arXiv:2601.12026v1 [astro-ph.EP] 17 Jan 2026

修正椭圆限制性三体问题中不同摄动源下的平衡点稳定性

MuhammadBayu Saputra[1,2], Handhika Satrio Ramadhan[1*†], Ibnu Nurul Huda[3], [2†], Leonardus Brahmantyo Putra[4†]1*物理系，FMIPA，印度尼西亚大学，德波，16424，印度尼西亚。[2]计算研究中心，国家研究与创新署，万隆，40135，印度尼西亚。[3]天文学与空间科学学院，现代天文学与天体物理学重点实验室（教育部），南京大学，南京，210023，中华人民共和国。[4]数学研究所，牛津大学，牛津，OX2 6GG，英国。

*通讯作者。电子邮箱：hramad@sci.ui.ac.id；
†这些作者对本研究作出了同等贡献。

摘要

本研究在椭圆型限制性三体问题（椭圆限制性三体问题）的框架下，考察第三体的动力学，并考虑主天体的辐射压、扁率和伸长，以及盘状结构所引起的摄动。研究目标是确定平衡点的位置与稳定性，评估这些平衡点在摄动影响下如何移动，并分析其稳定性对轨道偏心率和摄动参数的依赖关系。我们对椭圆限制性三体问题模型进行修正，纳入一个具有辐射压的扁形主星，以及一个建模为有限直线段的伸长次级天体，同时考虑周围盘状结构引起的摄动。我们采用受摄动情形和经典情形的参数，对系统的运动方程进行数值求解。在一系列偏心率和摄动参数取值下计算平衡位置，并利用线性化方程和特征值方法分析稳定性。在所有情形中，我们都发现了三个共线平衡点（L_1、 L_2、 L_3）和两个非共线平衡点（L_4、 L_5）。

加入辐射、扁率、以有限直线段表示的伸长以及盘状扰动后，各平衡点都会系统性地偏离其经典位置，偏移的大小和方向则随扰动参数而变化。稳定性分析证实，在所有测试条件下，共线点始终呈线性不稳定。与此同时，非共线点在特定条件下稳定。我们考察了这些点的稳定性边界随轨道偏心率的变化，并发现存在一个临界偏心率范围，在该范围内稳定性得以保持。

关键词： 天体力学 – 方法：解析 – 方法：数值 – 太阳：一般 – 小行星、小行星：一般

1 引言

三体问题是天体力学的基本研究课题之一，探讨受引力定律（或一般中心力定律）支配的三个相互作用天体的动力学行为。迄今为止，这一问题尚无通解，尽管人们已找到许多特解（具有各种对称性或限制条件）。Poincar´e 证明，一般而言，三体系统的行为是不可预测的 [1]。研究最广泛的特殊情形之一是限制性三体问题（RTBP）：两个主天体绕共同质心运行，同时对第三个无限小天体施加引力。在经典表述中，主星通常被建模为点质量或完美球体，且只考虑它们之间的引力相互作用 [2]。在这一特定情形下，Euler 得出了三个天体共线排列时的解，而等边三角形解则由 Lagrange 发现 [3–5]。

如果主星沿圆形轨道运动，则该系统称为圆型限制性三体问题（CRTBP）；如果主星沿椭圆轨迹运动，则称为椭圆型限制性三体问题（ERTBP）。经典的 CRTBP 和 ERTBP 均产生五个不同的平衡点，称为 Lagrange 点。其中三个点（L_1、L_2 和 L_3）共线，并且对于任意质量参数和偏心率都具有内在不稳定性。其余两个点 L_4 和 L_5 构成等边三角形的顶点，并在 $0 < \mu < \mu_c$ 条件下保持稳定，其中 μ 为质量比，μ_c 为临界质量参数 [3]。

经典限制性三体问题（RTBP）随着时间推移不断得到修正，以纳入纯引力之外的其他力，从而增强其物理真实性。其中一种修正是将辐射压作为光致引力效应纳入模型。这种力源于恒星等发光天体对周围物体施加的辐射压。因此，尽管光引力的大小相对较小，在建立天体力学中更为全面的数学模型时，也不能忽略光引力。Radzievskii [6] 最先对此进行了研究，随后Chernikov [7]进一步拓展了相关研究。已有多项研究将光引力效应作为

限制性三体问题框架中的附加摄动力 [例如，参见 8–13]。近期，Lhotka和Celletti [14] 以及Idrisi和Ullah [15]分别考察了庞加莱–罗伯逊阻力和反照率作为光引力作用时，对椭圆限制性三体问题框架中平衡点稳定性的影响。

在限制性三体问题的经典情形中，天体通常被假设为完美球体。然而，许多天文物体用扁椭球体来表示更为准确。例如，地球、木星和土星，以及太阳等恒星，都存在一定程度的非球形偏差，从而引入显著的引力摄动。Sharma 和 Subba Rao [16, 17] 以及 Bhatnagar 和 Chawla [18]率先尝试对扁形主星对限制性三体问题动力学的影响进行建模。迄今为止，已有大量研究将扁率效应作为作用于限制性三体问题的摄动力纳入考量 [例如，参见 19–24]。

除了考虑主星的扁率和辐射外，先前的研究还建立了数学模型，用以评估环绕三体系统的盘状结构的影响 [例如，参见 25–28]。Chakraborty 等人将此类盘状结构的影响纳入椭圆限制性三体问题模型 [29], ，其中主星被视为点质量。Mia 等人 [30] 分析了盘状结构、扁率和辐射压对椭圆限制性三体问题的影响。

与此同时，我们的太阳系中存在各种各样的天体，包括彗星、小行星，甚至矮行星等具有细长形状的天体。以往研究曾提出将此类天体建模为有限直线段[例如参见 31–33]。多位作者已将这一有限直线段模型应用于限制性三体问题的研究中 [例如参见 34–36]。

此前，Nurul Huda 等人 [28] 通过纳入多种扰动源，即辐射压、主天体的非球形形状、盘状结构的影响以及有限直线段，分析了经典限制性三体问题中平衡点的稳定性。在此基础上，我们将该研究拓展至椭圆限制性三体问题框架。我们的目标是确定共线平衡点和非共线平衡点，并考察无穷小天体运动的稳定性。随后，将研究结果应用于受扰系统，并与经典情形进行比较。

本文分为以下几个部分。第2节介绍我们的模型。第3节给出平衡点的位置。第4节描述系统的稳定性。第5节给出结论。

2 系统的表述

本文分析一个系统，其中无穷小质量在质量为 m_1 的较大主天体和质量为 m_2的较小主天体作用下运动。这两个主星沿椭圆轨道绕其质心相互运行。系统的质量参数记为 $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$，其中 $m_2 = \mu$ 和$m_1 = 1 - \mu$。系统示意图见图1。

我们将较大主天体视为扁球体和辐射源。扁率参数表示为 $A = (AE^2 - AP^2)/5R^2$ 其中 AE 和

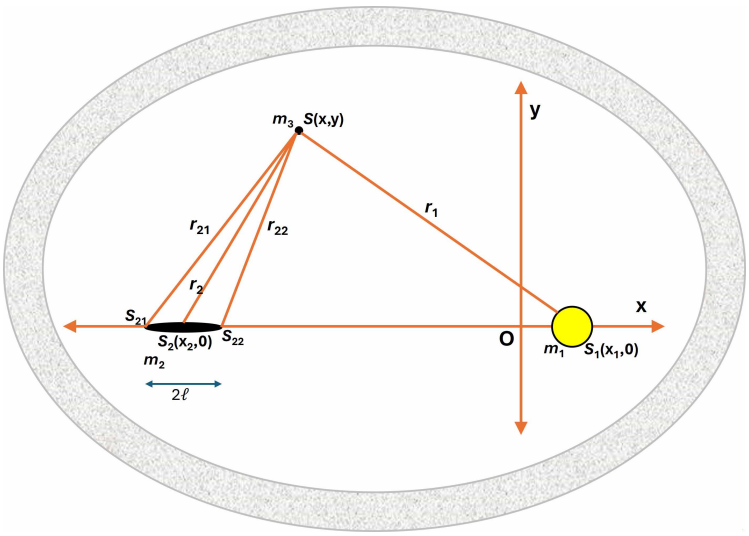

图1 本文所采用的椭圆限制性三体问题系统示意图。

AP 分别为主天体的赤道半径和极半径，并且R 是主星之间的距离 [37, 38]。辐射压力（F_p）的方向与引力（F_g）相反，并且随距离的变化遵循相同规律。因此，较大主天体的总力为 $F_g - F_p = F_g$（$1 -$ （F_p/F_g）） $= qF_g$ [7, 38, 39] 其中 q 是光引力效应参数，且 $0 < 1 - q \ll 1$。

将较小主天体视为细长体，并采用长度为 2ℓ 的有限直线段方法进行近似。根据 Riaguas 等人 [31]和 Mahato 等人 [27]，该模型的势为

$$V_f = -\frac{m_2}{2\ell} \log \left[\frac{r_{21} + r_{22} + 2\ell}{r_{21} + r_{22} - 2\ell} \right]. \tag{1}$$

除主天体上的摄动效应外，还使用 Miyamoto 和 Nagai [40] 的势函数，将围绕该系统的盘状结构的影响纳入考虑。将条件限制在 xy 平面（其中$z = 0$）内，盘状结构的势函数（V_b）形式为

$$V_b = \frac{M_b}{\sqrt{(R^2 + T^2)}}, \tag{2}$$

其中， M_b 为盘状结构的总质量， R 表示由 $R^2 = x^2 + y^2$定义的无穷小天体的径向距离，且 $T = a + b$。参数 a 和 b决定盘状结构的密度分布，其中 a 为扁平度参数，用于确定密度分布的扁平程度； b 为核心参数，用于确定密度分布 [26]中核心的大小。

在平面椭圆受限三体问题中，第三体在无量纲旋转坐标系中的运动方程如下 [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{df^2} - 2\frac{dy}{df} &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{df^2} + 2\frac{dx}{df} &= \frac{\partial W}{\partial y}, \end{aligned} \tag{3}$$

