arXiv:2601.12021v1 [math.RT] 17 Jan 2026

关于 MOD p 表示的多重线性形式$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

YIKUN FAN

摘要。受 Prasad 对复表示三线性型的研究启发 [Pra90], , 我们研究 G-不变线性形式空间，这些形式定义在 $\mathbb{F}_p$ 上、由 G =$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的不可约容许表示张量积构成。我们的主要结果是一个完整的消失定理：对于任意 $n \geq 1$ 和 n 个 $\pi_1, \ldots,$ π_n 的无限维不可约容许表示，

$\mathrm{Hom}_G(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n, \mathbb{1}) = 0$

当至少有一个 π_i 是超奇异表示时，关于 $B^+ := \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ -不变形式的精细版本也成立。证明通过详细分析某些子群，将问题从 G 化归到 B^+，最终归结为 $\mathbb{Z}_p$ 的表示论。我们还推导出该结果对有限扩张 $F/\mathbb{Q}_p$ 上的 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的部分推广。

1. 引言

设 p 为素数， F 为 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张， $G := \mathrm{GL}_2(F)$。 [Pra90 的定理 1.1、定理 1.2] 证明了

命题 1.1. 设 π_1、 π_2、 π_3 是 $\mathbb{C}$ 上 G 的三个可容许不可约表示，则

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3, \mathbb{1}) \leq 1$$

受这一结果启发，本文的主要目的是研究 $mod\ p$ 情形下类似问题的一个推广版本。由于 G 的 $mod\ p$ 表示论与复表示论之间存在显著差异，答案和证明都与 [Pra90] 完全不同。

从现在起，除非另有说明，所有表示均取值于代数闭域 $k := \mathbb{F}_p$。我们首先回顾， [BL94]证明了 G 的不可约可容许 $mod\ p$ 表示可分类如下：

(1) 主系列 $\mathrm{Ind}_B^G(\theta_1 \otimes \theta_2)$，带有 $\theta_1 \neq \theta_2$(2) 一维表示 $\theta \circ$行列式 (3) 特殊系列 Sp $\otimes(\theta \circ$ 行列式) (4) 超奇异表示

其中 Sp 由正合列定义

$$0 \to \mathbb{1} \to \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{1} \to \mathrm{Sp} \to 0$$

以及 $\theta, \theta_1, \theta_2$ 表示光滑特征 $F^* \to k^*$。不同类型的表示之间不存在非平凡的同构。

有了这一分类，我们现在可以陈述主要结果。通过确立一种普遍消失现象，这些结果展示了它与复数情形之间的根本差异。

定理 1.2. 设 $F = \mathbb{Q}_p$，且令 π_1 为一个超奇异表示，π_2 为一个 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 上的光滑表示，定义

$$B^+ := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in p^{\mathbb{Z}}, \ y \in \mathbb{Q}_p \right\}.$$

Then

$$\mathrm{Hom}_{B^+}(\pi_1 \otimes \pi_2, \mathbb{1}) = 0$$

定理 1.3. 设 F为 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张， $n \in \mathbb{N}_{>0}$和 $\pi_1, \cdots \pi_n$为 n $G = GL_2(F)$ 上的不可约容许表示，且每个表示都是主系列或特殊系列。则

$$\mathrm{Hom}_G(\bigotimes_{i=1}^{n} \pi_i, \mathbb{1}) = 0$$

作为前述定理和不可约容许表示分类的直接推论，我们得到:

推论 1.4. 设 $F = \mathbb{Q}_p$、 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 π_1、π_2、π_3、$\cdots$ π_n 是 n无限维容许不可约表示，定义在 $\mathbb{F}_p$ 上，属于 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 。那么

$$\mathrm{Hom}_G(\bigotimes_{i=1}^{n} \pi_i, \mathbb{1}) = 0$$

这里概述各节的内容。在第 2 节中，我们固定本文所用的记号和一些预备知识。

在第 3 节中，我们通过纯粹的线性代数讨论，证明关于 $\mathbb{Z}_p$ 的 $mod\ p$表示论的若干关键引理，并给出 B^+的消失表示 的明确刻画（定理 3.4）。通过约化到 $\mathbb{Z}_p$ 表示论，我们建立

