋔
$L(A(1), 4)$	⋔					⋔
$L(A(0), 5)$						
$L(A(\gamma), 5)$，当 $\gamma \neq 0$ 时	⋔					⋔

表7： $\mathscr{L}(L) = U$情形下有序对的适当性，$\mathscr{L}(H) \subset SL_2(\mathbb{R})$

L \ H	$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2$	S	L	M	N
$L(U, 1)$	⫙	⫙	⫙	⫙	⫙	⫙
$L(U, 2)$	⫙					⫙
$L(U, 3)$	⫙					⫙

表8： $\mathscr{L}(L) = B(\gamma)$ $\mathscr{L}(H) \subset SL_2(\mathbb{R})$情形下有序对的适当性

L \ H	$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2$	S	L	M	N
$L(B(\gamma), 1)$		⫙			⫙	⫙
$L(B(1), 2)$		⫙			⫙	⫙
$L(B(-3), 3)$	⫙	⫙	⫙	⫙	⫙	⫙
$L(B(\gamma), 4)$						
$L(B(-1), 5)$						
$L(B(-3), 6)$	⫙					
$L(B(\gamma), 7)$						

表9： $\mathscr{L}(L) = B'$ 情况下的有序对适当性，$\mathscr{L}(H) \subset SL_2(\mathbb{R})$

L \ H	$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2$	S	L	M	N
$L(B', 1)$						

表10： $\mathscr{L}(L) = D$ 情况下的有序对适当性，$\mathscr{L}(H) \subset SL_2(\mathbb{R})$

L \ H	$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2$	S	L	M	N
$L(D, 1)$						⫙

表11： $\mathscr{L}(L) = Z$情形下有序对的适当性，$\mathscr{L}(H) = A(\gamma)$

L \ H	$L(A(\gamma),1)$	$L(A(1),2)$	$L(A(\gamma),3)$	$L(A(1),4)$	$L(A(\gamma),5)$
$L(Z,1)$	⫛	⫛	⫛	⫛	⫛
$L(Z,2)$	⫛	⫛			

表12： 当 $\mathscr{L}(L) = Z$，$\mathscr{L}(H) = U$ 时，有序对的适当性

L \ H	$L(U,1)$	$L(U,2)$	$L(U,3)$
$L(Z,1)$	⫛	⫛	⫛
$L(Z,2)$	⫛		

表13： $\mathscr{L}(L) = Z$情况下的有序对适当性，$\mathscr{L}(H) = B(\gamma)$

L \ H	$L(A(\gamma),1)$	$L(B(1),2)$	$L(B(-3),3)$	$L(B(\gamma),4)$	$L(B(-1),5)$	$L(B(-3),6)$	$L(B(\gamma),7)$
$L(Z,1)$	⫛	⫛	⫛	⫛	⫛	⫛	⫛
$L(Z,2)$	⫛	⫛	⫛				

表14： $\mathscr{L}(L) = A(\gamma)$ $\mathscr{L}(H) = U$情形下有序对的适当性

L \ H	$L(U,1)$	$L(U,2)$	$L(U,3)$
$L(A(\gamma),1)$	⫛	⫛	⫛
$L(A(1),2)$	⫛	⫛	⫛
$L(A(\gamma),3)$	⫛		
$L(A(1),4)$	⫛		
$L(A(\gamma),5)$	⫛		

表15： $\mathscr{L}(L) = U$情形下有序对的适当性，$\mathscr{L}(H) = B(\gamma)$

L \ H	$L(B(\gamma),1)$	$L(B(1),2)$	$L(B(-3),3)$	$L(B(\gamma),4)$	$L(B(-1),5)$	$L(B(-3),6)$	$L(B(\gamma),7)$
$L(U,1)$	$\pitchfork$	$\pitchfork$	$\pitchfork$	$\pitchfork$	$\pitchfork$	$\pitchfork$	$\pitchfork$
$L(U,2)$	$\pitchfork$	$\pitchfork$	$\pitchfork$				
$L(U,3)$	$\pitchfork$	$\pitchfork$	$\pitchfork$				

表16： $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)$ $\mathscr{L}(H) = A(\beta)$ 情形下有序对的适当性

L \ H	$L(A(\beta),1)$	$L(A(1),2)$	$L(A(\beta),3)$	$L(A(1),4)$	$L(A(\beta),5)$
$L(A(\alpha),1)$	$\lvert\alpha\rvert \neq \lvert\beta\rvert$	$\pitchfork$	$\lvert\alpha\rvert \neq \lvert\beta\rvert$	$\pitchfork$	$\lvert\alpha\rvert \neq \lvert\beta\rvert$
$L(A(1),2)$	$\pitchfork$		$\lvert\beta\rvert \neq 1$		$\lvert\beta\rvert \neq 1$
$L(A(\alpha),3)$	$\lvert\alpha\rvert \neq \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert \neq 1$			
$L(A(1),4)$	$\pitchfork$				
$L(A(\alpha),5)$	$\lvert\alpha\rvert \neq \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert \neq 1$			