以 f（真近点角）为自变量。两个主天体均位于 x轴上，它们之间的距离归一化为 1。单位制经过归一化，使引力常数取值为 1。较大主天体、较小主天体和第三体的坐标分别为（μ，0）、（$\mu-1$，0）和（x，y）。式（3）右端表示势 W 的一阶导数，且表示所考虑的摄动源产生的合势，其中

$$W = \frac{V}{1+e\cos f} \tag{4}$$

且函数 V是以下各项势的总和：离心项、较大主天体的引力项（包括辐射压因子和扁率）、质量为 M_b的盘状贡献，以及较小主天体的有限直线段项，其中

$$V = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + \frac{1}{n^2}\left(\frac{m_1 q}{2}\left(\frac{A_1}{{r_1}^3}+\frac{2}{r_1}\right) + \frac{M_b}{\sqrt{R^2+T^2}} + \frac{m_2}{2\ell}\log\left(\frac{r_{21}+r_{22}+2\ell}{r_{21}+r_{22}-2\ell}\right)\right). \tag{5}$$

为分析系统的长期行为，我们采用 Grebenikov [41]所述的平均法，以消除对真近点角f的显式依赖。平均势记为 $\langle W\rangle$，通过对势W 在真近点角的一个完整周期（$f\in[0,2\pi]$）内积分得到：

$$\langle W\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W\,df = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{V}{1+e\cos f}\,df. \tag{6}$$

由于函数 V（式 5）仅取决于脉动坐标（x,y），而不显式依赖于 f，因此在积分过程中可将其视为常数。剩余的积分是一个标准的定积分，形式为

$$\int_0^{2\pi}\frac{df}{1+e\cos f} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \text{for } |e|<1. \tag{7}$$

将此结果代回平均势的表达式，得到

$$\langle W\rangle = \frac{V}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}\right) = \frac{V}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{8}$$

因此，方程（4）变为

$$W = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{n^2}\left(\frac{m_1 q}{2}\left(\frac{A_1}{{r_1}^3}+\frac{2}{r_1}\right)\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{M_b}{\sqrt{R^2+T^2}}+\frac{m_2}{2\ell}\log\left(\frac{r_{21}+r_{22}+2\ell}{r_{21}+r_{22}-2\ell}\right)\right)\right]. \tag{9}$$

第三体与较大主天体之间的距离为 $r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2+y^2}$，第三体与较小主天体两端之间的距离分别为 $r_{21} = \sqrt{(x-\mu+1-\ell)^2+y^2}$ 和 $r_{22} = \sqrt{(x-\mu+1+\ell)^2+y^2}$。

2.1 平均运动

平均运动 n 表示主星绕其共同质心旋转时的角速度。在限制性三体问题中，平均运动的推导基于平均距离变量。平均距离的概念在椭圆限制性三体问题中起着基础作用，因为它直接影响两个主星的平均运动。平均距离的定义并非总是显而易见，不同的平均方法可能会产生不同的解释。

Stein [42] 讨论了定义平均距离的几种方法，包括相对于真近点角、时间和弧长进行平均。相对于角度f（真近点角）求得的平均距离$a\sqrt{1-e^2}$（等于半短轴 b）。Abd El-Salam [23], Radwan 等人 [43],和 Saputra 等人[44]曾采用这种平均方法。相对于公转周期 t 求得的平均距离为 a（$1+e^2/2$），其值大于 a。相对于轨道弧长求得的平均距离恰好等于 a。若干研究采用了这种方法来计算平均运动 [，例如参见45–49]。在这些研究中，纳入各模型中特定的摄动（如辐射、扁率或三轴性）后，研究者在椭圆限制性三体问题的旋转—脉动形式下，对主星的二体运动进行平均，从而确定平均运动。尽管这些研究的物理假设各不相同，但它们遵循相同的基本方法：将平均运动定义为与修正后的引力势以及主星的平均运动在动力学上相一致。Umar and Abubakar Hussain [50]等人的研究表明，这种平均方法与采用偏近点角的方法所得结果相同。在这些方法中，弧长平均法与开普勒最初的定义一致，即将半长轴视为轨道的平均距离。尽管存在这些差异，仍以半长轴作为平均距离是最一致的做法，可为分析椭圆限制性三体问题中的平均运动和轨道稳定性提供可靠框架。

在本研究中，我们采用基于弧长定义的平均距离（等于半长轴 a）推导出的平均运动表达式。系统的平均运动根据 Sharma 等人 [51]关于扁率的公式，以及 Mahato 等人 [27], 、Aishetu 等人 [52] 关于有限直线段和盘状结构效应的公式确定。按照 Sharma 等人 [51], 建立的框架，通过解析积分推导扁率对应的平均运动

较大主天体的扁率（A）对平近点角、近拱点幅角和升交点赤经产生的长期摄动效应。通过解析积分对这些效应在完整的一个轨道运行周期内取平均，以定义平均运动。这确保了模型符合有界椭圆轨道的轨道运动规律。将这一方法扩展到纳入来自有限直线段（长度为 ℓ）和盘状结构（质量为 M_b、核心半径为 r_c、扁平度与核心参数为 T）的额外引力摄动后，我们得到了完整的平均运动表达式。利用这些文献中概述的方法，将各项摄动的单独贡献相加，以保持动力学模型的一致性，推导出 n^2 的表达式如下。离心力与引力的平衡要求 [3, 15, 23, 25, 28]

$$\begin{aligned} m_1 d_1 n^2 &= \frac{G m_1 m_2}{d^2 - l^2}\left(1 + \frac{3A}{a^2\left(1-e^2\right)^2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)\right) + \frac{G M_b m_1 r_c}{\left(r_c^2+T^2\right)^{3/2}}, \\ m_2 d_2 n^2 &= \frac{G m_1 m_2}{d^2 - l^2}\left(1 + \frac{3A}{a^2\left(1-e^2\right)^2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)\right) + \frac{G M_b m_2 r_c}{\left(r_c^2+T^2\right)^{3/2}}, \end{aligned} \tag{10}$$

其中， d_1 和 d_2 分别表示主星到质心的距离。为求得系统的平均运动，我们将式（10）中的第一个方程除以 m_1 ，第二个方程除以 m_2。将所得两个表达式相加，并利用关系式 $d = d_1 + d_2$，得到

$$n^2 d = \frac{G(m_1+m_2)}{d^2-\ell^2}\left(1 + \frac{3A}{a^2\left(1-e^2\right)^2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)\right) + \frac{2 G M_b r_c}{\left({r_c}^2+T^2\right)^{3/2}}, \tag{11}$$

其中， d 主星的平均距离等于半长轴 a ，并将其归一化为 1（$d = 1$）。令 $G = 1$，总质量 $m_1 + m_2 = 1$，并将摄动参数视为小量（$\ell \ll 1$ 和 $A \ll 1$），则式（$1/\left(1-\ell^2\right)$）中的因子可利用二项式级数展开为 $1 + \ell^2 + \mathcal{O}$（ℓ^4）。在推导过程中，我们保留长度参数ℓ^2的二阶项以及扁率A的一阶项，同时忽略 $\mathcal{O}$（ℓ^4）等高阶项以及混合项 $A\ell^2$。这种近似与本文后续采用的数值相一致。因此，平均运动 n 的表达式为

$$n^2 = 1 + \ell^2 + \frac{3A}{\left(1-e^2\right)^2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right) + \frac{2 M_b r_c}{\left({r_c}^2+T^2\right)^{3/2}}, \tag{12}$$

其中， ${r_c}^2 = 1-\mu+\mu^2$ 表示与盘状结构相关的径向距离，如 Singh 和 Taura [53] 所述。

2.2 势的近似

本研究建立的模型适用于小行星或矮行星等绕恒星运行的系统，其中主天体与次天体之间的质量比极小。以太阳为其中一个主天体为例，这一特征在我们自己的太阳系中也有所体现。对于极小的μ，方程（9）可近似为关于 μ 的一阶级数，

$$W \approx c_0 + c_1\mu, \tag{13}$$

with

$$\begin{aligned} c_0 =& \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{m_1 q\left(A+2R^2\right)}{2R^3}\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{m_2}{2\ell}\log\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2+2\ell}{\gamma_1+\gamma_2-2\ell}\right)+\frac{M_b}{\sqrt{R^2+T^2}}\right)\right], \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} c_1 =& \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{1}{\gamma_0}\right)\left[\frac{m_1 q x\left(\frac{3A}{2}+\left(x^2+y^2\right)\right)}{R^5}+\frac{m_2\left(\ell\left(\gamma_1-\gamma_2\right)+(x+1)\left(\gamma_1+\gamma_2\right)\right)}{\gamma_1\gamma_2\left(1-\ell^2+2x+x^2+y^2+\gamma_1\gamma_2\right)}\right. \\ &\left.+\gamma_3\left(\frac{m_1 q\left(A+2R^2\right)}{R^3}+\frac{2M_b}{\sqrt{R^2+T^2}}+\frac{m_2}{\ell}\log\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2+2\ell}{\gamma_1+\gamma_2-2\ell}\right)\right)\right], \end{aligned} \tag{15}$$

其中 γ_0， γ_1，以及 γ_2 详见附录 A。

需要指出的是，在椭圆限制性三体问题（ERTBP）中，偏心率参数e 明确指两个主天体（相互作用的较大和较小天体）围绕共同质心运行的相互椭圆轨道。然而，对于质量比非常小的系统，主天体的质心极其接近占主导地位的主天体的中心。在这种情况下，较小主天体实际上沿椭圆轨道绕占主导地位的中心质量运行，而占主导地位的主天体相对于系统质心几乎保持静止。

3 平衡点的位置

在求解平衡点时，已知这些点在旋转参考系中处于静止状态。这意味着这些点处的速度（$\dot{x}$， $\dot{y}$）和加速度（$\ddot{x}$， $\ddot{y}$）均为零。由此，可将运动方程简化，从而在以下条件下获得这些平衡点的解

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= W_x = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= W_y = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

