arXiv:2601.12041v1 [math.GN] 17 Jan 2026

紧空间上的临界分割正则函数

RAFA-L FILIP ´OW、MA-LGORZATA KOWALCZUK、HUBERT KSIĄ ˙ZEK、ADAM KWELA 和 GRZEGORZ UCAL

Abstract. 我们研究由类 FinBW($\mathcal{I}$) 引出的序列紧致性的基于理想的细化。该类由满足以下条件的拓扑空间组成：每个序列都有一个由给定理想 $\mathcal{I}$之外的集合索引的收敛子列。本文的一个核心主题是临界理想的存在性；这些理想在 Katětov 序中的位置决定了一个固定空间类与相应 FinBW($\mathcal{I}$) 类之间的关系。基于早期通过此类理想刻画若干经典拓扑类的结果，我们将这一理论扩展至一个更广泛的框架，该框架以分割正则函数为基础，将普通收敛与其他非经典收敛概念（如 IP 收敛和 Ramsey 型收敛）统一起来。此外，我们还考察了与函数类相关的临界理想是否存在；这些函数类的研究动机源自 Mazurkiewicz 定理关于一致收敛子列的结论。

1. Introduction

引言中使用的概念和记号见第 2 节。

近年来，基于理想的经典收敛细化以及拓扑性质受到了广泛研究。其中一个概念是类 FinBW($\mathcal{I}$)（与理想 $\mathcal{I}$ on ω相关），它由所有具有如下性质的拓扑空间 X 组成：对于每个序列 $(x_n)_{n\in\omega}$ in X，都存在 $A \notin \mathcal{I}$，使得子序列 $(x_n)_{n\in A}$ 在 X ([14, 定义 1.1])中收敛。例如，FinBW(Fin) 与所有序列紧空间构成的类相同，其中 Fin 是 ω的所有有限子集构成的理想。

这一领域中的一个自然问题是，确定给定的拓扑空间类能否刻画为适当理想 $\mathcal{I}$对应的 FinBW($\mathcal{I}$)。

一个尤为有趣的问题是，对于给定的拓扑空间类 $\mathcal{C}$，是否存在一个临界理想 $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$，使其具有如下性质：给定理想 $\mathcal{J}$ 相对于 $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ 在 Katˇetov 序中的位置，决定了类 $\mathcal{C}$ 与 FinBW($\mathcal{J}$)之间的关系。文献中已研究过此类问题，例如参见 [4], [14] 和 [16]。部分结果如下。

定理1.1。

- Fin$\otimes$Fin $\leq_K \mathcal{I} \iff$ FinBW($\mathcal{I}$) 与所有有限空间组成的类一致。
- 以下条件等价。*(1)* Bl $\leq_K \mathcal{I}$和Fin $\otimes$Fin $\not\leq_K \mathcal{I}$。*(2)* FinBW($\mathcal{I}$)与所有无聊空间组成的类一致。
- conv $\not\leq_K \mathcal{I} \iff$ FinBW($\mathcal{I}$) 在度量空间的范畴中，与所有紧致度量空间组成的类一致。

Date：2026年1月21日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：54A20，03E75。次要分类：40A35。*Key words and phrases.* 理想、卷积理想、Katetov序、FinBW性质。第四位列名作者获得波兰国家科学中心项目OPUS第2024/53/B/ST1/02494号资助。

FinBW($\mathcal{I}$) 的定义基于普通收敛的概念。然而，还存在其他类型的收敛，不属于这一经典框架。例如，遍历理论及其他领域中出现的收敛，包括*IP*-收敛 （由 Furstenberg 和 Weiss [9] 引入）以及*R*-收敛 （见于 [1], [2] 和 [10]）。例如，[11], [12] 和 [13]运用这类收敛来定义某些拓扑空间类，即*Hindman* 空间 和 *Ramsey*空间。一般而言，仅使用普通收敛的语言无法充分描述这些收敛形式。

近来，作者在论文 [5], 中提出了一个统一框架（分割正则函数），在一种表述方式下，它可以用普通收敛来解释，同时也涵盖了这些其他非普通类型的收敛。

受这些进展的启发，本文旨在将定理1.1的结果推广到分割正则函数。这项工作将在第3、4和6节中展开。

在最后一节中，我们将探讨如何为具有受马祖凯维奇定理 [15], 启发的性质的函数类确定其临界理想。该定理指出，将任意一致有界的连续函数序列限制在某个完美集上后，便存在一个一致收敛子序列。

2. Preliminaries

本文中考虑的所有拓扑空间都假设为 Hausdorff。

回顾一下，序数 α 等于所有小于 α 的序数构成的集合。特别地，最小的无限序数 $\omega = \{0, 1, \dots\}$ 等于所有自然数 $\mathbb{N}$ 构成的集合，而每个自然数 $n = \{0, \dots, n-1\}$ 等于所有小于 n 的自然数组成的集合。利用这一对应关系，例如，我们可以用 $n \in k$ 代替 $n < k$，用 $n < \omega$ 代替 $n \in \omega$，或用 $A \cap n$ 代替 $A \cap \{0, 1, \dots, n-1\}$。

我们用 $[A]^{<\omega}$ 表示 A 的所有有限子集构成的族，用 $[A]^{\omega}$ 表示 A 的所有无限可数子集构成的族，并用 $\mathcal{P}(A)$ 表示 A 的所有子集构成的族。若对于任意不同的 $A, B \in \mathcal{A}$， $A \cap B$ 都是有限的，则称 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ 是 ω 上的几乎不交族。

2.1. 理想与分割正则函数。 非空集合 X 上的一个理想 是满足以下性质的一个族 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$:

(1) $\emptyset \in \mathcal{I}$ 且 $X \notin \mathcal{I}$; (2) 若 A, $B \in \mathcal{I}$ 则 $A \cup B \in \mathcal{I}$; (3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in \mathcal{I}$ 则 $A \in \mathcal{I}$; (4) $\mathcal{I}$ 包含 X的所有有限子集。

对于理想 $\mathcal{I}$，记作 $\mathcal{I}^+ = \{A \subseteq X : A \notin \mathcal{I}\}$，并称其为 $\mathcal{I}$的对偶理想。属于 $\mathcal{I}^+$ 的集合称为 $\mathcal{I}$-正集合。若对于每个无限 $A \subseteq X$，都存在一个无限 $B \in \mathcal{I}$ 使得 $B \subseteq A$，则理想 $\mathcal{I}$ 是高的（也称为稠密）。

例 2.1。

(1) Fin 是 ω的所有有限子集构成的理想。(2) $\mathrm{Fin}^2 = \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$ 是定义在 $\omega^2 = \omega \times \omega$ 上的理想，由$A \in \mathrm{Fin}^2 \iff \exists i_0 \in \omega \, \forall i \geq i_0 \, (|\{j \in \omega : (i, j) \in A\}| < \omega)$ 定义。(3) BI 是定义在 $\omega^3 = \omega \times \omega \times \omega$ 上的理想，由$A \in \mathrm{BI} \iff \exists i_0 \in \omega \, [\forall i < i_0 (\{(j, k) \in \omega^2 : (i, j, k) \in A\} \in \mathrm{Fin}^2) \wedge \forall i \geq i_0 \, (|\{(j, k) \in \omega^2 : (i, j, k) \in A\}| < \omega)]$.定义，该理想在 [14, 定义 4.1] 中引入。

理想 BI 与 $\mathcal{WT}$ 同构；作者在 [3], 中引入了该理想，并展示了它与弱紧几乎不交族的联系。

(4) conv 是 $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ 上的理想，由所有这样的 $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ 子集构成：这些子集可被 $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ 中有限个在 $[0,1]$ 中收敛的序列的值域所覆盖。

定义 2.2 ([5])。设 Λ 和 Ω 为可数无限集。设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的无限子集组成的非空族，满足对于每个 $F\in\mathcal{F}$ 和每个有限集 $K\subseteq\Omega$，都有 $F\setminus K\in\mathcal{F}$。若函数 ρ: $\mathcal{F}\to[\Lambda]^\omega$ 满足以下条件，则称其为分割正则：

(M)： $\forall E,\ F\in\mathcal{F}(E\subseteq F\implies\rho(E)\subseteq\rho(F))$;**(R)：** $\forall F\in\mathcal{F}\forall A,\ B\subseteq\Lambda(\rho(F)=A\cup B\implies\exists E\in\mathcal{F}(\rho(E)\subseteq A\vee\rho(E)\subseteq B))$;**(S)：** $\forall E\in\mathcal{F}\exists F\in\mathcal{F}($ $F\subseteq E\wedge\forall a\in\rho(F)\ \exists K\in[\Omega]^{<\omega}(a\notin\rho(F\setminus K)))$.

下面的命题揭示了分割正则函数与理想之间的关系。

命题 2.3 ([5, Proposition3.3])**.**

(1) 如果 ρ: $\mathcal{F}\to[\Lambda]^\omega$ 是分割正则的，那么 $\mathcal{I}_\rho=\{A\subseteq\Lambda\colon\forall F\in\mathcal{F}(\rho(F)\not\subseteq A)\}$ 是 Λ 上的一个理想。*(2)* 如果 $\mathcal{I}$ 是 Λ 上的一个理想，那么由 $\rho_{\mathcal{I}}(A)=A$ 给出的函数 $\rho_{\mathcal{I}}$: $\mathcal{I}^+\to[\Lambda]^\omega$ 是分割正则的，并且 $\mathcal{I}=\mathcal{I}_{\rho_{\mathcal{I}}}$.

上述命题表明，每个理想都可以用分割正则函数来编码；也就是说，对于理想 $\mathcal{I}$，存在分割正则函数 $\rho=\rho_{\mathcal{I}}$，使得 $\mathcal{I}=\mathcal{I}_\rho$。另一方面，并非每个分割正则函数都可以用理想来编码。例如，对于任意理想 $\mathcal{I}$，$\mathsf{FS}\neq\rho_{\mathcal{I}}$（命题 6.5 和 6.7]），其中分割正则函数 FS：$[\omega]^\omega\to[\omega]^\omega$ 定义为

$$\mathsf{FS}(D)=\{d_0+\cdots+d_n:n\in\omega,d_0,\dots,d_n\in D,d_i\neq d_j\text{for }i\neq j\},$$

以及理想

$$\mathcal{H}=\mathcal{I}_{\mathsf{FS}}=\{A\subseteq\omega:\forall D\in[\omega]^\omega\,(\mathsf{FS}(D)\not\subseteq A)\}$$

称为欣德曼理想 [8, p. 109]（另见 [11]）。

集合 $F\in\mathcal{F}$具有小增量，如果对于每个有限集 K，都有 $\rho(F)\setminus\rho(F\setminus K)\in\mathcal{I}_\rho$。如果对于每个 $E\in\mathcal{F}$，都存在 $F\in\mathcal{F}$，使得 $F\subseteq E$，并且 F 具有小增量，则称 ρ 具有小增量。

2.2. **P-型性质**。在本节中，$\mathcal{I}$是 ω上的一个理想，而 ρ: $\mathcal{F}\to[\Lambda]^\omega\text{with}\mathcal{F}\subseteq[\Omega]^\omega$ 是一个分割正则函数。

记作：

- $\rho\in P^-(\Lambda)$，如果对于任意递减序列 $\Lambda=A_0\supseteq A_1\supseteq\dots$，使得对每个 n 都有 $A_n\setminus A_{n+1}\in\mathcal{I}_\rho$，都存在 $F\in\mathcal{F}$，使得对于每个 $n\in\omega$，都存在一个有限集 K，满足 $\rho(F\setminus K)\subseteq A_n$。
- $\rho\in P^-$ 如果对于每个递减序列 $A_0\supseteq A_1\supseteq\dots$，满足 $A_0\in\mathcal{I}_\rho^+$，并且对于每个 n，都存在 $F\in\mathcal{F}$，使得 $\rho(F)\subseteq A_0$；且对于每个 $n\in\omega$，都存在一个有限集 K，满足 $\rho(F\setminus K)\subseteq A_n$。

如果 $\rho_{\mathcal{I}}\in P^-(\omega)$ ($\rho_{\mathcal{I}}\in P^-$)，那么我们分别记作 $\mathcal{I}\in P^-(\omega)$ ($\mathcal{I}\in P^-$)。因此，等价地，$\mathcal{I}\in P^-(\omega)$ 当且仅当对于每个递减序列 $\omega=A_0\supseteq A_1\supseteq\dots$，满足 $A_n\setminus A_{n+1}\in\mathcal{I}_\rho$，对于每个 n，都存在 $B\in\mathcal{I}^+$，使得对于每个 $n\in\omega$，都存在一个有限集 K，满足 $B\setminus K\subseteq A_n$。类似地，也可以表述 $\mathcal{I}\in P^-$。

不难证明，以下是 P^- 类性质的几种刻画，我们有时会在本文中使用。

命题 2.4。

(1) 对每个划分 $\{A_n : n \in \omega\}$ *of* ω，若 $A_n \in \mathcal{I}$ 对每个 n 都成立，则存在 $B \in \mathcal{I}^+$，使得对每个 $n \in \omega$，$B \cap A_n$ 都是有限的。*(2)* 对每个划分 $\{A_n : n \in \omega\}$ *of* Λ，若 $A_n \in \mathcal{I}_\rho$ 对每个 n 都成立，则存在 $F \in \mathcal{F}$，使得对每个 $n \in \omega$，都存在一个有限集 K，满足 $\rho(F \setminus K) \cap A_n = \emptyset$。*(3)* 对每个由 $\{A_n : n \in \omega\}$ 中两两不相交的 ω 的子集构成的族，若 $\bigcup\{A_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{I}$ 且对每个 n 都有 $A_n \in \mathcal{I}$，则存在 $B \subseteq \bigcup\{A_n : n \in \omega\}$，使得 $B \in \mathcal{I}^+$，并且对每个 $n \in \omega$，$B \cap A_n$ 都是有限的。*(4)* 对每个由 $\{A_n : n \in \omega\}$ 中两两不相交的 Λ 的子集构成的族，若 $\bigcup\{A_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{I}_\rho$ 且对每个 n 都有 $A_n \in \mathcal{I}_\rho$，则存在 $F \in \mathcal{F}$，使得对每个 $n \in \omega$，都存在一个有限集 K，满足 $\rho(F \setminus K) \cap A_n = \emptyset$。

2.3. **Kat˘etov 序**。设 $\mathcal{I}_1$ 和 $\mathcal{I}_2$ 分别是定义在 X 和 Y 上的理想。若存在函数 $f\colon X \to Y$，使得对于每个 $A \in \mathcal{I}_1^+$ 都有 $f[A] \in \mathcal{I}_2^+$，则称 $\mathcal{I}_1$ 在 *Kat˘etov* 序中高于 $\mathcal{I}_2$（简写为）。

设 $\rho_i\colon \mathcal{F}_i \to [\Lambda_i]^\omega$ 是分割正则的，且对每个 $i = 1$ 都有 $\mathcal{F}_i \subseteq [\Omega_i]^\omega$，2。若存在函数$f\colon \Lambda_1 \to \Lambda_2$，使得，则称 ρ_1 在 *Kat˘etov* 序中高于 ρ_2（简写为）

$$\forall F_1 \in \mathcal{F}_1\, \exists F_2 \in \mathcal{F}_2\, \forall K_1 \in [\Omega_1]^{<\omega}\, \exists K_2 \in [\Omega_2]^{<\omega}\, (\rho_2(F_2 \setminus K_2) \subseteq f[\rho_1(F_1 \setminus K_1)]).$$

We write $\rho_2 \approx_K \rho_1$ if both $\rho_2 \leq_K \rho_1$ and $\rho_1 \leq_K \rho_2$ hold.

