arXiv:2601.12045v1 [math.SG] 17 Jan 2026

同调镜像对称中~A_n 型预投射代数的几何实现

Johan Rydholm

摘要

A_n型奇点 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{n+1}$ 可以通过超 Kähler 流形 X_ζ 加以解消，其底层光滑流形与奇点解消 X_{res}微分同胚，而其超 Kähler 结构取决于参数 $\zeta \in H_2(X_{\mathrm{res}};\mathbb{R})$。每个此类超 Kähler 流形的复流形结构等价于极点处的奇点解消，以及其根由别处的 ζ 决定的米尔诺纤维结构；其辛结构沿赤道正合，并受到赤道以外例外（-2）球面上的面积变形，这些面积取决于 ζ。

我们证明，从一族底层上半球中的固定 X_ζ （随 u变化）中移除适当的除子 D_u ，可得到一个对数卡拉比–丘超 Kähler 族（特别是一个对数卡拉比–丘子流形族）；并且通过超 Kähler 旋转，该族满足镜像对称（其中一个方向部分仍属猜想），尤其是交换赤道与极点处的结构。我们还证明，补上缺失的除子后，同调镜像对称成立；这与附加停止集，以及分别计算 A侧和 B侧某些 Landau–Ginzburg 势的奇点范畴有关。

更具体地说：我们计算包裹 Fukaya 范畴，并将其与代数几何中凝聚层导出范畴和奇点导出范畴的（先前及最新）计算结果进行比较。我们证明，相关范畴（有两个例外）与 ζ 参数所决定的 A_n 型加法及乘法预投射代数上的模范畴，或这些代数的变形，三角等价。

目录

1 引言 **2**

1.1 结果.3 1.2 与其他研究的联系.9 1.3 展望.10

致谢.10

2 同调镜像对称与麦凯对应 **10**

2.1 代数、微分分次代数与导出范畴背景.11 2.2 麦凯对应背景.19~2.3 A_n 型金兹堡代数的形式性.22

2.4 同调镜像对称.24 2.5 对数 Calabi–Yau 性质与超K¨ahler 结构.28

3 A_n-米尔诺纤维的辛几何 35
3.1 预备知识：Weinstein 扇区.35 3.2 米尔诺纤维与丛接的等价.39 3.3 停止集的几何.44

4 类型的辛实现 $\tilde{A}_n$ 加法预投射代数 49
4.1 预备知识：辛不变量.49 4.2 J^1S^1 和 $S^1 \times S^2$ 中的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数的计算 . . . . . 56˜4.3 将 $\Pi(A_n)$ 实现为部分包裹福柯范畴 .59˜4.4 高维情形下 A_n- 链环的切卡诺夫 – 埃利亚什贝格代数 61

5 同调镜 像对称结果 6 2
5.1 对数卡拉比–丘情形下的同调镜像对称.63 5.2 奇点解消的同调镜像对称.69 5.3 米尔诺纤维的同调镜像对称：变形.70 5.4 米尔诺纤维的同调镜像对称：LG 势.73

参考文献 84

1 引言

本文的主要目标是研究通过消解或光滑化 an A_n-奇点而得到的复二维超-K¨ahler 流形的辛不变量，并将其与代数几何不变量联系起来，这正如 Kontsevich 同调镜像对称 [Kon95] 所预言的那样。这拓展了 [EL17], [EL19]and [AAK16, 第 9 节中的先前结果，其中计算了不同类型的相关辛不变量，其形式为 Fukaya 范畴。

同调镜像对称包含一系列思想、理论和猜想。其核心是对一个猜想的若干种表述。粗略地说，该猜想断言，某些同时具有辛结构和代数结构的几何对象（例如 K¨ahler 流形）会成镜像对出现。辛结构和代数结构分别产生称为 A 侧和B 侧的不变量。这些不变量通常以三角范畴的形式出现，例如 B 侧的相干层导出范畴，或 A 侧不同版本的福克亚导出范畴。两个对象成镜像对，意味着交换 A 侧和 B 侧后，它们定义的两个不变量等价。

类型 ADE 的奇点可由麦凯对应充分描述。该对应的一个实例将这些奇点与相应的扩展 Dynkin 箭图联系起来。在 [KV00], 中，导出麦凯对应得以建立：证明了类型 ADE 奇点的解消上的相干层导出范畴，与相应扩展 Dynkin 箭图上的预投射代数之模的导出范畴三角等价。本文的主要动机是将这些解消的镜像构造为 Weinstein 扇区，并利用扇区无穷远边界上临界把手的附着链环的切卡诺夫–埃利亚什贝格微分分次代数，证明所述等价（通过手术公式 [BEE12], [EL23]）；具体做法是将预投射代数实现为几何定义的这类微分分次代数的极小

模型。我们对类型 A_n 的奇点完成了这一构造，这构成了本文的主要构造（第 3 节和第 4 节）。

在 [Kro89], the ADE 奇点中，人们将其与一类称为 ALE 空间的超 K¨ahler 流形联系起来。这些超 K¨ahler 流形由超 K¨ahler 商构造而成，其在极点处的代数结构可以取为奇点解消（超 K¨ahler 流形具有一个 S^2族的 K¨ahler 结构）。在本文中，我们猜想（这取决于非恰当情形下包裹福柯范畴的结构性结果，而这些结果尚未建立），这种超 K¨ahler 结构对于该情形中的同调镜像对称是基础性的，并且极点处 K¨ahler 流形的镜像，是通过沿赤道将超 K¨ahler 旋转施加到 K¨ahler 流形族上得到的（参见 [BS98]）。更准确地说，这种超 K¨ahler 旋转应当在一个对数卡拉比–丘超 K¨ahler 族中进行；该族通过从超 K¨ahler 流形中连续移除一个除子而得到（从而该除子可以在紧化中延拓为一个反典范除子）。我们在 A_n-奇点情形下构造了这样一个（反典范）除子族，并在非恰当情形下包裹福柯范畴的解析细节之外，展示了两个方向上的镜像对称结果：极点处簇的 A侧和 B侧，分别与赤道上簇的 B侧和 A侧相关。（关于 A_n 型解消的同调镜像对称，在紧拉格朗日子流形的 Fukaya 范畴情形下也得到了类似结果，见 [AAK16，第 9.2节。）

非对数卡拉比–丘情形——包括本文最初的研究动机，即 A-奇点解消的镜像这一情形——可以通过在镜像上添加停止集或 Landau–Ginzburg 势，从对数卡拉比–丘超 K¨ahler 族得到。由此共得到三个同调镜像对称的例子。对于每个例子，我们都严格证明了其中一个方向，并对另一个方向给出了可能的解释和概述（如上所述，目前缺少关于非恰当情形下辛侧不变量的某些基础性结果）。有趣的是，这与预投射代数的变形，以及 ˜型预投射代数的变形和未变形乘法版本有关，其中类型为 A_n。

本文包含大量背景材料和预备知识，其中许多内容可能为不少读者所熟知；虽然这使篇幅有所增加，却能实现统一的论述。

下面概述本文的研究结果、主要论证，以及与相关既有工作的若干联系。

1.1 研究结果

第 2 节主要介绍背景和研究动机，旨在为本文的研究结果提供背景。在这一节中，我们简要回顾麦凯对应及其导出版本，并回顾箭图 Q 的金兹堡微分分次代数 $\mathcal{G}(Q)$ 和预投射代数 $\Pi(Q)$ $= H_0(\mathcal{G}(Q))$ 的定义，以及它们的乘法对应物和这些（微分分次）代数的变形版本。特别地，我们回顾如下结论： D^b(相干层范畴(X_{res})) $= D^b(\Pi(\tilde{A}_n))$，其中 X_{res} 是 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{n+1}$ 的奇点消解，即 A_n-奇点消解（更一般地说，对于任意有限子群 $G \subset$ SU(2) 及其对应的扩展 Dynkin 箭图，该结论也成立）。

我们首先证明以下纯代数结果：

˜**定理 1.1.1** (定理 2.3.2)。 设 A_n 为底层图为˜ ˜A_n的（按循环顺序排列的）箭图。那么， $\mathcal{G}(A_n)$ 的同调集中在0次，即它等于（加法）

