arXiv:2601.11994v1 [math.GR] 17 Jan 2026

SL(2, R) R^2 中某些子群的共轭极限

MANOJ CHOUDHURI 和 C. R. E. RAJA

摘要。我们研究 SL(2, R) R^2 中某些子群的共轭极限。这些子群具有一个共同特征：同一类别中的任意两个子群彼此共轭。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 4 3. 李维子群的共轭极限 6 4. 极大紧子群的共轭极限 7 5. 极大可对角化子群的共轭极限 10 6. 幺幂子群和 Borel 子群的共轭极限 12 参考文献 14

1. 引言

设 G 为一个局部紧群，Sub_G 为配备 Chabauty 拓扑的 G 的闭子群空间。Claude Chabauty 于1950年（[2]）引入了 Sub_G 上的 Chabauty 拓扑。Chabauty 引入这一拓扑的目的是将关于 $\mathbb{R}^n$ 中格的 Mahler 紧性判据推广到更广泛的局部紧群类。Sub_G 上的 Chabauty 拓扑由以下子集生成：$\{H \in \text{Sub}_G \mid H \cap K = \emptyset\}$和$\{H \in \text{Sub}_G \mid H \cap U \neq \emptyset\}$，其中 $K \subset G$是紧的， $U \subset G$ 是开集；相对于该拓扑，Sub_G 成为一个紧致可度量空间。序列$H_n \in \text{Sub}_G$ 收敛到 $H \in \text{Sub}_G$，当且仅当对于任意 $h \in H$，存在一个序列 $h_n \in H_n$ 使得 h_n 收敛到 h；并且对于任意序列$x_{k_n} \in H_{k_n}$，若 $k_{n+1} > k_n$ 且$x_{k_n} \to x$，则有 $x \in H$。

2020 数学主题分类。主要分类：22E15、54H11；次要分类：37B02。关键词和短语。连通李群、闭子群空间、Chabauty 拓扑、共轭极限。

自其引入以来，Chabauty 拓扑多年来一直受到许多数学家的关注。除了具有广泛的适用范围，例如用于研究半单李群的离散子群、双曲流形等之外，人们还投入了大量注意力来理解空间 Sub_G的结构，而目前仅有少数几个群的情形被完全了解。例如，根据 Hubbard 和 Pourezza 的工作（ [8]），$\mathrm{Sub}_{\mathbb{C}}$ 同胚于四维球面 S^4。在一项较新的工作中，Bridson、Harpe 和 Kleptsyn 研究了某些低维李群的 Sub_G 结构，并特别关注三维海森堡群，见 [1]。

为了理解 Sub_G 空间，需要了解由各种类别的闭子群及其闭包构成的若干子空间。因此，研究 Sub_G 中子群的极限至关重要。研究子群极限还有其他用途，尤其是在几何过渡的研究中，人们通过子群的共轭极限来研究一种几何到另一种几何的变形（参见 [4]）。关于 Sub_G 空间中极限的各种概念，也可参见 [4]。共轭极限的研究一直是一个活跃的研究领域，旨在理解 Sub_G 空间及其与几何的联系。例如，可参阅 Arielle Leitner 的一系列论文： [6], [7], [5]。 [6] 和 [7]，讨论了对角子群的共轭极限，而 [5] 则讨论了连通子群的共轭极限。另请参阅这些论文中引用的文献，以了解更多相关研究及其与几何的联系。

本文研究 $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 中不同类型子群的共轭极限。注意，G 既非半单群，也非可解群。我们考虑的子群类型包括李维子群、极大紧子群、极大可对角化子群、Borel 子群和幺幂子群。回顾一下，这些子群有一个特殊性质：同一类型中的任意两个子群彼此共轭。因此，研究这些子群中任意一个的共轭极限，等价于研究子群在 G 对 Sub_G 的共轭作用下的轨道闭包。我们在考察这些轨道上是否存在支撑于其上的不变随机子群时，对研究这些轨道闭包产生了兴趣（[3]）。 [3]的定理1.1表明，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$的李维子群集并非闭集，这正是我们开始研究本文所考察的这类子群的共轭极限的起点。

给定 G 的闭子群 H，我们将 H 在 Sub_G 中的共轭极限定义为序列 g_n 中的 $(g_n H g_n^{-1})$ 的极限。注意，由于 Sub_G 是紧的，$(g_n H g_n^{-1})$ 始终具有收敛子序列。

我们将 $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的子群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 记为 L。那么，L 是 G 的李维子群。下面的定理完整描述了 G 的所有李维子群构成的集合的全部极限点，我们将该集合记为 L_G。我们将 $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 中的任意元素写作 (g, v)，其中 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 且 $v \in \mathbb{R}^2$。此外，对于任意两个元素 (g, v) 和 (g', v')，群运算定义如下：

$$(g, v)(g', v') = (gg', v + g(v')).$$

我们通过映射 $g \mapsto (g, (0,0))$ 和 $v \mapsto (I, v)$，将 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{R}^2$ 分别视为 G 的闭子群，其中 I 表示 2×2 单位矩阵。对于任意 $c \in \mathbb{R}$，我们定义幺幂子群 N_c^+ 如下：

$$N_c^+ = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (cx, 0) \right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

对于 $c = 0$，我们将 N_c^+ 记作 N^+，它与 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 中的幺幂上三角矩阵群相对应（且同构）。

定理1. L_G 中的任意子群要么是 G 的李维子群，要么是 $N^+ \ltimes \mathbb{R}^2$ 的共轭子群。

设 K 是 G 的一个极大紧子群；例如，$K = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$，并设 K_G 为 G 的所有极大紧子群组成的集合，即：

$$K_G = \{gKg^{-1} \mid g \in G\}.$$

此外，考虑 G 的以下子群：

$$V_c = \{(I, (t, ct)) \mid t \in \mathbb{R}\},\ c \in \mathbb{R},\ V_\infty = \{(I, (0, t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

and

$$\tilde{N}^+ = \left\{ \left(\pm \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (0,0) \right) : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