因此，势的一阶导数可表示为

$$
\begin{aligned}
W_x =& \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\Bigg[x+\frac{1}{2\gamma_0}\Bigg(\Big(2\mu\gamma_3+1\Big)\Bigg(\frac{4m_1qx}{R^3}-\frac{3m_1qx\left(A+2R^2\right)}{R^5}\\
&-\frac{2M_bx}{\left(T^2+R^2\right)^{3/2}}-\frac{4m_2}{\left(\gamma_1+\gamma_2\right)^2-4\ell^2}\left(\frac{1+x-\ell}{\gamma_1}+\frac{1+x+\ell}{\gamma_2}\right)\Bigg)\\
&+2\mu\Bigg(\frac{m_1q\left(\frac{3A}{2}+3R^2\right)}{R^5}-\frac{5m_1qx^2\left(3A+2R^2\right)}{2R^7}+\frac{m_2\gamma_4}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_6)^2}\Bigg)\Bigg)\Bigg]=0,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
W_y =& \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\Bigg[y+\frac{1}{2\gamma_0}\Bigg(\Big(2\mu\gamma_3+1\Big)\Bigg(\frac{4m_1qy}{R^3}-\frac{3m_1qy\left(A+2R^2\right)}{R^5}\\
&-\frac{2M_by}{\left(T^2+R^2\right)^{3/2}}-\frac{2m_2y\left(\gamma_1+\gamma_2\right)}{\gamma_6}\Bigg)+2\mu\Bigg(\frac{2m_1qxy}{R^5}\\
&-\frac{5m_1qxy\left(3A+2R^2\right)}{2R^7}+\frac{2m_2y\gamma_5}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_6)^2}\Bigg)\Bigg)\Bigg]=0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

共线点与主星排列在同一直线上，因此 $y=0$。式（17）变为

$$
\begin{aligned}
&x+\frac{1}{2\gamma_0}\Bigg(\Big(2\mu\gamma_3+1\Big)\Bigg(\frac{4m_1qx}{|x|^3}-\frac{3m_1qx\left(A+2x^2\right)}{|x|^5}-\frac{2M_bx}{\left(T^2+x^2\right)^{3/2}}\\
&-\frac{2m_2}{1-\ell^2+2x+x^2+|1+x-\ell||1+x+\ell|}\left(\frac{1+x-\ell}{|1+x-\ell|}+\frac{1+x+\ell}{|1+x+\ell|}\right)\Bigg)\\
&+2\mu\Bigg(\frac{m_1q\left(\frac{3A}{2}+3x^2\right)}{|x|^5}-\frac{5m_1qx^2\left(3A+2x^2\right)}{2|x|^7}+\frac{m_2\gamma_7}{\gamma_8}\Bigg)\Bigg)=0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

对于非共线点，附加条件为 $y\neq 0$。因此，方程（17）和（18）可重新整理为以下形式

$$
\begin{aligned}
&x\Bigg[1+\frac{1}{2\gamma_0}\Bigg(\Big(2\mu\gamma_3+1\Big)\Bigg(\frac{4m_1q}{R^3}-\frac{3m_1q\left(A+2R^2\right)}{R^5}-\frac{2M_b}{\left(T^2+R^2\right)^{3/2}}-\frac{2m_2(\gamma_1+\gamma_2)}{\gamma_6}\Bigg)\\
&+2\mu\Bigg(\frac{2m_1qx}{R^5}-\frac{5m_1qx\left(3A+2R^2\right)}{2R^7}\Bigg)\Bigg)\Bigg]+\frac{1}{2\gamma_0}\Bigg(\Big(2\mu\gamma_3+1\Big)\\
&\times\Bigg(\frac{2m_2\big((\gamma_1+\gamma_2)+\ell(\gamma_1-\gamma_2)\big)}{\gamma_6}\Bigg)+2\mu\Bigg(\frac{m_1q\left(3A+2R^2\right)}{2R^5}+\frac{m_2\gamma_9}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_6)^2}\Bigg)\Bigg)=0,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$y\left[1+\frac{1}{2\gamma_0}\left(\left(2\mu\gamma_3+1\right)\left(\frac{4m_1q}{R^3}-\frac{3m_1q\left(A+2R^2\right)}{R^5}-\frac{2M_b}{\left(T^2+R^2\right)^{3/2}}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{2m_2\left(\gamma_1+\gamma_2\right)}{\gamma_6}\right)+2\mu\left(\frac{2m_1qx}{R^5}-\frac{5m_1qx\left(3A+2R^2\right)}{2R^7}+\frac{2m_2\gamma_5}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_6)^2}\right)\right)\right]=0. \tag{21}$$

由于 $y\neq 0$，我们得到

$$1+\frac{1}{2\gamma_0}\left(\left(2\mu\gamma_3+1\right)\left(\frac{4m_1q}{R^3}-\frac{3m_1q\left(A+2R^2\right)}{R^5}-\frac{2M_b}{\left(T^2+R^2\right)^{3/2}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2m_2\left(\gamma_1+\gamma_2\right)}{\gamma_6}\right)+2\mu\left(\frac{2m_1qx}{R^5}-\frac{5m_1qx\left(3A+2R^2\right)}{2R^7}+\frac{2m_2\gamma_5}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_6)^2}\right)\right)\right]=0. \tag{22}$$

式（22）可代入式（20）。因此，

$$\left(2\mu\gamma_3+1\right)\left(\frac{2m_2\big((\gamma_1+\gamma_2)+\ell(\gamma_1-\gamma_2)\big)}{\gamma_6}\right)$$
$$+2\mu\left(\frac{m_1q\left(3A+2R^2\right)}{2R^5}+\frac{m_2\gamma_9}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_6)^2}\right)=0, \tag{23}$$

其中 γ_3 至 γ_9 的描述见附录A。

通过对 x 求解式（19），数值计算得到了共线平衡点的位置。同时，通过对 x 和 y 求解式（17）和（22），计算得到了非共线平衡点的位置。我们使用 Python SymPy 软件包 [54] 完成了这一计算。我们发现了三个共线平衡点：L_1 位于较大主天体与较小主天体之间的区域（$\mu-1-\ell,\ \mu$），L_2 位于（$-\infty,\ \mu-1+\ell$）区域，而 L_3 位于（$\mu,\ \infty$）区域。同时，我们还发现了两个非共线平衡点，即非共线点 L_4 和 L_5。各种摄动的影响见图 2。此处的结果采用质量比 1×10^{-9} 和偏心率 0.2。图中仅显示非共线点 L_4，但 L_5 的变化趋势完全相同，只是相对于 y 轴呈镜像对称。

图2绘出了质量比极小时，扰动椭圆限制性三体问题的平衡点位置与其经典情形下的位置之间的差异，以及不同扰动参数变化的影响。通过逐一引入摄动源，我们得出了一些结果。随着光引力参数（$1-q$）增大，L_1 和 L_3 向较大主天体靠近，而 L_2 向主星移动，L_4 则向较大主天体移动并靠近 x轴。随着扁率参数（A）增大，L_1 和 L_2 向较大主天体移动，而 L_3 向主星靠近，L_4 则向较大主天体移动并靠近 x 轴。有限直线段的长度参数（ℓ）增大时，L_1 和 L_2 远离较小主天体，而 L_3 向较大主天体靠近，L_4 则向较大主天体移动并靠近 x轴。随着盘状结构的总质量参数（M_b）增大，L_1 远离

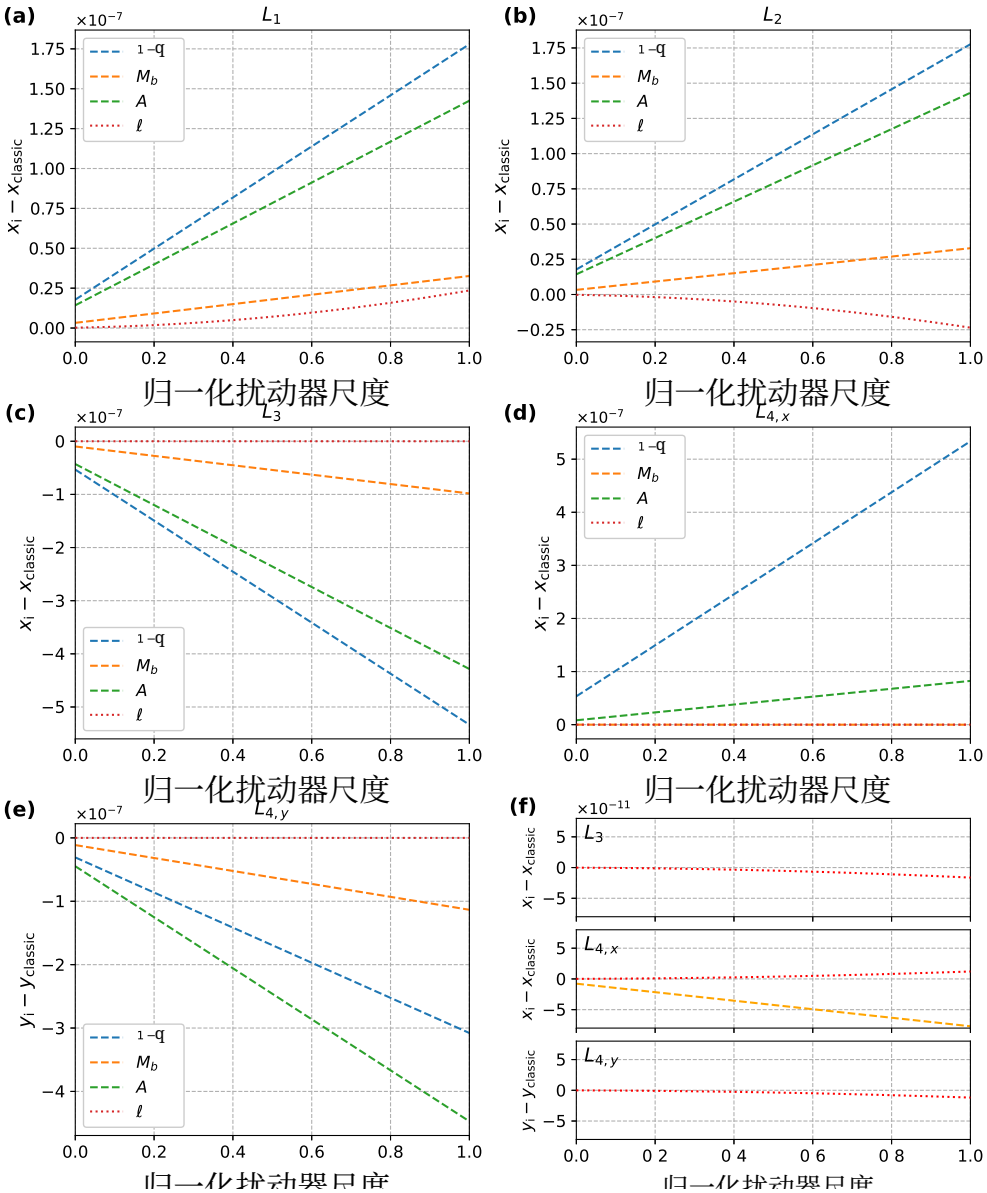

图2 扰动参数变化对平衡点位置的影响。各扰动参数的原始取值范围分别为：$1-q$对应的范围为 0 至 1.6×10^{-6}；A对应的范围为 0 至 2.6×10^{-7}；ℓ对应的范围为 0 至 7×10^{-6}；M_b对应的范围为 0 至 3×10^{-7}。随后，将这些范围归一化至 x 轴上的 0 至 1。y 轴表示受扰动的椭圆限制性三体问题中的平衡点与经典情形下其位置之间的位置差。最后一个面板 (f) 是 $y=0$ 附近 L_3、$L_{4,x}$ 和 $L_{4,y}$ 图的放大版本。每次改变一个扰动参数时，其余参数均设为 0。我们使用了 $\mu=1\times10^{-9}$ 和 $e=0.2$。