2.4. **分割正则函数的更强稀疏性**。在本节中，我们提出定义 2.2 中性质 (S) 的一个强化版本，本文的一些结果将需要这一版本。

定义 2.5。设 $\rho\colon \mathcal{F} \to [\Lambda]^\omega$ with $\mathcal{F} \subseteq [\Omega]^\omega$ 是一个分割正则函数。我们称

(1) $\rho \in (S_1)$，如果对于每个 $E \in \mathcal{F}$，都存在满足 $F \subseteq E$ 的 $F \in \mathcal{F}$，使得对于每个 $A \in \mathcal{I}_\rho$，都存在满足 $\rho(G) \subseteq \rho(F) \setminus A$ 的 $G \in \mathcal{F}$，使得

$$\forall K \in [\Omega]^{<\omega}\, \exists L \in [\Omega]^{<\omega}\, (\rho(G \setminus L) \subseteq \rho(F \setminus K));$$

(2) $\rho \in (S_2)$，如果对于每个 $E \in \mathcal{F}$，都存在满足 $F \subseteq E$ 的 $F \in \mathcal{F}$，使得对于每个满足 $B \subseteq \rho(F)$ 的 $B \notin \mathcal{I}_\rho$，都存在满足 $\rho(G) \subseteq B$ 的 $G \in \mathcal{F}$，使得

$$\forall K \in [\Omega]^{<\omega}\, \exists L \in [\Omega]^{<\omega}\, (\rho(G \setminus L) \subseteq \rho(F \setminus K)).$$

命题 2.6. 设 $\rho\colon \mathcal{F} \to [\Lambda]^\omega$，其中 $\mathcal{F} \subseteq [\Omega]^\omega$ 是分割正则函数。

(1) 若 $\rho \in (S_2)$，则 $\rho \in (S_1)$。*(2)* 对每个理想 $\mathcal{I}$，都有 $\rho_{\mathcal{I}} \in (S_2)$。*(3)* 若 $\rho \in P^-$ 且具有小增量，则 $\rho \in (S_2)$。

证明。(1) 任取 $E \in \mathcal{F}$。设 $F \in \mathcal{F}$ 是 $\rho \in (S_2)$ 的一个见证。若 $A \in \mathcal{I}_\rho$，则$B = \rho(F) \setminus A \notin \mathcal{I}_\rho$，因此，定义 (S_2) 中的集合 G 适用于 (S_1)。

(2) 任取 $E \in \mathcal{I}^+$，令 $F = E$，并固定 E 的任意一个 $\mathcal{I}$-正子集 B。那么$G = B$ 适用，因为对所有有限集 K，$B \setminus K \in \mathcal{I}^+$ 且 $B \setminus K \subseteq E \setminus K$。

(3) 枚举集合 $\Omega = \{k_i : i \in \omega\}$ 并定义 $K_n = \{k_i : i < n\}$。任取$E \in \mathcal{F}$。由于 ρ 具有小增量，存在某个 $F \in \mathcal{F}, F \subseteq E$，使得对于每个 $n \in \omega$，都有$\rho(F) \setminus \rho(F \setminus K_n) \in \mathcal{I}_\rho$。取满足 $B \subseteq \rho(F)$ 的 $B \notin \mathcal{I}_\rho$，并对每个 $n \in \omega$定义$A_n = \rho(F \setminus K_n) \cap B$。于是，$(A_n)_{n\in\omega}$ 是一个递减序列，满足 $A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}_\rho$和 $A_0 \notin \mathcal{I}_\rho$。由于 $\rho \in P^-$，存在集合 $G \in \mathcal{F}$，使得$\rho(G) \subseteq A_0$，并且对于每个 $n \in \omega$，存在有限集 M_n，满足 $\rho(G \setminus M_n) \subseteq A_n$。于是，$\rho(G) \subseteq B$，并且对于每个 $i \in \omega$，我们有 $\rho(G \setminus M_i) \subseteq \rho(F \setminus K_i)$。□

2.5. 若干类拓扑空间。 称序列紧空间 X 为$boring$ （[14, 定义 3.21]），如果存在有限集 $F \subseteq X$，使得 X 中的每个单射序列都收敛到 F中的某个点。对于无限Hausdorff空间， X 是 boring，当且仅当它是有限个离散空间的一点紧化的不交并。

对于理想 $\mathcal{I}$ 在 ω上，我们用 FinBW($\mathcal{I}$) 表示所有满足以下条件的拓扑空间 X 所成的类：对于每个序列 $f\colon\ \omega \to X$，存在 $A \in \mathcal{I}^+$ 使得 $f\restriction A$ 收敛。我们称理想 $\mathcal{I}$ 具有 FinBW性质，如果 $[0,1] \in$ FinBW($\mathcal{I}$)。

对于分割正则函数 $\rho\colon\ \mathcal{F} \to [\Lambda]^\omega$，我们将 FinBW($\rho$) 定义为所有满足以下条件的拓扑空间 X 所成的类：对于每个序列 $f\colon\ \Lambda \to X$，存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $f\restriction \rho(F)$ ρ-收敛，即存在 $x \in X$，使得对于 x的每个邻域 U，都有一个有限集 K满足 $f[\rho(F \setminus K)] \subseteq U$。

3. Critical ρ for the class of all finite spaces

定理 3.1. 设 $\rho\colon\ \mathcal{F} \to [\Lambda]^\omega$ 是具有 $\mathcal{F} \subseteq [\Omega]^\omega$的分割正则函数。如果 $\rho \in (S_1)$，则以下条件等价：

(1) $\mathrm{FinBW}(\rho)$ 与所有有限空间组成的类重合，*(2)* $\omega+1 \notin \mathrm{FinBW}(\rho)$，其中序数 $\omega+1$ 被视为带有序拓扑的拓扑空间，*(3)* $\rho \notin P^-(\Lambda)$，*(4)* $\rho_{\mathsf{Fin}^2} \leq_K \rho$。

假设 $\rho \in (S_1)$ 仅用于证明蕴含关系 $(3) \implies (4)$。

证明。 (1) $\iff$ (3) 这在 [5, 定理 10.5(3)] 中得到证明。

(1) $\implies$ (2) 这是显然的。

(2) $\implies$ (3) 设 $f\colon \Lambda \to \omega+1$ 是 $\omega+1 \notin$ FinBW(ρ) 的一个见证。对每个 $\alpha \in \omega+1$，我们定义$A_\alpha = f^{-1}(\alpha)$。一旦我们证明族 $\{A_\alpha\colon\ \alpha \in \omega+1\}$是 $\rho \notin P^-(\Lambda)$ 的一个见证，证明便告完成。注意，对所有 $\alpha \in \omega+1$，都有 $A_\alpha \in \mathcal{I}_\rho$；否则，我们就能找到 $F \in \mathcal{F}$和 $\alpha \in \omega+1$，使得 $\rho(F) \subseteq A_\alpha$，从而 $f\restriction \rho(F)$ 为常值，因此是 ρ-收敛的。反设存在 $F \in \mathcal{F}$，使得对每个 α，都存在一个有限集 K_α，满足$\rho(F \setminus K_\alpha) \cap A_\alpha = \emptyset$。我们断言， $f\restriction \rho(F)$ 是 ρ-收敛到点 ω 的（这就完成了证明）。设 U 是点 ω的一个邻域。那么，存在 $n \in \omega$ 使得 $(n,\omega] \subseteq U$。于是，$K = \bigcup_{\alpha \leq n} K_\alpha$ 是有限的，并且对每个 $\alpha \leq n$，都有 $\rho(F \setminus K) \cap A_\alpha = \emptyset$，因此 $f[\rho(F \setminus K)] \subseteq U$。

(3) $\implies$ (4) 由于 $\rho \notin P^-(\Lambda)$，存在一个划分 $\{A_n\colon\ n \in \omega\}$ of Λ，使得对每个 $n \in \omega$ 都有 $A_n \in \mathcal{I}_\rho$，且对每个 $F \in \mathcal{F}$，都存在 $n \in \omega$，使得$\rho(F \setminus L) \cap A_n \neq \emptyset$对任意有限集 L成立。令 $f\colon \Lambda \to \omega^2$为一个单射，使得对每个 n都有 $f[A_n] \subseteq \{n\} \times \omega$。一旦证明 f是 $\rho_{\mathsf{Fin}^2} \leq_K \rho$的见证，证明便完成。

任取一个 $F \in \mathcal{F}$。为完成证明，我们需要找到 $B \notin \mathsf{Fin}^2$，使得对每个有限 K，都存在一个有限 L，满足 $B \setminus L \subseteq f[\rho(F \setminus K)]$。

由于 $\rho \in (S_1)$，存在 $E \in \mathcal{F}$，使得 $E \subseteq F$，并且对每个 $A \in \mathcal{I}_\rho$，都存在 $H_A \in \mathcal{F}$，满足 $\rho(H_A) \subseteq \rho(E) \setminus A$ 使得

$$\forall K \in [\Omega]^{<\omega}\ \exists L_{K,A} \in [\Omega]^{<\omega}\ (\rho(H_A \setminus L_{K,A}) \subseteq \rho(E \setminus K)).$$

设 $\Omega = \{k_i\colon\ i \in \omega\}$ 且 $K_n = \{k_i\colon\ i < n\}$ 对每个 $n \in \omega$成立。我们将通过对 $l \in \omega$ 进行归纳法来构造$G_l \in \mathcal{F}$、 $\{a^l_n\colon\ n \in \omega\} \subseteq \Lambda$ 和 $n_l \in \omega$，使其满足以下条件：

(1) $G_l \subseteq H_{\bigcup_{i<l} A_{n_i}}$ 对每个 l，(2) $a^l_n \in \rho(G_l \setminus L_{K_{l+n},}$ $\bigcup_{i<l} A_{n_i}) \cap A_{n_l}$ 对每个 l和 n，(3) $a^l_n \neq a^l_k$ 对每个 l 以及互不相同的 n， k，

(4) $n_l \neq n_k$ 对于不同的 l, k。

假设 $G_j \in \mathcal{F}$、$\{a^j_n : n \in \omega\} \subseteq \Lambda$ 和 $n_j \in \omega$ 已经为 $j < l$构造完成。由于 $H_{\bigcup_{i<l} A_{n_i}} \in \mathcal{F}$，我们可以找到 $G_l \in \mathcal{F}$，使得 $G_l \subseteq H_{\bigcup_{i<l} A_{n_i}}$，并且对于每个 $a \in \rho(G_l)$，都存在一个有限集 K，满足 $a \notin \rho(G_l \setminus K)$。令 n_l 满足：对于每个有限的 L，$\rho(G_l \setminus L) \cap A_{n_l} \neq \emptyset$。注意，对所有 $i < l$，$n_l \neq n_i$，因为 $\rho(G_l \setminus L) \subseteq \rho(G_l) \subseteq \rho(H_{\bigcup_{i<l} A_{n_i}}) \subseteq \rho(E) \setminus \bigcup_{i<l} A_{n_i}$。现在，我们将通过归纳法为 $n \in \omega$选取元素 a^l_n。假设我们已经为 $i < n$选好了 a^l_i。对于每个$i < n$，我们可以找到一个有限集 M^l_i，使得 $a^l_i \notin \rho(G_l \setminus (L_{K_{l+n},\, \bigcup_{i<l} A_{n_i}} \cup M^l_i)$。现在我们任取

$$a^l_n \in \rho\left(G_l \setminus \left(L_{K_{l+n}, \bigcup_{i<l} A_{n_i}} \cup \bigcup_{i<n} M^l_i\right)\right) \cap A_{n_l}.$$

归纳构造到此结束。

令 $B = \{f(a^l_n) : l, n \in \omega\}$。由于 f是单射，且对每个$l, n \in \omega$ 都有 $f(a^l_n) \in \{n_l\} \times \omega$（根据 $a^l_n \in A_{n_l}$），我们得到对每个 $l \in \omega$，$B \cap (\{n_l\} \times \omega)$ 都是无限的。因此，$B \notin \mathsf{Fin}^2$。任取有限集 K。设 j_0 满足 $K \subseteq K_{j_0}$。令$L = \{f(a^j_n) : n, j < j_0\}$。集合 L是有限的，因此只要证明 $B \setminus L \subseteq f[\rho(F \setminus K)]$，证明便告完成。任取 $f(a^l_n) \in B \setminus L$。于是，$l \geq j_0$或 $n \geq j_0$，所以 $l + n \geq j_0$，进而我们有

$$\begin{aligned} a^l_n &\in \rho(G_l \setminus L_{K_{l+n}, \bigcup_{i<l} A_{n_i}}) \subseteq \rho(H_{\bigcup_{i<l} A_{n_i}} \setminus L_{K_{l+n}, \bigcup_{i<l} A_{n_i}}) \\ &\subseteq \rho(E \setminus K_{l+n}) \subseteq \rho(E \setminus K_{j_0}) \subseteq \rho(F \setminus K), \end{aligned}$$

因此 $f(a^l_n) \in f[\rho(F \setminus K)]$。

(4) $\Longrightarrow$ (1) 容易看出，对于每个分割正则函数 ρ，每个有限空间都是 FinBW(ρ)。若 $\rho_{\mathsf{Fin}^2} \leq_K \rho$，则根据 [5, 定理 11.1 和命题 10.2]，，FinBW(ρ) $\subseteq$ FinBW(ρ_{Fin^2}) = FinBW(Fin^2)，而根据 [14, 定理 6.5]，FinBW(Fin^2) 与所有有限空间构成的类重合。□

推论 3.2 ([14, 定理 6.5 和命题 2.5])。设 $\mathcal{I}$ 是 ω 上的一个理想。以下条件等价。

(1) $\mathrm{FinBW}(\mathcal{I})$与所有有限空间构成的类重合。*(2)* $\mathcal{I} \notin P^-(\omega)$。*(3)* $\mathsf{Fin}^2 \leq_K \mathcal{I}$.

证明。取 $\rho = \rho_{\mathcal{I}}$，应用定理 3.1 以及 [5, 命题 6.5(2)、7.5(2b) 和 10.2(4)]。□

问题 3.3。是否存在一个分割正则函数 η，使得以下条件等价：

(1) FinBW(ρ) 与所有有限空间组成的类一致，(2) $\eta \leq_K \rho$

对于每个分割正则函数 ρ?