注意，$V_c, c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的所有一维子空间构成的集合，即射影空间 $\mathcal{P}^1$。

定理 2. K_G 的闭包由子群 V_c、$c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 和 N^+ 的共轭元以及 K 的共轭元组成。

下一个结果将确定 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 中极大可对角化子群集合的极限点。令 $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^+ \right\}$ 和 D_G 为 G 中所有极大可对角化子群组成的集合，即，

$$D_G = \{gAg^{-1} \mid g \in SL(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2\}.$$

现在我们引入以下一维子群

$$V_{(a,b,c)} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & at \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \left(ct + \frac{abt^2}{2}, bt \right) \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

对于任意 a，b，$c \in \mathbb{R}$，且它们不全为零。需要注意的是，$V_{a,\ b,\ c}$ 是三维海森伯群中的单参数子群，而 $V_{(1,0,c)} = N_c^+$、$V_{(0,1,c)} = V_c$ 和 $V_{(0,1,0)} = V_\infty$。

定理 3。 D_G 的闭包由以下对象的共轭子群组成：

$$V_{(a,b,c)},\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

其中 $a = 1$ 或 $b = 1$，此外还有对角群 A 的共轭子群。

令 B 表示 SL(2，$\mathbb{R}$) 中所有上三角矩阵构成的群。则 B 是 SL(2，$\mathbb{R}$) 的 Borel 子群，而 $B \ltimes \mathbb{R}^2$ 是 G = SL(2，$\mathbb{R}$) 的 Borel 子群 $\ltimes \mathbb{R}^2$。于是，利用 SL(2，$\mathbb{R}$) 中的伊瓦萨瓦分解，很容易看出，对于 $B \ltimes \mathbb{R}^2$ 的共轭极限，我们只需考虑用 $K = SO(2, \mathbb{R})$ 中的元素进行共轭，因此 B 的共轭元构成一个闭集。因而，我们考虑 B 在 G 内的共轭极限，并确定 B 的所有可能共轭极限。

定理 4。 $\{gBg^{-1} \mid g \in SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2\}$ 的闭包由 B、$N^+ \ltimes \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ($\simeq \mathbb{R}^2$) 和 $\mathbb{R}^2$ 的共轭子群组成。

下一个结果讨论幂零子群 N^+ 的共轭极限。

定理 5。 $\{gN^+g^{-1} \mid g \in SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2\}$ 的闭包由 N^+ 和 V_0 的共轭子群组成。

2. 预备知识

本节将证明后文所需的一些技术性结果。

命题6。 设 G 是一个指数李群，且 $H_n \to H$ 属于 Sub_G。G、H_n 和 H 分别是 G、H_n 和 H 的李代数。若 H_n 均为连通的，则 H 也连通，$H_n \to H$ 属于 $Sub_{\mathfrak{g}}$，且 $\operatorname{limsup} \dim(H_n) = \dim(H)$。

注1。 需要注意的是，即使 H_n 都是连通的且维数相同，H 也不一定始终连通：例如，第4 节的最后一种情形给出了一个共轭子群序列，其极限点具有两个连通分支。

证明。 设 V 是 $\mathcal{H}_n$ 在 Sub$_{\mathcal{G}}$ 中的一个极限。取一个子序列后，不妨设 $\mathcal{H}_n \to V$ 在 Sub$_{\mathcal{G}}$ 中。于是 V 是一个向量子空间。容易看出， V 也是 $\mathcal{G}$ 的李子代数。对于 $v \in V$，存在 $v_n \in \mathcal{H}_n$ 使得 $v_n \to v$，因此对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $tv_n \to tv$。令 exp: $\mathcal{G} \to G$ 为指数映射。于是对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 exp(tv_n) $\to$ exp(tv)。由于 H_n 收敛到 H，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有 exp(tv) $\in H$。这意味着 $v \in \mathcal{H}$。因此， $V \subset \mathcal{H}$。

假设 exp: $\mathcal{G} \to G$ 是一个微分同胚，且 H_n 是连通的。那么，对于所有 n，exp: $\mathcal{H}_n \to H$ 也是一个微分同胚。由于 $H_n \to H$，对于 $h \in H$，存在 $h_n \in H_n$ 使得 $h_n \to h$。由于 G 和 H_n 是指数的，存在 $X_n \in \mathcal{H}_n$ 以及 $X \in \mathcal{G}$ 使得 exp(X_n) $= h_n$ 且 exp(X) $= h$，因此 exp(X_n) $\to$ exp(X)。由于 exp 是一个微分同胚，我们得到 $X_n \to X$。由于 $\mathcal{H}_n \to V \subset \mathcal{H}$，我们得到 $X \in \mathcal{H}$。因此，exp($\mathcal{H}$) $= H$。所以， H 是连通的。

如果 $Y \in \mathcal{H}$，那么 exp(Y) $\in H$。由于 $H_n \to H$，存在 $g_n \in H_n$ 使得 $g_n \to$ exp(Y)。由于所有 H_n 都是指数的，存在 $Y_n \in \mathcal{H}_n$使得 exp(Y_n) $= g_n$。因此，exp(Y_n) $\to$ exp(Y)。由于 exp 是一个微分同胚，我们得到 $Y_n \to Y$。由于 $\mathcal{H}_n \to V$，$\mathcal{H} \subset V$ 但$V \subset \mathcal{H}$，因此 $V = \mathcal{H}$。所以，lim sup dim(H_n) $=$ dim(H)。□