并且 L_2 向较小主天体靠近， L_3 向主星靠近，而 L_4远离较大主天体并向 x轴靠近。

在本研究中，采用限制性三体问题框架对一个系统进行了建模，并计算了其平衡点及稳定性。用于计算平衡点位置的参数组合分为若干情形，其中：

1. 情形 1：包括我们所采用的全部摄动参数。 2. 情形 2：较小主天体为点源（$\ell = 0$）。 3. 情形3：不存在盘状结构（$M_b = 0$）。 4. 情形 4：较大主天体为球形（$A = 0$）。 5. 情形5：较大主天体不产生辐射（$1 - q = 0$）。 6. 经典情形：不包含摄动源（$e = 1 - q = A = M_b = \ell = 0$）。

情形 1 包含我们使用的所有摄动参数，即偏心率（e）、光引力效应（q）、较大主天体的扁率（A）、盘状结构的总质量（M_b）以及较小主天体有限直线段的长度（ℓ）。从情形 2 到情形 5，我们逐一移除摄动源，以考察摄动源对平衡点位置偏移的影响。表 1 和2 展示了相应摄动情形导致的共线平衡点和非共线平衡点位置偏移。偏移量按摄动后的数值与经典未摄动数值之差计算（$\Delta x = x_{\text{perturbed}} - x_{\text{classic}}$）。情形 1–5 中参数的选择仅为说明用途，并无特别依据。所选数值并不大，因此底层近似仍然有效。所有情形均采用相同的参数值，以便一致地评估各摄动参数对系统的影响。

根据表1，系统中 L_1 和 L_2 的平衡点相较于经典情形均呈正差异。这意味着在情形 1–5 中， L_1（位于较大主天体与较小主天体之间）的位置远离较小主天体，而 L_2 （位于较小主天体的远侧）的位置则比各自的经典位置更靠近较小主天体。与经典情形相比， L_3 （位于较大主天体的远侧）的平衡点更靠近较大主天体，表现为负差异。如图所示，纳入所有摄动源（情形 1）时， L_1 和 L_3处的差异最大。

将各情形下平衡点位置与经典情形的差值进行比较，并与完全受摄情形（情形 1）对照可知，去除较小主天体有限直线段的影响（$\ell = 0$，情形 2）产生的位移几乎无法区分（在$L_{1,\ 2}$ 处相差 $< 0.5\%$，在 L_3处相差 $< 0.0002\%$）。这一结果表明，在这一尺度下，该因素对平衡点位移的贡献可以忽略不计。

当忽略较大主天体的盘状结构或辐射压时（情形3和情形5），所有共线平衡点的位移幅度均降至情形 1 位移幅度的约 15%。这表明盘状结构和辐射压对共线平衡点有中等程度的影响。辐射压相当于削弱较大主天体的引力。当辐射

Table 1 Difference in location of the collinear equilibrium points between the perturbed ERTBP and the classical case ($\times 10^{-5}$) with $\mu = 2 \times 10^{-9}$, $e = 0.2$, $T = 0.11$, and varying perturbation parameters

Case	$1-q$	A	M_b	ℓ	L_1	L_2	L_3
1	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	0.777870268176	0.761254859882	−2.308767615333
2	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	0	0.774120572578	0.765136786551	−2.308764282388
3	1×10^{-5}	1×10^{-5}	0	1×10^{-5}	0.667477550764	0.653424614705	−1.981449450283
4	1×10^{-5}	0	1×10^{-5}	1×10^{-5}	0.224146536698	0.216285214960	−0.660701698629
5	0	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	0.664876975243	0.652023674474	−1.975446323743

Table 2 Difference in location of the non-collinear equilibrium points between the perturbed ERTBP and the classical case ($\times 10^{-5}$) with $\mu = 2 \times 10^{-9}$, $e = 0.2$, $T = 0.11$, and varying perturbation parameters

Case	$1-q$	A	M_b	ℓ	$L_{4,5}$	
					x	y
1	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	−0.166677612912	±2.762180008198
2	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	0	−0.166676361424	±2.762175437032
3	1×10^{-5}	1×10^{-5}	0	1×10^{-5}	−0.166675431690	±2.384221166718
4	1×10^{-5}	0	1×10^{-5}	1×10^{-5}	0.333330457963	±0.570464175942
5	0	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	−0.499995002046	±2.569738220903

Note: L_4 is on the positive y-axis and L_5 is on the negative y-axis.

纳入后，必须通过使平衡点向较大主天体靠近，来补偿引力减弱的影响。取消较大主天体的扁率（情形 4），会使所有共线平衡点相对于经典情形的偏差较情形 1 减小最多（$\sim$72%）。这表明，当所有摄动参数都设为相等时，扁率 A 是控制共线点位移的主导参数。对于 $L_{1,\ 2,\ 3}$，关闭扁率的影响源于扁形主星会在势中加入一项修正，从而增强面内径向引力（相对于球体而言）。

从表2可见，系统中非共线点的 x 轴坐标与经典情形相比为负差值，这表明在情形 1、2、3 和 5 中，非共线点的位置向远离较大主天体的方向移动。对于较大主天体为球形的情形（情形 4），其位置则向较大主天体靠近。同时， y 轴上的结果表明，在所有情形中，该位置都向横坐标轴靠近。

在情形 1–3 中，非共线平衡点在 x 轴上的位置差异，相对于经典情形约为 -1.67×10^{-6}。将有限线段长度设为零（$\ell = 0$，情形 2）或移除盘质量（$M_b = 0$，情形3），会使相对于经典情形的情形 1 偏移量改变约 0.001%。因此，这两种摄动几乎不会影响 x 偏移。相比之下，情形 4 和 5 表明，扁率（A）和辐射压（$1-q$）的影响更大，且作用方向相反。从物理上看，较大主天体的扁率会使非共线点向左侧偏移（ x 更负）。相比之下，辐射压会有效减弱较大主天体的引力，并将非共线点推向右侧。这两种效应的近似抵消解释了所有摄动同时存在时观察到的较小偏移，也解释了为何移除其中任一种效应都会产生更明显且方向相反的偏移。

对于 y轴，纳入所有摄动源（情形 1）相较于经典情形产生了最显著的差异。将较小主星设为点源（情形 2），与情形 1 相比，仅使非共线点的 y轴发生 0.0002% 的偏移。这表明有限线段长度对非共线点的高度在动力学上可以忽略。移除盘状组分（情形3）后，相较于情形 1，位置显著向下偏移约 13%。较大主天体的扁率是控制非共线点 y位移的主要因素。当抑制扁率（情形 4）时，垂直位移相较于情形 1 的位移缩小约 79%，这表明扁率效应是非共线平衡点明显下移的主要原因。辐射压的影响程度中等，相较于情形 1 的位移，它使非共线点的 y轴偏移约 7%。

对受扰系统进行的数值分析（汇总于表 1和 2中）表明，引入参数 q、 A、 ℓ 和 M_b 后，平衡点位置相较于经典椭圆限制性三体问题发生了可测量的偏移。具体而言，表 1 显示，共线点的位置对变化的摄动参数十分敏感，与经典情形相比出现了明显偏差。类似地，表 2 表明，非共线点的坐标

$L_{4,\ 5}$ 在受到扰动参数综合作用时会发生显著位移。

4 平衡点的稳定性

如果物体在平衡点受到扰动，可能出现两种情况。如果粒子的运动使其远离平衡点，则该平衡态是不稳定的。如果粒子仅在平衡点周围区域振荡，则该平衡态是稳定的 [55]。对这些点施加微小位移，以评估平衡点的稳定性。因此定义：$x = x_0 + \delta x$ 和 $y = y_0 + \delta y$，其中 δx 和 δy 均为无穷小量。这些微小位移的运动方程由式（3）推导如下

$$\begin{aligned} \delta\ddot{x} - 2n\delta\dot{y} &= W_{xx}\delta x + W_{xy}\delta y, \\ \delta\ddot{y} + 2n\delta\dot{x} &= W_{xy}\delta x + W_{yy}\delta y. \end{aligned} \tag{24}$$

方程（24）的通解形式为 $\delta x = \delta x_0\, e^{\lambda t}$ 和 $\delta y = \delta y_0\, e^{\lambda t}$。因此，与这些方程相对应的特征方程为

$$\lambda^4 + (4n^2 - W_{xx}^0 - W_{yy}^0)\lambda^2 + W_{xx}^0 W_{yy}^0 - (W_{xy}^0)^2 = 0. \tag{25}$$