4. Critical ρ for the class of all boring spaces

首先，我们引入性质 $P^-(\Lambda)$ 的一个强化版本，它将用于刻画所有无聊空间组成的类。

定义 4.1。设 $\rho : \mathcal{F} \to [\Lambda]^\omega$ 是一个分割正则函数，且满足 $\mathcal{F} \subseteq [\Omega]^\omega$。我们称

(1) $\rho \in P^-_1(\Lambda)$，若 $\rho \in P^-(\Lambda)$；(2) $\rho \in P^-_2(\Lambda)$，若对于每个划分 $\{A_{i,j} : i, j \in \omega\}$，满足 $A_{i,j} \in \mathcal{I}_\rho$，对于每个 $i, j \in \omega$，都存在 $F \in \mathcal{F}$，使得 (a) $\forall i, j\, \exists K \in [\Omega]^{<\omega}$ ($\rho(F \setminus K) \cap A_{i,j} = \emptyset$)，(b) $\exists i_0\, \forall i > i_0\, \exists K \in [\Omega]^{<\omega}$ ($\rho(F \setminus K) \cap \bigcup_{j<\omega} A_{i,j} = \emptyset$)。

不难看出， $\rho \in P_2^-(\Lambda)$ 蕴含 $\rho \in P_1^-(\Lambda)$。

定理 4.2。 设 $\rho\colon \mathcal{F} \to [\Lambda]^\omega$ 是分割正则函数，且 $\mathcal{F} \subseteq [\Omega]^\omega$。

(1) 若 $\rho \in (S_1)$，则

$$\rho_{\mathsf{BI}} \leq_K \rho \iff \rho \notin P_2^-(\Lambda).$$

假设 $\rho \in (S_1)$ 仅用于证明蕴含关系“ $\Longleftarrow$ ”。

(2) 若 $\rho \in (S_2)$，则

$$\rho \in P_2^-(\Lambda) \iff \omega^2+1 \in \mathrm{FinBW}(\rho),$$

其中，序数 ω^2+1 被视为带有序拓扑的拓扑空间。假设 $\rho \in (S_2)$ 仅用于证明蕴含关系“ $\Longrightarrow$ ”。

证明。 (1, $\Longrightarrow$) 令 $f\colon \Lambda \to \omega^3$ 为 $\rho_{BI} \leq_K \rho$ 的一个见证。我们对每个 $i,j \in \omega$ 定义 $A_{i,j} = f^{-1}[\{i\} \times \{j\} \times \omega]$。一旦证明 $\{A_{i,j}\colon i,j \in \omega\}$ 是 $\rho \notin P_2^-(\Lambda)$ 的一个见证，证明便完成。

首先，我们注意到 $\{A_{i,j}\colon i,j \in \omega\}$ 是 Λ 的一个划分，并且 $A_{i,j} \in \mathcal{I}_\rho$，因为函数 f 是 $\rho_{BI} \leq_K \rho$ 的一个见证。现在，任取一个 $F \in \mathcal{F}$。由于 f 是 $\rho_{BI} \leq_K \rho$ 的一个见证，存在 $G \notin \mathsf{BI}$，使得对于每个有限的 K，都存在一个有限的 L，满足 $G \setminus L \subseteq f[\rho(F \setminus K)]$。由于 $G \notin \mathsf{BI}$，我们分两种情形讨论。

情形 *(1)*. $\{(j,\ k)\colon (i_0,\ j,\ k) \in G\} \notin \mathsf{Fin}^2$ 对某个 $i_0 \in \omega$成立。

那么，存在 j_0 使得 $D = \{k\colon (i_0, j_0, k) \in G\} \notin \mathsf{Fin}$。一旦我们证明了，对于任意有限的 K， $\rho(F \setminus K) \cap A_{i_0,j_0} \neq \emptyset$ 成立，这种情形就完成了。任取有限的 K。于是，我们可以找到有限的 L，使得 $G \setminus L \subseteq f[\rho(F \setminus K)]$。由于 D是无限的，我们可以找到 k_0，使得 $(i_0, j_0, k_0) \in G \setminus L$。于是，$(i_0, j_0, k_0) \in f[\rho(F \setminus K)],$，因此$A_{i_0,j_0} \cap \rho(F \setminus K) \supseteq f^{-1}[\{(i_0, j_0, k_0)\}] \cap \rho(F \setminus K) \neq \emptyset$。

情况 *(2)*。 $|\{(j,k)\colon (i,j,k) \in G\}| = \omega$对无限多个 $i \in \omega$成立。

一旦我们证明，对每个 i，都存在 $i_0 > i$使得 $\rho(F \setminus K) \cap \bigcup_{j<\omega} A_{i_0,j}$ 且对每个有限的 K都成立，这种情形便告结束。任取 $i \in \omega$。那么，存在 $i_0 > i$使得 $D = \{(j,k)\colon (i_0,j,k) \in G\}$ 是无限的。任取有限的 K。那么，我们可以找到有限的 L，使得 $G \setminus L \subseteq f[\rho(F \setminus K)]$。由于 $\{i_0\} \times D$ 是无限的，我们可以找到 $(j_0,k_0) \in D$，使得 $(i_0,j_0,k_0) \in G \setminus L$。于是，$(i_0,j_0,k_0) \in f[\rho(F \setminus K)],$，因此$\bigcup_{j<\omega} A_{i_0,j} \cap \rho(F \setminus K) \supseteq f^{-1}[\{(i_0,j_0,k_0)\}] \cap \rho(F \setminus K) \neq \emptyset$。

(1, $\Longleftarrow$) 令 $\{A_{i,j}\colon\ i,\ j \in \omega\}$ 作为 $\rho \notin P_2^-(\Lambda)$ 的见证。令 $f\colon\ \Lambda \to \omega^3$ 为一个单射，使得 $f[A_{i,j}] \subseteq \{(i,\ j)\} \times \omega$。一旦我们证明 f是 $\rho_{\mathsf{BI}} \leq_K \rho$ 的见证，证明就完成了。任取 $F \in \mathcal{F}$。我们将找到 $G \notin \mathsf{BI}$，使得对于每个有限集 K，都存在一个有限集 L，满足 $G \setminus L \subseteq f[\rho(F \setminus K)]$。令 $E \in \mathcal{F}$ 满足 $E \subseteq F$，并且对于每个 $a \in \rho(E)$，都存在一个有限集 K_a，满足 $a \notin \rho(E \setminus K_a)$。由于 $\{A_{i,j}\colon\ i,\ j \in \omega\}$ 是 $\rho \notin P_2^-(\Lambda)$ 的见证，我们得到以下情形。

情形 *(1)*。 对于每个 $i \in \omega$，存在 $i_0 > i$，使得 $\rho(E \setminus K) \cap \bigcup_{j<\omega} A_{i_0,j} \neq \emptyset$对于每个有限 K。

在此情形下，我们可以找到一个严格递增序列（i_n），使得对于每个$n \in \omega$ 以及每个有限 K，我们都有

$$\rho(E \setminus K) \cap \bigcup_{j<\omega} A_{i_n,j} \neq \emptyset.$$

令 $g\colon \omega \to \omega$ 为任意函数，使得对于每个 $n \in \omega$， $g^{-1}(\{n\})$ 都是无限的。令 $\Omega = \{m_i\colon i \in \omega\}$，并且对于每个 $n \in \omega$， $M_n = \{m_i\colon i < n\}$。现在，对于每个 $n \in \omega$，我们任取一个

$$a_n \in \rho\left(E \setminus \left(\bigcup_{k<n} K_{a_k} \cup M_n\right)\right) \cap \bigcup_{j<\omega} A_{i_{g(n)},j}.$$

令 $G = \{f(a_n) : n \in \omega\}$。由于 a_n 两两不同且 f 是单射，我们得到对于每个 $n \in \omega$，$G \cap (\{i_n\} \times \omega \times \omega)$ 都是无限的。因此，$G \notin \mathrm{BI}$。任取有限集 K，并令 i 满足 $K \subseteq M_i$。令 $L = \{f(a_n) : n < i\}$。那么，L 是有限的，并且对于每个 $f(a_n) \in G \setminus L$，我们有

$$f(a_n) \in f[\rho(E \setminus M_i)] \subseteq f[\rho(F \setminus K)],$$

因此 $G \setminus L \subseteq f[\rho(F \setminus K)]$。

情况（2）。情形（1）不成立，因此存在 i，j 使得$\rho(E \setminus K) \cap A_{i,\,j} \neq \emptyset$ 对每个有限集 K 均成立。

断言。存在一个无限集 $\{(i_n,\ j_n) :\ n \in \omega\}$ 整数对，使得$\rho(E \setminus K) \cap A_{i_n,\ j_n} \neq \emptyset$ 对每个 n 以及每个有限集 K均成立。

断言的证明。由于 $\rho \in (S_1)$，存在 $H \in \mathcal{F}$ 满足 $H \subseteq E$，使得对每个$A \in \mathcal{I}_\rho$，存在 $P \in \mathcal{F}$ 满足 $\rho(P) \subseteq \rho(H) \setminus A$，从而对每个有限集 K，存在一个有限集 L 满足 $\rho(P \setminus L) \subseteq \rho(H \setminus K)$。由于 $H \subseteq E$，只需证明集合 H 的断言，而不必证明 E的断言。

现在，我们构造 i_n，$j_n \in \omega$ 和 $P_n \in \mathcal{F}$，使得对于每个 n

(i) $\rho(H \setminus K) \cap A_{i_0,\ j_0} \neq \emptyset$ 对于每个有限集 K；(ii) $\rho(P_n) \subseteq \rho(H) \setminus \bigcup\{A_{i_l,j_l} :\ l \leq n\}$；(iii) 对于每个有限集 K，存在一个有限集 L，使得 $\rho(P_n \setminus L) \subseteq \rho(H \setminus K)$；(iv) $\rho(P_n \setminus K) \cap A_{i_{n+1},\ j_{n+1}} \neq \emptyset$ 对于每个有限集 K。

由于 $H \subseteq E$ 且情形 (1) 对 E不成立，我们找到 i_0，j_0 使得对于每个有限集 K，$\rho(H \setminus K) \cap A_{i_0,\ j_0} \neq \emptyset$。由于 $A_{i_0,\ j_0} \in \mathcal{I}_\rho$，存在满足条件 (ii) 和 (iii) 的 $P_0 \in \mathcal{F}$。

现在，假设已经为 $l \leq n$ 构造了 i_l、j_l 和 P_l。由于 $H \subseteq E$，且情形 (1) 不适用于 E，因此存在 k_0，使得对于每个 $k > k_0$，都存在一个有限集 K，满足 $\rho(H \setminus K) \cap \bigcup\{A_{k,j} : j \in \omega\} = \emptyset$；于是，根据条款 (iii)，存在一个有限集 L，满足 $\rho(P_n \setminus L) \cap \bigcup\{A_{k,j} : j \in \omega\} = \emptyset$。由于 $\{A_{i,j} :\ i,\ j \in \omega\}$ 是 $\rho \notin P_2^-(\Lambda)$ 的一个见证，因此存在 i_{n+1}、j_{n+1}，使得对于每个有限集 K，都有 $\rho(P_n \setminus K) \cap A_{i_{n+1},\ j_{n+1}} \neq \emptyset$。由于 $\bigcup\{A_{i_l,j_l} :\ l \leq n\} \in \mathcal{I}_\rho$，存在满足条款 (ii) 和 (iii) 的 $P_{n+1} \in \mathcal{F}$。这就完成了 i_n、j_n 和 P_n 的构造。

现在注意到，根据 (ii) 和 (iv)，$\{(i_n,\ j_n) : n \in \omega\}$ 是无限的。为证明序列 (i_n, j_n) 满足断言中的要求，反设存在 n和一个有限集 K，使得 $\rho(H \setminus K) \cap A_{i_n,\ j_n} = \emptyset$。根据 (i)，我们知道 $n \geq 1$；根据 (iii)，存在一个有限集 L，使得 $\rho(P_{n-1} \setminus L) \cap A_{i_n,\ j_n} = \emptyset$，这与 (iv) 矛盾。□

现在，证明过程与前一种情形的证明类似。不过，为求完整起见，我们在此稍作修改后给出证明。设 $g : \omega \to \omega$ 是任意函数，使得对每个 $n \in \omega$，$g^{-1}(\{n\})$ 都是无限的。令 $\Omega = \{m_i : i \in \omega\}$，并对每个 $n \in \omega$，令 $M_n = \{m_i : i < n\}$。现在，对每个 $n \in \omega$，我们任取

$$a_n \in \rho\left(E \setminus \left(\bigcup_{k<n} K_{a_k} \cup M_n\right)\right) \cap A_{i_{g(n)},j_{g(n)}}.$$

令 $G = \{f(a_n) :\ n \in \omega\}$。由于 a_n 两两不同且 f 是单射，我们得到：对于每个 $n \in \omega$，$G \cap (\{(i_n, j_n)\} \times \omega)$ 都是无限的。我们分两种情形讨论。

情形 *(a)*。若 $\{i_n :\ n \in \omega\}$ 是有限的，则存在 i 使得 $C = \{n :\ i_n = i\}$ 是无限的。于是，$\{j_n : n \in C\}$ 是无限的，因此对于每个 $n \in C$，$G \cap (\{(i, j_n)\} \times \omega)$ 都是无限的。因而，$G \notin \mathrm{BI}$。

情形 *(b)*。若 $\{i_n :\ n \in \omega\}$ 是无限的，那么对于每个$n \in \omega$，$G \cap (\{i_n\} \times \omega \times \omega)$都是无限的。因此，$G \notin \mathrm{BI}$。

任取有限集 K，并令 i 满足 $K \subseteq M_i$。令 $L = \{f(a_n)\colon\ n < i\}$。那么，$L$ 是有限的，并且对于每个 $f(a_n) \in G \setminus L$，我们都有

$$f(a_n) \in f[\rho(E \setminus M_i)] \subseteq f[\rho(F \setminus K)],$$

因此 $G \setminus L \subseteq f[\rho(F \setminus K)]$。

(2, $\Longrightarrow$) 令 $f\colon\ \Lambda \to \omega^2+1$。我们需要找到某个 $F \in \mathcal{F}$，使得 $f \restriction \rho(F)$ 是ρ-收敛的。若存在某个 $\alpha \in \omega^2+1$，满足 $f^{-1}(\alpha) \notin \mathcal{I}_\rho$，那么存在$F \in \mathcal{F}$使得 $\rho(F) \subseteq f^{-1}(\alpha)$，因此 $f \restriction \rho(F)$ 是常数，故为 ρ- 收敛。现在，假设对于每个 $\alpha \in \omega^2+1$，$f^{-1}(\alpha) \in \mathcal{I}_\rho$。注意，若一个序数$\alpha \in \omega^2$，则存在某个 $i, k \in \omega$，使得 $\alpha = \omega \cdot i + k$。我们通过 $A_{0,0} = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\omega^2)$，并在 $k \neq 0$ 或 $l \neq 0$ 时令 $A_{i,k} = f^{-1}(\omega \cdot i + k)$，来定义 Λ 的一个划分 $(A_{i,k})_{i,k\in\omega}$。于是，对于每个 i, k，都有 $A_{i,k} \in \mathcal{I}_\rho$。由于 $\rho \in P_2^-(\Lambda)$，存在 $E \in \mathcal{F}$ 使得

(1) $\forall i,\ k\, \exists K \in [\Omega]^{<\omega}\, (\rho(E \setminus K) \cap A_{i,\ k} = \emptyset)$，(2)
$\exists i_0\, \forall i > i_0\, \exists K \in [\Omega]^{<\omega}\, (\rho(E \setminus K) \cap \bigcup_{k<\omega} A_{i,\ k} = \emptyset)$。

由于 $\rho \in (S_2)$，存在 $F \in \mathcal{F}$，$F \subseteq E$ 使得对于每个 $B \notin \mathcal{I}_\rho$，满足$B \subseteq \rho(F)$的，都存在 $G \in \mathcal{F}$满足 $\rho(G) \subseteq B$，使得

$$\forall K \in [\Omega]^{<\omega}\, \exists L \in [\Omega]^{<\omega}\, (\rho(G \setminus L) \subseteq \rho(F \setminus K)).$$

情形 *(1)*。 $B = \rho(F) \cap \bigcup_{k<\omega} A_{i_0,\ k} \notin \mathcal{I}_\rho$ 对于某个 $i_0 \in \omega$。

设 $G \in \mathcal{F}$ 使得 $\rho(G) \subseteq B$ 且

$$\forall K \in [\Omega]^{<\omega}\, \exists L \in [\Omega]^{<\omega}\, (\rho(G \setminus L) \subseteq \rho(F \setminus K)).$$

我们将证明 $f \restriction \rho(G)$ ρ-收敛于 $\omega \cdot (i_0+1)$。设 U为 $\omega \cdot (i_0+1)$ 的一个邻域。于是，存在 k_0 使得 $[\omega \cdot i_0 + k_0, \omega \cdot (i_0+1)] \subseteq U$。对于每个 $k < k_0$，我们取一个有限集 K_k 使得 $\rho(E \setminus K_k) \cap A_{i_0,\ k} = \emptyset$。由于 $K = \bigcup_{k<k_0} K_k$是有限的，存在一个有限集 L 使得 $\rho(G \setminus L) \subseteq \rho(F \setminus K)$。于是，

$$\rho(G \setminus L) \cap \bigcup_{k<k_0} A_{i_0,k} \subseteq \rho\,(F \setminus K) \cap \bigcup_{k<k_0} A_{i_0,k} \subseteq \rho\,(E \setminus K) \cap \bigcup_{k<k_0} A_{i_0,k} = \emptyset,$$