˜ ˜ ˜预投射代数 $\Pi(A_n)$ 。此外， $\mathcal{G}(A_n)$ 是形式的，即与其同调拟同构。

随后，我们简要说明本文的研究动机，将其置于同调镜像对称的背景下，并将结果与奇点的 A_n-解消底层流形上的超 K¨ahler 结构联系起来。给定一个有限群 $G \subset \mathrm{SU}(2)$，我们回顾 X_ζ Kro89] 构造超 K¨ahler 流形的过程。这些光滑流形与 $\mathbb{C}^2/G$ 的奇点解消 X_{res} 微分同胚，且各自带有依赖于参数 $\zeta \in H^2(X_{\mathrm{res}}; \mathbb{R})$ 的超 K¨ahler 流形结构（此处，在 [Kro89], 的背景下，我们假设选取一般的 $\zeta = (\zeta, 0, 0)$）。每个 X_ζ 配备其复结构 $I_u, u \in S^2$ 后，在极点处（即当 $u = (u_I, u_J, u_K) = (\pm 1, 0, 0)$ 时），作为代数簇与奇点解消等价；在其他位置则与米尔诺纤维（光滑化）等价。视为辛流形 (X_ζ, ω_u) 时，它是正合的，且沿赤道与 ζ 无关（即当 $u_I = 0$ 且 $u = (u_I, u_J, u_K)$ 时）；在其他位置则非正合，此时每个例外 (-2)- 球面 E_i 的辛面积均非零，且等于 ζ_i，其中 $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$。（见例 2.5.3 和图 11。）

具体到 A_n 情形，也就是当 $G = \mathbb{Z}_{n+1}$ 时，对每个 ζ，我们都能找到随 $u \in S^2$ 变化的 I_u-全纯除子 $D_u \subset X_\zeta$，使得 $X_\zeta \smallsetminus D_u$ 是对数卡拉比–丘流形（例 2.5.8）；限制到上半球 $O \subset S^2$ 上时，我们可以连续地做到这一点。命题 2.5.9 证明了这一性质，其中指出 $X_\zeta \smallsetminus D_u, u \in O \subset S^2$ 是定义 2.5.4 意义下的对数卡拉比–丘超 K¨ahler族。基于这一事实，我们假设该族中的 K¨ahler流形的镜像应由超 K¨ahler旋转给出；我们的意思是，对于任意 $u \in S^2$，$(X_\zeta \smallsetminus D_u, I_u, \omega_u)$ 的镜像应为某个其他 $\check{u} \in S^2$ 对应的 $(X_\zeta \smallsetminus D_{\check{u}}, I_{\check{u}}, \omega_{\check{u}})$。尤其是，我们猜想这一镜像对称对于选择 $u = (1, 0, 0)$ 和 $\check{u} = (0, u_J, u_K)$ 成立。本文证明了这一点（几乎完全证明，仅有两种情形尚未得到完全证明）。

下面概述具体细节。我们使用记号 X_{res} 表示任意满足 $u = (1, 0, 0)$ 的 (X_ζ, I_u, ω_u)，在这种情况下 $D_r = D_u$；对于 $u = (0, I_J, I_K)$，则用 X_{Mil}和$D_m = D_u$表示 (X_ζ, I_u, ω_u)。我们首先概述 X_{Mil} 和 $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$ 的辛几何，沿用第 3 节的内容；该节专门讨论这些几何构造。

文献 [Mil68] 中引入的米尔诺纤维（如上所述，它与经反复爆破得到的奇点消解微分同胚）可以赋予 Weinstein 域结构[Kea14], ，并且与由 n 个 T^*S^2 副本组成的线性管道等价。我们在命题 3.2.4 中证明，去掉一个纤维后的米尔诺纤维（米尔诺纤维是勒夫谢茨纤维化的全空间）同样是 Weinstein 域，并且作为 Weinstein 域与由$n + 1$ 个 S^2 余切丛组成的循环拼接等价。证明使用覆盖论证以及文献 [Gom98] 中给出的 Weinstein Kirby 演算；另见 [Acu+25]。

球面的余切丛的循环拼接可以用∂_∞上的手柄附着来描述（$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$） $=$ （$S^1 \times S^2, \xi_{\mathrm{std}}$），采用 Weinstein 手柄体图。我们证明，$(S^1 \times S^2, \xi_{\mathrm{std}})$ 可以通过将两个副本 $(J^1S^1, \xi_{\mathrm{std}})$ 粘合在一起得到。我们利用这一点证明以下定理。

定理 1.1.2 (定理 3.3.4、引理 3.3.5 和引理 3.3.6)。 令 $\Lambda_{\mathrm{stop}} \subset S^1 \times S^2$ 为由 $S^1 \times \{\mathrm{pt}\}$给出的 ***Legendrian***。移除由该 ***Legendrian*** 定义的停止集 $\sigma = \sigma_{\Lambda_{\mathrm{stop}}}$ 后，得到一个 ***Weinstein*** 扇区 $W_\sigma = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \smallsetminus \sigma_\Lambda$，其无穷远边界 $\partial_\infty W_\sigma$ 等于 $(J^1S^1, \xi_{\mathrm{std}})$中零截面的一个凸开邻域 V。

此外，存在一个截断 ***Reeb*** 向量场，使得在零截面的一个较小凸开邻域$U \subset V \simeq \partial_\infty W_\sigma$ 中，***Reeb*** 向量场满足 $R_\alpha = \partial_z$；并且离开该邻域后，没有任何流线会返回其中。

最后，通过缩小 U 中的 ***Legendrian*** Λ （沿 z方向），我们可以假设，带有 Λ的 ***Reeb*** 弦处 ***punctures*** 的 V 辛化中的全纯曲线完全包含在 U的辛化中。

特别地，在计算 W_σ 边界上的 Legendrian 子流形的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数时，我们可以在 (J^1S^1，ξ_{std}) 中计算该不变量（定理3.3.7）。

因此，从球面余切丛的循环拼接中的停止集移除一个邻域后，我们得到一个 Weinstein 扇区，可以将其视为沿着 (J^1S^1，ξ_{std}) 中由标准平凡结构成的循环链环附加手柄所得；见图 27。

随后在第 4 节中，我们使用 [GPS24] 中的结果，该结果指出，包含映射在扇区的包裹福柯范畴与带有相应停止集的流形的部分包裹福柯范畴之间诱导出等价。然后，我们在 ($S^1 \times S^2$，ξ_{std}) 和 (J^1S^1，ξ_{std}) 中应用 [BEE12] 和 [EL23] 中的手术公式，并由定理 1.1.2 推得以下结论。

定理 1.1.3 (定理 4.3.1)。 附着链环的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数 $CE(\Lambda)$ 与（非幺）子代数 $eCE(\iota(\Lambda)\cup\Lambda_{\text{stop}})e \subset CE(\iota(\Lambda)\cup\Lambda_{\text{stop}})$拟同构，其中 e 是对应于 $\iota(\Lambda)$各连通分支的幂等元之和；后者的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数在 $S^1 \times S^2$中计算。这里， Λ_{stop} 是定理 ***1.1.2*** 中对应于停止集的分支，而 ι： $J^1S^1 \to S^1 \times S^2$ 是包含映射，因为它是 Λ_{stop}的一个邻域之补集。

在 $S^1 \times S^2$ 中，我们结合手术公式与 Drinfeld 的 dg 商 [Dri04]（见命题 2.1.10）推导出以下定理。手术后，这意味着临界手柄的余核分裂生成由附着停止集和手柄生成的范畴；换言之，停止集的链接圆盘包含于由余核生成的范畴的分裂闭包中：

定理 1.1.4 (定理4.2.4)。 沿用定理 ***1.1.3*** 中的记号， $CE(\iota(\Lambda) \cup \Lambda_{\text{stop}})$ 上的有限生成 ***dg*** 模所构成的微分分次范畴，与 $CE(\Lambda)$上的有限生成 ***dg*** 模所构成的微分分次范畴导出等价。