下一个引理是证明主要结果的关键。

引理 7. 设 (g_n) 和 (v_n) 分别是$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中的序列，使得

$$(I, v_n)\ (g_n, 0)\ (I, v_n)^{-1} = (g_n, v_n - g_n(v_n)) \to (g, v)$$

对某个 $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 和 $v \in \mathbb{R}^n$成立。那么，要么1 是 g 的特征值，要么$(I - g)$ 可逆，且 $v_n \to (I - g)^{-1}(v)$。特别地，若 $g \in SL(2, \mathbb{R})$，则 g 是幺幂矩阵，或 v_n 收敛。

证明。 设 (g_n) 和 (v_n) 分别是 GL($n, \mathbb{R}$) 和 $\mathbb{R}^n$ 中的序列，使得

$$(I, v_n)\ (g_n, 0)\ (I, v_n)^{-1} = (g_n, v_n - g_n(v_n)) \to (g, v)$$

对某个 $g \in$ GL($n, \mathbb{R}$) 和 $v \in \mathbb{R}^n$成立。那么 $g_n \to g$属于 $GL(n, \mathbb{R})$，且当 $n \to \infty$时，$(I - g_n)(v_n) \to v$。若 1 不是 g的特征值，则$I - g$ 可逆。由于 $g_n \to g$, $I - g_n \to I - g$。由于可逆矩阵构成开集，对所有充分大的 n， $I - g_n$ 都可逆，因此 $(I - g_n)^{-1} \to (I - g)^{-1}$。又由于 $(I - g_n)(v_n) \to v$，可得$v_n \to (I - g)^{-1}(v)$。

如果 $g \in SL(2, \mathbb{R})$ 且 v_n 不收敛，那么 1 是 g 的一个特征值。由于 $g \in SL(2, \mathbb{R})$， 1 是 g 的唯一特征值，因此 g 是一个幂零变换。

□

3. 李维子群的共轭极限

令 $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$， $L = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，并令 L_G 为 G 内所有半单Levi子群的集合。则 L_G 由 G 中元素作用于 L 所得的共轭元构成（参见 [9] 的定理3.18.3）。我们用 (g,v) 表示 G 中的元素，其中 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 且 $v \in \mathbb{R}^2$。现在，若 (G_n) 是 L_G 中的一个Levi子群序列，则每个 G_n 都是 G 中某个元素作用于 L 所得的共轭子群，即，

$$G_n = (g_n, v_n)\, L\, (g_n, v_n)^{-1},$$

其中 $(g_n, v_n)^{-1}$ 表示 G 中 (g_n, v_n) 的逆元。

若用形如 $(g, (0, 0))$ 的元素对 L 进行共轭，所得结果仍为 L。另外，注意到 $(g, v) = (I, v)\,(g, (0, 0))$，其中 I 是 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 中的单位元。因此，要确定 L_G 的所有极限点，只需考虑形如以下形式的共轭极限

$$(I, v_n)\, L\, (I, v_n)^{-1}.$$

定理1的证明。假设 $(I, v_n)\, L\, (I, v_n)^{-1}$ 收敛于 Sub_G 中的 H；现在我们来确定 H。证明分为以下几种情形。情形1。设 $v_n \to v$ 当 $n \to \infty$ 时。在这种情形下，容易看出 $(I, v_n)\, L\, (I, v_n)^{-1}$ 收敛于闭子群 $(I, v)\, L\, (I, v)^{-1}$，因此极限 H 是一个李维子群。

现在我们假设 (v_n) 是无界的。

情形 2。设 $v_n = \alpha_n\, e_1$，其中 e_1 是 x 轴上的单位向量，并且 $|\alpha_n| \to \infty$。现在，给定任意 $s \in \mathbb{R}$，如果 $g_n = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_n - s}{\alpha_n} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_n}{\alpha_n - s} \end{pmatrix}$，那么

$$(I, v_n)\, (g_n, (0, 0))\, (I, v_n)^{-1} = (g_n, v_n - g_n(v_n)) = (g_n, (s, 0)) \to (I, (s, 0))$$

由于 $n \to \infty$。再次取 $g_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s\alpha_n & 1 \end{pmatrix}$，我们看到

$$(I, v_n)\, (g_n, (0, 0))\, (I, v_n)^{-1} = (g_n, v_n - g_n(v_n)) = (g_n, (0, s)) \to (I, (0, s))$$

当 $n \to \infty$ 时。因此，$\mathbb{R}^2$ 包含于极限子群 H 中。此外，幺幂子群 N^+ 的任意元素都固定 v_n。因此，$N^+ \subset H \cap SL(2,\mathbb{R})$。由引理 7 可知，如果 $g \in SL(2,\mathbb{R}) \cap H$，那么 g 是幺幂的。因此，$SL(2,\mathbb{R}) \cap H$ 是 G 的一个子群，由幂零变换组成；而且 $SL(2,\mathbb{R}) \cap H$ 包含 N^+，后者是由幂零变换组成的极大群之一，因此 $SL(2,\mathbb{R}) \cap H = N^+$。所以，$H = N^+ \ltimes \mathbb{R}^2$。

情形 3. 设 $v_n = (a_n, b_n)$，且 $||v_n||$ 无界。设 $\alpha_n = ||v_n||$。那么存在 $A_n \in SO(2,\mathbb{R})$，使得

$$v_n = \alpha_n A_n(e_1) = A_n(\alpha_n\, e_1) = A_n(w_n)$$

其中 $w_n = \alpha_n e_1$。取一个子序列后，不妨设A_n 在 SL(2, $\mathbb{R}$) 中收敛到 A。
现在，

$$\begin{aligned}(I, v_n)L(I, -v_n) &= (A_n, (0,0))(I, w_n)(A_n^{-1}, (0,0))L(A_n, (0,0))(I, -w_n)(A_n^{-1}, (0,0)\\ &= (A_n, (0,0))\Big((I, w_n)L(I, -w_n)\Big)(A_n^{-1}, (0,0))\\ &\to AHA^{-1}\end{aligned}$$