因此 $f[\rho(G \setminus L)] \subseteq [\omega \cdot i_0 + k_0, \omega \cdot (i_0+1)] \subseteq U$。

情况 (2) 。 $\rho(F) \cap \bigcup_{k<\omega} A_{i,\ k} \in \mathcal{I}_\rho$ 对每个 $i \in \omega$ 均成立。

对每个 $i > i_0$，都存在一个有限集 K_i，使得 $\rho(E \setminus K_i) \cap \bigcup_{j<\omega} A_{i,\ j} = \emptyset$。令

$$B = \bigcup_{i>i_0} \left(\rho(F) \cap \bigcup_{k<\omega} A_{i,k} \right).$$

由于 $B \notin \mathcal{I}_\rho$（因为 $B = \rho(F) \setminus \bigcup_{i \le i_0} (\rho(F) \cap \bigcup_{k<\omega} A_{i,\ k})$ ）且 $B \subseteq \rho(F)$，存在$G \in \mathcal{F}$ 使得 $\rho(G) \subseteq B$ 并且

$$\forall K \in [\Omega]^{<\omega}\, \exists L \in [\Omega]^{<\omega}\, (\rho(G \setminus L) \subseteq \rho(F \setminus K)).$$

我们将证明 $f \restriction \rho(G)$ ρ-收敛到 ω^2。令 U 为 ω^2 的邻域。于是，存在 j_0 使得 $[\omega \cdot j_0, \omega^2] \subseteq U$。若 $j_0 < i_0$，则 $\rho(G) \subseteq \bigcup_{i>i_0} \bigcup_{k<\omega} A_{i,\ k}$，因此 $f[\rho(G)] \subseteq [\omega \cdot i_0, \omega^2] \subseteq [\omega \cdot j_0, \omega^2] \subseteq U$。现在，假设$j_0 \ge i_0$。由于 $K = \bigcup_{i_0<i<j_0} K_i$ 是有限的，存在一个有限集 L，使得 $\rho(G \setminus L) \subseteq \rho(F \setminus K)$。接着，

$$\begin{aligned} f[\rho(G \setminus L)] &\subseteq f[\rho(F \setminus K)] \subseteq f[\rho(E \setminus K)] \\ &\subseteq f\left[\rho(E \setminus K) \cap \bigcup_{i_0<i<j_0} \bigcup_{k<\omega} A_{i,k}\right] \cup f\left[\rho(E \setminus K) \cap \bigcup_{i \ge j_0} \bigcup_{k<\omega} A_{i,k}\right] \\ &= \emptyset \cup f\left[\rho(E \setminus K) \cap \bigcup_{i \ge j_0} \bigcup_{k<\omega} A_{i,k}\right] \subseteq [\omega \cdot j_0, \omega^2] \subseteq U. \end{aligned}$$

(2, $\Longleftarrow$) 任取一个划分 $\{A_{i,j}:\ i,\ j\in\omega\}$ 满足以下条件的 $\Lambda:\ A_{i,\ j}\in\mathcal{I}_\rho$ 对每个$i,\ j$。令 $f:\Lambda\to\omega^2+1$为一个函数，使得 $f[A_{i,j}]\subseteq\{\omega\cdot i+j\}$对每个 $i,\ j$均成立。由于 $\omega^2+1\in$ FinBW(ρ), 存在 $F\in\mathcal{F}$，使得 $f\restriction\rho(F)$ 收敛于 $p\in\omega^2+1$，且收敛方式为 ρ-收敛。我们分三种情形讨论。

情形（*1*）。 $p=\omega^2$。

任取 $i\in\omega$。于是， $U=(\omega\cdot(i+1)\ \omega^2]$ 是 p的一个开邻域，因此存在一个有限的 K，使得 $f[\rho(F\setminus K)]\subseteq U$。因此， $\rho(F\setminus K)\cap\bigcup_{j<\omega}A_{i,\ j}=\emptyset$。

情形（*2*）。 $p=\omega\cdot i_0$ 对于某个 $i_0\in\omega\setminus\{0\}$。

任取 $i\neq i_0-1$ 和 $j\in\omega$。于是， $U=(\omega\cdot(i_0-1)+j,\ \omega\cdot i_0]$ 是 p的一个开邻域，因此存在一个有限的 K，使得 $f[\rho(F\setminus K)]\subseteq U$。因此，$\rho(F\setminus K)\cap\bigcup_{j<\omega}A_{i,\ j}=\emptyset$ 且 $\rho(F\setminus K)\cap A_{i_0-1,\ j}=\emptyset$。

情形 *(3)*。 $p=0$ 或 $p=\omega\cdot i_0+j_0$ 对某个 $i_0\in\omega$ 和 $j_0\in\omega\setminus\{0\}$成立。

在这种情形下， $U=\{p\}$ 是 p的一个开邻域，因此存在一个有限的 K，使得 $f[\rho(F\setminus K)]\subseteq U$。如果 $p=0$，我们得到 $\rho(F\setminus K)\subseteq A_{0,\ 0}$，因此$A_{0,\ 0}\notin\mathcal{I}_\rho$，这与假设矛盾。同理，如果对某个 $i_0\in\omega$ 和 $j_0\in\omega\setminus\{0\}$， $p=\omega\cdot i_0+j_0$ 成立，我们得到 $\rho(F\setminus K)\subseteq A_{i_0,\ j_0}$，因此$A_{i_0,\ j_0}\notin\mathcal{I}_\rho$，再次导出矛盾。□

回忆一下，序列紧空间 X 称为$boring$ （[14, 定义 3.21]），如果存在一个有限集 $F\subseteq X$，使得 X 中的每个单射序列都收敛到 F中的某个点。

定理 4.3。 设 $\rho:\ \mathcal{F}\to[\Lambda]^\omega$ 是分割正则的。若 $\rho\in(S_2)$，则以下条件等价。

(1) $\rho_{\mathsf{BI}}\leq_K\rho$ 和 $\rho_{\mathsf{Fin}^2}\not\leq_K\rho$。*(2)* $\rho\in P_1^-(\Lambda)$和 $\rho\notin P_2^-(\Lambda)$。

(3) $\mathrm{FinBW}(\rho)$ 与所有无聊空间组成的类一致。

证明。 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) 由定理 3.1 和 4.2 可知。

(2) $\Longrightarrow$ (3) 首先，我们证明没有非无聊空间属于 FinBW(ρ)。设 X 是一个非无聊空间。于是，利用 [14, 命题 3.2], ，我们可以选取互不相同的点$x_i\in X$，对于 $i\in\Lambda$，以及收敛到 x_i的单射序列 $(x_{i,j})_{j\in\Lambda}$，分别成立。由于 $\rho\notin P_2^-(\Lambda)$，存在一个划分 $(A_{i,j})_{i,\ j\in\omega}$ 属于 Λ，见证了 $P_2^-(\Lambda)$不成立。定义函数 $f:\ \Lambda\to\omega^2$，使得对每个$\lambda\in A_{i,j}$， $f(\lambda)=(i,j)$；并定义函数 $g:\Lambda\to X$，使得 $g(\lambda)=x_{f(\lambda)}$。反设存在某个 $F\in\mathcal{F}$，使得 $g\restriction\rho(F)$ ρ-收敛到某个 $p\in X$。由于 $\rho\notin P_2^-(\Lambda)$，我们分两种情形讨论。

情形 *(1)*。对于每个 l，都存在某个 $i_l\geq l$，使得对所有有限的 K，

$$\rho(F\setminus K)\cap\bigcup_{j\in\omega}A_{i_l,j}\neq\emptyset$$

（特别是，当$\bigcup_{j\in\omega}A_{i_l,j}=f^{-1}[\{i_l\}\times\omega]$时， $f[\rho(F\setminus K)]\cap(\{i_l\}\times\omega)\neq\emptyset$。）那么我们可以选取 l_1,l_2，使得 $i_{l_1}\neq i_{l_2}$。因此， $x_{i_{l_1}}\neq x_{i_{l_2}}$，所以其中一个必定与 p 不同。不失一般性，设 $x_{i_{l_1}}\neq p$。由于 X 是 Hausdorff 的，我们可以取 $x_{i_{l_1}}$ 的邻域 U 和 p 的邻域 V，使它们不相交，并且不失一般性地假设 $V\cap\{x_{i_{l_1},j}:\ j\in\omega\}=\emptyset$。由 $g\restriction\rho(F)$ 收敛到 p 的 ρ-收敛性，存在某个有限的 K，使得 $g[\rho(F\setminus K)]\subseteq V$。然而，$f[\rho(F\setminus K)]\cap(\{i_{l_1}\}\times\omega)\neq\emptyset$，因此存在某个 $\lambda_0\in\rho(F\setminus K)$，使得 $f(\lambda_0)\in\{i_{l_1}\}\times\omega$。令 $j\in\omega$ 满足 $f(\lambda_0)=(i_{l_1},j)$。那么， $g(\lambda_0)=x_{f(\lambda_0)}=x_{i_{l_1},\ j}\notin V$，但另一方面， $g(\lambda_0)\in g[\rho(F\setminus K)]\subseteq V$，这就产生了矛盾。

情况（*2*）。情形（1）不成立，因此存在 $i_0,\ j_0$ 使得$\rho(F\setminus K)\cap A_{i_0,\ j_0}\neq\emptyset$ 对于每个有限集 K。

断言。 存在 i_1,j_1，使得 $(i_0,j_0)\neq(i_1,j_1)$，并且 $\rho(F\setminus K)\cap A_{i_1,j_1}\neq\emptyset$ 对每个有限集 K 都成立。

断言的证明。由于 $\rho \in (S_1)$，存在 $H \in \mathcal{F}$，满足 $H \subseteq F$，并且存在 $P \in \mathcal{F}$，满足$\rho(P) \subseteq \rho(H) \setminus A_{i_0,j_0}$，使得对每个有限集 K，都存在一个有限集 L，满足 $\rho(P \setminus L) \subseteq \rho(H \setminus K)$。由于 $H \subseteq F$ 且情形 (1) 不成立，存在 k_0，使得对每个 $k > k_0$，都存在一个有限集 K，满足 $\rho(H \setminus K) \cap \bigcup\{A_{k,j} \colon j \in \omega\} = \emptyset$，因此存在一个有限集 L，满足 $\rho(P \setminus L) \cap \bigcup\{A_{k,j} \colon j \in \omega\} = \emptyset$。由于 $\{A_{i,j} \colon i,\ j \in \omega\}$ 是 $\rho \notin P_2^-(\Lambda)$ 的一个见证，因此存在 i_1, j_1，使得 $\rho(P \setminus K) \cap A_{i_1,j_1} \neq \emptyset$ 对每个有限集 K 都成立。由于 $\rho(P) \subseteq \rho(H) \setminus A_{i_0,j_0}$，我们得到 $(i_0, j_0) \neq (i_1, j_1)$。此外，$\rho(F \setminus K) \cap A_{i_1,j_1} \neq \emptyset$ 对每个有限集 K 都成立。事实上，假设存在一个有限集K，满足 $\rho(F \setminus K) \cap A_{i_1,j_1} = \emptyset$。那么存在一个有限集 L，满足 $\rho(P \setminus L) \subseteq \rho(H \setminus K) \subseteq \rho(F \setminus K)$，所以 $\rho(P \setminus K) \cap A_{i_1,j_1} = \emptyset$，这就产生了矛盾。□

现在，证明过程与前一种情形的证明类似。不过，为了完整起见，我们在此稍作修改后给出证明。由于$x_{i_0,j_0} \neq x_{i_1,j_1}$，其中必有一个与 p不同。不失一般性，设$x_{i_0,j_0} \neq p$。取 p 的一个邻域 U，使得$x_{i_0,j_0} \notin U$。由 $g \restriction \rho(F)$ 收敛到 p的ρ-收敛性可知，存在某个有限的 K，使得 $g[\rho(F \setminus K)] \subseteq U$。然而，$\rho(F \setminus K) \cap A_{i_0,j_0} \neq \emptyset$，因此存在某个 $\lambda_0 \in \rho(F \setminus K)$，使得 $f(\lambda_0) = (i_0, j_0)$。于是，$g(\lambda_0) = x_{f(\lambda_0)} = x_{i_0,j_0} \notin U$，但另一方面，$g(\lambda_0) \in g[\rho(F \setminus K)] \subseteq U$，这就产生了矛盾。

现在我们证明，每个无聊空间都属于 FinBW(ρ)（在证明中，我们只会用到性质 $P_1^-(\Lambda)$）。设 X 是一个无聊空间。根据 [14, 命题 3.2],，存在 $X_i \subseteq X$，对于 $i \leq n$，使得 $X = \bigcup_{i \leq n} X_i$、$X_i \cap X_j = \emptyset$，只要 $i \neq j$，并且对于每个 i，都存在一个 $x_i \in X$，它是 X_i 中每个单射收敛序列的极限点。任取 $f \colon \Lambda \to X$。

如果存在某个 $x \in X$ 使得 $f^{-1}[\{x\}] \notin \mathcal{I}_\rho$，那么存在某个 $F \in \mathcal{F}$，满足 $\rho(F) \subseteq f^{-1}[\{x\}]$，因此 $f \restriction \rho(F)$ 收敛于 x，且收敛方式为 ρ。

现在，假设对于每个 $x \in X$，都有 $f^{-1}[\{x\}] \in \mathcal{I}_\rho$。由于 ρ 是分割正则的，存在 $i_0 \leq n$ 使得 $f^{-1}[X_{i_0}] \notin \mathcal{I}_\rho$。于是，$\{f^{-1}[\{x\}] \colon x \in X_{i_0}\}$ 是 $f^{-1}[X_{i_0}]$ 的一个划分，其各集合都属于 $\mathcal{I}_\rho$。由于 $\rho \in P_1^-(\Lambda)$，存在 $E \in \mathcal{F}$ 使得 $\rho(E) \subseteq f^{-1}[X_{i_0}]$，并且对于每个 $x \in X_{i_0}$，都存在某个有限的 K_x，满足 $\rho(E \setminus K_x) \cap f^{-1}[\{x\}] = \emptyset$。

我们断言，$f \restriction \rho(E)$ ρ收敛到x_{i_0}。设 U 是x_{i_0}的一个邻域。那么 $X_{i_0} \setminus U$ 必须是有限的（否则我们将得到 X_{i_0} 中的一个不收敛于 x_{i_0}的单射序列）。于是对于 $K = \bigcup_{x \in X_{i_0} \setminus U} K_x$，我们有 $\rho(E \setminus K) \cap f^{-1}[X_{i_0} \setminus U] = \emptyset$，因此 $f[\rho(E \setminus K)] \subseteq U$。

（3）$\Longrightarrow$（2）为引出矛盾，假设 $\rho \notin P_1^-(\Lambda)$或 $\rho \in P_2^-(\Lambda)$。如果 $\rho \notin P_1^-(\Lambda)$，那么根据定理 3.1，FinBW($\rho$)仅包含有限空间，这就产生了矛盾。如果 $\rho \in P_2^-(\Lambda)$，那么根据定理 4.2，$\omega^2 + 1 \in$ FinBW(ρ)。但是$\omega^2 + 1$ 不是无聊空间，矛盾。□

推论 4.4 ([14, 定理 6.5 和命题 4。4])。设 $\mathcal{I}$ 是 ω上的一个理想。以下条件等价。

(1) $\mathrm{FinBW}(\mathcal{I})$与所有无聊空间组成的类一致。*(2)* $\mathsf{BI} \leq_K \mathcal{I}$ 和 $\mathsf{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I}$.