结合 [Cha+24] or [GPS24] 的生成性结果与手术公式[BEE12]和 [EL23]，我们由此得到：

定理 1.1.5 (定理 4.3.2)。 设 W 是通过向 $\iota(\Lambda) \subset S^1 \times S^2$ 附加手柄而得到的 ***Weinstein*** 流形。则存在一个三角等价

$$D^\pi\mathcal{W}(W,\sigma) \simeq D^\pi(CE(\Lambda)),$$

其中 σ 是由 Λ_{stop} 定义的停止集。

特化 现在将 ˜ 特化到 $\Pi(A_n)$ 的几何实现，我们有如下简单计算 ：

命题 1.1.6 （命题 4.2.1）。 设 $\Lambda_{\text{cyc}} \subset J^1S^1$ 为临界˜手柄的附着链环，如图 ***27*** 所示。则 CE（Λ_{cyc}） $\cong \mathcal{G}$（A_n），也就是说，在适当的选择（例如马斯洛夫势）下， Λ_{cyc} 的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数作为微分分次代数同构于扩展 A_n-箭图的金兹堡代数。

由定理 1.1.5 和命题 1.1.6 可得：

定理 1.1.7 (定理 4.3.3)。 带有停止集 $\sigma = \sigma_{\Lambda_{\text{stop}}}$ 的$n+1$ 余切丛 T^*S^2循环拼接的部分包裹福柯范畴，或者等价地，去掉一个纤维 $X_{\text{Mil}} \smallsetminus D_m$ 后的 A_n-奇点的米尔诺纤维的部分包裹福柯范畴，与有限生成的 $\tilde{}$ $\Pi(A_n)$-模范畴导出等价：

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\text{Mil}} \smallsetminus D_m, \sigma) \simeq D^b(\Pi(\tilde{A}_n)).$$

我们继续作一些说明。首先，定理 1.1.1 可通过改变 A_n-箭图中一条箭的定向，并给出一个显式同构，从 [Her16] 中的定理推出，但本文在此给出了独立的直接证明。其次，定理 1.1.7 依赖于一个事实：据作者所知，文献中尚无完整证明。 [EL23] 和 [AE22] 分别在 [GPS24], [GPS20], 中使用了不同的部分包裹福柯范畴定义，预计这两种定义是等价的。我们需要的是该范畴第二种版本中证明的、关于 Weinstein 扇区的生成性结果。

在第 5 节中，我们阐述本文涉及的三项（系列）同调镜像对称论述。首先（第 5.1 节），我们概述对数卡拉比–丘同调镜像对称：一侧是去掉除子 D_r 后的 A_n-奇点解消 X_{res}，另一侧是去掉纤维 D_m 后的 A_n-米尔诺纤维 X_{Mil}；该米尔诺纤维通过一种特定的超 K¨ahler 旋转得到（总结见图 34）。不过需要注意的是，分别将解消视为辛流形、将米尔诺纤维视为代数簇时，它们都不是唯一的（即在镜像猜想中交换两侧时）。它们的结构取决于底层超 K¨ahler 结构的选择，例 2.5.3 和例 2.5.8 对此作了解释。

特别地，流形 $X_{\text{res}} \smallsetminus D_r$ 被视为辛流形时并非 Weinstein 流形，并且它们依赖于拉格朗日骨架上的面积参数；不同的参数会产生不等价的辛流形，并具有（据推测）不同的（非正合）包裹 Fukaya 范畴（待给出正确的定义后）。

同样，米尔诺纤维 X_{Mil}在被视为代数簇时，可以描述为由 $P(Z) - XY$ 的消失轨迹给出的超曲面。这里， $P(Z)$ 是一个单变量次数为 $n+1$ 且没有重根的多项式。

将奇点消解视为 B 侧，并将米尔诺纤维（移除除子/纤维后）视为 A 侧，我们证明如下：

命题 1.1.8 （命题 5.1.4）。 $X_{\text{res}} \smallsetminus D_r$ 上的相干层导出范畴由 $\tilde{}$ 型 A_n 的非变形乘法预投射代数上的有限生成模给出：

$$D^b(\text{Coh}(X_{\text{res}} \smallsetminus D_r)) \simeq D^b(\Lambda^1(\tilde{A}_n))$$

由于 [EL19] 和 [KS23] （或者通过结合注 5.3.5，直接利用 [EN15], 中的组合模型计算图 14 中勒让德链环的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数）

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\text{Mil}} \smallsetminus D_m) \simeq D^b(\Lambda^1(\tilde{A}_n))$$

这就完成了镜像对称的一半。

交换两者的角色（推测地）会得到与变形乘法预投射代数上的有限生成模范畴拟等价的范畴，其中变形参数由例外球面的面积决定，而这些面积又由底层所选的超K¨ahler结构决定。或者，也可以从定义米尔诺纤维的多项式的根推导出这些参数。在这一设定下，我们证明如下：

命题 1.1.9 (命题 5.1.2)。 设 X_{Mil} 定义为多项式$P(Z) - XY$的零点集，其中 $P(Z)$ 是一个次数为 $n+1$且没有重根的一元多项式。设$D_m \subset X_{\mathrm{Mil}}$ 由 $Z = 0$定义。我们有一个三角等价

$$D^b(\mathrm{Coh}(X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m)) \simeq D^b(\Lambda^q(\tilde{A}_n)),$$

对于某些参数 $q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$， $q_i \in \mathbb{C}^\times$ 使得 $q_1 \cdots q_{n+1} = 1$。

若将 $P(Z)$ 的根记为 $Q_1, \ldots, Q_{n+1}$，则根与参数之间的关系由 $Q_i = \prod_{j=1}^{i} q_j$ 给出。

参数 q_i 与底层超-K¨ahler 结构之间的关系（如例 2.5.3 中所述）如下（注 2.5.10 与注 5.3.7 中对此有进一步说明）：存在与 ζ_i 成比例的参数 λ_i，它们满足关系

$$\lambda_i = q_1 \cdots q_{i-1}(q_i - 1).$$

特别地，这些根满足 $Q_i = 1 + \sum_{l=1}^{i} \lambda_l$。

我们在猜想 5.1.3 的证明概要中指出，对图 14 中 T^*S^2 的循环拼接的附着球面所对应的 Legendrian 链环的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数 $CE^q(\iota(\Lambda_{\mathrm{cyc}}))$ 进行变形：通过计算带有对应于环空间系数的参数 t_i 的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数，并令 $t_i \mapsto q_i \in k$ 特化，所得代数与变形乘法预投射代数 $\Lambda^q(A_n)$ 拟同构，其中 ˜（另见 [EL19], 结合 [KS23]，或注 5.3.5）。我们预计，这一变形中的参数 q_i 由例外球面上的辛面积决定。更准确地说，预期这些参数属于形式洛朗级数域 $\mathbf{C}((s))$，并且等于 $q_i = q_i(s) = e^{s\lambda_i}$，其中 s为（对数）诺维科夫参数。因此，我们也预期，利用类似于 [Cha+24] 或 [GPS24] 的生成结果，以及类似于 [BEE12] 和 [EL23], 的手术结果，这一观察将推出以下等价关系：

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r) \overset{\text{conjecture}}{\simeq} D^b(\Lambda^{q(s)}(\tilde{A}_n)).$$

在同调镜像对称等价的后半部分，在 B这一侧，变形复结构等价于参数 λ_i，也就是说，我们用 $s\lambda_i$替换它。于是，参数 q_i 上的诱导变形可以视为无穷小变分，与在 A这一侧得到的 $q_i(s)$ 相对应，也就是说，将其解释为定义在环 $\mathbf{C}[[s]]/(s^2)$上的对象。因此，稍微滥用以下记号，作为无穷小变分，存在一个猜想的等价：

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r) \overset{\text{conjecture}}{\simeq} D^b(\Lambda^{q(s)}(\tilde{A}_n)) \simeq D^b(\mathrm{Coh}(X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m)),$$

当 $X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r$ 与 $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$ 在同一个超K¨ahler流形中通过超K¨ahler旋转相互得到时，应将其理解为传递的（反之亦然）；否则，参数 q 可能不同，因此模的导出范畴可能不等价。