引理 1.5 (消失引理**).** 设 π_1 是 B^+ 的消失表示， π_2 是 B^+ 的光滑表示，且 $\chi : T \to \mathbb{F}_p^*$ 是一个特征，则

$$\mathrm{Hom}_{B^+}(\pi_1 \otimes \pi_2, \chi) = 0$$

这有助于我们将定理 1.2 的证明归结为证明 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的超奇异表示是作为 B^+-表示的消失表示。

在第 4 节中，我们分别在超奇异表示、主系列以及特殊系列的提升中找到了一个显式的消失 B^+-子表示。

对于 π 主系列或特殊系列， π 是 $\mathrm{Ind}_B^G(\theta_1 \otimes \theta_2)$ 的一个商，其中 θ_1， θ_2 是某些特征：$F^* \to k^*$，我们证明 Ind B^+-子表示

$$\left\{ f \in \mathrm{Ind}_B^G(\theta_1 \otimes \theta_2) \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \right\}$$

$\mathrm{Ind}_B^G(\theta_1 \otimes \theta_2)$ 的子表示是消失的。

对于超奇异表示 π，我们找到了 π 的一个子空间 M_π，使得在假设 $F = \mathbb{Q}_p$ 下，(π, M_π) 是一个消失对。这是基于 [Bre03] 和[Paˇs10] 中的结果。这一构造结合定理 1.5，直接推出定理 1.2。

在第 5 节中，我们通过消失引理以及第 4 节中消失对的构造，完成定理 1.3 的证明。

致谢

本文是我在杜伊斯堡-埃森大学攻读 ALGANT 硕士学位期间撰写的硕士论文，导师为 Vytautas Paˇsk¯unas 教授。在整个项目过程中，他给予了我悉心指导，我对此深表感激。我也非常感谢 Jan Kohlhaase 教授提出的宝贵建议，尤其感谢他帮助完善定理 3.1 及其证明的最终形式。

2. 记号

设 F 是 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张。用 $\mathcal{O}$ 表示 F的整数环，令 ϖ 为 $\mathcal{O}$的一个固定一致化元，并令 $\mathfrak{m}$ 为 $\mathcal{O}$的极大理想。

定义以下矩阵：

$$s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t := \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们引入 G 中的以下子群：$= \mathrm{GL}_2(F)$：

- 该**中心**：

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x \in F^* \right\}.$$

- 对角环面：

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in F^* \right\}.$$

- **Borel子群**（上三角矩阵）：

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in F^*,\ z \in F \right\}.$$

- 幂零根 B的：

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, z \in F \right\}.$$

- 一个子群 $B^+ \subset B$：

$$B^+ := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \varpi^{\mathbb{Z}},\ y \in F \right\}.$$

- Iwahori子群的**幂零部分**：

$$U_0 := \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \cap U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathcal{O} \right\}.$$

- The $\mathbb{Z}_p$**-部分** U_0：

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

对于每个整数 $n \geq 1$，层级为 n 的**主合同子群** 是：

$$K_n := \{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \,|\, g \equiv I_2 \pmod{\varpi^n} \},$$

其中 I_2 是 2×2 单位矩阵。

我们回顾以下基本分解：

命题2.1. *[BH06, (5.2) Bruhat分解]:* $G = BsB \coprod B = BsU \coprod B$

设 Γ 是一个局部拟有限群，其有一个闭子群 H， M 是 Γ 中的一个双-H-不变开子集（即 $HMH = M$），且 (π, V) 是 H 的一个光滑表示。我们定义

$$\mathrm{Ind}_H^\Gamma \pi := \left\{ f : \Gamma \to V \;\middle|\; \begin{array}{l} f(hg) = \pi(h) f(g) \quad \text{for all } h \in H,\ g \in \Gamma, \\ \text{there exists an open subgroup } U_f \subseteq \Gamma \text{ such that} \\ f(gu) = f(g) \text{ for all } g \in \Gamma,\ u \in U_f \end{array} \right\},$$