证明。取 $\rho = \rho_{\mathcal{I}}$ 并应用定理 4.3 以及 [5, 命题 6.5(2)、7.5(2b) 和 10.2(4)]。□

问题 4.5。是否存在分割正则函数 η_1 和 η_2，使得以下条件等价

(1) FinBW(ρ) 与所有无聊空间组成的类相同。(2) 对每个分割正则函数 ρ，$\eta_2 \leq_K \rho$ 和 $\eta_1 \not\leq_K \rho$?

5. Brand-new class of partition regular functions

如果对每个分割正则函数 ρ，都存在一个理想 $\mathcal{J}$，使得 $\rho \approx_K \rho_{\mathcal{J}}$，那么就可以由推论 3.2（分别为推论 4.4）推出定理 3.1（分别为定理 4.3）。然而，正如预备知识中提到的，分割正则函数 FS 满足 FS $\neq \rho_{\mathcal{J}}$，对任意理想 $\mathcal{J}$都成立；由证明可知，“$\neq$”可以替换为“$\not\approx_K$”。下面我们给出一组此类分割正则函数的其他例子（命题 5.4）。

定义 5.1. 设 $\mathcal{I}$ 是 ω 上的一个理想，$\mathcal{A} = \{A_\alpha$ 是 ω 上的一个几乎不交族，$\mathcal{A} = \{A \setminus K : A \in \mathcal{A}, K \in [\omega]^{<\omega}\}$，且 $\mathcal{I}^+ = \{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$。设$\{P_n : n \in \omega\}$ 是 ω 的一个划分，使得对每个 $n \in \omega$，都有 $P_n \in \mathcal{I}$。我们定义一个函数 $\rho^{(\mathcal{I})} : \mathcal{A} \to [\omega]^\omega$，如下:

$$\rho^{(\mathcal{I})}(A_\alpha \setminus K) = B_\alpha \setminus \bigcup\{P_n : n < \max(K \cap A_\alpha)\}$$

约定 $\max \emptyset = 0$。$\rho^{(\mathcal{I})}$ 的定义取决于族 $\mathcal{A}$、$\{B_\alpha$ 的枚举：$\alpha < \mathfrak{c}\}$ 以及划分 $\{P_n : n \in \omega\}$，但为简便起见，我们只记作 $\rho^{(\mathcal{I})}$。

命题 5.2。对于每个理想 $\mathcal{I}$,

(1) $\rho^{(\mathcal{I})}$ 是分割正则的，*(2)* $\mathcal{I}_{\rho^{(\mathcal{I})}} = \mathcal{I}$，*(3)* $\rho^{(\mathcal{I})}$ 具有小增量，*(4)* 若 $\mathcal{I} \in P^-$，则 $\rho^{(\mathcal{I})} \in P^-$（在命题 *5.3* 中，我们将证明一般情况下无法逆转这一蕴含），*(5)* $\rho^{(\mathcal{I})} \in (S_2)$。

证明。(1) 由于 $\overline{\mathcal{A}}$是 ω 的无限子集构成的非空族，并且对于每个 $F \in \mathcal{A}$ 和有限集 $\overline{K}$，都有 $F \setminus \overline{K} \in \mathcal{A}$，我们只需证明 $\rho^{(\mathcal{I})}$ 满足定义 2.2 中的性质 (M)、(R) 和 (S)。

(M) 任取$\mathcal{A}$中的两个不同元素，例如 $\overline{A}_\alpha$ 和 A_β，其中 α，β 以及某个有限 K_1, K_2，使得 $A_\alpha \setminus K_1 \subseteq A_\beta \setminus K_2$。由于 $\mathcal{A}$ 是一个几乎不交族，$\alpha = \beta$。注意，若 $A_\alpha \setminus K_1 \subseteq A_\alpha \setminus K_2$，则 $\max(K_1 \cap A_\alpha) \geq \max(K_2 \cap A_\alpha)$。由此可得

$$B_\alpha \setminus \bigcup_{n<\max(K_1\cap A_\alpha)} P_n \subseteq B_\alpha \setminus \bigcup_{n<\max(K_2\cap A_\alpha)} P_n.$$

（R）任取 α 和任意有限集 K，使得 $C \cup D = B_\alpha \setminus \bigcup_{n<\max(K\cap A_\alpha)} P_n$，其中某个 $C, D \in [\omega]^\omega$。由于 $B_\alpha \notin \mathcal{I}$，且对所有 n 都有 $P_n \in \mathcal{I}$，因此 $C \notin \mathcal{I}$ 或 $D \notin \mathcal{I}$。不失一般性，假设 $D \notin \mathcal{I}$。那么，对某个 β 和 $\rho^{(\mathcal{I})}$，有 $D = B_\beta \ (A_\beta) \ = B_\beta \subseteq D$.

（S）任取 α 和任意有限集 K_1。我们需要找到 β 和一个有限集 K_2，满足 $A_\beta \setminus K_2 \subseteq A_\alpha \setminus K_1$，使得对于任意元素 $x \in B_\beta \setminus \bigcup_{n<\max(K_2\cap A_\beta)} P_n$，都存在某个有限集 L，使得 $x \notin B_\beta \setminus \bigcup_{n<\max((K_2\cup L)\cap A_\beta)} P_n$。如上面的证明所示，为使第一个包含关系成立，$\alpha$ 必须等于 β。令 $K_2 = K_1$。任取 $x \in B_\beta \setminus \bigcup_{n<\max(K_2\cap A_\beta)} P_n$。由于 $(P_n)_n$ 是 ω 的一个划分，因此存在某个 n_0，使得 $x \in P_{n_0}$。选取 $n_1 \in A_\beta$，满足 $\max(K_2 \cup \{n_0\}) < n_1$，并令 $L = n_1 + 1$。那么，L 即为所求。

(2) 显然。

(3) 任取 α 和任意有限集 L。我们将证明集合 $A_\alpha \setminus L$ 的增积很小。任取有限集 K，并注意到

$$\left(B_\alpha \setminus \bigcup_{n<\max(L\cap A_\alpha)} P_n\right) \setminus \left(B_\alpha \setminus \bigcup_{n<\max((L\cup K)\cap A_\alpha)} P_n\right)$$
$$\subseteq B_\alpha \cap \bigcup_{n<\max((K\setminus L)\cap A_\alpha)} P_n \in \mathcal{I} = \mathcal{I}_{\rho(\mathcal{I})}.$$

(4) 任取属于 $\mathcal{I}_{\rho(\mathcal{I})}$ 的不相交集合 $(A_n)_{n\in\omega}$，使得 $\bigcup_{n\in\omega} A_n \notin \mathcal{I}_{\rho(\mathcal{I})}$。由于 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\rho(\mathcal{I})}$ 和 $\mathcal{I} \in P^-$，存在某个集合 $C \notin \mathcal{I}$，使得 $C \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_n$，并且对于每个 $n \in \omega$，都存在某个有限集 K_n，使得 $(C \setminus K_n) \cap A_n = \emptyset$。令$\alpha$ 满足 $B_\alpha = C$。任取 $n \in \omega$。令 $n_0 \in \omega$ 满足 $K_n \subseteq \bigcup_{i<n_0} P_i$。令 $L = \{\min(A_\alpha \setminus n_0)\}$。于是，

$$B_\alpha \setminus \bigcup_{i<\max(L\cap A_\alpha)} P_i \subseteq B_\alpha \setminus K_n = C \setminus K_n.$$

(5) 任取 α、有限集 M 和 $B \notin \mathcal{I}$，使得 $B \subseteq B_\alpha \setminus \bigcup_{n<\max(M\cap A_\alpha)} P_n$。于是，对于某个 β，有 $B = B_\beta$。任取有限集 K。我们希望找到某个有限集L，使得

$$B_\beta \setminus \bigcup_{n<\max(L\cap A_\beta)} P_n \subseteq B_\alpha \setminus \bigcup_{n<\max((M\cup K)\cap A_\alpha)} P_n.$$

由于 $B_\beta \subseteq B_\alpha$，只需满足条件：$\max(L\cap A_\beta) \geq \max((M\cup K)\cap A_\alpha)$。只需取某个 $a \in A_\beta$，使得 $L = \{a\}$ 满足 $a \geq \max((M \cup K) \cap A_\alpha)$。□

对于 ω 上的理想 $\mathcal{I}$，我们定义 $\omega \times \omega$ 上的理想 $\mathsf{Fin} \otimes \mathcal{I}$ 如下：

$$A \in \mathsf{Fin} \otimes \mathcal{I} \iff \{n \in \omega : \{k \in \omega : (n,k) \in A\} \notin \mathcal{I}\} \in \mathsf{Fin}.$$

对于 ω 上的理想 $\mathcal{I}$、ω 上的几乎不交族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ 以及枚举 $\mathcal{I}^+ = \{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$，记作 $\rho^{(\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I})}$，表示上述定义的函数，其中划分由每个 $n \in \omega$ 对应的 $P_n = \{n\} \times \omega$ 给出。

命题 5.3. 对于任意理想 $\mathcal{I}$ 上的 ω,

(1) $\mathsf{Fin} \otimes \mathcal{I} \notin P^-$,

(2) $\rho^{(\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I})} \in P^-$。

证明。 (1) 对每个 $n \in \omega$，取 $C_n = (\omega \setminus n) \times \omega$ 作为其不具备性质 P^- 的见证即可。

(2) 任取 $\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I}$-正集的递减序列 $(C_n)_{n\in\omega}$，使得对每个 n，差集 $C_n \setminus C_{n+1}$ 属于 $\mathsf{Fin} \otimes \mathcal{I}$。我们需要找到 α 和一个有限集 L，使得对每个 n，存在一个有限集 K_n，满足

$$B_\alpha \setminus \bigcup_{k<\max((K_n\cup L)\cap A_\alpha)} (\{k\} \times \omega) = B_\alpha \setminus (\max((K_n \cup L) \cap A_\alpha) \times \omega) \subseteq C_n.$$

对于每个 n，$C_n \notin$ 属于 $\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I}$，因此存在 $i_n > n$，使得

$$(C_n)_{(i_n)} = \{k : (i_n, k) \in C\} \notin \mathcal{I}.$$

取 L 为空集，并令 α 使得

$$B_\alpha = \bigcup_{n<\omega} \{i_n\} \times (C_n)_{(i_n)} \quad \text{and} \quad K = \{\min(A_\alpha \setminus i_n)\}.$$

然后，利用对于 $m > n$ 有 $C_m \subseteq C_n$ 这一事实，我们得到 $B_\alpha \setminus (\max(K_n\cap A_\alpha)\times\omega) \subseteq C_n$ 对每个 n 都成立。□

命题 5.4。 $\rho^{(\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I})} \not\approx_K \rho_{\mathcal{J}}$ 对于 ω 上任意的理想 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$。

证明。 我们有两种情形：(1) $\mathcal{J} \notin P^-(\omega)$，(2) $\mathcal{J} \in P^-(\omega)$。

情形（*1*）。若 $\mathcal{J} \notin P^-(\omega)$，则根据推论 3.2，不存在无限空间 $X \in \mathrm{FinBW}(\mathcal{J})$。然而，$\rho^{(\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I})} \in P^-(\omega\times\omega)$ 且 $\rho^{(\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I})} \in (S_1)$，因此根据定理 3.1，存在某个无限空间 $X \in \mathrm{FinBW}(\rho^{(\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I})})$。因此 $\mathrm{FinBW}(\rho^{(\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I})}) \not\subseteq \mathrm{FinBW}(\rho_{\mathcal{J}})$，故 $\rho_{\mathcal{J}} \not\leq_K \rho^{(\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I})}$ 根据定理 11.1 和命题 10.2]。

情况（*2*）。我们证明 $\rho^{(\mathsf{Fin}\otimes\mathcal{I})} \not\leq_K \rho_{\mathcal{J}}$。任取函数 $f\colon \omega \to \omega\times\omega$。情况（*2a*）. 存在某个 $i \in \omega$，满足 $f^{-1}[\{i\}\times\omega] \notin \mathcal{J}$.

于是，$f[f^{-1}[\{i\}\times\omega]] \in \mathrm{Fin}\otimes\mathcal{I}$。因此，对于任意 α 和任意有限 K，不可能有 $B_\alpha \setminus$（对于任意有限 L，$K\cup L$ 的最大值（$\cap A_\alpha$）$\times\omega \subseteq f[f^{-1}[\{i\}\times\omega]]$），所以 f 不能见证 Katˇetov 约化。

情形（*2b*）。对于所有 $i\in\omega$，$f^{-1}[\{i\}\times\omega] \in \mathcal{J}$。

于是，（$f^{-1}[\{i\}\times\omega]$）将 ω 划分为属于 $\mathcal{J}$ 的集合，并且由于$\mathcal{J} \in P^-$（ω），存在某个 $F \notin \mathcal{J}$，使得对于每个 i，都存在某个有限集 K_i，满足（$F\setminus K_i$）$\cap f^{-1}[\{i\}\times\omega] = \emptyset$。于是，$f[F\setminus K_i]\cap(\{i\}\times\omega) = \emptyset$，所以$f[F] \in \mathrm{Fin}\otimes\mathcal{I}$。因此，对于任意 α 和任意有限集 K，不可能有$B_\alpha\setminus$（对于任意有限集 L，$K\cup L$ 的最大值（$\cap A_\alpha$）$\times\omega\subseteq f[F]$），所以 f再次不能见证 Katˇetov 约化。□

6. Critical ρ for the class of all metric compact spaces

引理 6.1. 对于每个分割正则的 ρ 以及每个 $f\colon \Lambda\to[0,1]$，存在 $g\colon \Lambda\to[0,1]\cap\mathbb{Q}$，使得 g 是一个单射，并且

$\forall F\in\mathcal{F}\,\forall p\in[0,1](f\restriction\rho(F)$ 是 ρ-收敛到 $p \iff g\restriction\rho(F)$ 是 ρ-收敛到 $p)$。

证明。 不失一般性，我们假设 $\Omega = \Lambda = \omega$。

对于每个 $n\in\omega$，选取 $g(n)\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\setminus\{g(i)\colon i<n\}$，使得 $|f(n)-g(n)|<1/2^n$。我们将证明 g 满足所需条件。固定 $F\in\mathcal{F}$.