接下来，如果我们不从 A_n奇点消解中移除除子，即在 B 侧放回除子 D_r，那么从同调镜像对称的角度来看，这相当于在计算包裹福柯范畴时，在 A侧添加一个停止集。本文的主体部分证明了这一等价，其中将 X_{res} 视为 B侧。交换 A侧与 B侧的角色后，根据对 [Rit10], 上的解消所作的辛上同调计算，这些范畴现在应当消失。我们通过给出一个定义在米尔诺纤维上的朗道–金兹堡模型（即一个势，而非停止集）来验证这一陈述的另一侧；该势由对全纯曲线进行某种计数得到。我们证明此势的奇点范畴是平凡的（更准确地说，是奇点范畴的乘积平凡，也就是 D刃范畴平凡，按 [Orl04]的意义而言）。

命题 1.1.10 (第 5.2.a 节)。 对于势 w_m： $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m \to \mathbb{C}$，它由对边界位于 $X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r$的拉格朗日骨架上的曲线进行 *Maslov* 指数2 全纯曲线计数定义，我们有

$$DB(w_m) = \prod_{\lambda} D_{\mathrm{sg}}(w_m^{-1}(\lambda)) \simeq 0.$$

因此，以下是三角范畴之间的等价：

$$D^b(\mathrm{Coh}(X_{\mathrm{res}})) \simeq D^b(\Pi(\tilde{A}_n)) \simeq D^\pi \mathcal{W}(X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m, \sigma),$$

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\mathrm{res}}) \simeq 0 \simeq DB(w_m).$$

参见第 5.2 节和图 35。

最后，如果我们选择不从米尔诺纤维中移除纤维，那么这个空间现在等价于 T^*S^2 的线性管道，而包裹福柯范畴拟等价于类型为 A_n [EL17] 的金兹堡代数上的扭曲复形（它不是形式的 [Her16]）：

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\mathrm{Mil}}) \simeq D^\pi(\mathcal{G}(A_n)).$$

将这个空间视为 B 一侧时，我们必须记住，复代数簇不再是唯一的（与上文移除纤维后的情形不同），而是存在许多仿射簇，其底层辛结构均为正合米尔诺纤维。我们证明，它们的凝聚层导出范畴等价于类型为 A_n 的预投射代数˜的变形上的有限生成模的导出范畴：

命题 1.1.11 (命题 5.3.6)。 令 X_{Mil} 定义为多项式$P(Z) - XY$ 的零点集，其中 $P(Z)$ 是一个不含重根的 $n+1$ 次一元多项式。我们有一个等价

$$D^b(\mathrm{Coh}(X_{\mathrm{Mil}})) \simeq D^b(\Pi^\lambda(\tilde{A}_n)),$$

对于某些参数 $\lambda =$ （λ_1，.....， λ_{n+1}），使得 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 0$。

如果我们用 Λ_i 表示这些根，那么根与参数之间的关系由 $\Lambda_i = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j$ 给出，其中 $i = 1,$ ....., $n+1$。

参数 λ_i 与底层超K¨ahler 结构（见例 2.5.3 中的说明）之间的关系已在上文解释（另见注 2.5.10）。

另一方面，作为辛流形，附有停止集的奇点解消并不唯一；相反（如上文移除纤维的情形），存在许多这样的辛流形，它们取决于拉格朗日骨架上的面积参数 λ_i （特别是它们不是 Weinstein 流形）。与上文移除除子的情形类似，我们证明，图 27 和图 29 中 Legendrian 附着链环的变形切卡诺夫–埃利亚什贝格代数 $CE^q(\Lambda_{\mathrm{cyc}})$，即 J^1S^1 中的 $\tilde{A}_n$-链环的代数，先采用环空间系数 t_i 计算，再将其特化为参数 $t_i \mapsto q_i \in k^\times$，满足：

命题 1.1.12 (引理 5.3.2、引理 5.3.3、命题 5.3.4)。 对于任意域 k，若 $q_1 \cdots q_{n+1} =$1，则

$$CE^q(\Lambda_{\mathrm{cyc}}) \cong \mathcal{G}^\lambda(\tilde{A}_n),$$

作为微分分次代数同构，其中 $\mathcal{G}^\lambda(\tilde{A}_n)$ 是参数为 $\lambda_i = q_1 \cdots q_{i-1}(q_i - 1)$ 的变形金兹堡代数。特别地 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 0$。

此外， $\mathcal{G}^\lambda($ $\tilde{A}_n)$是形式的，其同调集中于次数 0 ，且等于 $\Pi^\lambda($ $\tilde{A}_n)$.

因此，我们猜想这些辛流形的非精确缠绕 Fukaya 范畴~拟等价于类型 A_n 的变形预投射代数上的模范畴（猜想 5.3.1）。如上所述，对于非精确范畴，我们使用形式洛朗级数环 $\mathbf{C}((s))$ 上的系数，并取一个（对数）诺维科夫参数 s。变形中的参数 $\lambda_i(s)$ 由面积参数 λ_i 通过关系 $\lambda_i(s) = q_1(s) \dots q_{i-1}(s)(q_i(s) - 1)$ 确定，其中 $q_i(s) = e^{s\lambda_i}$。也就是说，

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r, \sigma) \overset{\text{conjecture}}{\simeq} D^b(\Pi^{\lambda(s)}(\tilde{A}_n)).$$

与上文完全相同，在 B 一侧，变形复结构等价于变形参数 λ_i，并将其替换为 $s\lambda_i$。将两侧得到的变形预投射代数解释为系数取自 $\mathbf{C}[[s]]/(s^2)$ 的代数（这是一个猜想），便完成了关于米尔诺纤维的同调镜像对称的一半。稍微滥用一下记号：

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r, \sigma) \overset{\text{conjecture}}{\simeq} D^b(\Pi^{\lambda(s)}(\tilde{A}_n)) \simeq D^b(\mathrm{Coh}(X_{\mathrm{Mil}})),$$

与上文的命题 1.1.8 和命题 1.1.9 一样，当 X_{res} 和 X_{Mil} 通过超K¨ahler旋转彼此得到时，该陈述应作传递性解读。

最后，我们用 Landau–Ginzburg 模型（B 一侧）找到了 T^*S^2 （A 一侧）线性管道的镜像（定理 5.4.1）。具体而言：我们发现，正确的势 w_r有唯一的奇异值 $\lambda = 0$，由此可推得 D-branes 的范畴与原始箭中模掉循环路径后的 A_n 型预投射代数的奇点范畴正合等价~：

$$DB(w_r) = D_{\mathrm{sg}}(w_r^{-1}(0)) \simeq D_{\mathrm{sg}}(\Pi(\tilde{A}_n)/(\alpha_{i-1} \dots \alpha_{i+1}\alpha_i \mid i = 1, \dots, n+1)).$$

我们证明，后一个范畴几乎等价于类型 A_n 的金兹堡代数上有限生成 dg 模的完美导出范畴（定理 5.4.5）。更确切地说，其中存在一个 Novikov 型参数 T；我们认为这源于以下事实：我们将 $n+1$ 个 T^*S^2 的循环拼接视为 n 个T^*S^2的线性管道中的非精确子流形。总结如下：

定理 1.1.13 （定理5.4.1、引理 5.4.3、定理 5.4.5）。 我们有如下三角范畴之间的等价关系：

$$DB(w_r) \simeq D_{\mathrm{sg}}(\Pi(\tilde{A}_n)/(\alpha^{n+1})) \simeq D^\pi(\mathcal{G}(A_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T]),$$

其中 $|T| = -2$。（这里我们使用记号 $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}$。）

至此，关于 A_n-米尔诺纤维的同调镜像对称的另一半也就完成了，其中由诺维科夫参数 T 导致的表面对称性在注 5.4.2 中得到了解释。有关这些章节的总结，请参见第 5.3 节、第 5.4 节以及图 38。

1.2 与其他工作的联系

这里提及一些 重要的相关工作。我们并不声称这份列表涵盖了所有相关工作。

在 [EL17] 中，研究表明，对于按 A_n 或 D_n 图将T^*S^2 的若干副本丛接而成的魏因斯坦四维流形（对于 E_6、 E_7 和 E_8 图的情形，这一结论也被猜想成立），其包裹福柯范畴与相应金兹堡代数上的有限生成模范畴拟等价。在 [EL19] 中，证明了以下相关结果：按任意图将 T^*S^2 丛接而成的流形，其包裹福柯范畴与导出乘法预投射代数上的有限生成 dg 模拟等价