表17： $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)$ $\mathscr{L}(H) = B(\beta)$情形下有序对的适当性

L \ H	$L(B(\beta),1)$	$L(B(1),2)$	$L(B(-3),3)$	$L(B(\beta),4)$	$L(B(-1),5)$	$L(B(-3),6)$	$L(B(\beta),7)$
$L(A(\alpha),1)$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert \geq 1$	$\lvert\alpha\rvert \neq 3$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\alpha \neq 0$	$\lvert\alpha\rvert \neq 3$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$
$L(A(1),2)$	$\pitchfork$		$\pitchfork$	$-1 \leq \beta < 1$		$\pitchfork$	$1 > \lvert\beta\rvert$
$L(A(\alpha),3)$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert > 1$	$\lvert\alpha\rvert \neq 3$				
$L(A(1),4)$	$\pitchfork$		$\pitchfork$				
$L(A(\alpha),5)$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert > 1$	$\lvert\alpha\rvert > 3$				

表18： $\mathscr{L}(L) = B(\alpha)$ $\mathscr{L}(H) = B(\beta)$情形下有序对的适当性

L \ H	$L(B(\beta),\ 1)$	$L(B(1),\ 2)$	$L(B(-3),\ 3)$	$L(B(\beta),\ 4)$	$L(B(-1),\ 5)$	$L(B(-3),\ 6)$	$L(B(\beta),7)$
$L(B(\alpha),1)$			$\lvert\alpha\rvert<3$			$\lvert\alpha\rvert<3$	
$L(B(1),2)$			$\pitchfork$			$\pitchfork$	
$L(B(-3),3)$	$\lvert\beta\rvert<3$	$\pitchfork$		$\lvert\beta\rvert<3$	$\pitchfork$		
$L(B(\alpha),\ 4)$			$\lvert\alpha\rvert<3$				
$L(B(-1),\ 5)$			$\pitchfork$				
$L(B(-3),\ 6)$	$\lvert\beta\rvert<3$	$\pitchfork$					
$L(B(\alpha),\ 7)$							

参考文献

[B96] Yves Benoist，约化型齐性空间上的真作用，《数学年刊》（第2辑）144（1996），第2期，315–347页。MR 1418901[BK05] Ali Baklouti 和 Fatma Khlif，真作用与某些指数可解齐性空间，《国际数学杂志》16（2005），第9期，941–955页。MR 2180060[CKZ] Yevhenii Yu. Chapovskyi、Serhii D. Koval 和 Olha Zhur，李代数的子代数：重新考察 sl(3,R) 的例子，预印本。arXiv:2403.02554v3。[HM06] Karl H. Hofmann 和 Sidney A. Morris，紧群的结构，增订版，De Gruyter 数学研究丛书，第25卷，Walter de Gruyter & Co.，柏林，2006，《学生入门读物——专家手册》。MR 2261490[Kn02] Anthony W. Knapp，《超越入门的李群》，第二版，数学进展，第140卷，Birkhäuser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，2002。MR 1920389[Kob] Toshiyuki Kobayashi，真作用与表示论，预印本。arXiv:2506.15616v2。[Kob89] , 约化型齐性空间上的真作用，《数学年刊》285（1989），第2期，249–263页。MR 1016093[Kob92] ,作用于约化型齐性空间的不连续群，《李群与李代数表示论》（富士河口湖，1990），世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇，1992，第59–75页。MR 1190750[Kob96] ,约化群齐性空间上真作用的判据，《李理论杂志》6（1996），第2期，147–163页。MR 1424629[Kob01] ,非黎曼齐性空间上的不连续群，《数学无界——2001及以后》，施普林格，柏林，2001，第723–747页。MR 1852186[Kos73] Bertram Kostant，关于凸性、Weyl 群和 Iwasawa 分解，《法国高等师范学校科学年刊》6（1973），第4期，413–455页。[L95] Ronald L. Lipsman, 真作用与紧致性条件，《李理论杂志》5（1995），第1期，25–39页。MR 1362008[N01] Salma Nasrin，二步幂零李群真作用的判据，《东京数学杂志》24（2001），第2期，535–543页。MR 1874988[PW77] J. Patera 和 P. Winternitz，实三维和四维李代数的子代数，《数学物理杂志》18（1977），第7期，1449–1455页。MR 442045

[Y05] TaroYoshino, *Lipsman*猜想的一个反例，《国际数学杂志》**16**(2005)，第5期，561–566页。MR 2141321[Y07a] ，三步幂零李群真作用的判别准则，《国际数学杂志》**18** (2007)，第7期，783–795页。MR 2337155[Y07b] ，不连续对偶定理，《国际数学杂志》**18** (2007)，第8期，887–893页。MR 2339574

Shunsuke Miyauchi东京大学数理科学研究科，日本东京都目黑区驹场3-8-1，邮编153-8914。电子邮箱：
miyashun@ms.u-tokyo.ac.jp