假设 $f\restriction\rho(F)$ 收敛到 p。固定一个 p 的开邻域 $(p-r,\ p+r)$。由于 $f\restriction\rho(F)$ 收敛到 p，存在一个有限集 K，使得$f[\rho(F\setminus K)]\subseteq(p-r/2,\ p+r/2)$。令 k 的选取满足 $1/2^k < r/2$。由于ρ 满足 (S)，存在一个有限集 K'，使得 $\rho(F\setminus K')\cap\{0,1,\dots,k\}=\emptyset$。于是，$g[\rho(F\setminus(K\cup K'))]\subseteq(p-r,\ p+r)$。因此，$g\restriction\rho(F)$ 收敛到 p。

同样，可以证明，如果 $g\restriction\rho(F)$ 是 ρ-收敛到 p，那么 $f\restriction\rho(F)$ 也会 ρ-收敛到 p。□

定理 6.2. 设 $\rho\colon \mathcal{F}\to[\Lambda]^\omega$ 是具有 $\mathcal{F}\subseteq[\Omega]^\omega$ 的分割正则函数。如果 $\rho\in P^-$ 且具有小增量，那么以下条件等价。

(1) $\mathrm{FinBW}(\rho)$ 与度量空间领域中所有紧致度量空间的类重合。*(2)* $[0,1]\in\mathrm{FinBW}(\rho)$。*(3)* $\rho_{\mathsf{conv}}\not\leq_K\rho$。

假设“$\rho\in P^-$”仅用于证明蕴含关系“$(3)\implies(2)$”。

证明。 (1) $\iff$ (2) 蕴含关系“$\implies$”显然；要证明逆向蕴含，只需注意到每个紧致度量空间都是康托尔空间的连续像，而后者与 $[0,1]$ 的一个闭子集同胚。

(2) $\implies$ (3) 假设 $\rho_{\mathsf{conv}}\leq_K\rho$。那么，根据 [5, 定理 11.1(1)] 可得 $\mathrm{FinBW}(\rho)\subseteq\mathrm{FinBW}(\rho_{\mathsf{conv}})$。根据 [5, 命题 10.2(4)]，我们还可得 $\mathrm{FinBW(conv)} = \mathrm{FinBW}(\rho_{\mathsf{conv}})$。由于 $[0,1]\notin\mathrm{FinBW(conv)}$ [16, 第 2 节 .7],，我们得到 $[0,1]\notin\mathrm{FinBW}(\rho)$。

(3) $\implies$ (2) 不妨设 $\Omega = \Lambda = \omega$。假设 $[0,1]\notin\mathrm{FinBW}(\rho)$。那么，存在 $f\colon \omega\to[0,1]$，使得对于任意 $F\in\mathcal{F}$，$f\restriction\rho(F)$ 都不 ρ-收敛。根据引理 6.1，不妨设

that $f\colon \omega \to [0,1]\cap\mathbb{Q}$。我们将证明 f 是 $\rho_{\mathsf{conv}} \leq_K \rho$的见证。令 $E_1 \in \mathcal{F}$。由于 ρ 具有小增量，存在 $F_1 \subseteq E_1$, $F_1 \in \mathcal{F}$，使得：对每个有限的 K，$\rho(F_1) \setminus \rho(F_1 \setminus K) \in \mathcal{I}_\rho$。

定义 $Z^{-1} = \rho(F_1)$，并注意到，对于每个有限的 K（如 $F_1 \subseteq E_1$），$\rho(F_1 \setminus K) \subseteq Z^{-1} \cap \rho(E_1 \setminus K)$。我们从构造 $x^n_m \in \omega$、$A^n \subseteq \omega$、$y^n \in [0,1]$、开集 U^n、$V^n \subseteq [0,1]$ 以及所有 n、$m \in \omega$ 开始，使其满足以下条件：

(1) $y^n \in V^n \subseteq U^n$；(2) $Z^n \subseteq Z^{n-1}$ 和 $Z^n \notin \mathcal{I}_\rho$；(3) $f[Z^n] \cap V^n = \emptyset$；(4) $(f(x^n_m))_{m\in A^n}$ 收敛到 y^n；(5) $x^n_m \in \rho(F_1 \setminus [0,m]) \cap Z^{n-1}$)；特别地，对于所有$n \in \omega$，$\rho(F_1 \setminus [0,m]) \cap Z^n \neq \emptyset$；(6) $y^i \neq y^j$，当 $i \neq j$.

在第 n 步中，对于每个 $m \in \omega$，我们选择 $x^n_m \in \rho(F_1 \setminus [0,m]) \cap Z^{n-1}$（根据 (5) 可以做到；若是 $n = 0$ 的情形，则根据 $\rho(F_1 \setminus [0,m]) \subseteq Z^{-1}$ 可以做到）。序列$f(x^n_m)_{m\in\omega}$有一个子序列 $f(x^n_m)_{m\in A^n}$收敛到某个 y^n。注意，由 (2) 可知，对于每个 m，我们有

$$Z^{n-1} \setminus \rho(F_1 \setminus [0,m]) \subseteq \rho(F_1) \setminus \rho(F_1 \setminus [0,m]) \in \mathcal{I}_\rho.$$

由于 ρ 是 P^-，存在 $G \in \mathcal{F}$ 使得 $\rho(G) \subseteq Z^{n-1}$，且对于每个 m，都存在k使得 $\rho(G \setminus [0,k]) \subseteq \rho(F_1 \setminus [0,m])$。然而，$f[\rho(G)]$ 并非 ρ-收敛，因此它不收敛到 y^n（相对于 ρ）。因此，存在一个包含y^n的开区间 U^n，使得对所有 k，我们都有 $f[\rho(G \setminus [0,k])] \not\subseteq U^n$.。回忆一下，对于每个 m，都存在 k使得 $\rho(G \setminus [0,k]) \subseteq \rho(F_1 \setminus [0,m]) \cap Z^{n-1}$。因此，对所有 m，我们也有$f[\rho(F_1 \setminus [0,m]) \cap Z^{n-1}] \not\subseteq U^n$.。由于 $\rho \in P^-$，我们知道存在 n_0使得集合

$$\{i \in Z^{n-1} : f(i) \notin (y^n - 1/n_0, y^n + 1/n_0)\} \in \mathcal{I}^+_\rho$$

（否则，$\rho \in P^-$会给出一个 ρ-序列，使其 ρ收敛于 y^n）。令 $V^n = U^n \cap (y^n - 1/n_0, y^n + 1/n_0)$，并令 $Z^n = \{i \in Z^{n-1} : f(i) \notin V^n\}$.

现在，我们将验证这个构造满足所有要求的条件。条目 (1)、(3)、(4) 以及 (2) 中的条件 $Z^n \subseteq Z^{n-1}$ 显然成立。为证明 $Z^n \notin \mathcal{I}_\rho$，注意到 $Z^n \supseteq \{i \in Z^{n-1} : f(i) \notin (y^n - 1/n_0, y^n + 1/n_0)\} \in \mathcal{I}^+_\rho$。因此，(2) 成立。现在我们考虑条目 (5) 的第二部分（第一部分显然成立）。由于 $f[\rho(F_1 \setminus [0,m]) \cap Z^{n-1}] \not\subseteq U^n$，存在 $x \in \rho(F_1 \setminus [0,m]) \cap Z^{n-1}$使得$f(x) \notin U^n$。由于 $V^n \subseteq U^n$（根据 (1)），$f(x) \notin V^n$，因此 $x \in \rho(F_1 \setminus [0,m]) \cap Z^n$。最后，我们验证 (6)。反设存在某个 $k < n$，使得 $y^k = y^n$。由于 V^k 是 y^k 的一个开邻域（根据 (1)），且 $y^n = y^k$ 是序列 $(f(x^n_m))_{m\in A^n}$的极限，对于几乎所有 $m \in A^n$，都有 $f(x^n_m) \in V^k$。另一方面，根据 (2) 和 (5)，对所有 $m \in A^n$都有 $x^n_m \in Z^{n-1} \subseteq Z^k$，因此 $f[Z^k] \cap V^k \neq \emptyset$，这与 (3) 矛盾。

我们定义一个集合

$$X = \{x^n_m : n \in \omega, m \in A^n \setminus [0,n]\}.$$

令 $F_2 = f[X]$。那么，$F_2 \notin \mathsf{conv}$，因为 X 包含收敛到不同值的无限多个序列中的元素。现在，令 $K_1 \in \mathsf{Fin}$，并求出 $n \in \omega$ 使得 $K_1 \subseteq [0,n]$.。我们令

$$K_2 = f[\{x^k_m : k \leq n, m \in A^k \setminus [0,k], m \leq n\}] \in \mathsf{Fin}.$$

Then

$$\begin{aligned} F_2 \setminus K_2 =& f[\{x^k_m : k > n, m \in A^k \setminus [0,k]\}] \\ &\cup f[\{x^k_m : k \leq n, m > n, m \in A^k \setminus [0,k]\}] \subseteq f[\{x^k_m : k \in \omega, m > n\}]. \end{aligned}$$

由于 $\{x^k_m : k \in \omega,\ m > n\} \subseteq \rho(F_1 \setminus [0,n])$，根据 (5)，我们得出 $F_2 \setminus K_2 \subseteq f[\rho(F_1 \setminus [0,n])] \subseteq f[\rho(F_1 \setminus K_1)]$。□

定义 6.3。设 $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ 是一个几乎不交族，且 X 是所有满足下述条件的 $x \in ([0,1] \cap \mathbb{Q})^{\omega\times\omega}$ 的族：

- 对每个 $p \in [0,1]$，都存在其开邻域 U，使得 $x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega] \not\subseteq U$ 对所有 $n \in \omega$ 均成立，
- x是一个单射，
- $x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega] \not\in$ 对所有 $n \in \omega$ 都属于 conv。

固定一个枚举 $X = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$。

现在我们定义 $\overline{\mathcal{A}} = \{A \setminus K : A \in \mathcal{A},\ K \in [\omega]^{<\omega}\}$ 以及映射 $\rho^{[0,1]}: \mathcal{A} \to \overline{[[0,1] \cap \mathbb{Q}]^\omega}$，其定义为

$$\rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus K) = x_\alpha[(\omega \setminus [0, \max(A_\alpha \cap K)]) \times \omega].$$

命题 6.4。 $\rho^{[0,1]}$ 是一个分割正则函数，且有$\mathsf{conv} = \mathcal{I}_{\rho^{[0,1]}}$。

证明。由于 $\overline{\mathcal{A}}$ 是 ω 的一个非空无限子集族，并且对于每个 $F \in \mathcal{A}$ 和有限集 $\overline{K}$ 都有 $F \setminus \overline{K} \in \mathcal{A}$，我们只需证明 $\rho^{[0,1]}$ 满足定义 2.2 中的性质 (M)、(R) 和 (S)。

(M)：取某个 α的 $E = A_\alpha \setminus K_1$和 $F = A_\beta \setminus K_2$，$\beta$以及满足 $E \subseteq F$的有限集 K_1, K_2。由于 $\mathcal{A}$ 是一个几乎不交族，因此 $\alpha = \beta$，所以我们只需检验 $[0, \max(A_\alpha \cap K_2)] \subseteq [0, \max(A_\alpha \cap K_1)]$是否成立。令 $m = \max(A_\alpha \cap K_2)$。那么， $m \in A_\alpha \cap K_2$，所以 $m \notin A_\alpha \setminus K_2 = F \supseteq E = A_\alpha \setminus K_1$.因此 $m \notin A_\alpha \setminus K_1$，从而 $m \in A_\alpha \cap K_1$。

(S)：固定 $E \in \overline{\mathcal{A}}$。那么，存在 α 和有限集 L，使得 $E = A_\alpha \setminus L$。令 $F = E$。固定 $a \in \rho^{[0,1]}(F)$。我们需要找到有限集 K，使得 $a \notin x_\alpha[(\omega \setminus [0, \max(A_\alpha \cap (K \cup L))]) \times \omega]$。由于 x_α 是单射，我们知道存在唯一的 $i \in \omega \setminus [0, \max(A_\alpha \cap L)]$ 和 $j \in \omega$，使得 $x_\alpha(i, j) = a$.。接着，我们找到满足 $i_0 \geq i$ 的 $i_0 \in A_\alpha$，令 $K = \{i_0\}$，并注意到它正是所需的。

(R)：固定 α、有限集 K 和 A、$B \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1]$，使得 $\rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus K) = A \cup B$。由于 $\rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus K) = x_\alpha[(\omega \setminus [0, \max(A_\alpha \cap K)]) \times \omega] \notin \mathsf{conv}$，我们有 $A \notin \mathsf{conv}$ 或 $B \notin \mathsf{conv}$。不失一般性，假设 $A \notin \mathsf{conv}$。集合 A 有无限多个不同的极限点 $\{p_n : n \in \omega\}$。令 $(q_{n,i})_{i\in\omega}$ 为 $n \in \omega$ 的序列，它们属于 A，满足 $\lim_{i\to\infty} q_{n,i} = p_n$，且只要 $(n,i) \neq (n',i')$，就有 $q_{n,i} \neq q_{n',i'}$。定义$x: \omega \times \omega \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$，使得 $x(i,n) = q_{n,i}$（注意指标顺序的交换）。于是， $x \in X$，因此存在 β，使得 $x_\beta = x$，所以 $\rho^{[0,1]}(A_\beta) = x_\beta[\omega \times \omega] \subseteq A$。

（$\mathcal{I}_{\rho^{[0,1]}} = \mathsf{conv}$）由（R）的证明可知，$\mathsf{conv}^+ \subseteq \mathcal{I}^+_{\rho^{[0,1]}}$，反向包含显然。□

引理 6.5. $[0,1] \notin \mathrm{FinBW}(\rho^{[0,1]})$。

证明。定义 $f: [0,1] \cap \mathbb{Q} \to [0,1]$使得 $f(q) = q$。任取 $A_\alpha \setminus K \in \mathcal{A}$和 $p \in [0,1]$。由于 $x_\alpha \in X$，存在某个开集 $U \ni p$，使得对所有有限集 L，$f[\rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus (K \cup L))] = \rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus (K \cup L)) = x_\alpha[(\omega \setminus [0, \max(A_\alpha \cap (K \cup L))]) \times \omega] \not\subseteq U$.因此， $f \restriction \rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus K)$ 不收敛到 p（按 $\rho^{[0,1]}$）。 □

定理 6.6。对于分割正则函数 ρ，以下条件等价。

(1) $\mathrm{FinBW}(\rho)$ 在度量空间范围内与所有紧致度量空间的类重合。*(2)* $[0,1] \in \mathrm{FinBW}(\rho)$。*(3)* $\rho^{[0,1]} \not\leq_K \rho$。

证明。 (1) $\iff$ (2) 重复定理 6.2 的证明中的论证。

(2) $\implies$ (3) 假设 $\rho^{[0,1]} \leq_K \rho$. 那么，根据 [5, 定理 11.1(1)] ，我们知道 FinBW(ρ) $\subseteq$ FinBW($\rho^{[0,1]}$) 。根据引理 6.5，我们知道 $[0,1] \notin$FinBW($\rho^{[0,1]}$)，因此 $[0,1] \notin$ FinBW(ρ)。

(3) $\implies$ (2) 不失一般性，假设 $\Omega = \Lambda = \omega$。假设 $[0,1] \notin \mathbf{FinBW}[\rho]$。那么，存在 $f\colon\ \omega \to [0,1]$，使得对于任意 $F \in \mathcal{F}$， $f \restriction \rho(F)$ 都不是 ρ-收敛的。按引理 6.1 中的定义，令 g 。我们断言 g 是 $\rho^{[0,1]} \leq_K \rho$的一个见证。固定 $F \in \mathcal{F}$。

断言。 $g[\rho(F \setminus [0,n])] \notin$ 对每个 $n \in \omega$ 都收敛。

断言的证明。 反设不然。则， $g[\rho(F \setminus [0,n])] = \{z^i_j\colon\ j \in \omega,\ i < m\}$ 对于有限多个收敛序列 $(z^i_j)_{j\in\omega}$, $i < m$，它们的极限各不相同。定义

$$Z_i = g^{-1}[\{z^i_j : j \in \omega\}] \cap \rho(F \setminus [0,n])$$

并注意到 $\rho(F \setminus [0,n]) = \bigcup_{i<m} Z_i$，因此存在 $i < m$ 和 $G \in \mathcal{F}$，使得 $\rho(G) \subseteq Z_i$ ，因为 ρ 是分割正则的。但此时， $g \restriction \rho(G)$ 是收敛的，因此它也是 ρ-收敛的，这就产生了矛盾。□

利用上述断言，对每个 $n \in \omega$ ，归纳地找出序列 $(x^n_k)_{k\in\omega}$ ，使其收敛到某个 y_n，并满足以下条件：对每个 $i,\ j,\ k,\ n,\ m \in \omega$:

- $x^n_k \in g[\rho(F \setminus [0,n])]$,
- $n \neq m \implies y_n \neq y_m$,
- $(n,\ k) \neq (i,\ j) \implies x^n_k \neq x^i_j$。

现在我们考虑两种情形。

情形 *1.* 对于每个 $p \in [0,1]$ ，都存在 p 的一个邻域 U ，使得对于任意$n \in \omega$,

$$\{x^i_k : k \in \omega, i > n\} \nsubseteq U.$$

定义 $x\colon\ \omega \times \omega \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$，令 $x(n,\ k) = x^n_k$。那么，存在 α，使得$x_\alpha = x$. 我们固定 K_1，并令 K_2 为一个有限集，使得 $\max(A_\alpha \cap K_2) \geq \max K_1$。那么，

$$\begin{aligned}\rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus K_2) &= x[(\omega \setminus [0, \max(A_\alpha \cap K_2)]) \times \omega] \\ &\subseteq x[(\omega \setminus [0, \max(K_1)]) \times \omega] \subseteq g[\rho(F \setminus [0, \max K_1])] \subseteq g[\rho(F \setminus K_1)].\end{aligned}$$

情形 *2.* 存在 $p \in [0,1]$ ，使得对于 p 的每个邻域 U ，存在$n_U \in \omega$ ，满足

$$\{x^i_k : k \in \omega, i \geq n_U\} \subseteq U.$$

由于 $g \restriction \rho(F)$ 不收敛到 p，因此存在 p 的一个邻域 U，使得对于所有 $n \in \omega$， $g[\rho(F \setminus [0,n])] \nsubseteq U$。对于每个 $n \geq n_U$，我们选取 $a_n \in \rho(F \setminus [0,n])$，使得 $g(a_n) \notin U$。由于 ρ 是分割正则的，不失一般性，假设 a_n 两两不同。我们定义 $x\colon \omega \times \omega \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$，使得

$$x(n,k) = \begin{cases} g(a_{n+n_U}), & \text{if } k = 0, \\ x^{n+n_U}_k, & \text{if } k \neq 0. \end{cases}$$

断言。 $x \in X$。

断言的证明。 显然， $x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega] \notin$ 属于 conv，且 x 是单射（因为g是单射，对所有 $n \in \omega$， $g(a_{n+n_U}) \notin U$，而对所有 n， $x^{n+n_U}_k \in U$， $k \in \omega$）。令$q \in [0,1]$，并考虑两种情形。

情形 I: $q = p$。那么， $q \in U$ 且对于每个 $n \in \omega$,

$$g(a_{n+1+n_U}) = x(n+1, 0) \in x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega] \quad \text{and} \quad g(a_{n+1+n_U}) \notin U,$$

因此 $x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega] \nsubseteq U$.