（同时也证明了这一结论在高亏格情形下成立）。根据 [Kap23]，当且仅当底层箭图为 ADE 型时，金兹堡代数与导出乘法预投射代数准同构。因此，这两篇论文共同为[EL17],中的 A_n 和 D_n 情形提供了一种新的证明，并将结果扩展至 E_6、 E_7 和 E_8情形。

此外，结合 [KS23], 与 [EL19]中的结果可知，按照 $\tilde{A}_n$的方式对 T^*S^2 进行循环拼接所得空间的包裹福柯范畴，拟等价于该预投射代数上的有限生成模范畴。利用停止移除对应于局部化这一点，也可以从本文的结果推出这一结论。

˜关于 A_0情形的类似计算已在 [RET22]中完成。
从 SYZ 视角出发， [Cha13], 计算了 $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$和 $X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r$的紧福柯范畴的同调镜像对称。

Auroux、Abousaid 和 Katzarkov 在 [AAK16, 第 9 节2], 讨论了相同的镜像对称结果，指出 $X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r$和 $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$是 SYZ 镜像，并讨论了相关的 Landau–Ginzburg 势。不过，他们只研究了镜像对称的一侧，也没有将 D^b(Coh(X_{res}))构造为一个辛范畴（他们只构造了一个全子范畴）。

Lekili 和 Ueda 在 [LU21] 中也通过 Landau–Ginzburg 势计算了 A_n-米尔诺纤维的镜像。不过请注意，他们的朗道–金兹堡势处于不同的G-等变框架中。比较同一 A 侧对应的这些不同朗道–金兹堡模型将会很有意思。

1.3 展望

人们希望将本文的结果推广到 D_n、 E_6、 E_7 和 E_8 的情形，以及它们对应的有限子群 $G \subset$ SU(2)。问题在于不存在 G-不变的圆锥曲线 $\mathbb{C}^2$，因此本文采用的策略行不通。

˜ ˜ ˜ ˜众所周知，对于扩展图 D_n、 E_6、 E_7 和 E_8，相应的丛接所对应的包裹福柯范畴由（未变形的）乘法拟射影代数上的扭曲复形给出，而非由（加法）预投射代数给出。这一点可通过计算相应勒让德附着链环的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数看出：微分中会出现高阶项。

致谢

我谨感谢我的博士导师 Georgios Dimitroglou Rizell，感谢他建议研究将类型为 ADE 的预投射代数实现为部分缠绕 Fukaya 范畴这一课题。我也感谢他所进行的有益讨论、细致审阅，以及对早期草稿提出的诸多修改建议。此外，我还要感谢 Johan Asplund 和 Martin B¨acke，就与本研究相关的各类主题展开了宝贵的讨论。

2 同调镜像对称与麦凯对应

我们简要概述代数侧，即 B 侧，关于奇点消解，尤其是导出麦凯对应的内容。这将为本文的主要计算提供动机。随后，我们通过 T^*S^1 这一标准例子，简要介绍同调镜像对称。这些计算的结构仿照本文主要结果的结构，涉及

我们在例 2.5.8 中描述的对数卡拉比–丘超 K¨ahler 族的相关不变量。

2.1 代数、微分分次代数与导出范畴背景

2.1.a 箭图与代数

一个箭图是一个有向图，也就是说，是一个四元组 $Q = (Q_0,\ Q_1,\ s,\ t)$，其中 Q_0 是顶点集，Q_1 是箭集，而 $s,\ t\colon Q_1 \to Q_0$ 是分别确定每条箭的源点和靶点的映射。因此，只需忘掉箭的定向，箭图就定义了一个底层（无定向）图。

我们主要在域 $k = \mathbb{C}$ 上工作，尽管大多数定义对一般的交换环 k 也有意义，而且许多结果在更一般的情形下同样成立。箭图表示是指为每个顶点指定一个 k-向量空间 $Q_0 \ni i \mapsto V_i$，并为每条箭 $i \xrightarrow{\alpha} j$ 指定一个线性映射 $F_\alpha : V_i \to V_j$。

串接（我们将其记作复合）在箭图的路径集上定义了一种乘法（其中包括每个顶点 i 对应的平凡路径 e_i）。令 kQ 为由所有路径张成的向量空间，并赋予由串接诱导的乘法，便得到一个称为 Q 的路径代数。这个代数上的模与该箭图的表示一一对应。

我们将与顶点 i 对应的平凡路径（或幂等元）记为 e_i，将平凡路径构成的半单环记为 $R = kQ_0$（乘法由 $e_i^2 = e_i$ 和 $e_i e_j = 0$ 定义，若 $i \neq j$；另请注意，$1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$ 是 kQ 中的恒等映射）。通常我们关心的是 R-代数 $A = kQ/I$，其中 I 是某个理想。

给定一个箭图 Q，下面的构造将起到核心作用：

定义 2.1.1. 令 $Q = (Q_0, Q_1)$ 表示其<慎>双箭图</慎>，即 $Q_0 = Q_0$ 和 $\overline{Q}_1 = Q_1 \cup Q_1^*$，其中 $Q_1^* = \{\alpha^*\colon\ j \to i \mid \alpha\colon\ i \to j \in Q_1\}$。令 I 为双箭图 kQ 的路径代数中的如下理想，

$$I = \sum_i \left(\sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha) = i}} \alpha^* \alpha - \sum_{\substack{\beta \in Q_1 \\ t(\beta) = i}} \beta \beta^* \right),$$

其中，第一个求和遍历所有顶点 $i \in Q_0$。我们将 Q 的 预投射代数 $\Pi(Q)$ 定义为 kQ/I。

例 2.1.2. 考虑 D_4 和 A_3 的情形。我们选取定向，使得在每种情形下，Q 都由以下箭图给出：

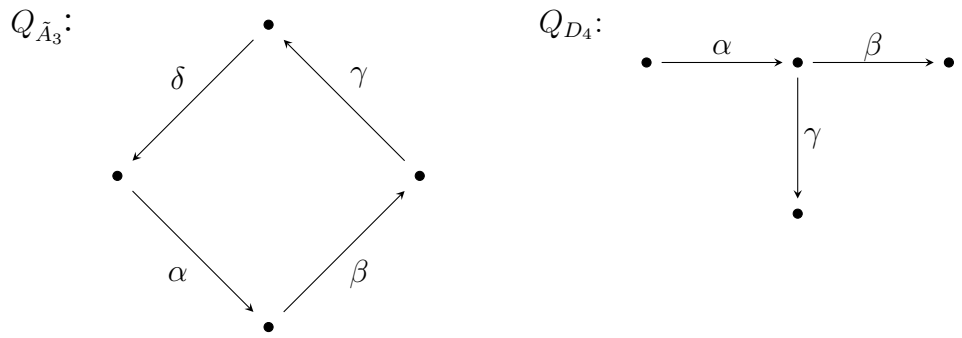


图 ˜1： 底层图分别为 A_3 的箭图示例 D_4 .

于是，每种情形下的预投射代数都定义为以下箭图的路径代数模理想 $I_{\tilde{A}_3} = \langle \alpha^*\alpha - \delta\delta^*, \beta^*\beta - \alpha\alpha^*, \quad \gamma^*\gamma - \beta\beta^*, \quad \delta^*\delta - \gamma\gamma^* \rangle$，依次对应$I_{D_4} = \langle \alpha^*\alpha, \quad \beta^*\beta + \gamma^*\gamma - \alpha\alpha^*, \quad -\beta^*\beta \rangle$:

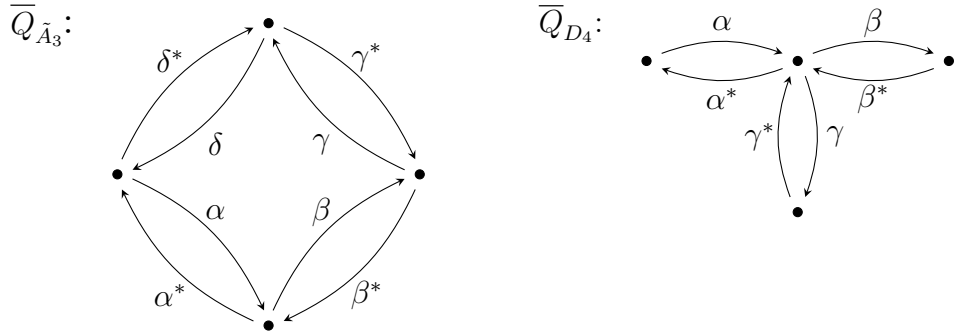


图 2： 与图1中的箭图相对应的双箭图，用于定义预投射代数。

˜注 2.1.3。 我们用 $\Pi(A_n)$ 表示 $\Pi(Q_{\tilde{A}_n})$，其中假设 $Q_{\tilde{A}_n}$ 是循环定向的（见图 5）。对于 A_n，我们也将使用类似的记号，此时我们在作为子箭图时采用诱导的（线性）定向；对于变形预投射代数、金兹堡代数以及乘法版本，我们也将使用类似记号，其定义将在下文回顾。

稍后我们还将考虑 {style id='1'>变形预投射代数，其由 [CH98] 引入。给定一个箭图 Q 和 $\lambda_i \in k, i \in Q_0$，它定义为商空间 $\Pi^{\lambda}(Q) = kQ/I$，其中

$$I = \sum_i \left(\sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} \alpha^*\alpha - \sum_{\substack{\beta \in Q_1 \\ t(\beta)=i}} \beta\beta^* + \lambda_i e_i \right),$$

另一个相关的重要代数是乘法拟射影代数，最早由[CS06]研究。

定义 2.1.4. 给定一个箭图 Q，考虑一个生成树 $T \subset Q$ （即包含所有顶点且不含圈的子图）。令 $Q_M = Q \cup \{z_\alpha^{\pm 1} \mid \alpha \in Q_1 \setminus T_1\}$。这里，箭 $z_\alpha^{\pm 1}$是顶点 s处的环路（α）。

对于 $i \in Q_0$，参数为 $q_i \in k^\times$ 的变形乘法预投射代数是代数 $\Lambda^q(Q) = kQ_M/I$，其中 I 是由以下关系生成的理想：

$$\begin{aligned} z_\alpha z_\alpha^{-1} = z_\alpha^{-1} z_\alpha &= e_{s(\alpha)}, \\ z_\alpha &= e_{s(\alpha)} + \alpha^*\alpha, \\ \prod_{t(\alpha)=i} (e_i + \alpha\alpha^*) &= \prod_{s(\alpha)=i} (q_i e_i + q_i \alpha^*\alpha). \end{aligned}$$

这里需要对顶点进行排序，以定义上述乘法；然而，该代数与排序无关，也与生成树 [EL19] 无关。

例 2.1.5. 我们考虑图 5 中的例子 $Q = Q_{\tilde{A}_n}$，并取生成树T为排除 α_{n+1}后得到的树。于是箭图 Q_M 为 Q，并在顶点 $n+1$处有一对额外的环路 $z^{\pm 1}$，满足 $zz^{-1} = z^{-1}z = e_{n+1}$；其他关系为 $z = e_{n+1} + \alpha_{n+1}^*\alpha_{n+1}$和 $e_i + \alpha_{i-1}\alpha_{i-1}^* = q_i e_i + q_i \alpha_i^*\alpha_i$（其中指标按 $n+1$取模）。我们将这个代数记为 $\Lambda^q(A_n)$。

如果对所有 i都有 $q_i = 1$，那么我们得到非变形乘法预投射代数 $\Lambda(Q)$。在特征零下，非变形乘法预投射代数作为 R-代数同构于预投射代数，当且仅当 Q 是 ADE [Kap23]型。

2.1.b 导出范畴

对于一个代数 A，我们通常关注有限生成（右）A-模的范畴，记作 A-mod，以及它的导出版，记作 $D^b(A)$。后者可定义为有限生成 A-模的链复形的同伦范畴在拟同构处的 Verdier 商/局部化，其中这些链复形在同调意义下有界。

$D^b(A)$ 中的所有对象都可以用投射模的复形（在同调意义下有界）表示。若一个 A-模的复形拟同构于一个有限生成投射模组成的有界复形，则称其为**完美**。我们有一个三角范畴嵌入 $\mathrm{Perf}(A) \subset D^b(A)$，其中 $\mathrm{Perf}(A)$ 称为**完美导出范畴**，它是完美复形在拟同构处的 Verdier 商。

我们还使用记号 $\mathrm{thick}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$ 表示 $D^b(A)$ 中包含 A-模 $X_1, \dots, X_n$（视为复形）及其直和项的最小三角子范畴。

2.1.c 奇点三角范畴

我们定义诺特代数的**奇点三角范畴** A 如下

$$D_{\mathrm{sg}}(A) = \frac{D^b(A)}{\mathrm{Perf}(A)}.$$

这衡量了 A 的奇异程度。特别地，若 A 是正则的，则 $D^b(A) = \mathrm{Perf}(A)$，因此 $D_{\mathrm{sg}}(A) = 0$。这一概念最早由 [Buc21] 研究，随后在 [Orl04], 中进一步研究；该文也将其定义推广到概形，并将其置于同调镜像对称的背景下，用于定义朗道–金兹堡模型。

对于概形 X，完美复形是一个由 $\mathcal{O}_X$-模构成的层复形，它在局部与一个由局部自由层构成的有界复形准同构。将完美复形构成的满三角子范畴记为

Perf(X)。那么，概形 X 的奇点范畴定义为

$$D_{\mathrm{sg}}(X)=\frac{D^b(\mathrm{Coh}(X))}{\mathrm{Perf}(X)}.$$

对于代数：如果 X 光滑（并且满足 [Orl04 第 1.2], 节意义下的 ELF 条件，即分离、诺特、克鲁尔维数有限，且 Coh(X) 有足够多的局部自由层），那么 $D_{\mathrm{sg}}(X)=0$ [Orl04，备注 1.9]。

在 [Orl06], 中，这一构造被推广到任意三角范畴 $\mathcal{D}$，即取其关于同调有限对象全子范畴的商空间： $\mathcal{D}/\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$ （当 X 满足 ELF 条件时，这些定义一致）。此外，在这种情况下，这意味着三角等价 D^b(相干层范畴(X)) $\simeq D^b(A)$（例如由非交换模型（代数） A 给出）会诱导一个等价 $D_{\mathrm{sg}}(X)\simeq D_{\mathrm{sg}}(A)$。

通常我们关注的是研究 $D_{\mathrm{sg}}(X)$，其中 $X=w^{-1}$(0)，对于势： $Y\to$C。当 Y 光滑且仿射时， $D_{\mathrm{sg}}(X)$ 等价于通常的朗道–金兹堡模型，该模型由势 w [的矩阵分解范畴给出，见 Orl04]。

2.1.d 微分分次代数与微分分次范畴

令 R 为一个交换环（通常我们将其视为 $R=kQ_0$）。微分分次代数是一个分次 R-代数 A，带有次数为 -1 的微分 ∂（即使次数降低 1），并满足分次莱布尼茨法则：

$$\partial(xy)=\partial x\cdot y+(-1)^{|x|}x\partial y,$$

对于 $x,\ y\in A$，其中 x 是次数为 $|x|$ 的齐次元素。

从现在起， $A=kQ/I$ 将是一个在 $R=kQ_0$ 上的微分分次代数，其代数结构由箭图 Q 中箭的串接决定。我们主要研究所谓的切卡诺夫 – 埃利亚什贝格代数（第 4.1 节 .a ）。它们具有以下意义下的半自由性：

定义 2.1.6。 若微分分次代数 A 满足 $A=kQ$，且箭的集合 Q_1 带有一个下有界的整数分次，则称其在 $R=kQ_0$ 上半自由。

顶点 集 Q_0 始终是有限的，但 Q_1 可能是可数无限的。

注意，给定箭图 Q的箭的分次后，我们可以通过 deg($\beta\alpha$) = deg(β) +deg(α) 将其扩展为$A=kQ$ 上的分次。此外，我们可以在箭上定义微分 ∂，并通过分次莱布尼茨法则将其扩展到 A。下面的例子将会很有用。

~ ~ ~

定义 2.1.7。 给定一个箭图 $Q=(Q_0,\ Q_1)$，令 $Q=(Q_0,$ $Q_1)$ 为由 $\overline{Q_0}=Q_0$ 和 $\tilde{Q}_1=Q_1\cup Q_0^{\mathrm{loop}}$ 给出的箭图，其中 $Q_0^{\mathrm{loop}}=\{\zeta_i\colon\ i\to i\,|\,i\in Q_0\}$。分次由 $|\alpha|=|\alpha^*|=0$ 和 $|\zeta_i|=1$ 给出。微分在生成元上的定义为 $\partial(\alpha)=\partial(\alpha^*)=0$ 以及

$$\partial\zeta_i=\sum_{\substack{\alpha\in Q_1\\ s(\alpha)=i}}\alpha^*\alpha-\sum_{\substack{\beta\in Q_1\\ t(\beta)=i}}\beta\beta^*.$$

所得 代数称为金兹堡代数 $\mathcal{G}(Q)$（不带势），属于 Q .