W 的二阶偏导数用下标表示。上标 0 表示这些导数是在平衡点 (x_0, y_0) 处求得的，其中

$$\begin{aligned} W_{xx} =& \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\Bigg[1 + \frac{1}{2\gamma_0}\Bigg((2\mu\gamma_3+1)\Bigg(\frac{4m_1q}{R^3} - \frac{3m_1q\left(A+2R^2\right)}{R^5} - \frac{24m_1qx^2}{R^5} \\ &+ \frac{15m_1qx^2\left(A+2R^2\right)}{R^7} - \frac{2M_b}{\left(T^2+R^2\right)^{3/2}} + \frac{6M_bx^2}{\left(T^2+R^2\right)^{5/2}} \\ &+ \frac{8m_2(\gamma_1+\gamma_2)\left(\frac{x+1-\ell}{\gamma_1} + \frac{x+1+\ell}{\gamma_2}\right)^2}{\left((\gamma_1+\gamma_2)^2 - 4\ell^2\right)^2} - \frac{4m_2\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} - \frac{(x+1-\ell)^2}{\gamma_1^3} - \frac{(x+1+\ell)^2}{\gamma_2^3}\right)}{(\gamma_1+\gamma_2)^2 - 4\ell^2}\Bigg) \\ &+ 2\mu\Bigg(\frac{2m_1q(x+1)}{R^5} - \frac{10m_1qx^2(x+1)}{R^7} - \frac{15m_1qx\left(3A+2R^2\right)}{2R^7} \\ &+ \frac{35m_1qx^3\left(3A+2R^2\right)}{2R^9} - \frac{\gamma_{10}m_2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_6^2} + \frac{2\gamma_4m_2\left(\frac{\gamma_2(x+1-\ell)}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1(x+1+\ell)}{\gamma_2} + 2x + 2\right)}{\gamma_6^3} \\ &+ \frac{3\gamma_4m_2(x+1-\ell)}{\gamma_1^3\gamma_2\gamma_6^2} + \frac{3\gamma_4m_2(x+1+\ell)}{\gamma_1\gamma_2^3\gamma_6^2}\Bigg)\Bigg)\Bigg], \end{aligned} \tag{26}$$

$$
\begin{aligned}
W_{yy} =& \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\Bigg[1+\frac{1}{2\gamma_0}\Bigg(\left(2\mu\gamma_3+1\right)\Bigg(\frac{4m_1q}{R^3}-\frac{3m_1q\left(A+2R^2\right)}{R^5}-\frac{24m_1qy^2}{R^5} \\
&+\frac{15m_1qy^2\left(A+2R^2\right)}{R^7}-\frac{2M_b}{\left(T^2+R^2\right)^{3/2}}+\frac{6M_by^2}{\left(T^2+R^2\right)^{5/2}}+\frac{2m_2y^2(\gamma_1+\gamma_2)^3}{\gamma_6^2} \\
&+\frac{2m_2y^2(\gamma_1+\gamma_2)}{\gamma_1^2\gamma_6}+\frac{2m_2y^2(\gamma_1+\gamma_2)}{\gamma_2^2\gamma_6}-\frac{2m_2(\gamma_1+\gamma_2)\left(\gamma_1\gamma_2+y^2\right)}{\gamma_1\gamma_2\gamma_6}\Bigg) \\
&+2\mu\Bigg(\frac{2m_1qx}{R^5}-\frac{20m_1qxy^2}{R^7}-\frac{5m_1qx\left(3A+2R^2\right)}{2R^7}+\frac{35m_1qxy^2\left(3A+2R^2\right)}{2R^9} \\
&-\frac{2\gamma_{11}m_2y^2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_6^2}+\frac{4\gamma_5m_2y^2(\gamma_1+\gamma_2)^2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_6^3}-\frac{2\gamma_5m_2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_6^2}+\frac{6\gamma_5m_2y^2}{\gamma_1^3\gamma_2\gamma_6^2}+\frac{6\gamma_5m_2y^2}{\gamma_1\gamma_2^3\gamma_6^2}\Bigg)\Bigg)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{xy} =& \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{y}{2\gamma_0}\right)\Bigg[\left(2\mu\gamma_3+1\right)\Bigg(-\frac{24m_1qx}{R^5}+\frac{15m_1qx\left(A+2R^2\right)}{R^7} \\
&+\frac{6M_bx}{\left(T^2+R^2\right)^{5/2}}+\frac{8m_2(\gamma_1+\gamma_2)^2\left(\frac{x+1-\ell}{\gamma_1}+\frac{x+1+\ell}{\gamma_2}\right)}{\gamma_1\gamma_2\left((\gamma_1+\gamma_2)^2-4\ell^2\right)^2}+\frac{4m_2\left(\frac{x+1-\ell}{\gamma_1^3}+\frac{x+1+\ell}{\gamma_2^3}\right)}{(\gamma_1+\gamma_2)^2-4\ell^2}\Bigg) \\
&+2\mu\Bigg(\frac{2m_1q}{R^5}-\frac{10m_1qx(x+1)}{R^7}-\frac{5m_1q\left(3A+2R^2\right)}{2R^7}+\frac{35m_1qx^2\left(3A+2R^2\right)}{2R^9} \\
&-\frac{\gamma_{12}m_2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_6^2}+\frac{2\gamma_4m_2(\gamma_1+\gamma_2)^2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_6^3}+\frac{3\gamma_4m_2}{\gamma_1^3\gamma_2\gamma_6^2}+\frac{3\gamma_4m_2}{\gamma_1\gamma_2^3\gamma_6^2}\Bigg)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{28}
$$

其中 γ_{10}, γ_{11}和 γ_{12} 在附录 A中进行了描述。

特征方程的根为

$$
\lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\,, \tag{29}
$$

其中 $a=1$、 $b=4n^2-W_{xx}^0-W_{yy}^0$ 和 $c=W_{xx}^0W_{yy}^0-(W_{xy}^0)^2$。当所有根均为纯虚根且成共轭对出现时，系统将呈现“中心 ×中心”动力学行为，表明系统满足稳定条件。如果系统有两个纯虚根以及一对实根，则会出现正特征值，使系统不稳定。这种不稳定性会导致轨迹沿某些方向发散，同时在其他方向表现出振荡行为，形成“鞍点 ×中心”动力学 [56]。

共线平衡点位于横坐标轴上，此处满足条件$W_{xy}=0$。为研究其稳定性，将横坐标轴划分为三个不同区域： $L_1=(-\infty,\ \mu-1-\ell)$、 $L_2=(\mu-1-\ell,\ \mu)$和 $L_3=(\mu,\ \infty)$。对各区域内的特征根 λ 进行了数值计算，以确定其数值。同样，对于非共线平衡点（L_4 和

Table 3 Characteristic roots of the equilibrium points with $\mu = 2 \times 10^{-9}$, $A = 1 - q = \ell = M_b = 1 \times 10^{-5}$, $T = 0.11$, and varying eccentricities

e	L_1		L_2		L_3		$L_{4,5}$	
	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$
0.2	± 2.513957	$\pm 2.066684i$	± 2.573782	$\pm 2.103423i$	± 0.000076	$\pm 0.968733i$	$\pm 0.000122i$	$\pm 0.968733i$
0.5	± 2.716129	$\pm 2.139969i$	± 2.812533	$\pm 2.201976i$	± 0.000114	$\pm 0.732353i$	$\pm 0.000183i$	$\pm 0.732353i$
0.6613	± 2.950673	$\pm 2.226273i$	± 3.119794	$\pm 2.340098i$	± 0.002622	$\pm 0.036841i$	$\pm 0.004244i$	$\pm 0.036502i$
0.6616	± 2.951241	$\pm 2.226480i$	± 3.120596	$\pm 2.340475i$	± 0.011451	$\pm 0.008439i$	$\pm 0.009615 \pm 0.007906i$	$\pm 0.009615 \mp 0.007906i$
0.8	± 3.285684	$\pm 2.339020i$	± 3.696294	$\pm 2.631343i$	± 0.999244	$\pm 0.000121i$	± 0.99924	± 0.000194

Note: $i = \sqrt{-1}$.