赋予其 Γ-作用

$$(g \cdot f)(g') := f(g'g), \quad \text{for all } g, g' \in \Gamma.$$

并定义

$$\mathrm{Ind}_H^M \pi := \{ f \in \mathrm{Ind}_H^\Gamma \pi \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq M \},$$

在受限的 H 作用下，它自然是 $\mathrm{Ind}_H^\Gamma \pi$ 的一个光滑 H 子表示

$$(h \cdot f)(g) := f(gh), \quad \text{for all } h \in H, g \in \Gamma.$$

最后，给定 $\mathbb{Z}_p$ 的一个光滑表示 (π, V)，我们将 $a \in \mathbb{Z}_p$ 在 V 上的作用记为 $\pi(a)$。在不致混淆时，我们在记号中省略 π，并将此作用简单记为

$$[a] : V \to V, \qquad v \mapsto \pi(a)v,$$

其在 V 上的作用。特别地，我们定义差分算子

$$\Delta : V \to V, \qquad v \mapsto [1]v - [0]v.$$

3. 消失对、消失表示与消失引理

本节的主要目标是给出一个消失引理（定理 1.5），它将不存在 B^+-不变多重线性形式这一问题归结为在每个表示中构造某些子空间。其证明建立在对光滑 $\mathbb{Z}_p$-表示的研究之上（定理 3.1、定理 3.2、定理 3.3）；该研究确立了条件 $\Delta V = V$ 是 $\mathbb{Z}_p$-不变形式消失的充分判据，并给出了验证该条件的技术性判据。

这一原理被抽象为消失对 的概念（定理 3.4），从而为其应用于 B^+的表示提供了框架。

引理 3.1. 设 V_1 和 V_2 是 $\mathbb{Z}_p$ 的两个光滑表示，且 $\Delta V_1 = V_1$，则 $\Delta(V_1 \otimes V_2) = (V_1 \otimes V_2)$。特别地，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1 \otimes V_2, \mathbb{1}) = 0$$

证明。 我们证明第一个断言，第二个断言可由此立即推出。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，记

$$\ker(\Delta^n) := \{v \in V_2 \mid \Delta^n v = 0\}.$$

由于 V_2 是光滑的，我们有如下滤过

$$V_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(\Delta^n).$$

因此，只需证明对每个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，

$$\Delta(V_1 \otimes \ker(\Delta^n)) = V_1 \otimes \ker(\Delta^n).$$

我们对 n进行归纳法。

基例（$n = 1$）**：** 设 $v \in V_1$，且 $u \in \ker(\Delta)$。根据假设，存在$v' \in V_1$ 使得 $\Delta v' = v$。于是

$$\begin{aligned}\Delta(v' \otimes u) &= [1]v' \otimes [1]u - [0]v' \otimes [0]u \\ &= [1]v' \otimes u - v' \otimes u \\ &= (\Delta v') \otimes u = v \otimes u.\end{aligned}$$

因此，$v \otimes u \in \Delta(V_1 \otimes \ker(\Delta))$，且基例成立。

归纳步骤： 假设该陈述对某个 $n \geq 1$ 成立。考虑以下 $\mathbb{Z}_p$-表示的正合列:

$$0 \to \ker(\Delta^n) \to \ker(\Delta^{n+1}) \to Q \to 0,$$

其中 $Q := \ker(\Delta^{n+1})/\ker(\Delta^n)$。与 V_1 张量化得到正合列:

$$V_1 \otimes \ker(\Delta^n) \to V_1 \otimes \ker(\Delta^{n+1}) \to V_1 \otimes Q \to 0.$$