由情形1得出。 □

4. 极大紧子群的共轭极限

现在我们确定极大紧子群集合的极限点。换言之，我们找出 K =SO(2, $\mathbb{R}$) 在 G 上对 Sub_G 的共轭作用下的轨道闭包。

定理 2 的证明。回顾一下， K 由下式给出

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ : \ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

为了找出.....的极限点

$$K_G = \{(g, v)K(g, v)^{-1} \mid g \in SL(2, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^2\},$$

只需在共轭意义下确定极限点。利用伊瓦萨瓦分解，即 $SL(2, \mathbb{R}) = N^+AK$，我们可以假设$g \in N^+A$。设 H 是 K_G的一个极限点。那么存在序列

$$\mathfrak{a}_n = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & a_n^{-1} \end{pmatrix} \in A, \ \mathfrak{s}_n = \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N^+$$

以及 $v_n = (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$，使得 $(\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n, v_n)K(\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n, v_n)^{-1} \to H$。通过取子序列，并将 $\mathfrak{a}_n$ 或 $\mathfrak{s}_n$ 替换为它们的共轭元，我们可以假设 $a_n \to \infty$ 或 $a_n = 1$，且 $s_n \to \infty$ 或 $s_n = 0$。

设 $(g, v) \in H$。那么存在

$$\Theta_n = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \in K$$

使得 $(\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n, v_n)\Theta_n(\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n, v_n)^{-1} \to (g, v)$

Now,

$$(\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n, v_n)\Theta_n(\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n, v_n)^{-1} = (T_n, (x_n, y_n)),$$

其中

$$T_n = \begin{pmatrix} \cos\theta_n - \frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n & (\frac{s_n^2}{a_n^2} + a_n^2)\sin\theta_n \\ -\sin\theta_n/a_n^2 & \cos\theta_n + \frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n \end{pmatrix}$$

and

$$x_n = \alpha_n\Big(1 - \cos\theta_n + \frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n\Big) + \beta_n\Big(\frac{s_n^2}{a_n^2} + a_n^2\Big)\sin\theta_n,$$

$$y_n = -\alpha_n \frac{\sin\theta_n}{a_n^2} + \beta_n\Big(1 - \cos\theta_n - \frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n\Big).$$

现在我们假设 $v_n \to \infty$。由于 $\big(T_n, (x_n,\ y_n)\big) \to (g,\ v)$，由引理 7 可知，$g$ 是幺幂的。

情形 1： 现在考虑 $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$ 的情形。由于 v_n 发散，$\beta_n \to \infty$。令 $x, y \in \mathbb{R}$ 满足 $v = (x,\ y)$。于是

$$x_n = \alpha_n\Big(1 - \cos\theta_n + \frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n\Big) + \beta_n\Big(\frac{s_n^2}{a_n^2} + a_n^2\Big)\sin\theta_n \to x.$$

由于 $T_n \to g$，$\cos\theta_n - \frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n$ 收敛。因此，

$$x_n = \beta_n\left[\frac{\alpha_n}{\beta_n}\Big(1 - \cos\theta_n + \frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n\Big) + \Big(\frac{s_n^2}{a_n^2} + a_n^2\Big)\sin\theta_n\right]$$

收敛意味着 $\Big(\frac{s_n^2}{a_n^2} + a_n^2\Big)\sin\theta_n \to 0$。由于 g 是幺幂的，因此可得 $g = I$。

此外，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，我们可以选取 $\zeta_n \to 0$，使得 $\beta_n(\frac{s_n^2}{a_n^2} + a_n^2)\sin\zeta_n \to t$。于是 $\beta_n \frac{s_n}{a_n^2}\sin\zeta_n \to 0$，且 $\beta_n \sin\zeta_n$ 收敛（收敛到 0 或 t，取决于 $s_n^2 + a_n^2 \to \infty$ 是否成立）。由于 $\beta_n \to \infty$，我们还得到 $(\frac{s_n^2}{a_n^2} + a_n^2)\sin\zeta_n \to 0$。由于 $\zeta_n \to 0$ 且 $\beta_n \to \infty$，可得 $\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n Z_n \mathfrak{a}_n^{-1}\mathfrak{s}_n^{-1} \to I$，其中 $Z_n = \begin{pmatrix} \cos\zeta_n & \sin\zeta_n \\ -\sin\zeta_n & \cos\zeta_n \end{pmatrix} \in K$。由于 $\zeta_n \to 0$，$(1 - \cos\zeta_n)/\sin\zeta_n \to 0$。因此

$$\alpha_n(1 - \cos\zeta_n) = (\beta_n \sin\zeta_n)(\frac{\alpha_n}{\beta_n})(\frac{1 - \cos\zeta_n}{\sin\zeta_n}) \to 0$$

and

$$\begin{aligned} &-\alpha_n \frac{\sin\zeta_n}{a_n^2} + \beta_n\Big(1 - \cos\zeta_n - \frac{s_n}{a_n^2}\sin\zeta_n\Big) \\ &= \frac{-\alpha_n}{\beta_n}\frac{\beta_n \sin\zeta_n}{a_n^2} + \beta_n \sin\zeta_n(\frac{1 - \cos\zeta_n}{\sin\zeta_n}) - \beta_n \frac{s_n}{a_n^2}\sin\zeta_n \\ &\to 0. \end{aligned}$$

因此，

$$(\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n, v_n)\ Z_n\ (\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n, v_n)^{-1} \to (I, (t, 0)).$$

现在，用 $\Theta_n Z_n^{-1}$ 替换 Θ_n，我们可以假设 $x_n \to 0$。由于 $(\frac{s_n^2}{a_n^2} + a_n^2)\sin\theta_n \to 0$ 且 $\frac{s_n^2}{a_n^2} + a_n^2 \not\to 0$，可得 $\sin\theta_n \to 0$。用 $2k\pi$ 的一个平移替换 θ_n 后，我们可以假设 $\theta_n \to 0$。这意味着 $\frac{1 - \text{余弦}\,\theta_n}{\text{正弦}\,\theta_n} \to 0$。由于 $x_n \to 0$，可得 $\beta_n(\frac{s_n^2}{a_n^2} + a_n^2)\sin\theta_n \to 0$，