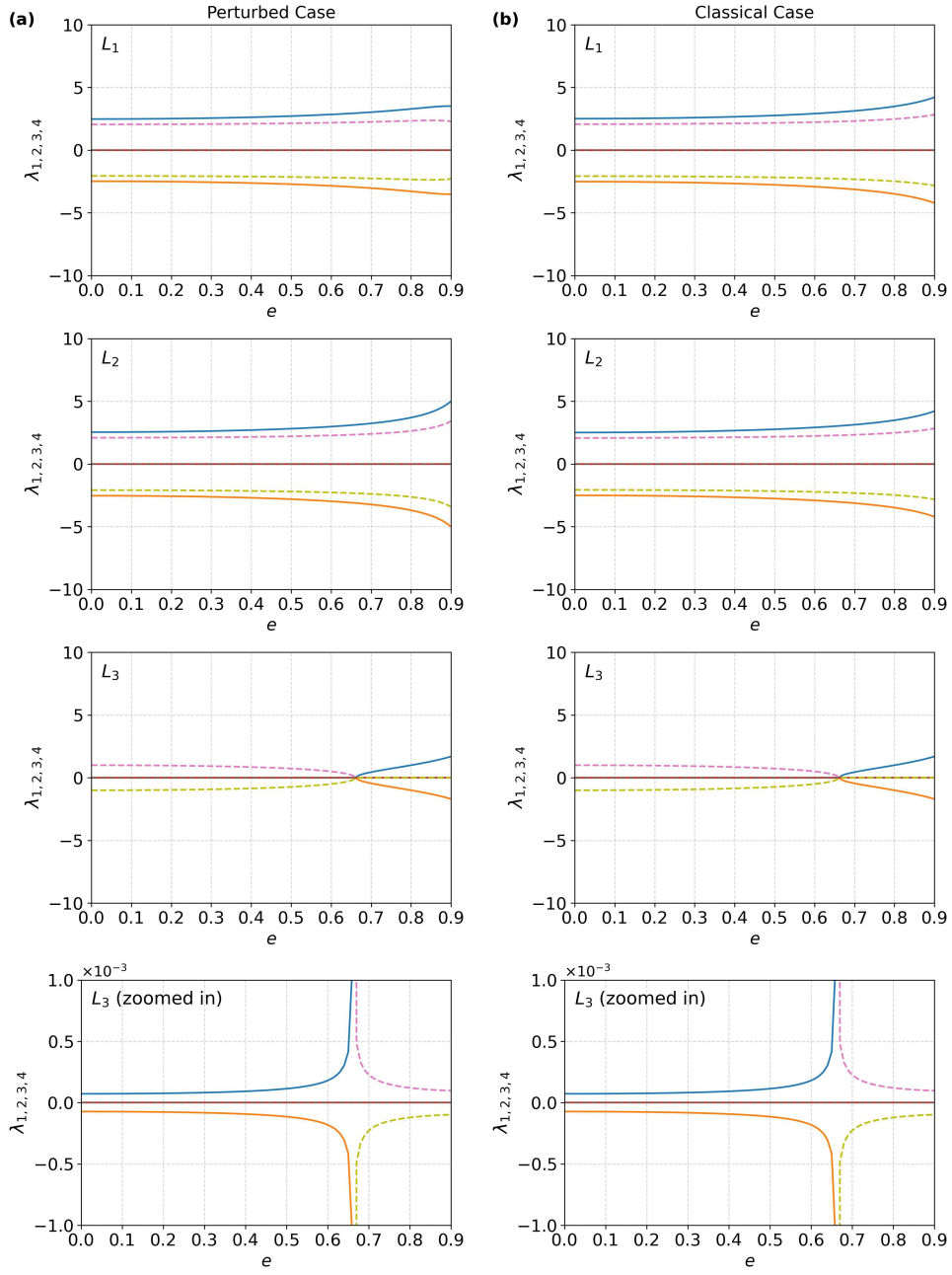

图3 共线平衡点（L_1、L_2 L_3 和 ）在受扰动情形（a）和经典情形（b）下，偏心率与特征根（$\lambda_{1,\ 2,\ 3,\ 4}$）的关系图。各子图所用参数如下：（a） $\mu = 2 \times 10^{-9}$、$A = 1 - q = \ell = M_b = 1 \times 10^{-5}$和 $T = 0.11$；（b）$\mu = 2 \times 10^{-9}$ 和 $A = 1 - q = \ell = M_b = T = 0$。最底部的面板显示了特征值图的放大版本 L_3。特征根的实部和虚部分别用实线和虚线表示。

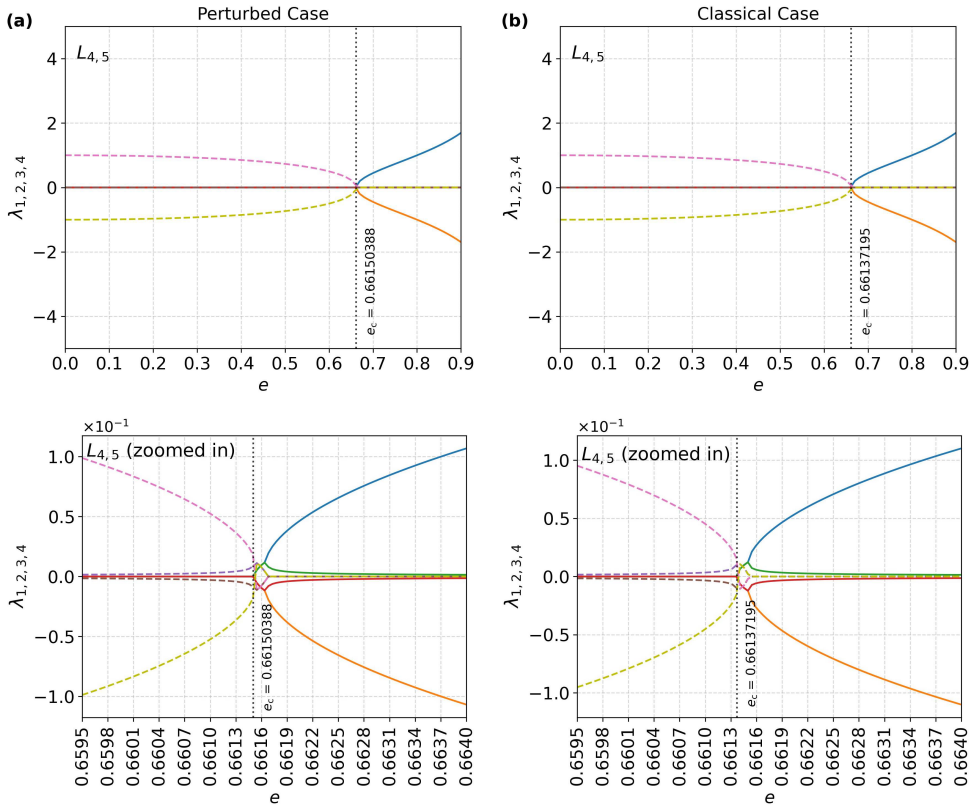

图4 非共线平衡点（L_4 和 L_5）在受扰动情形（a）和经典情形（b）下，偏心率与特征根（$\lambda_{1,\ 2,\ 3,\ 4}$）的关系图。底部子图展示了放大后的版本。各子图所用参数的具体信息如下：（a） $\mu = 2 \times 10^{-9}$、$A = 1-q = \ell = M_b = 1\times10^{-5}$ $T = 0.11$ $\mu = 2\times10^{-9}$ $A = 1-q = \ell = M_b = T = 0$ ，以及；（b）和 。特征根的实部和虚部分别用实线和虚线表示。

L_5），位于横坐标轴之外，混合导数项 W^0_{xy} 通常不为零。要研究它们的稳定性，需在对应于 L_4和 L_5的特定坐标值处计算二阶偏导数（W^0_{xx}，W^0_{yy}，和 W^0_{xy}），并将其代入系数 b 和 c，以数值确定根的性质。

稳定性分析首先纳入表$1-q$、A、 ℓ和 M_b中情形 1 的摄动参数，同时也考虑经典情形。数值结果汇总于表1 和2，并通过图3可视化3 和4，以比较完全受摄情形与经典情形。表3 列出了选定偏心率下的特征根（$\lambda_{1、\ 2、\ 3、\ 4}$），为完全受摄情形下的稳定性转变提供数值证据。对于共线平衡点（图3），结果显示出现了一对符号相反的非零实特征值，

而且在偏心率处于 $0 \leq e < 1$范围内时，也会出现一对符号相反的纯虚特征值。表3证实了这一点，其中所有列出的偏心率下， L_1 和 L_2 均为实根。尽管L_3 附近的数值看起来逐渐趋近于零，直到 $e < 0.7$，但其大小仍不为零。例如，在 $e = 0.2$时，表3 显示了较小但有限的实部（$\lambda_{1、\ 2} = \pm 0.000076$）。图3 最下方的面板通过放大 L_3 特征值图，更清晰地展示了这一点，证实了上述结果。因此，共线平衡点呈现“鞍点 ×中心”行为。这一观察结果表明，在这些条件下，受摄情形和经典情形中的所有共线平衡点本质上均不稳定。

利用方程（25）-（28）和表 3 中的数据，对非共线平衡点的稳定性进行了考察。我们发现，在一定的偏心率范围（$0 \leq e \leq e_c$）内，会出现两对符号相反的纯虚特征值，如图4 所示，其中包括受摄情形和经典情形。表 3 展示了这一稳定区域，例如，当 $L_{4,5}$ 时，根为纯虚数，具体如 $e = 0.6613$,$\lambda_{1,2} = \pm 0.004244i$ and$\lambda_{3,\ 4} = \pm 0.036502i$。然而，超过临界点 e_c 后，这些特征值会转变为一对非零实特征值和一对虚特征值。表 3 和图 4均清晰地显示了这一分岔：特征根变为实部接近 $e \approx 0.6616$ 的复数（例如，在完全受摄情形下，$\lambda_{1,2} = \pm 0.009615 \pm 0.007906i$ ）。因此，非共线平衡点随偏心率变化呈现“中心 × 中心”和“鞍点 ×中心”行为，在不同区域表现出不同的稳定性特征。

具体而言，在 $0 \leq e \leq e_c$ 的区域内，非共线平衡点保持稳定；而在 $e_c < e < 1$ 的区域内，这些点则变得不稳定。对于受摄情形（使用 $\mu = 2 \times 10^{-9}$ 和 $A = 1 - q = \ell = M_b = 1 \times 10^{-5}$），临界偏心率为 0.66150388；对于经典情形（使用 $\mu = 2 \times 10^{-9}$ 和$A = 1 - q = \ell = M_b = 0$），临界偏心率为 0.66137195。临界偏心率 e_c 处的稳定性分岔凸显了偏心率对系统动力学行为的重要影响。我们发现，在相同质量比下，受摄系统和经典系统中示例所用参数组对应的临界偏心率非常接近。e_c 的变化证实，摄动参数会直接影响稳定性界限。

5 结论

在本研究中，我们为两个主天体之间质量比极小的系统建立了动力学模型。我们分析了无穷小质量在多个摄动作用下、受两个主天体影响的运动，具体考虑了扁率且会辐射的较大主天体、以有限直线段近似的细长小主天体，以及周围盘状结构的引力影响。对这一修正椭圆限制性三体问题的研究揭示了五个平衡点：三个共线平衡点（L_1、 L_2、 L_3）和两个非共线平衡点（L_4、 L_5）。如表1和2所示，对受摄动系统的数值分析表明，轨道偏心率以及参数 q、 A、 ℓ和 M_b 的引入产生了

相对于经典椭圆限制性三体问题，平衡点位置发生了可测量的偏移。这些位置偏差的大小随模型参数而变化。

我们的稳定性分析详见表 3 并在图中直观展示。3和4，结果表明，在我们考察的广泛偏心率范围内，三个共线平衡点始终保持线性不稳定。相比之下，非共线点的稳定性取决于偏心率，表现为条件稳定性。此外，我们确定了受摄动系统和经典系统的临界偏心率值（e_c），在这些偏心率范围内，非共线平衡点保持稳定。所选的摄动参数会直接影响这些稳定性界限。

为突出本研究在推动对椭圆限制性三体问题（ERTBP）的理解方面所发挥的作用，必须阐明我们的研究结果如何为该领域的更广泛研究作出贡献。本研究全面分析了摄动对平衡点位置偏移的影响，以及这种影响与偏心率 e 和质量比 μ的关系。本研究还详细分析了不同偏心率下共线和非共线平衡点的稳定性与动力学行为，尤其确定了发生稳定性转变的临界阈值 e_c 。