注意，根据构造，$\Delta Q = 0$。按照与基例相同的论证，我们有

$$\Delta(V_1 \otimes Q) = V_1 \otimes Q.$$

现在，给定任意元素 $x \in V_1 \otimes \ker(\Delta^{n+1})$，其像 $\bar{x}$ 在 $V_1 \otimes Q$ 中满足 $\bar{x} = \Delta y$，其中某个 $y \in V_1 \otimes Q$。令 $y' \in V_1 \otimes \ker(\Delta^{n+1})$ 为 y 的一个提升。则 $x - \Delta y'$ 属于 $V_1 \otimes \ker(\Delta^n)$。根据归纳假设,

$$x - \Delta y' = \Delta z \quad \text{for some } z \in V_1 \otimes \ker(\Delta^n).$$

因此，$x = \Delta(y' + z) \in \Delta(V_1 \otimes \ker(\Delta^{n+1}))$，归纳法完成。 □

命题 3.2. 设 $V_1, \ldots, V_n$ 是$\mathbb{Z}_p$的光滑无限维表示。若对所有 $1 \leq i \leq n$，均有维数$_k$ $(V_i^{\mathbb{Z}_p}) = 1$，则

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V_i \subseteq \Delta\left(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i\right).$$

证明。只需证明对每个 $1 \leq i \leq n$，$\Delta V_i = V_i$ 成立。我们固定一个指标 i 并证明这一等式。

对每个 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$，Δ 都限制为 $V_i^{p^j\mathbb{Z}_p}$ 的一个自同态，并满足

$$(\Delta|_{V_i^{p^j\mathbb{Z}_p}})^{p^j} = ([p^j] - [0])|_{V_i^{p^j\mathbb{Z}_p}} = 0$$

and

$$\dim_k(\ker(\Delta|_{V_i^{p^j\mathbb{Z}_p}})) = \dim_k(V_i^{\mathbb{Z}_p}) = 1$$

而 $V_i^{p^{j-1}\mathbb{Z}_p} \subseteq V_i^{p^j\mathbb{Z}_p}$ 等于该子空间

$$\ker([p^{j-1}] - [0]) = \ker((\Delta|_{V_i^{p^j\mathbb{Z}_p}})^{p^{j-1}})$$

根据标准线性代数（考虑若尔当标准形），维数 $d_j := \dim_k(V_i^{p^j\mathbb{Z}_p})$ 满足 $d_j \le p^j$，且存在 $V_i^{p^j\mathbb{Z}_p}$ 的一组基 $\{v_1, \dots, v_{d_j}\}$，使得：

- $V_i^{p^{j-1}\mathbb{Z}_p} = \text{张成}\langle v_1, \dots, v_{d_{j-1}}\rangle$,
- $\Delta|_{V_i^{p^j\mathbb{Z}_p}}$ 由一个幂零若尔当块矩阵表示，即具有如下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特别地，对于 $1 \le l < d_j$，我们有 $v_l = \Delta v_{l+1}$。若 $d_{j-1} < d_j$，则：

$$\Delta V_i^{p^j\mathbb{Z}_p} = \operatorname{span}\langle v_1, \dots, v_{d_j-1}\rangle \supseteq \operatorname{span}\langle v_1, \dots, v_{d_{j-1}}\rangle = V_i^{p^{j-1}\mathbb{Z}_p}. \tag{1}$$

由 V_i 的光滑性、条件 $\dim_k(V_i) = \infty$ 以及对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都成立的界$d_j \le p^j$，可得

$$V_i = \bigcup_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ V_i^{p^{j-1}\mathbb{Z}_p} \subsetneq V_i^{p^j\mathbb{Z}_p}}} V_i^{p^{j-1}\mathbb{Z}_p}.$$

结合 (1)，可得

$$V_i \subseteq \Delta V_i.$$

这就完成了对每个 i 的证明，命题得证。

□

引理 3.3. 设 V 是 $\mathbb{Z}_p$ 的一个光滑表示。假设对每个 $v \in V^{\mathbb{Z}_p}$，都存在一个向量序列 $\{v_n \in V \mid n \in \mathbb{N}\}$，使得

$$v_0 = 0, \quad v_1 = v, \quad \textit{and} \quad \Delta v_{n+1} = v_n \quad \textit{for all } n \in \mathbb{N}.$$