情形 *II*: $q \neq p$。存在互不相交的开邻域 V, W，分别属于 p 和 q。那么，对于所有 $n \in \omega$:

$$x_1^{n_V+n+1+n_U} = x(n_V+n+1,1) \in x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega] \quad \text{and} \quad x_1^{n_V+n+1+n_U} \notin W. \ \square$$

由于 $x \in X$，存在 α 使得 $x_\alpha = x$. 固定 K_1 并令 K_2 为有限集，使得 $\max(A_\alpha \cap K_2) \geq \max K_1$。于是，

$$\begin{aligned}\rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus K_2) &= x[(\omega \setminus [0, \max(A_\alpha \cap K_2)]) \times \omega] \\ &\subseteq x[(\omega \setminus [0, \max(K_1)]) \times \omega] \subseteq g[\rho(F \setminus [0, \max K_1])] \subseteq g[\rho(F \setminus K_1)].\end{aligned}$$

$\square$

推论 6.7 ([16])。设 $\mathcal{I}$ 是 ω上的一个理想。以下条件等价。

(1) $\mathrm{FinBW}(\mathcal{I})$与度量空间领域中所有紧度量空间的类重合。*(2)* $\mathsf{conv} \not\leq_K \mathcal{I}$.

证明。取 $\rho = \rho_{\mathcal{I}}$ 并应用定理 6.6 以及 [5, 命题 7.5(2b) 和 10.2(4)]。$\square$

定理 6.8。$\rho^{[0,1]} \leq_K \rho_{\mathsf{conv}}$ 和 $\rho_{\mathsf{conv}} \not\leq_K \rho^{[0,1]}$。

证明。为导出矛盾，假设 $\rho^{[0,1]} \not\leq_K \rho_{\mathsf{conv}}$。那么，根据定理 6.6 和 [5, 命题 10. 2], , $[0,1] \in \mathrm{FinBW}(\rho_{\mathsf{conv}}) = \mathrm{FinBW}(\mathrm{conv})$，这与推论 6.7 矛盾。

现在，我们证明 $\rho_{\mathsf{conv}} \not\leq_K \rho^{[0,1]}$。任取 $f\colon \mathbb{Q} \cap [0,1] \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$。定义

$$I_n^L = \left(\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \text{and} \quad I_n^R = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right)$$

对所有 $n \in \omega$ 均成立。现在，对所有 $n \in \omega$，我们

(1) 选取一个收敛到某个 $z_n^L \in I_n^L$ 的序列 $Z_n^L \subseteq I_n^L \cap \mathbb{Q}$，(2) 取一个无限的 $Y_n^L \subseteq Z_n^L$，使得 $f[Y_n^L]$ 收敛到某个 y_n^L，(3) 定义 $H_n^L = \{h \in Y_n^L\colon\ |f(h) - y_n^L| \leq 1/n\}$，(4) 取一个收敛到 u^L 的子序列 $(y_n^L)_{n \in G^L}$，其中 G^L 是无限的。

类似地，我们按照 Z_n^R、z_n^R、Y_n^R、y_n^R、H_n^R、G^R和 u^R 的构造进行。

对于 $S \in \{L, R\}$，我们枚举

$$G^S = \{g_n^S : n \in \omega\} \quad \text{and} \quad H_n^S = \{h_i^{n,S} : i \in \omega\}.$$

定义 $x\colon\ \omega \times \omega \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 如下

$$x(2n,i) = h_i^{g_n^L, L} \quad \text{and} \quad x(2n+1,i) = h_i^{g_n^R, R}.$$

注意序列的以下性质 e x.

(1) x 是一个单射，因为 $H_n^L \subseteq Y_n^L \subseteq Z_n^L \subseteq I_n^L$（将 L替换为 R 时同样如此），且区间 I_n^L 和 I_n^R 两两不相交。(2) $x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega] \notin$ 收敛，因为对于所有 $k > n$，我们都可以在$x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega]$ 中找到一个序列收敛于 $z_{g_k^L}^L$。(3) 如果 $p = 0$，那么 $U = (-1/2,\ 1/2)$ 是 p 的一个邻域，并且对于所有 $n \in \omega$，我们有 $x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega] \not\subseteq U$，因为 $h^{g_n^R}{}_0{}^R \in x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega]$，然而 $h^{g_n^R}{}_0{}^R \notin U$。(4) 如果 $p \in (0,1]$，那么存在一个包含 p 的开邻域 U，使得存在 $n \in \omega$，对于所有 $k > n$都有 $I_{g_k^L}^L \cap U = \emptyset$。因此 $x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega] \not\subseteq U$，因为 $h^{g_k^L}{}_0{}^L \in x[(\omega \setminus [0,n]) \times \omega]$，然而 $h^{g_k^L}{}_0{}^L \notin U$.

因此 $x \in X$，所以存在 α 使得 $x = x_\alpha$.

任取 $B \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1]$，使得对于每个有限集 F，都存在一个有限集 K，使得 $B \setminus K = \rho_{\mathsf{conv}}(B \setminus K) \subseteq f[\rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus F)]$。一旦我们证明 $B \in$ 收敛，证明便告完成。

存在一个有限集 K，使得

$$B \setminus K \subseteq f[\rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus \emptyset)] = f\left[\bigcup_{n\in\omega} H^L_{g^L_n}\right] \cup f\left[\bigcup_{n\in\omega} H^R_{g^R_n}\right].$$

Let

$$B^L = (B \setminus K) \cap f\left[\bigcup_{n\in\omega} H^L_{g^L_n}\right] \quad \text{and} \quad B^R = (B \setminus K) \cap f\left[\bigcup_{n\in\omega} H^R_{g^R_n}\right].$$

我们将证明 B^L 收敛到 u^L，类似地也可以证明 B^R 收敛到 u^R，因此 $B = B^L \cup B^R \in$ 收敛。

设 $\varepsilon > 0$。那么，存在 $k \in \omega$，使得对于所有 $n > k$

$$|y^L_{g^L_n} - u^L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{and} \quad \frac{1}{g^L_n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 F 是一个有限集，满足 $\max(F \cap A_\alpha) > 2k$。那么，存在 $M \in [[0,1] \cap \mathbb{Q}]^{<\omega}$，使得 $B \setminus M \subseteq f[\rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus F)]$。我们将证明，对于所有 $b \in B^L \setminus M$，都有 $|b - u^L| < \varepsilon$。

固定 $b \in B^L \setminus M \subseteq f[\rho^{[0,1]}(A_\alpha \setminus F)] \cap f[\bigcup_{n\in\omega} H^L_{g^L_n}]$。存在 $m,\ i \in \omega$ 使得 $b = f(x_\alpha(2m,\ i))$，并且 $2m > 2k$. 由于 $x_\alpha(2m,\ i) = h^{g^L_m,\ i\ L} \in H^L_{g^L_m}$，我们得到

$$|b - u^L| \le |b - y^L_{g^L_m}| + |y^L_{g^L_m} - u^L| < \frac{1}{g^L_m} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

7. Ideal version of Mazurkiewicz theorem

Mazurkiewicz 定理 [15] 指出，每个连续函数的一致有界序列，在限制到某个完美集后，都有一致收敛子序列。对于给定的理想 $\mathcal{I}$，能否用一个 $\mathcal{I}$-正集来枚举该子序列，这一问题在 [7] 中得到了研究，作者证明了对于 F_σ-理想，答案是肯定的。下面的定理表明，这一结果可以推广到每个具有 FinBW性质的理想；这也意味着理想 conv 对于 Mazurkiewicz 定理的理想版本而言是临界的。

定理 7.1. 设 $\mathcal{I}$ 是 ω上的一个理想。以下条件等价。

(1) $\mathcal{I}$ 具有FinBW 性质。*(2)* 对于定义在 $\mathbb{R}$上的每个一致有界连续实值函数序列$(f_n)_{n\in\omega}$，都存在 $A \in \mathcal{I}^+$ 和一个非空完美集$P \subseteq \mathbb{R}$，使得子序列$(f_n \restriction P)_{n\in A}$ 一致收敛。

证明。(2) $\implies$ (1) 假设 $\mathcal{I}$ 不具有 FinBW 性质。那么，存在一个取值于区间 $[0,1]$ 的实数序列 $(x_n)_{n\in\omega}$，使得对于每个 $A \in \mathcal{I}^+$，子序列 $(x_n)_{n\in A}$ 都不收敛。对于每个 $n \in \omega$，令$f_n\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为取值恒为 x_n的常值函数。固定任意 $A \in \mathcal{I}^+$ 和一个非空完美集 $P \subseteq \mathbb{R}$。为导出矛盾，假设子序列 $(f_n \restriction P)_{n\in A}$一致收敛。令 $x \in P$。那么，$(f_n(x))_{n\in A}$应当收敛，但对于每个 $n \in A$，$f_n(x) = x_n$，而 $(x_n)_{n\in A}$ 不收敛，矛盾。

(1) $\implies$ (2) 固定 $M > 0$，使得对于每个 $x \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \omega$，$|f_n(x)| \le M$。设 $\{I_s\colon\ s \in 2^{<\omega}\}$ 是 $(-M-1,\ M+1)$ 的一族非空开子区间，满足:

(C1) $I_\emptyset = (-M-1,\ M+1)$, (C2) 对每个 $n \in \omega$, $\{I_s\colon s \in 2^n\}$ 是 $(-M-1, M+1)$ 的一个开覆盖，(C3) 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $n \in \omega$，使得对于每个 $s \in 2^n$，$\operatorname{diam}(I_s) < \varepsilon$，(C4) 对每个 $s \in 2^{<\omega}$，$I_s = I_{s^\frown 0} \cup I_{s^\frown 1}$。

对于每个 $m, n \in \omega$ 和 $x \in \mathbb{R}$，令 $p(m,n,x)$ 为满足 $f_m(x) \in I_s$ 的最小 $s \in 2^n$，其中最小是相对于字典序而言的。

令 $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$ 为有理数的一个枚举，使得对于所有互不相同的 $i, j \in \omega$，都有 $q_i \neq q_j$。对于 $t_0, \dots, t_{n-1} \in 2^n$，定义

$$B(t_0, \dots, t_{n-1}) = \{m \in \omega : p(m, n, q_i) = t_i \text{ for every } i \in n\},$$

并令

$$\mathcal{B}^n = \{B(t_0, \dots, t_{n-1}) : t_0, \dots, t_{n-1} \in 2^n\}.$$

那么，$\mathcal{B}^n$ 是 ω 的有限划分，且 $\mathcal{B}^{n+1}$ 加细 $\mathcal{B}^n$。因此，$\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}^n$ 在包含关系下构成一棵有限分支树。

由于 $\mathcal{I}$ 具有 FinBW性质，我们可以利用 [6, 命题 2.8] 得到一个序列 $(Z_n)_{n\in\omega}$ 和一个集合 $Z \in \mathcal{I}^+$，使得对每个 $n \in \omega$

- $Z_n \in \mathcal{B}^n$,
- $Z_n \supseteq Z_{n+1}$,
- $Z \setminus Z_n \in \mathrm{Fin}$。

设 $(x_i)_{i\in\omega}$ 是一个两两不同的元素序列，满足

$$Z \cap \bigcap_{n\in\omega} Z_n \subseteq \{x_i : i \in \omega\} \subseteq Z$$

并且对每个 $i \in \omega$ 都有 $x_i \in Z_i$。对每个 $n \in \omega$，定义

$$A_n = (\{x_n\} \cup (Z \setminus Z_{n+1})) \setminus \bigcup_{i<n} A_i.$$

那么，当 $n \neq m$ 时，$\bigcup_{n\in\omega} A_n = Z$ 且 $A_n \cap A_m = \emptyset$。此外，$A_n \in \mathrm{Fin}$，且对所有 $n \in \omega$，都有$A_n \subseteq Z \setminus Z_n$。

对于每个 $n \in \omega$，令 $z(n,0), \dots, z(n,n-1) \in 2^n$ 满足

$$Z_n = B(z(n,0), \dots, z(n,n-1)).$$

通过 $\{f(q_i)\} = \bigcap_{n>i} \mathrm{cl}(I_{z(n,i)})$ 定义 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$。注意，由于 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\mathrm{cl}(I_{z(n,i)})) = 0$（根据（C3）、（C4）以及对所有 $n > i$ 都有 $z(n,i) \in 2^n$ 这一事实），且对所有 $n > i$ 都有 $I_{z(n,i)} \supseteq I_{z(n+1,i)}$（根据 $B(z(n,0), \dots, z(n,n-1)) = Z_n \supseteq Z_{n+1} = B(z(n+1,0), \dots, z(n+1,n))$），故 f 是良定义的。还要注意，$(f_m \restriction \mathbb{Q})_{m\in Z}$ 逐点收敛于 f。事实上，如果 U 是某个 $f(q_i)$ 的邻域，那么我们可以找到 $n > i$ 使得 $\mathrm{cl}(I_{z(n,i)}) \subseteq U$。于是，对所有 $m \in Z \cap Z_n$，都有 $f_m(q_i) \in \mathrm{cl}(I_{z(n,i)}) \subseteq U$。由于 $Z \cap Z_n = Z \setminus (Z \setminus Z_n)$ 且 $Z \setminus Z_n$ 是有限的，$(f_m(q_i))_{m\in Z}$ 收敛于 $f(q_i)$。

对于每个 $\delta \in \{0,1\}$，我们将构造

- 一个有限序列族 $\{a^\delta(s) \in 2^{<\omega} : s \in 2^{<\omega}\}$,
- 一个非空开区间族 $\{U^\delta_s : s \in 2^{<\omega}\}$,
- 一个族 $\{D^\delta_s \subseteq \mathbb{Q} : s \in 2^{<\omega}\}$,
- 一个有理数族 $\{q^\delta_s \in \mathbb{Q} : s \in 2^{<\omega}\}$,
- 一个序列 $(k^\delta_n)_{n\in\omega}$ 属于 ω。