我们的结果表明，较大主天体的辐射力和扁率、较小主天体的细长体几何形状，以及周围的盘势，会显著影响第三体的动力学，包括其平衡点的位置和稳定性。修正的椭圆限制性三体问题模型可作为研究太阳系中限制性三体问题动力学的良好初始近似，例如太阳—小行星系统或太阳—矮行星系统，这些系统的质量比都非常小。

致谢。MBS 获得印度尼西亚捐赠基金（LPDP）提供的硕士研究奖学金资助。HSR 获得印度尼西亚大学数学与自然科学学院研究生出版资助，编号为 PKS-042/UN2.F3.D/PPM.00.02/2024。INH 获得 RIIM LPDP-BRIN 的部分资助。我们感谢审稿人付出的时间和提出的宝贵意见，这些意见显著提升了稿件质量。

声明

- 利益冲突：作者声明不存在与本文内容相关的竞争性利益。

- 数据可用性：本研究期间未生成或分析任何数据集。
- 作者贡献：HSR 和 INH 提出了研究构想。HSR 为计算提供了分析框架。INH 为计算提供了数值方面的帮助。MBS 对所得观测量进行了解析和数值计算。LBP 协助完成数值计算并提供了物理学见解。所有作者均审阅并批准了稿件。

附录 A γ 变量的定义

这些 γ 来自公式（A1）-（A13）的变量用于简化公式（13）-（28）。

$$\boldsymbol{\gamma_0} = 1 + \ell^2 + \frac{3A\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}{\left(1-e^2\right)^2} + \frac{2M_b}{\left(1+T^2\right)^{3/2}} \tag{A1}$$

$$\boldsymbol{\gamma_1} = \sqrt{(1+x-\ell)^2+y^2} \tag{A2}$$

$$\boldsymbol{\gamma_2} = \sqrt{(1+x+\ell)^2+y^2} \tag{A3}$$

$$\boldsymbol{\gamma_3} = \frac{2M_b\left(T^2-2\right)}{\left(T^2+1\right)\left(4M_b+\left(3A+2\ell^2+2\right)\left(T^2+1\right)^{3/2}\right)} \tag{A4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma_4} = & -4\ell^5(x+1)\left(\gamma_1-\gamma_2\right) - 4\ell^4(x+1)^2\left(\gamma_1+\gamma_2\right) \\ & + 2\ell^3(x+1)\left(4(x+1)^2+y^2\right)\left(\gamma_1-\gamma_2\right) \\ & + 2\ell^2\Big(3(x+1)^2y^2+4(x+1)^4+y^4\Big)\left(\gamma_1+\gamma_2\right) \\ & - 2\ell(x+1)\Big((x+1)^2y^2+2(x+1)^4-y^4\Big)\left(\gamma_1-\gamma_2\right) \\ & - 2\Big(2(x+1)^2-y^2\Big)\Big((x+1)^2+y^2\Big)^2\left(\gamma_1+\gamma_2\right)\end{aligned} \tag{A5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma_5} = & \ell^5\left(\gamma_2-\gamma_1\right) - \ell^4(x+1)\left(\gamma_1+\gamma_2\right) - \ell^3\left(2(x+1)^2+y^2\right)\left(\gamma_1-\gamma_2\right) \\ & - 2\ell^2(x+1)^3\left(\gamma_1+\gamma_2\right) + 3\ell(x+1)^2\left((x+1)^2+y^2\right)\left(\gamma_1-\gamma_2\right) \\ & + 3(x+1)\left((x+1)^2+y^2\right)^2\left(\gamma_1+\gamma_2\right)\end{aligned} \tag{A6}$$

$$\boldsymbol{\gamma_6} = \gamma_1\gamma_2\left(1-\ell^2+2x+x^2+y^2+\gamma_1\gamma_2\right) \tag{A7}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma_7} = & 4(x+1)(1-\ell^2+2x+x^2)^2(x|1+x-\ell| + \ell|1+x-\ell| + |1+x-\ell| \\ & + x|1+x+\ell| - \ell|1+x+\ell| + |1+x+\ell|)\end{aligned} \tag{A8}$$

$$\boldsymbol{\gamma_8} = (|1+x-\ell|)^3(|1+x+\ell|)^3(1-\ell^2+2x+x^2+|1+x-\ell||1+x+\ell|)^2 \tag{A9}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma_9} = & 2\left(\gamma_1-\gamma_2\right)\Big(-\ell^5(x+2)+\ell^3\left(2x\left(3x^2+8x+y^2+7\right)+y^2+4\right) \\ & \qquad + \ell^2\left(3(x+1)^2y^2+4(x+1)^4+y^4\right) \\ & \qquad - \ell(x+1)\left(5x^2+7x-y^2+2\right)\left((x+1)^2+y^2\right)\Big) \\ & + 2\left(\gamma_1+\gamma_2\right)\Big(-\left(\ell^4(x+1)(x+2)\right)+2\ell^2x(x+1)^3 \\ & \qquad - \left(5x^2+7x-y^2+2\right)\left((x+1)^2+y^2\right)^2\Big)\end{aligned} \tag{A10}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma_{10}} = & -4\ell^5(x+1)\left(\frac{x+1-\ell}{\gamma_1}-\frac{x+1+\ell}{\gamma_2}\right)-4\ell^5(\gamma_1-\gamma_2) \\
& -4\ell^4(x+1)^2\left(\frac{x+1-\ell}{\gamma_1}+\frac{x+1+\ell}{\gamma_2}\right)-8\ell^4(x+1)(\gamma_1+\gamma_2) \\
& +16\ell^3(x+1)^2(\gamma_1-\gamma_2)+2\ell^3(x+1)\left(4(x+1)^2+y^2\right) \\
& \quad \times\left(\frac{x+1-\ell}{\gamma_1}-\frac{x+1+\ell}{\gamma_2}\right) \\
& +2\ell^3(\gamma_1-\gamma_2)\left(4(x+1)^2+y^2\right) \\
& +2\ell^2(\gamma_1+\gamma_2)\left(6(x+1)y^2+16(x+1)^3\right) \\
& +2\ell^2\left(3(x+1)^2y^2+4(x+1)^4+y^4\right)\left(\frac{x+1-\ell}{\gamma_1}+\frac{x+1+\ell}{\gamma_2}\right) \\
& -2\ell(x+1)(\gamma_1-\gamma_2)\left(2(x+1)y^2+8(x+1)^3\right) \\
& -2\left(2(x+1)^2-y^2\right)\left((x+1)^2+y^2\right)^2\left(\frac{x+1-\ell}{\gamma_1}+\frac{x+1+\ell}{\gamma_2}\right) \\
& -2\ell(x+1)\left((x+1)^2y^2+2(x+1)^4-y^4\right)\left(\frac{x+1-\ell}{\gamma_1}-\frac{x+1+\ell}{\gamma_2}\right) \\
& -2\ell(\gamma_1-\gamma_2)\left((x+1)^2y^2+2(x+1)^4-y^4\right) \\
& -8(x+1)(\gamma_1+\gamma_2)\left((x+1)^2+y^2\right)^2 \\
& -8(x+1)(\gamma_1+\gamma_2)\left(2(x+1)^2-y^2\right)\left((x+1)^2+y^2\right)
\end{aligned}
\tag{A11}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma_{11}} = & \ell^5\left(\frac{1}{\gamma_2}-\frac{1}{\gamma_1}\right)+\ell^4(-x-1)\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right) \\
& +\ell^3\left(\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\left(-2(x+1)^2-y^2\right)-2(\gamma_1-\gamma_2)\right) \\
& -2\ell^2(x+1)^3\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right) \\
& +\ell\left(6(x+1)^2(\gamma_1-\gamma_2)+3(x+1)^2\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\left((x+1)^2+y^2\right)\right) \\
& +3(x+1)\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right)\left((x+1)^2+y^2\right)^2 \\
& +12(x+1)(\gamma_1+\gamma_2)\left((x+1)^2+y^2\right)
\end{aligned}
\tag{A12}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma_{12}} = & -4\ell^5(x+1)\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)-4\ell^4(x+1)^2\times\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right) \\
& +\ell^3\Big(4(x+1)(\gamma_1-\gamma_2)+2(x+1)\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\left(4(x+1)^2+y^2\right)\Big) \\
& +\ell^2\Big(2(\gamma_1+\gamma_2)\left(6(x+1)^2+4y^2\right) \\
& \quad +2\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right)\Big(3(x+1)^2y^2+4(x+1)^4+y^4\Big)\Big) \\
& +\ell\Big(-2(x+1)(\gamma_1-\gamma_2)\left(2(x+1)^2-4y^2\right) \\
& \quad -2(x+1)\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\Big((x+1)^2y^2+2(x+1)^4-y^4\Big)\Big) \\
& -2\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right)\left(2(x+1)^2-y^2\right)\left((x+1)^2+y^2\right)^2 \\
& -8(\gamma_1+\gamma_2)\left(2(x+1)^2-y^2\right)\left((x+1)^2+y^2\right) \\
& +4(\gamma_1+\gamma_2)\left((x+1)^2+y^2\right)^2
\end{aligned}
\tag{A13}
$$

参考文献

[1] Poincar´e, H.：《天体力学新方法》。Gauthier-Villars et fils，巴黎（1892）[2]Murray, C.D., Dermott, S.F.：《太阳系动力学》。剑桥大学出版社，剑桥（1999）[3]Szebehely, V.G.：《轨道理论：三体受限问题》。Academic Press，纽约（1967）[4] Valtonen, M.J., Karttunen, H.：《三体问题》。剑桥大学出版社，剑桥（2006）[5] ´O'Math´una, D.：《天体力学中的可积系统》，第51卷。施普林格，纽约（2008）[6] Radzievskii, V.V.：考虑光压的三体受限问题。《天文学杂志》**27**，250（1950）[7] Chernikov, Y.A.：光引力限制性三体问题。《苏联天文学》，第14卷，第176页**14**，176（1970）[8] Markellos, V.V., Perdios, E., Labropoulou, P.：光引力椭圆受限问题中三角平衡点的线性稳定性，i。《天体物理学与空间科学》**194**，207–213（1992）[9] Elipe, A., Lara, M.：辐射压作用下限制性三体问题的周期轨道。《天体力学与动力天文学》**68**，1–11（1997）[10]Kushvah, B.S.：广义光引力 Chermnykh 问题中平衡点的线性稳定性。《天体物理学与空间科学》**318**，41–50（2008）[11] Shankaran, Sharma, J.P., Ishwar, B.：广义光引力限制性三体问题中的面外平衡点及其稳定性。《天体物理学与空间科学》**332**，115–119（2011）[12] Chakraborty, A., Narayan, A.：恒星风和坡印廷–罗伯逊阻力对光引力椭圆限制性三体问题的影响。《太阳系研究》**52**(2)，168–179（2018）[13] Moneer,E.M., Allawi,Y.M., Alanazi, M.M., Zotos, E.E.：揭示非球形辐射天体限制性三体问题中面外平衡点的性质。《新天文学》**103**，102061（2023）[14] Lhotka, C., Celletti, A.：坡印廷–罗伯逊阻力对三角形