那么 $\Delta V = V$。

证明。由于 V 是光滑的，我们有 $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\Delta^i)$。因此，只需证明

$$\ker\left(\Delta^i\right) \subseteq \Delta V$$

对每个 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 均成立。我们将对 i 使用归纳法来证明这一点。

基例（$i = 1$）：设 $u \in \ker\Delta$。根据假设，存在一个序列 $\{v_n\}$，满足 $v_1 = u$，且对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $\Delta v_{n+1} = v_n$。特别地，$\Delta v_2 = v_1 = u$。因此，$u \in \Delta V$。

归纳步骤：假设对于某个 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\ker\left(\Delta^k\right) \subseteq \Delta V$。设 $u \in \ker\left(\Delta^{k+1}\right)$。如果 $u \in \ker\left(\Delta^k\right)$，那么根据归纳假设，$u \in \Delta V$。

现在，假设 $u \notin \ker\left(\Delta^k\right)$。那么 $w := \Delta^k u$ 是 $\ker \Delta$中的一个非零向量。根据关于 V的假设，存在一个序列$\{v_n \in V \mid n \in \mathbb{N}\}$ 使得

$$v_0 = 0, \quad v_1 = w, \quad \text{and} \quad \Delta v_{n+1} = v_n \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

现在计算可得，向量 $u - v_{k+1}$ 满足

$$\Delta^k(u - v_{k+1}) = \Delta^k u - \Delta^k v_{k+1} = w - v_1 = w - w = 0.$$

因此，$u - v_{k+1} \in \ker\left(\Delta^k\right)$。根据归纳假设，

$$u - v_{k+1} \in \Delta V.$$

此外，由序列性质可知，$v_{k+1} = \Delta v_{k+2} \in \Delta V$。因此，我们得出

$$u = (u - v_{k+1}) + v_{k+1} \in \Delta V.$$

至此完成归纳步骤，从而证明得证。 □

定义 3.4. 设 π 是 B^+ 在k上的无限维光滑表示，若存在 π 的一个 U_1-子表示 W，使得

(1) $\pi = \sum_{n\in\mathbb{N}} t^n W$；**(2)** $\Delta W = W$ 作

为 $\mathbb{Z}_p \cong U_1$-表示。

Then 我们称这对 (π, W) 为消失对，并称 π 为消失表示 n.

引理 3.5 (消失引理). 设 π_1 是 B^+的一个消失表示，π_2 是 B^+ 的一个光滑表示，且 $\chi : T \to k^*$ 是一个特征，则

$$\mathrm{Hom}_{B^+}(\pi_1 \otimes \pi_2, \chi) = 0$$

Proof. 设 W_1 是 π_1 的一个线性子空间，使得(π_1, W_1)是一个消失对 .

由定理 3.1 可知

$$\mathrm{Hom}_{U_1}(W_1 \otimes \pi_2, \mathbb{1}) = 0. \tag{2}$$

断言：限制映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{B^+}(\pi_1 \otimes \pi_2, \chi) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{U_1}(W_1 \otimes \pi_2, \mathbb{1}) \\ \phi &\longmapsto \phi|_{W_1 \otimes \pi_2} \end{aligned}$$

是单射。

该结论可由断言和式（2）直接推出。

命题证明：由于 $\pi_1 = \sum_{j\in\mathbb{N}} t^j W_1$，我们得到

$$\pi_1 \otimes \pi_2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} t^j (W_1 \otimes \pi_2)$$

设 $v \in \pi_1 \otimes \pi_2$ 和 $\phi \in \mathrm{Hom}_{B^+}(\pi_1 \otimes \pi_2, \chi)$。则 $v = \sum_{i=1}^{m} t^{n_i} w_i$，其中某个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $n_i \in \mathbb{N}$，$w_i \in W_1 \otimes \pi_2$ 对每个 $1 \le i \le m$ 都成立，并且

$$\phi(v) = \phi(\sum_{i=1}^{m} t^{n_i} w_i) = \sum_{i=1}^{m} \chi(t^{n_i}) \phi(w_i)$$