此外，对于每个 $n \in \omega$，我们定义

$$G^0_n = A_{k^0_n} \cup \ldots \cup A_{k^1_n - 1} \quad \text{and} \quad G^1_n = A_{k^1_n} \cup \ldots \cup A_{k^0_{n+1}-1}.$$

选择这些对象，使其对所有 $\delta \in \{0,1\}$ 和 $s \in 2^{<\omega}$ 都满足以下条件（其中 $\mathrm{lh}(s)$ 表示有限序列 s 的长度）：

(P1) $\mathrm{lh}(a^\delta(s)) = \mathrm{lh}(s) + 1$, (P2) $U^\delta_{s^\frown 0},\ U^\delta_{s^\frown 1} \subseteq U^\delta_s$且 $\mathrm{cl}(U^\delta_{s^\frown 0}) \cap \mathrm{cl}(U^\delta_{s^\frown 1}) = \emptyset$, (P3) 直径 $\left(U^\delta_s\right) \leq 1/2^{\mathrm{lh}(s)}$,

(P4) $D^\delta_{s^\frown 0}$, $D^\delta_{s^\frown 1}\subseteq D^\delta_s$, (P5) $f[D^\delta_{s^\frown j}]\subseteq I_{a^\delta(s)}$ 对每个 $j\in\{0,1\}$, (P6) $D^\delta_s\subseteq U^\delta_s\subseteq \mathrm{cl}(D^\delta_s)$, (P7) $f_i\left[\mathrm{cl}\left(U^\delta_{s^\frown j}\right)\right]\subseteq I_{a^\delta(s\restriction(\mathrm{lh}(s)-1))}$ 对每个 $j\in\{0,1\}$, $i\in G^\delta_{\mathrm{lh}(s)}$ 除非 $s=\emptyset$, (P8) $q^\delta_s\in D^\delta_s$, (P9) $k^0_0=0$ 且 $k^0_n<k^1_n<k^0_{n+1}$ 对每个 $n\in\omega$, (P10) $f_i(q^\delta_{s^\frown j})\in I_{a^\delta(s)}$ 对每个 $j\in\{0,1\}$ 且 $i\in A_m$ 存在某个 $m\geq k^\delta_{\mathrm{lh}(s)+1}$。

取 $U^0_\emptyset=U^1_\emptyset=(0,1)$ 和 $D^0_\emptyset=D^1_\emptyset=(0,1)\cap\mathbb{Q}$。任取 $q^0_\emptyset$, $q^1_\emptyset\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$。注意，条件 (P3)、(P6) 和 (P8) 均满足。此时无需检查 (P2)、(P4)、(P5)、(P7) 和 (P10)（因为 δ, $j\in\{0,1\}$ 的 $U^\delta_{(j)}$、$D^\delta_{(j)}$ 和 $q^\delta_{(j)}$ 尚未定义）。令 $k^0_0=0$ 和 $k^1_0=1$（特别是 $k^0_0<k^1_0$，因此 (P9) 得以满足）。序列 $a^\delta(\emptyset)$ 将在下一步定义，所以我们无需检查 (P1)。至此，构造的初始步骤完成。

现在假设 $n\in\omega$，并且我们已经（按照 (P1)- (P10)）定义了以下对象

- $a^\delta(t)$，对所有 $t\in 2^{<n}$ 和 $\delta\in\{0,1\}$,
- U^δ_s, D^δ_s 以及 q^δ_s，对所有 $s\in 2^{\leq n}$ 和 $\delta\in\{0,1\}$,
- k^0_i 以及 k^1_i，对所有 $i\leq n$。

注意，此时 G^0_n 已有定义。令

$$V^0_s=U^0_s\cap\bigcap_{i\in G^0_n}f_i^{-1}[I_{a^0(s\restriction(n-1))}]$$

对所有 $s\in 2^n$（在 $n=0$ 的情形下，令 $a^0(s\restriction(n-1))=\emptyset$）。注意，由于 $q^0_s\in D^0_s\subseteq U^0_s$（根据 (P6) 和 (P8)）以及 $f_i(q^0_s)\in I_{a^0(s\restriction(n-1))}$ 对所有 $i\in G^0_n$ 均成立（根据 $G^0_n\subseteq\bigcup_{m\geq k^0_n}A_m$ 和条目 (P10)；在 $n=0$ 的情形下，条件 $f_i(q^0_s)\in I_{a^0(s\restriction(n-1))}=I_\emptyset$ 显然成立），因此 $q^0_s\in V^0_s$。特别地，$V^0_s\neq\emptyset$。此外，由于 G^0_n 是有限的，且所有 f_i 都连续，集合 V^0_s 是开集。

注意到

$$D^0_s=D^0_s\cap f^{-1}[I_{a^0(s\restriction(n-1))}]=(D^0_s\cap f^{-1}[I_{a^0(s\restriction(n-1))^\frown 0}])\cup(D^0_s\cap f^{-1}[I_{a^0(s\restriction(n-1))^\frown 1}])$$

（由 (P5) 和 (C4) 得出；当 $n=0$ 时，用事实 $D^0_\emptyset\subseteq\mathbb{Q}=f^{-1}[I_\emptyset]$ 代替 (P5)）。由于 D^0_s 在 V^0_s 中稠密（由 $V^0_s\subseteq U^0_s$ 和 (P6) 得出），我们可以找到一个非空开区间 $W^0_s\subseteq V^0_s$ 以及一个序列 $a^0(s)$（等于 $a^0(s\restriction(n-1))^\frown 0$ 或 $a^0(s\restriction(n-1))^\frown 1$），使得 $D^0_s\cap f^{-1}[I_{a^0(s)}]$ 在 W^0_s 中稠密。注意，(P1) 得以满足，因为 $\mathrm{lh}(a^0(s))=\mathrm{lh}(a^0(s\restriction(n-1)))+1=n+1=\mathrm{lh}(s)+1$（当 $n=0$ 时，我们得到 $\mathrm{lh}(a^0(\emptyset))=1$）。

对所有 $s\in 2^n$ 和 $j\in\{0,1\}$，任取非空开区间 $U^0_{s^\frown j}$，使得 $\mathrm{cl}(U^0_{s^\frown j})\subseteq W^0_s$，且满足 (P2) 和 (P3)。此外，定义 $D^0_{s^\frown j}=U^0_{s^\frown j}\cap D^0_s\cap f^{-1}[I_{a^0(s)}]$。注意，(P4) 和 (P5) 均成立。由于 $D^0_s\cap f^{-1}[I_{a^0(s)}]$ 在 W^0_s 中稠密，且 $\mathrm{cl}(U^0_{s^\frown j})\subseteq W^0_s$，(P6) 也成立。由于 $\mathrm{cl}(U^0_{s^\frown j})\subseteq W^0_s\subseteq V^0_s$，因此得到 (P7)。

对所有 $s\in 2^n$ 和 $j\in\{0,1\}$，任取 $q^0_{s^\frown j}\in D^0_{s^\frown j}$。于是，$f(q^0_{s^\frown j})\in I_{a^0(s)}$（根据 (P5)）。由于 $(f_i\restriction\mathbb{Q})_{i\in Z}$ 逐点收敛到 f，且每个 $I_{a^0(s)}$ 都是开集，因此存在 $k^0_{n+1}>k^1_n$，使得对所有 $i\in\bigcup_{m\geq k^0_{n+1}}A_m$、$s\in 2^n$ 和 $j\in\{0,1\}$，$f_i(q^0_{s^\frown j})\in I_{a^0(s)}$。注意，(P8)、(P9) 和 (P10) 均成立。

注意，此时 G^1_n 已经定义。对 $\delta=0$ 重复上述构造，将其替换为 $\delta=1$，得到 $a^1(s)$ $U^1_{s^\frown j}$, $D^1_{s^\frown j}$ 以及对所有 $j\in\{0,1\}$ 和 $s\in 2^n$ 的 $q^1_{s^\frown j}$，并且还有 k^1_{n+1}。因此，我们已经定义了

- 对所有 $t\in 2^n$ 和 $\delta\in\{0,1\}$ 的 $a^\delta(t)$,
- U^δ_s, D^δ_s 以及对所有 $s\in 2^{n+1}$ 和 $\delta\in\{0,1\}$ 的 q^δ_s,
- k^0_{n+1} 和 k^1_{n+1}。

这就完成了构造。

注意到

$$Z = \bigcup_{n\in\omega} A_n = \left(\bigcup_{n\in\omega} G^0_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\omega} G^1_n\right).$$

由于 $Z \in \mathcal{I}^+$，存在 $\delta \in \{0,1\}$ 使得 $\bigcup_{n\in\omega} G^\delta_n \in \mathcal{I}^+$。令

$$A = \bigcup_{n\in\omega} G^\delta_n \quad \text{and} \quad P = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in 2^n} \mathrm{cl}(U^\delta_s).$$

由（P2）和（P3）可知， P 是一个完美集，并且对每个 $x \in P$，存在唯一的$\alpha_x \in 2^\omega$ 使得 $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}(U^\delta_{\alpha_x\restriction n})$。令 $g\colon P \to \mathbb{R}$ 由 $g(x) = \limsup_{n\to\infty} f(q^\delta_{\alpha_x\restriction n})$ 对所有 $x \in P$定义。

我们将证明 $(f_n \restriction P)_{n\in A}$ 一致收敛到 g。任取 $\varepsilon > 0$，并取 $N \in \omega$ 使得对所有 $s \in 2^N$ 都有 $\mathrm{diam}(I_{a^\delta(s)}) < \varepsilon$（这样的 N 存在，这归功于条件（C3）和（P1））。

任取 $x \in P$和 $i \in A \setminus \bigcup_{n\le N} G^\delta_n$。由于 $\bigcup_{n\le N} G^\delta_n$ 是一个有限集，要完成证明，我们只需证明 $|f_i(x) - g(x)| < \varepsilon$。

由于$i \in A \setminus \bigcup_{n\le N} G^\delta_n$，对于某个 $n \ge N$，我们有 $i \in G^\delta_{n+1}$。于是，我们有 $x \in \mathrm{cl}(U^\delta_{\alpha_x\restriction(n+2)})$，因此由 (P7) 得到 $f_i(x) \in I_{a^\delta(\alpha_x\restriction n)}$。此外，由条件 (P4) 和 (P8)，对所有 $k \in \omega$，我们得到 $q^\delta_{\alpha_x\restriction(n+1+k)} \in D^\delta_{\alpha_x\restriction(n+1)}$。因此，由 (P5) 得 $g(x) \in \mathrm{cl}(I_{a^\delta(\alpha_x\restriction n)})$。由于 $n \ge N$，$\mathrm{diam}(\mathrm{cl}(I_{a^\delta(\alpha_x\restriction n)})) = \mathrm{diam}(I_{a^\delta(\alpha_x\restriction n)}) \le \mathrm{diam}(I_{a^\delta(\alpha_x\restriction N)}) < \varepsilon$（由 (C4) 及 N 的选取）。最后，我们得出$|f_i(x) - g(x)| \le \mathrm{diam}(\mathrm{cl}(I_{a^\delta(\alpha_x\restriction n)})) < \varepsilon$。□

References

1. V. Bergelson 和 R. Zelada, *Strongly mixing systems are almost strongly mixing of all orders*, 《遍历理论与动力系统》（ **44** 2024 6, 1489 1530 4741322），第（）期，第 – 页。MR 。Mikolaj 2 Bojanczyk、Eryk Kopczynski 和 Szymon Torunczyk, *Ramsey's theorem for colors from a metric space* **85** 2012 1, 182 184 ，《半群论坛》（），第（）期，第 – 2948679 页。MR 3 。Jorg Brendle 、 Osvaldo Guzman 、 Michael Hrušak 和 Dilip Raghavan, *Combinatorial properties of mad families* https://doi.org/10.4153/ ，《加拿大数学杂志》（）（），第 – S0008414X25101879 2025 1 62 页。4. R. Filip *Critical ideals for countable compact spaces* https: ow 、 M. Kowalczuk //arxiv.org/abs/2503.12571 2025 1 19 和 A. Kwela, ，（），第 – 页。5. Rafa·l Filip´ow、Krzysztof Kowitz 和 Adam Kwela, *A unified approach to Hindman, Ramseyand van der Waerden spaces* https://doi.org/10.1017/ ，《符号逻辑杂志》（） jsl.2024.8 2024 1 53 （），第 – 页。6. Rafa·l Filip´ow、Nikodem Mro˙zek、Ireneusz Rec·law 和 Piotr Szuca, *Ideal version of ramsey'stheorem*, 《捷克斯洛伐克数学杂志》**61**（2011），第2期，289–308。7. , *I-selection principles for sequences of functions*, 《数学分析与应用杂志》**396**（2012），第2期，680–688。MR 2961261 8. Jana Flašková, *Ideals and sequentially compact spaces*, 《拓扑学论文集》**33**（2009），107–121。MR 2471564 9. H. Furstenberg 和 B. Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, 《数学分析杂志》 **34** 1978 61 85 1979 531271 （），第 – 页（）。MR 。Michael Hrušak 和 David Meza-Alcantara, 10 *Katětov order Fubini property and Hausdorff* , ，《的里雅斯特大学数学研究所学 *ultrafilters* **44** 2012 503 511 3019575 报》（），第 – 页。MR 11 *Hindman spaces* **130** 2002 。Menachem Kojman, ，《美国数学会会刊》（），第6期，1597–1602。MR 1887003 12. Menachem Kojman 和 Saharon Shelah, *van der Waerden spaces and Hindman spaces are not the same* **131** 2003 5, 1619 1622 1950294 ，《美国数学会会刊》（），第 – 期。MR 。 13 Wieslaw Kubis 和 Paul Szeptycki, *On a topological Ramsey theorem*, 《加拿大数学通报》**66**（2023 4552506 14 1, 156 165），第 – 期。MR 。Adam Kwela, *Unboring ideals* **261** 2023 3, 235 272 4584767 ，《基础 15 **18** 1932 数学》（），第 – 期。MR 。Stefan Mazurkiewicz, *Sur les suites de fonctions continues* 1, ，《基础数学》（），第 – 期。 114 117

16. D. Meza-Alc´antara, *Ideals and filters on countable set*, 博士论文, 墨西哥国立自治大学, 2009年, （https://ru.dgb.unam.mx/handle/DGB_UNAM/TES01000645364）。

（拉法 ´ Institute of Mathematics Faculty of Mathematics Physics and Informatics University of Gdańsk ul. Wita Stwosza 57 80-308 Gdańsk Poland
尔·菲利波夫）, , , , , , *Email address*: rafal.filipow@ug.edu.pl*URL*:
http://mat.ug.edu.pl/~rfilipow

(Ma ´ Institute of Mathematics Faculty of Mathematics Physics and Informatics University of Gdańsk ul. Wita Stwosza 57 80-308 Gdańsk Poland
lgorzata Kowalczuk) , , , , „*Email address*: m.kowalczuk.090@studms.ug.edu.pl

（HubertKsi ¸ Institute of Mathematics Faculty of Mathematics Physics and Informatics University of Gdańsk ul. Wita Stwosza 57 80-308 Gdańsk Poland
a˙zek） , , , , , ,*Email address*: h.ksiazek.596@studms.ug.edu.pl

（Adam Kwela）
Institute of Mathematics Faculty of Mathematics Physics and Infor- , , , , „
matics University of Gdańsk ul. Wita Stwosza 57 80-308 Gdańsk Poland
Email address: Adam.Kwela@ug.edu.pl*URL*: https://mat.ug.edu.pl/~akwela

（GRZEGORZ UCAL）
Institute of Mathematics Faculty of Mathematics Physics and In- , , , , „*Email address*:
formatics University of Gdańsk ul. Wita Stwosza 57 80-308 Gdańsk Poland
g.ucal.094@studms.ug.edu.pl