拉格朗日点。《伊卡洛斯》**250**，249–261（2015）

[15] Idrisi, M.J., Ullah, M.S.：椭圆限制性三体问题中反照率效应对天平动点的影响研究。《宇航科学杂志》**67**，863–879（2020）[16]Sharma, R.K., Subba Rao, P.V.：当主星为扁椭球体时，限制性三体问题中的共线平衡点及其特征指数。《天体力学》**12**(2)，189–201（1975）[17] Sharma, R.K., Subba Rao, P.V.：扁率对临界质量处三角形解的影响。《天体物理学与空间科学》**60**，247–250（1979）[18] Bhatnagar, K.B., Chawla, J.M.：较大主星的扁率对三体受限问题中共线天平动点的影响。《天体力学》**16**(2)，129–136（1977）[19]Sharma, R.K.：扁率作用下限制性三体问题的第三类周期轨道。《天体物理学与空间科学》**166**，211–218（1990）[20]Markellos, V.V., Papadakis, K.E., Perdios, E.A.：扁率作用下平面圆形限制性三体问题中三角平衡点周围的非线性稳定区域。《天体物理学与空间科学》**245**，157–164（1996）[21] Douskos, C.N., Markellos, V.V.：扁率作用下限制性三体问题中的面外平衡点。《天文学与天体物理学》**446**(1)，357–360（2006）[22] Safiya Beevi, A., Sharma, R.K.：土星的扁率对土星—土卫六限制性三体问题中周期轨道的影响。《天体物理学与空间科学》**340**，245–261（2012）[23]Abd El-Salam, F.A.：扁球形和三轴主星条件下椭圆限制性三体问题中三角平衡点的稳定性。《天体物理学与空间科学》**357**，1–9（2015）[24] Moneer, E.M., Dubeibe, F.L., Zotos, E.E.：揭示长椭球或扁椭球星系双星系统的平衡动力学。《空间研究进展》**73**(9)，4868–4877（2024）[25] Yousuf, S., Kishor, R.：反照率和盘对广义限制性三体问题中零速度曲线及平衡点线性稳定性的影响。《皇家天文学会月报》**488**(2)，1894–1907（2019）[26] Abozaid, A.A., Selim, H.H., Gadallah, K.A.K., Hassan, I.A., Abouelmagd, E.I.：小行星作用下受限三体框架中的周期轨道

带效应。应用数学与非线性科学 **5**(2), 157 (2020)

[27] Mahato, G., Kushvah, B.S., Pal, A.K., Verma, R.K.：具有盘状结构的细长小主星限制性三体问题的动力学。《空间研究进展》**69**(9), 3490–3501 (2022)[28] Nurul Huda, I., Dermawan, B., Saputra, M.B., Sadikin, R., Hidayat, T.：修正圆型限制性三体问题平衡点研究：太阳–妊神星系统的情形。天文学与天体物理学研究 **23**(11), 115025 (2023)[29] Chakraborty, A., Narayan, A., Ishwar, B.：环恒星带影响下的椭圆限制性三体问题。少体系统 **62**(2), 15 (2021)[30] Mia, R., Prasadu, B.R., Abouelmagd, E.I.：非共线平衡点稳定性分析：在太阳–火星系统和比邻星系统中的应用。航天学报 **204**, 199–206 (2023)[31]Riaguas, A., Elipe, A., Lara, M.：大质量直线段周围的周期轨道。《天体力学与动力天文学》**73**(1-4), 169–178 (1999)[32] Riaguas, A., Elipe, A., L´opez-Moratalla, T.：有限直线段引力场中平衡态的非线性稳定性。《天体力学与动力天文学》**81**(3), 235–248 (2001)[33] Nurul Huda, I., Syahrul Haz, H.R., Dermawan, B., Abdurrazzaq, A., Rachmawati, R.N., Kuntjoro, Y.D.：具有四阶多项式密度分布和反照率效应的天然细长小行星周围势场模型。《宇航科学杂志》**72**(2), 12 (2025)[34] Jain, R., Sinha, D.：两个主星均为有限直线段时限制性三体问题的稳定性和运动区域。《天体物理学与空间科学》**351**, 87–100 (2014)[35] Kaur, B., Kumar, D., Chauhan, S.：任意密度参数下，Robe有限直线段模型中科里奥利力和离心力摄动的影响。《天文学报》**341**(1), 32–43 (2020) [36] Verma, R.K., Kushvah, B.S., Mahato, G., Pal, A.K.：具有细长小主星的摄动限制性三体问题。《宇航科学杂志》**70**(3), 1–26 (2023)[37] Sharma, R.K., Subba Rao, P.：较大质量主星为扁球体时，限制性三体问题中的定常解及其特征指数。《天体力学》**13**(2), 137–149 (1976)[38] Sharma, R.K.：光引力

限制性三体问题中较小主星为扁球体时天平动点的线性稳定性。《天体物理学与空间科学》135(2), 271–281 (1987)[39] Kunitsyn, A., Perezhogin, A.：光辐射引力限制性圆型三体问题中三角形天平动点的稳定性。《天体力学》18(4), 395–408 (1978)[40] Miyamoto, M., Nagai, R.：星系质量分布的三维模型。日本天文学会，《刊物》，第27卷，第4期，1975年，第533–543页。27, 533–543 (1975)[41] Grebenikov, E.A.：限制性椭圆三体问题中拉格朗日三角形解的稳定性。《苏联天文学》，第8卷，第451页。8, 451 (1964)[42] Stein, S.K.：《开普勒第三定律》中的“平均距离”。《数学杂志》50(3), 160 (1977) https://doi.org/10.2307/2689506[43] Radwan, M., Abd El Motelp, N., et al.：三轴椭圆型限制性三体问题中三角点的位置与稳定性。《墨西哥天文学与天体物理学杂志》́ı y astrof́ısica 57(2), 311–319 (2021)[44] Saputra, M.B., Ramadhan, H.S., Nurul Huda, I., Putra, L.B.：具有各种摄动效应的椭圆型限制性三体问题中共线平衡点的位置。载于：《物理学杂志：会议系列》，第2866卷，第012077页（2024）。IOP出版社[45] Narayan, A., Usha, T.：具有辐射效应和三轴主星的椭圆限制性三体问题中三角平衡点的稳定性。《天体物理学与空间科学》351, 135–142 (2014)[46] Usha, T., Narayan, A., Ishwar, B.：辐射效应和主星三轴性对椭圆限制性三体问题中三角平衡点的影响。《天体物理学与空间科学》349, 151–164 (2014)[47]Nurul Huda, I., Dermawan, B., Wibowo, R.W., Hidayat, T., Utama, J.A., Mandey, D., Tampubolon, I.：辐射效应和扁率效应作用下椭圆限制性三体问题中面外平衡点的位置。《韩国天文学会会刊》30(2), 295–296 (2015)[48]Dermawan, B., Nurul Huda, I., Wibowo, R.W., Hidayat, T., Utama, J.A., Mandey, D., Tampubolon, I.：辐射效应和扁率效应作用下椭圆限制性三体问题中的三角平衡点。《韩国天文学会会刊》30(2), 293–294 (2015) https://doi.org/ 10.5303/PKAS.2015.30.2.293[49] Duggad, P., Dewangan, S., Narayan, A.：主星三轴性的影响

椭圆限制性三体问题中的扁率微小天体。《新天文学》**85**,101538 (2021)[50] Umar, A., Abubakar Hussain, A.: 坡印廷–罗伯逊阻力和动力扁率参数对光引力椭圆限制性三体问题中三角平衡点附近运动的影响。《天文学进展》**2021**(1), 6657500(2021)[51] Sharma, R.K., Sellamuthu, H., Jency, A.: 太阳系中的受扰特洛伊动力学。载于：AAS/AIAA航天动力学专家会议，第20–704页（2020）[52] Aishetu, U., Salisu, K.A., Umar, B.: 光引力椭圆限制性三体问题中环双星盘对L4、L5附近运动的扰动。《国际化学、物理与天文学快报》**87**, 22–36 (2021)https://doi.org/10.56431/p-ks4v0x[53] Singh, J., Taura, J.J.: 轴对称天体、带谐项及带的势对圆型限制性三体问题中三角形天平动点稳定性的影响。《天体物理学与空间科学》**352**, 461–466 (2014)[54] Meurer, A., Smith, C.P., Paprocki, M., ˇ Cert´ık, O., Kirpichev, S.B., Rocklin, M., Kumar, A., Ivanov, S., Moore, J.K., Singh, S., Rathnayake, T., Vig, S., Granger, B.E., Muller, R.P., Bonazzi, F., Gupta, H., Vats, S., Johansson, F., Pedregosa, F., Curry, M.J., Terrel, A.R., Rouˇ cka, v., Saboo, A., Fernando, I., Kulal, S., Cim- rman, R., Scopatz, A.: Sympy: Python中的符号计算。《PeerJ计算机科学》**3**, 103 (2017) https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103[55] Roy, A.E.:《轨道运动》。IOP出版社有限公司，布里斯托尔（2005）[56] Mahato, G., Pal, A.K., Alhowaity, S., Abouelmagd, E.I., Kushvah, B.S.: 微行星带对 2+ 2 体限制性问题动力学的影响。《应用科学》**12**(1), 424 (2022)