因此 $\alpha_n(1-\text{余弦}\,\theta_n+\frac{s_n}{a_n^2}\text{正弦}\,\theta_n)\to 0$。因此,

$$|\alpha_n\frac{-\sin\theta_n}{a_n^2}|\le|\frac{\alpha_n}{\beta_n}||\beta_n(\frac{s_n^2}{a_n^2}+a_n^2)\sin\theta_n|\to 0$$

and

$$\begin{aligned}&|\beta_n(1-\cos\theta_n-\tfrac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n)|\\ =\ &|\tfrac{1-\cos\theta_n}{\sin\theta_n}\tfrac{a_n^2}{s_n^2+a_n^4}-\tfrac{s_n}{s_n^2+a_n^4}||\beta_n(\tfrac{s_n^2}{a_n^2}+a_n^2)\sin\theta_n|\to 0.\end{aligned}$$

这意味着 $H=V_0=\{(I,\ (x,\ 0))\mid x\in\mathbb{R}\}$。

情形 2: 假设 $\frac{\alpha_n}{\beta_n}\to 0$。令 $F=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$。由于 $(g_n,\ v_n)K(g_n,\ v_n)^{-1}\to H$,

用 F 共轭可得 $(Fg_n,\ Fv_n)K(Fg_n,\ Fv_n)^{-1}\to FHF^{-1}$。由于 Fv 满足情形 (i),我们得到 $FHF^{-1}=V_0$。因此, $H=V_\infty=\{(I,\ (0,\ y))\mid y\in\mathbb{R}\}$。

情形 3: 假设 $c\neq 0$ 是 $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ 的一个极限点。取一个子序列后,我们可以假设 $\frac{\alpha_n}{\beta_n}\to c$。这里有两种情形:如果 a_n 或 s_n 中有一个趋于 ∞,那么如情形 (i) 中那样,我们可以证明$H=V_0$。现在假设 $a_n=1$ 且 $s_n=0$。然后,选取 $\zeta_n\to 0$,使得对于任意预先给定的实数 t,都有 $\beta_n\sin\zeta_n\to t$,容易看出

$$g_nZ_ng_n^{-1}\to\big(I,\ (t,-ct)\big).$$

对于适当的 $Z_n\in K$。因此,按照情形 (i) 中的类似论证,我们可以证明在此情形下 $H=V_c=\{(I,\ (t,\ ct))\mid t\in\mathbb{R}\}$。

现在考虑 (v_n) 具有收敛子序列的情形。在此情形下,通过取子序列并用 $(I,\ -v_n)$ 进行共轭,不妨设 $(\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n,\ 0)K(\mathfrak{s}_n\mathfrak{a}_n,\ 0)^{-1}\to H$。由于 $\mathfrak{s}_n,\ \mathfrak{a}_n\in SL(2,\ \mathbb{R})$ 以及 $K\subset SL(2,\ \mathbb{R})$,故 $H\subset SL(2,\ \mathbb{R})$。回顾一下,我们还具有 $s_n\to\infty$或 $s_n=0$ 以及 $a_n\to\infty$ 或 $a_n=1$。如果 $s_n=0$ 且 $a_n=1$,则结论成立。因此,不妨设 $s_n\to\infty$ 或 $a_n\to\infty$。我们考虑 $s_n\to\infty$ 的情形,另一种 $a_n\to\infty$ 的情形类似。我们有

$$T_n=\begin{pmatrix}\cos\theta_n-\frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n & (\frac{s_n^2}{a_n^2}+a_n^2)\sin\theta_n\\ -\sin\theta_n/a_n^2 & \cos\theta_n+\frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n\end{pmatrix}\to g=\begin{pmatrix}g_{1,1}&g_{1,2}\\g_{2,1}&g_{2,2}\end{pmatrix},\ \text{say.}$$

这尤其意味着 $(\frac{s_n^2}{a_n^2}+a_n^2)\sin\theta_n$ 收敛。由于 $\frac{s_n}{a_n^2}+a_n^2\to\infty$,$\sin\theta_n\to 0$,且 $\frac{\sin\theta_n}{a_n^2}\to g_{2,1}$,我们得到 $g_{2,1}=0$。此外,对于 $t\in\mathbb{R}$,我们选择 $\zeta_n\to 0$ 使得 $(\frac{s_n^2}{a_n^2}+a_n^2)\sin\zeta_n\to t$。于是 $\cos\zeta_n\to 1$ 以及 $\frac{s_n}{a_n^2}\sin\zeta_n\to 0$,因此对于适当的 $Z_n\in K$ 有 $g_nZ_ng_n^{-1}\to\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$。

如果另外还有 $g_{1,2}=0$,那么 $(\frac{s_n^2}{a_n^2}+a_n^2)\sin\theta_n\to 0$,从而

— $\frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n \to 0$。因此，$\cos\theta_n$ 收敛到 $g_{1,1}$，同时也收敛到 $g_{2,2}$。但是，$g_{1,1}g_{2,2}=1$，所以，$g_{1,1}=\pm 1=g_{2,2}$。事实上，取 $\theta_n=\pi$，我们得到

$$g_n\Theta_n g_n^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta_n-\frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n & (\frac{s_n^2}{a_n^2}+a_n^2)\sin\theta_n\\ -\sin\theta_n/a_n^2 & \cos\theta_n+\frac{s_n}{a_n^2}\sin\theta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