例 2.1.8. 金兹堡代数定义为由下列箭图的路径代数构成的微分分次代数，其分次由 $|\alpha|=|\alpha^*|=\beta|=|\beta^*|=|\gamma|=$ 给出

$|\gamma^*| = |\delta| = |\delta^*| = 0$ 和 $|\zeta_i| = 1$，分别为 $|\alpha| = |\alpha^*| = |\beta| = |\beta^*| = |\gamma| = \gamma^*| = 0$ 和 $|\zeta_i| = 1$，微分为 $\partial\zeta_1 = \alpha^*\alpha - \delta\delta^*$、$\partial\zeta_2 = \beta^*\beta - \alpha\alpha^*$、$\partial\zeta_3 = \gamma^*\gamma - \beta\beta^*$ 和 $\partial\zeta_4 = \delta^*\delta - \gamma\gamma^*$：

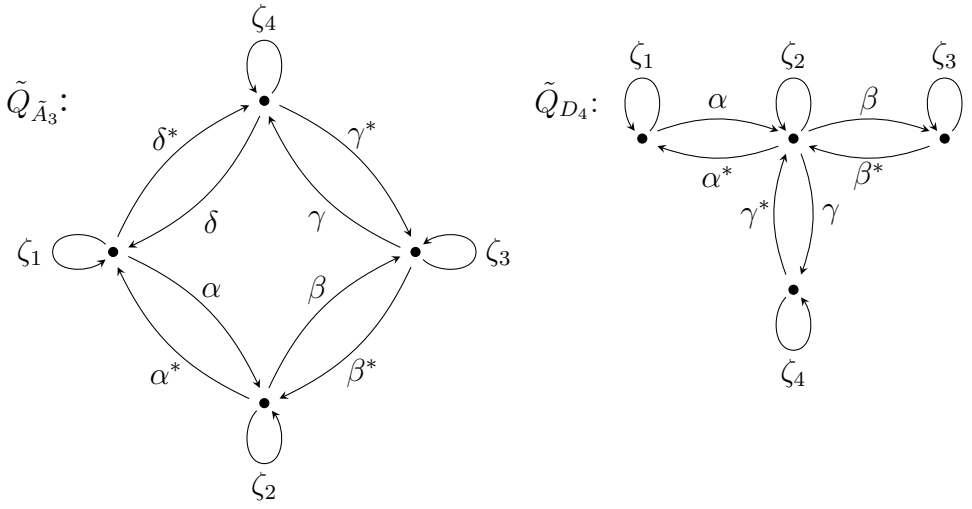


图3： 用于定义金兹堡代数的箭图示例，这些箭图由箭图˜得到，其底层图分别为 A_3 和 D_4；请与图1和图2比较。

预投射代数随后被定义为金兹堡代数的零次同调，$\Pi(Q) = H_0(\mathcal{G}(Q))$。（对于金兹堡代数，有几种不同的相关分次约定。我们采用使 $\mathcal{G}(Q)$成为2-卡拉比–丘代数的分次。）

对于 $\lambda_i \in k$、$i \in Q_0$，箭图 $Q = (Q_0, Q_1)$的变形金兹堡代数 $\mathcal{G}^\lambda(Q)$完全类似于定义2.1.7进行定义，但 ζ_i 的微分除外，其定义为

$$\partial\zeta_i = \sum_{\substack{\alpha\in Q_1\\ s(\alpha)=i}} \alpha^*\alpha - \sum_{\substack{\beta\in Q_1\\ t(\beta)=i}} \beta\beta^* + \lambda_i e_i.$$

变形乘法预投射代数也有一个微分分次版本。

定义 2.1.9。 变形导出乘法预投射代数记为˜ ˜$\mathcal{G}^q_M(Q)$，是如下定义的微分分次代数。设 $Q_M = Q \cup Q_M \cup \{\tau_\alpha \mid \alpha \in Q_1 \setminus T_1\}$（见定义 2.1.7和定义 2.1.4），其中 $T \subset Q$ 为一棵生成树，并令 $q_i \in k^\times$，其中 $i \in Q_0$。则 $\mathcal{G}^q_M(Q) = k\tilde{Q}_M/I$，其中 I为关系集合 $z_\alpha z_\alpha^{-1} = z_\alpha^{-1} z_\alpha = e_{s(\alpha)}$。分次在 $Q \cup Q_M$上按上述方式定义为˜，并且 $|\tau_\alpha| = 1$。微分定义为

$$\partial\tau_\alpha = e_{s(\alpha)} + \alpha^*\alpha - z_\alpha,$$
$$\partial\zeta_i = \prod_{s(\alpha)=i} (q_i e_i + q_i\alpha^*\alpha) - \prod_{t(\alpha)=i} (e_i + \alpha\alpha^*),$$

并在 Q_M 中的生成元上取值为0。

0 次同调是变形乘法预投射代数；与非导出版本一样，对于所有 $i \in Q_0$，我们将 $q_i = 1$ 的情形称为未变形。（关于预投射代数及其导出版本的另一种定义，见 Kaplan

和 Shendler 的论文，特别是 [KS23，第 4 条备注。7]其中给出了两个版本之间的显式拟同构。）

一个微分分次范畴 是一个 k-线性范畴 $\mathcal{A}$，其态射空间 $\mathcal{A}(X,Y)$ 带有分次结构，并配备一个微分 $\partial=\partial_{X,Y}$ 其次数为 -1，即一个满足分次莱布尼茨法则的 k-线性映射：

$$\partial_{X,Z}(g\circ f)=\partial_{Y,Z}(g)\circ f+(-1)^{|g|}g\circ\partial_{X,Y}(f).$$

在微分分次代数 (A,∂_A) 上的 dg-模是一个带有分次结构的（右）模 M，并配备一个次数为 -1 的微分 ∂_M，满足 $\partial_M(ma)=\partial_M(m)a+(-1)^{|m|}m\partial_A(a)$。$A$ 上的有限生成（作为模） dg- 模构成一个微分分次范畴，记作 dg-mod_A。态射空间 $\text{dg-mod}_{A,\bullet}(M,N)$ 是由模态射组成的分次集合，其中 $\text{dg-mod}_{A,n}(M,N)=\{f\colon M\to N\,||f|=n\}$，其中 $|f|=n$ 表示 f 将次数为 d 的齐次元素 $m\in M$ 映射到次数为 $d+n$ 的齐次元素 $f(m)\in N$。微分定义为 $\partial=\partial_N\circ f+(-1)^{|f|+1}f\circ\partial_M$。

函子的概念推广到微分分次情形后，便得到微分分次函子的概念，参见 [Kel06]。微分分次范畴 $\mathcal{A}$ 上的（右） *dg-模* 是一个微分分次函子 $\mathcal{M}\colon\mathcal{A}^{\text{op}}\to\text{Ch}(k)$，其中 $\text{Ch}(k)$ 是 k上的链复形范畴。我们将 $\mathcal{A}$ 上的微分分次模范畴记作 $\mathcal{A}$-模范畴。