因此，ϕ 由其在 $W_1 \otimes \pi_2$ 上的限制决定。 □

4. 消失对的构造

结合上一节的讨论，特别是消失引理，我们将定理 1.2、定理 1.3 和定理 1.4 的证明归结为在 G 的每个无穷维容许不可约表示中构造一个消失对。本节中，我们分别在主系列、特殊系列和超奇异表示中构造消失对。

4.1. 主系列与特殊系列情形。由于主系列和特殊系列都是对某个特征 $\chi : T \to k^*$ 的 $\mathrm{Ind}_B^G \chi$ 的商表示，因此只需对任意 $\mathrm{Ind}_B^G \chi$ 进行构造。

命题 4.1。设 χ 是 T 的任意特征，则

$$(\mathrm{Ind}_B^{BsB} \chi, W_\chi := \mathrm{Ind}_B^{BsU_0} \chi)$$

是一个消失对，并且 $\mathrm{Ind}_B^{BsB} \chi$ 是消失的。

证明。 (1) 注意到

$$s \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\varpi} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varpi} \end{pmatrix} s \begin{pmatrix} 1 & \varpi x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in BsU_0,$$

对任意 $x \in \mathcal{O}$，因此

$$BsU_0 t^{-1} \subseteq BsU_0. \tag{3}$$

设 $f \in \mathrm{Ind}_B^{BsB} \chi$。由于 f 是局部常值的，模 B 紧支撑，且在 G 的某个紧开子群 K_n 下右不变，因此其支撑包含在有限个双陪集 $Bg_iK_n \subseteq BsB$ 中。于是存在一个 $l \ge 1$，使得 $\cup_{i=1}^{l} Bg_iK_n \supseteq \mathrm{supp}(f)$。

由于 $\cup_{i=1}^{l} Bg_iK_n$ 在 $B\backslash G$ 中的像是紧的，并且

$$\{BsU_0 t^k \mid k \ge 0\}$$

构成 BsB 的开覆盖，

$$\mathrm{supp}(f) \subseteq \cup_{i=1}^{l} Bg_iK_n \subseteq \bigcup_{i=0}^{m} BsU_0 t^i$$

对于某个 $m \ge 0$。

此外，由式（3）可知

$$\bigcup_{i=0}^{m} BsU_0t^i = BsU_0t^m$$

因此，$\mathrm{supp}(f) \subseteq BsU_0t^m$ and $\mathrm{supp}(t^m f) = \mathrm{supp}(f)t^{-m}$包含于 BsU_0。由此可得 $f \in t^{-m}W_\chi$，从而完成了 (1) 的证明。

(2) 显然，W_χ 是无限维的，且在$U_1 \cong \mathbb{Z}_p$ 的作用下保持不变。现在我们证明 $\Delta W_\chi = W_\chi$。

通过自然同一 $B\backslash G \cong \mathbb{P}^1$，我们可以将 $W_\chi = \mathrm{Ind}_B^{BsU_0}\chi$视为 $\mathcal{O}$ 上的局部常值函数空间。

由初等代数可知，存在一个函数序列 $\{\phi_n(t) : \mathcal{O}/\mathfrak{m} \to \mathbb{F}_p | n \in \mathbb{N}\}$，使得 $\phi_0(x) = 1$ and $\phi_{n+1}(x+1) - \phi_{n+1}(x) = \phi_n(x)$ 对任意 $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{F}_p$ 均成立。

对于任意 $f \in W_\chi^{U_1}$，定义

$$\begin{aligned} f_n : \mathcal{O} &\to \overline{\mathbb{F}}_p \\ x &\mapsto \phi_n(\overline{x})f(x) \end{aligned}$$