因此，我们有 $H=\tilde{N^+}$，也就是说 $g_nKg_n^{-1}\to\tilde{N^+}$。

□

5. 极大可对角化子群的共轭极限

现在我们研究 $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2$ 的极大可对角化子群集合的极限点。回顾一下，$A=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1/a\end{pmatrix}\mid a\in\mathbb{R}^+\right\}$。对于不同类型的 g_n 和 v_n，我们考虑 A 的共轭极限 $(g_n,v_n)A(g_n,v_n)^{-1}$。

定理 3 的证明。设 H 是 $\{(g,v)A(g,v)^{-1}\mid g\in SL(2,\mathbb{R})\ \ v\in\mathbb{R}^2\}$ 的一个极限点。因此，存在 $g_n\in SL(2,\mathbb{R})$ 和 $v_n\in\mathbb{R}^2$，使得 $(g_n,v_n)A(g_n,v_n)^{-1}\to H$。利用伊瓦萨瓦分解，我们可以假设 $g_n\in N^+$。设 $g_n=\begin{pmatrix}1 & s_n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，且 $v_n=(\alpha_n,\beta_n)$。假设 $(g,v)\in H$。那么，存在 $a_n\in\mathbb{R}^+$，使得 $(g_n,v_n)\mathfrak{a}_n(g_n,v_n)^{-1}\to(g,v)$，其中 $\mathfrak{a}_n=\begin{pmatrix}a_n & 0\\ 0 & 1/a_n\end{pmatrix}$。这意味着

$$\begin{pmatrix}a_n & (\frac{1}{a_n}-a_n)s_n\\ 0 & \frac{1}{a_n}\end{pmatrix}\to g,\ \text{and}$$

$$((1-a_n)\alpha_n+(a_n-\frac{1}{a_n})s_n\beta_n,(1-\frac{1}{a_n})\beta_n)\to v.$$

通过取子序列并取共轭元，我们不妨设$s_n=0$ 或 $s_n\to\infty$, $\alpha_n=0$ 或 $\alpha_n\to\infty$ 以及 $\beta_n=0$ 或 $\beta_n\to\infty$。

我们首先考虑 $s_n\to\infty$ 的情形。若 $\alpha_n=0$ 和 $\beta_n=0$均成立，则容易看出 $H=N^+=\left\{\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}$。因此，不妨设 $\alpha_n\to\infty$ 或 $\beta_n\to\infty$ 成立。于是 $v_n\to\infty$。由引理 7 可知 g 是幺幂的。因此，$a_n\to 1$。

由于 $g_n\in N^+$，且 $B=AN^+$，因此 $(g_n,\ v_n)A(g_n,\ v_n)^{-1}$是 $B\ltimes\mathbb{R}^2$ 的闭子群。由于 $B\ltimes\mathbb{R}^2$ 同构于一个对角线元素为正的上三角矩阵群，$B\ltimes\mathbb{R}^2$ 是一个

指数李群。因此，根据命题6， H 是 $N^+ \ltimes \mathbb{R}^2$ 的一个连通一维子群，而该群是三维海森堡群。因此，

$$H = V_{(a,b,c)} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & at \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \left(ct + \frac{abt^2}{2}, bt \right) \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

对于某个 a， b， $c \in \mathbb{R}$。那么对于每个 $t \in \mathbb{R}$，都存在 b_n（取决于t），使得

$$b_n \to 1,\ (\frac{1}{b_n} - b_n)s_n \to at \text{ and } (1 - \frac{1}{b_n})\beta_n \to bt.$$

情形 1： 假设 $\frac{s_n}{\beta_n} \to r \in \mathbb{R}$。那么 $a = -2br$，因此

$$(1 - b_n)\alpha_n - \frac{(1 + b_n)}{b_n}(1 - b_n)s_n\beta_n \to ct - rb^2t^2.$$

如果 $b = 0$，那么 $H = V_0$。因此，我们可以假设 $b \neq 0$。此外

$$2(1 - b_n)s_n\beta_n - \frac{(1 + b_n)}{b_n}(1 - b_n)s_n\beta_n \to -rb^2t^2.$$

因此，

$$(1 - b_n)\alpha_n - 2(1 - b_n)s_n\beta_n \to ct.$$

这意味着 $2s_n - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \to \frac{c}{b}$。令 $d = \lim 2s_n - \frac{\alpha_n}{\beta_n}$。那么 $c = db$。因此，$H = V_{(r_1b,b,r_2b)}$ 对于某个 r_1， $r_2 \in \mathbb{R}$。注意，如果 $b \neq 0$，则 $V_{(r_1b,b,r_2b)} = V_{(a,1,c)}$ 对于某个 a， $c \in \mathbb{R}$。

情形 2： 假设 $\frac{\beta_n}{s_n} \to p \in \mathbb{R}$，则 $b = -\frac{pa}{2}$，因此

$$(1 - b_n)\alpha_n - \frac{(1 + b_n)}{b_n}(1 - b_n)s_n\beta_n \to ct - \frac{pa^2t^2}{4}.$$

若 $a = 0$，则 $H = V_0$。因此，我们可以假设 $a \neq 0$。于是，

$$(1 - b_n)\alpha_n - 2(1 - b_n)s_n\beta_n \to ct.$$

这意味着 $\frac{\alpha_n}{s_n} - 2\beta_n \to \frac{c}{a}$，因此 $c = \frac{da}{2}$，其中 $d = \lim \frac{\alpha_n}{s_n} - 2\beta_n$。于是，对于某个 r_1， $r_2 \in \mathbb{R}$，有 $H = V_{(a,r_1a,r_2a)}$。注意，若 $a \neq 0$，则对于某个 b， $c \in \mathbb{R}$，有 $V_{(a,r_1a,r_2a)} = V_{(1,b,c)}$。

现在考虑情形 $s_n = 0$。则 $g = I$，并且

$$((1 - a_n)\alpha_n, (1 - \frac{1}{a_n})\beta_n) \to v$$

对于某个 $a_n \to 1$。

情形 3： 设 $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to 0$。由于 $v_n = (\alpha_n, \beta_n) \to \infty$， $\alpha_n \to \infty$且 $(1 - \frac{1}{a_n})\beta_n = \frac{-1}{a_n}(1 - a_n)\alpha_n\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to 0$。因此 $H \subset V_0$。对于任意$t \in \mathbb{R}$，取 $b_n = 1 - \frac{t}{\alpha_n}$，可得 $b_n \to 1$， $(1 - b_n)\alpha_n = t$。因此，$((1 - b_n)\alpha_n, (1 - \frac{1}{b_n})\beta_n) \to (t, 0)$。于是，$H = V_0 = V_{(0,1,1)}$。

情形 4： 设 $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$。则 $(1-a_n)\alpha_n = -a_n(1-\frac{1}{a_n})\beta_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$。因此，$H \subset V_\infty = \{(0,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$。对于任意 $t \in \mathbb{R}$，取 $b_n = \frac{\beta_n}{\beta_n - t}$。则 $b_n \to 1$ 且 $((1-b_n)\alpha_n,\ (1-\frac{1}{b_n})\beta_n) \to (0,\ t)$。所以，$H = V_\infty = V_{(0,1,0)}$。

情形 5： 设 $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to c \neq 0$。令 $x,\ y \in \mathbb{R}$ 使得 $v = (x,\ y)$。则 $(1-a_n)\alpha_n \to x$ 且 $(1-\frac{1}{a_n})\beta_n \to y$。由于 $(1-\frac{1}{a_n})\beta_n = \frac{-1}{a_n}(1-a_n)\alpha_n \frac{\beta_n}{\alpha_n}$，我们得到 $\overline{y} = -cx$。因此，对于 $r = -c$，有 $H \subset V_r = \{(t,\ rt) \mid t \in \mathbb{R}\}$。

对于 $t \in \mathbb{R}$，令 $b_n = 1 - \frac{t}{\alpha_n}$。则 $b_n \to 1$ 且 $(1-b_n)\alpha_n = t$。此外，$(1-\frac{1}{b_n})\beta_n = \frac{-t}{\alpha_n - t}\beta_n \to -tc$。因此 $V_r \subset H$。所以，$H = V_r = V_{(0,1,r)}$。
□

6. 幺幂子群与 Borel 子群的共轭极限

现在我们求出 Borel 子群

$$B := \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & s \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} :\ a, s \in \mathbb{R} \right) \right\}$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 在 $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 内的共轭极限。

定理 4 的证明。显然，共轭极限 B经由形如 $(g, 0)$ 的元素 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 共轭后，等于 B 其本身或由 B 中的元素共轭得到的 K 共轭子群。对于由更一般类型的元素进行的共轭，只需考虑由形如 (I, v) 且满足 $v \in \mathbb{R}^2$的元素进行的共轭。因此，设 $\mathfrak{g}_n = (I, v_n)$ 和 $\mathfrak{b}_n = \begin{pmatrix} a_n & s_n \\ 0 & 1/a_n \end{pmatrix}$。

简单计算可得

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_n \mathfrak{b}_n \mathfrak{g}_n^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} a_n & s_n \\ 0 & 1/a_n \end{pmatrix}, \left((1-a_n)\alpha_n - s_n\beta_n,\ (1-1/a_n)\beta_n \right) \right) \\ &= \left(\mathfrak{b}_n, (x_n, y_n) \right),\ (\text{say}) \end{aligned}$$

其中 $v_n = (\alpha_n, \beta_n)$。设 $v_n \to \infty$ 且 $\mathfrak{g}_n \mathfrak{b}_n \mathfrak{g}_n^{-1} \to (g, v)$。由引理7，$g$ 是幺幂的，因此 $a_n \to 1$ 必然成立。我们将讨论以下几种情况。

情形 1： 假设 $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$。那么 $\beta_n \to \infty$。如果 $s_n \to s$ 对于某个非零的s成立，那么很容易看出 x_n 不可能收敛。因此，$s_n \to 0$。给定$x,\ y \in \mathbb{R}$，选择 $s_n \to 0$ 和 $a_n \to 1$，使得 $-\beta_n s_n \to x$且 $(1-1/a_n)\beta_n \to y$。那么 $(1-a_n)\alpha_n = -a_n(1-\frac{1}{a_n})\beta_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$，因此，对于适当的 $\mathfrak{b}'_n \in B$，$\mathfrak{g}_n \mathfrak{b}'_n \mathfrak{g}_n^{-1} \to \left(I, (x,\ y)\right)$。这表明，在这种情况下，极限子群为 $\mathbb{R}^2$。

情形 2： 假设 $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to 0$。那么 $\alpha_n \to \infty$。令 $x \in \mathbb{R}$。那么对于 $\tilde{\mathfrak{b}}_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{\alpha_n} & \frac{0}{\alpha_n} \\ 0 & \frac{\alpha_n - x}{\alpha_n} \end{pmatrix}$，我们得到 $\mathfrak{g}_n \tilde{\mathfrak{b}}_n \mathfrak{g}_n^{-1} \to (I, (t, 0))$。因此，$\{(I, (t, 0)) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset H$。

如果 β_n 收敛，那么 $y_n = (1 - \frac{1}{a_n})\beta_n \to 0$，并且可以证明$H = N^+ \ltimes \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$。因此，我们可以假设 $\beta_n \to \infty$。由于$\mathfrak{b}_n$ 收敛， s_n 收敛，设其收敛到 s。由于 $\beta_n \to \infty$ 且 x_n 收敛，我们得到 $(1 - a_n)\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to s$。