其中 $\bar{x}$ 表示 x在自然商下的像

$$\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathfrak{m}$$

由 f的 $\mathbb{Z}_p$-不变性，序列 $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ 满足

$$\begin{aligned} (\Delta f_{n+1})(x) = f_{n+1}(x+1) - f_{n+1}(x) &= \phi_{n+1}(\overline{x+1})f(x+1) - \phi_{n+1}(\overline{x})f(x) \\ &= (\phi_{n+1}(\overline{x+1}) - \phi_{n+1}(\overline{x}))f(x) = \phi_n(\overline{x})f(x) = f_n(x) \end{aligned}$$

这与定理 3.3 一起完成了 (2) 的证明。 □

4.2. 关于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的超奇异情形。在本小节中，我们固定 $F = \mathbb{Q}_p$，并完成在 $F = \mathbb{Q}_p$ 情形下超奇异表示的消失对的构造。由于缺乏超奇异表示的分类，这一构造无法直接推广到一般情形。特别是，定理 4.4 仅针对 $F = \mathbb{Q}_p$ 情形建立。

Let

$$I_1 := \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{m} & \mathbb{Z}_p \\ \mathfrak{m} & 1+\mathfrak{m} \end{pmatrix}$$

且 (π, V) 是 G的一个超奇异表示。我们引用关于该超奇异表示的两个结果

命题 4.2 ([Bre03, 定理 3.2.4, 推论 4.1.4]). π^{I_1} 中的 I_1-不变向量空间在 k上是2维的。

定理 4.3 ([Paˇs07, 定理 1.1]). $\pi|_B$ 的限制是 B的一个不可约表示。

记

$$M_\pi := \langle \begin{pmatrix} p^{\mathbb{N}} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pi^{I_1} \rangle$$

命题 4.4 ([Paˇs10，引理 4.6，命题 4.7，引理 4.8，引理 4.10])。存在一组基 v_σ，$v_{\tilde{\sigma}}$ 属于 π^{I_1}，使得

$$M_\sigma := \left\langle \begin{pmatrix} p^{2\mathbb{N}} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\sigma \right\rangle, M_{\tilde{\sigma}} := \left\langle \begin{pmatrix} p^{2\mathbb{N}} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_{\tilde{\sigma}} \right\rangle$$

满足棋牌游戏官网

(1) M、M_σ、$M_{\tilde{\sigma}}$ 在 U_0下均稳定。*(2)* $M_\sigma^{U_0}$和 $M_{\tilde{\sigma}}^{U_0}$在 k上的维数均为1。*(3)* $tM_\sigma \subseteq M_{\tilde{\sigma}}$、$tM_{\tilde{\sigma}} \subseteq M_\sigma$*(4)* $M_\pi = M_\sigma \oplus M_{\tilde{\sigma}}$

命题 4.5。 G 的每个超奇异表示都是 B^+的消失表示。

证明。 令 π 为 G的任意超奇异表示，只需证明(π, M_π)是一个消失对。(2)直接由定理 4.4和定理 3.2推出，因此这里只需证明(1)。

由定理 4.3可知 $\pi = \langle BM_\pi \rangle$。由于 $B = \{t^n | n \in \mathbb{N}\} Z \begin{pmatrix} p^{\mathbb{N}} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,$M_\pi$ 按定义在 $\begin{pmatrix} p^{\mathbb{N}} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的作用下保持稳定，且 Z 中的所有元素在 π上均作为数量乘法标量作用，我们得出

$$\pi = \langle \{t^n | n \in \mathbb{N}\} M_\pi \rangle = \langle t^n M_\pi | n \in \mathbb{N} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n M_\pi.$$

□

定理 1.2立即由定理 4.5和消失引理推出。

5. 定理 1.3 的证明

由于主系列和特殊系列都是某个特征 χ 的 $\mathrm{Ind}_B^G \chi$ 的商表示 $T \to k^*$，定理 1.3 直接由以下命题得出。

命题 5.1。设 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$、$\chi_i : T \to k^*$ 是一个特征，且对每个 $1 \le i \le n$，有 $\pi_i := \mathrm{Ind}_B^G \chi_i$。则

$$\mathrm{Hom}_G\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \pi_i, \chi\right) = 0$$