如果 $\frac{\beta_n^2}{\alpha_n} \to c \in \mathbb{R}$，那么$y_n = \frac{-1}{a_n}(1 - a_n)\frac{\alpha_n}{\beta_n}\frac{\beta_n^2}{\alpha_n} \to -sc$。因此，根据命题 6，我们得到 $H = \{(\mathfrak{s}, (t, -cs) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$，其中 $\mathfrak{s} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

如果 $\frac{\beta_n^2}{\alpha_n} \to \infty$，那么 $(1 - a_n)\frac{\alpha_n}{\beta_n} = (1 - \frac{1}{a_n})\beta_n(-a_n)\frac{\alpha_n}{\beta_n^2} \to 0$。因此，根据命题 6，我们得到 $H = \mathbb{R}^2 = \{(I, (t, r) \mid t, r \in \mathbb{R}\}$。

情形 3： 假设 $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to c$ 对某个非零实数 c成立。注意，我们必然假设 $|\alpha_n|$和 $|\beta_n|$都无界。否则，极限子群将是 B的一个共轭子群。现在，假设$x_n \to x$。那么 $\frac{x_n}{\beta_n} \to 0$。但是，

$$\frac{x_n}{\beta_n} = \frac{(1 - a_n)\alpha_n}{\beta_n} - s_n$$

这意味着 $s_n \to 0$ 在这种情形下也成立。因此 $H \subset \mathbb{R}^2$。由命题 6， H 的维数为 2，因此 $H = \mathbb{R}^2$。□

接下来，我们确定幺幂子群N^+的共轭极限。

证明。定理 5 的证明：由于 N^+ 是 B 的正规子群，利用 $SL(2, \mathbb{R})$ 中的伊瓦萨瓦分解可知，只要 $g_n \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$， $g_n N^+ g_n^{-1}$ 的极限要么是 N^+，要么是其在 K 中元素作用下的共轭元。对于由 G 中其他元素进行的共轭，不失一般性，我们可以考虑由形如 $\mathfrak{g}_n = (k_n, v_n)$ 且满足 $k_n \in K$ 和 $v_n = (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ 的元素进行的共轭。此外，容易看出，如果 L 是 G 的闭子群，且 $g_n L g_n^{-1} \to H$ 和 $k_n \to k$，那么 $k_n g_n L g_n^{-1} k_n^{-1} \to kHk^{-1}$。鉴于此，只需考虑由形如 $\mathfrak{g}_n = (I, v_n)$ 的元素对 N^+ 进行共轭。

现在，设 $\mathfrak{g}_n = \left(I, v_n\right)$ 满足 $v_n = (\alpha_n,\ \beta_n)$。那么对于任意 $\mathfrak{s}_n = \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$$\mathfrak{g}_n\mathfrak{s}_n\mathfrak{g}_n^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \big(-s_n\beta_n, 0\big)\right).$$

如果 $|\beta_n| \to \infty$，那么适当选择 $s_n \to 0$ suitably $\left(I,(t,\ 0)\right)$，可将其实现为任意实数 t 的 $\mathfrak{g}_n\mathfrak{s}_n\mathfrak{g}_n^{-1}$ 的极限。此外，如果 $\mathfrak{g}_n\mathfrak{s}_n\mathfrak{g}_n^{-1}$ 收敛，那么 s_n 以及 $s_n\beta_n$ 也收敛。但是，由于 $|\beta_n| \to \infty$，我们有 $s_n \to 0$。这表明，在这种情况下， $\mathfrak{g}_n N^+ \mathfrak{g}_n^{-1}$ 的极限是 V_0。□

致谢 8。两位作者感谢国际理论科学中心（班加罗尔）在他们于5*th December*至16*th December*2022期间举办的“遍历理论与动力系统”项目中给予的热情接待，本研究即是在此期间启动的。第一作者感谢印度统计研究所班加罗尔中心在本研究进行期间多次接待他。第二作者感谢 *SERB* 通过 *MATRICS* 项目资助（*MTR/2022/000429*）提供的支持。

参考文献

[1] Martin R. Bridson、Pierre de la Harpe 和 Victor Kleptsyn。三维 Heisenberg 群的闭子群的 Chabauty 空间。《太平洋数学杂志》，240(1)：1–48，2009 年。[2]Claude Chabauty。集合的极限与数的几何。《法国数学学会通报》，78：143–151，1950年。[3] Manoj Choudhuri 和 C. R. E. RAJA。某些轨道上的不变随机子群。预印本。[4] Daryl Cooper、Jeffrey Danciger 和 Anna Wienhard。几何的极限。《美国数学学会汇刊》，370(9)：6585–6627，2018 年。[5]Nir Lazarovich 和 Arielle Leitner。$SL_3(\mathbb{R})$ 的连通子群的局部极限。《巴黎科学院数学报告》，359：363–376，2021 年。[6] Arielle Leitner。 $SL_3(\mathbb{R})$ 中对角 Cartan 子群的共轭极限。《几何学专论》，180：135–149，2016 年。[7] Arielle Leitner。 $SL_n(\mathbb{R})$ 中对角子群在共轭下的极限。《美国数学学会会刊》，144(8)：3243–3254，2016 年。[8] Ibrahim Pourezza 和 John Hubbard。**实数集**^{2}的闭子群空间。《拓扑学》，18(2)：143–146，1979 年。[9]V. S. Varadarajan。李群、李代数及其表示，数学研究生教材第 102 卷。Springer-Verlag，纽约，1984 年。1974 年版本的重印本。

基础设施、技术、研究与管理学院，*Khokhara Circle* 附近，*Maninagar*（东），艾哈迈达巴德 *380026*，古吉拉特邦，印度。

电子邮箱地址： *manojchoudhuri@iitram.ac.in*

印度统计研究所理论统计与数学部，迈索尔路 *8* 英里处，*R. V. College Post*，班加罗尔 *560059*，卡纳塔克邦，印度。

电子邮箱地址： *creraja@isibang.ac.in*