对任意特征 $\chi : T \to k^*$均成立。

证明。我们对 n 使用归纳法。

基例（$n = 1$）：若 π_1 不可约，则断言 $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \chi) = 0$ 显然成立。

若 π_1 可约，根据假设以及 G 的不可约容许表示的分类，当且仅当 $\pi_1 = \mathrm{Ind}_B^G \chi_1$，其中存在一个特征$\chi_1 : T \to k^*$ 可经由行列式映射分解，即对于某个特征 $\theta : F^* \to k^*$，有 $\chi_1 = \theta \circ \det$。

此时，$\mathrm{Ind}_B^G \chi_1$ 存在一个非分裂短正合列：

$$0 \to \chi_1 \to \mathrm{Ind}_B^G \chi_1 \to \mathrm{Sp} \otimes \chi_1 \to 0,$$

由于 $\mathrm{Sp} \otimes \chi_1$ 是无限维且不可约的，并且该正合列不分裂，因此断言 $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \chi) = \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_B^G \chi_1, \chi) = 0$ 随即成立。

归纳步骤：假设命题对某个 $m \ge 1$成立。令 $\pi_1, \dots, \pi_{m+1}$为满足该假设的 $m+1$ 表示。

令 χ 为 T的任意特征。由定理 4.1 和定理 1.2 可得

$$\mathrm{Hom}_{B^+}\left(\mathrm{Ind}_B^{BsB} \chi_{m+1} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{m} \pi_i), \chi\right) = 0. \tag{4}$$

此外，作为一个 B^+-表示，有如下同构：

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{m+1} \pi_i\right) \Big/ \left(\mathrm{Ind}_B^{BsB} \chi_{m+1} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{m} \pi_i)\right) \cong \chi_{m+1} \otimes \left(\bigotimes_{1 \le i \le m} \pi_i\right). \tag{5}$$

由归纳假设，

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_G\left(\left(\chi_{m+1} \otimes \left(\bigotimes_{1 \le i \le m} \pi_i\right)\right), \chi\right) \\ &= \mathrm{Hom}_G\left(\left(\bigotimes_{1 \le i \le m} \pi_i\right), \chi_{m+1}^{-1}\chi\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

因此，该断言可直接由商等式 (5)，以及等式 (4) 和 (6) 中的消失结果推出。□

参考文献

[BH06] Colin J. Bushnell 和 Guy Henniart。*GL(2)* 的局部朗兰兹猜想。第 335 卷。数学科学基础丛书。柏林：Springer，2006。isbn：3-540-31486-5。[BL94] L. Barthel 和 R. Livn´e。“局部域上 GL_2 的不可约模表示”。载于：《杜克数学杂志》75.2 (1994)。doi：10.1215/s0012-7094-94-07508-x。[Bre03] Christophe Breuil。“关于 $GL_2(Q_p)$ 的若干模表示和 p-进表示：I”。载于：《数学汇刊》138.2 (2003)，第 165–188 页。doi：10.1023/A:1026191928449。[Paˇs07] Vytautas Paˇsk¯unas。“$GL_2(F)$ 表示在 Borel子群上的限制”。载于：《数学汇刊》143.6 (2007)，第 1533–1544 页。doi：10.1112/S0010437X07002862。[Paˇs10] Vytautas Paˇsk¯unas。“$GL_2(Q_p)$ 超奇异表示的扩张”

英文。载于：表示´-*adic* 群 p-*adic* 群 p-*adic III*：全局´方法与几何´几何´的。Ast´erisque331.Soci´et´emath´ematiquedeFrance,2010，第317–353页。网址：https://www.numdam.org/item/AST_2010__331__317_0/.[Pra90] Dipendra Prasad。《GL(2) 表示的三线性型与局部ϵ-因子》。英文。载于：《数学汇刊》75.1（1990），第1–46页。网址：https://eudml.org/doc/90027。