一类微分分次范畴的例子由带有完备有限正交幂等元集的微分分次代数给出，例如，底层代数结构为 $A=kQ$的微分分次代数 A，其中箭图为 Q。对象与幂等元（顶点）一一对应，而从 i 到 j 的态射由从 i 到 j的所有路径所张成的空间给出：$\mathcal{A}(e_i,e_j)=e_jAe_i$。我们将这些对象视为右 A-模 e_iA（即所有终点为 i的路径构成的模），而（右）模态射由左乘给出。在这种情况下，微分分次模的两种定义是一致的：作为代数的 A 上的微分分次模 M 可以自然地视为作为范畴的A上的微分分次模 $\mathcal{M}$，反之亦然。

可以很容易地将同伦的定义推广到微分分次代数的情形。由此可定义 $K(\text{dg-mod}_A)$，即 A 上有限生成微分分次模的同伦范畴。将该范畴中的所有拟同构取逆，所得的 Verdier 商定义了 A 上有限生成微分分次模的（无界）导出范畴，我们也将其记作 $D(A)$；它具有三角范畴的结构。不过，我们不会考虑 $D^b(A)$ 的任何类似物，而是考虑另一个满三角子范畴 $D^\pi(A)\subset D(A)$，称为完美导出范畴，它是 $\text{Perf}(A)$ 的微分分次类比。就微分分次代数而言，包裹 Fukaya 范畴总可以表示为某个微分分次代数 A 的完美导出范畴 $D^\pi(A)$，其中 A。定义如下（将 A 视为上文所述的微分分次范畴）。

微分分次范畴 $\mathcal{A}$ 的扭曲复形范畴 $\text{Tw}\,\mathcal{A}$ 定义如下。其对象是有限直和

$$X=\left(\bigoplus_i X_i[n_i],(f_{i,j})\right),$$

其中 $X_i\in\mathcal{A}$ 和 $[n]$ 是次数平移 n 的函子（它会将微分和态射上的符号改为 $(-1)^n$），而 $(f_{i,j})$ 是一个上三角矩阵（若$i>j$，则为 $(f_{i,j}=0)$），满足 $f_{i,j}=(-1)^{n_j}g_{i,j}\colon X_j\to X_i$，其中 $g_{i,j}$ 是次数为 n_i-n_j-1 的齐次元素，且 $f_{ii}=\partial_{X_i}[n_i]$，使得矩阵乘法满足 $(f_{i,j})^2=0$。最后一个条件是为了使 $(f_{i,j})$ 成为微分，也就是说，使 X 成为一个复形以及一个 $\mathcal{A}$上的 dg-模。一个态射$g=(g_{i,j})\in\text{Tw}\,\mathcal{A}(X,X')$ 是一个矩阵，满足 $g_{i,j}\in\mathcal{A}(X_j,X_i')[n_i'-n_j']$。态射空间上的微分采用通常的公式：$\partial g=\partial_{X'}\circ g+(-1)^{|g|+1}g\circ\partial_X$，其中 g 是齐次的。

注意，对于次数为 n_2-n_1-1 的 $X_1\to X_2$，使得 $\partial(f)=0$，$\text{cone}(f[n_1]\colon X_1[n_1]\to X_2[n_2])=(X_2[n_2+1]\oplus X_1[n_1],\ f_{i,j})$，其中 $f_{1,1}=(-1)^{n_2+1}\partial_{X_2}$, $f_{2,2}=(-1)^{n_1}\partial_{X_1}$ 和 $f_{1,2}=(-1)^{n_1}f$，是一个扭曲复形；事实上，扭曲复形是形式化地添加所有移位、锥和直和的方式

以及它们的组合。另请注意， $\mathcal{A}$ 嵌入到 Tw$\mathcal{A}$ 中。锥通过规定特 distinguished 三角是与形如 $X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \to \mathrm{cone}(f) \to X_1[1]$ 的三角同构的三角，定义了 $D^b(\mathcal{A})$ 上的三角结构。

给定一个 dg-范畴 $\mathcal{A}$，存在一个米田嵌入 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$-模。该嵌入扩展为一个嵌入 Tw$\mathcal{A} \to \mathcal{A}$-模。 $\mathcal{A}$-模中包含 Tw $\mathcal{A}$、其零次同调为三角范畴且进一步对取直和项封闭的最小子范畴，记为 ΠTw$\mathcal{A}$。于是 $D^\pi(\mathcal{A}) = H_0\Pi\mathrm{Tw}\ \mathcal{A}$。如果 A 拟同构于代数 B，那么 $D^\pi(A) =$Perf(B)。

给定 ΠTw $\mathcal{A}$ 中的一组对象 X_1、……、X_n（特别地，它们可以全部属于 $\mathcal{A}$），令$\langle X_1$、……、$X_n\rangle$ 表示仅含这些对象的全子范畴。如果 $H_0\mathrm{Tw}\langle X_1$、……、$X_n\rangle \simeq D^\pi\mathcal{A}$，则称 X_1、……、X_n 生成 $D^\pi(\mathcal{A})$。如果 $D^\pi\langle X_1$、……、$X_n\rangle \simeq D^\pi(\mathcal{A})$，则称 X_1、……、X_n分裂生成 $D^\pi(\mathcal{A})$。

假设 $\mathcal{A}$ 按照 [Dri04, 附录 B] 的意义是半自由的（否则可以取一个 $\mathcal{A}$ 的半自由替换 $\tilde{\mathcal{A}}$，且具有相同的对象）。在一组对象 $X_1, \ldots, X_n$ 处的***Drinfeld*** 商 $\mathcal{A}$，是通过向 $\mathcal{A}(X_i, X_i)$ 添加次数为 $|\kappa_i| = 1$ 的自由生成元 κ_i 而得到的微分分次范畴，使得 $\partial\kappa_i = 1_{X_i}$。

对于底层代数结构为 $A = kQ$ 的微分分次代数，其中 Q 是某个箭图，在由顶点 $i_1, \ldots, i_m$ 给出的一组对象处取 Drinfeld 商，所得微分分次代数就是在这些顶点处添加环 κ_{i_j} 得到的，其中 $|\kappa_{i_j}| = 1$ 且 $\partial\kappa_{i_j} = e_{i_j}$。

接下来给出两个我们将在后文用到的命题。

命题 2.1.10. 假设 $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ 是 $\mathcal{A}$ 的对象，且生成 $D^\pi(\mathcal{A})$。如果在 $X_1, \ldots, X_n$ 处取 ***Drinfeld*** 商后得到平凡微分分次范畴（即与平凡微分分次范畴拟等价），那么 $X_1, \ldots, X_n$ 分裂生成 $\mathcal{A}$。

证明。Drinfeld 商的导出范畴是 Verdier 商，因此

$$D^\pi\langle X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m\rangle / H_0\mathrm{Tw}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle = 0$$

([Dri04] 3.4)。当且仅当存在一个 $X' \in D$ 使得 $X \oplus X' \in H_0\mathrm{Tw}\ \langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ 时，对象 $X \in D = D^\pi\langle X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m\rangle$ 在 Verdier 商中（在拟同构意义下）被映射为 0。

□

命题 2.1.11。 对于一个微分分次代数 (A, ∂)，其中 $A = kQ$，令 $B = A\langle h_i, i \in I\rangle$ 表示在顶点集合 $I \subset KQ_0$ 处的 ***Drinfeld*** 商。令 $\tilde{A} = A/Ae_IA$，其中 $e_I = \sum_{i\in I} e_i$。那么 $\tilde{B}(\tilde{A}, \partial)$ 是具有 $\tilde{A} = kQ'$ 的半自由微分分次代数，其中 Q' 是通过移除 I 中的所有顶点，以及从 I 出发或终止于 I 的所有箭而得到的箭图（带有诱导微分）。此外，显然的映射（将 h_i 映射为 0） $B \to A$ 是一个拟同构。

证明。这由 $B/Be_IB = A/Ae_IA$ 得出，再结合 [B¨ac23，引理 2.5],，该结果通过谱序列论证得到。

□

2.1.e A_∞-代数与 A_∞-范畴

一个 A_∞范畴 $\mathcal{A}$ 由对象集合 Ob$\mathcal{A}$、以及对每一对对象 A， $B \in$ Ob$\mathcal{A}$所对应的分次向量空间$\mathcal{A}(A, B)$组成，并配备（高阶）乘法映射

$$\mu_m : \mathcal{A}(X_m, X_{m+1}) \otimes \cdots \mathcal{A}(X_1, X_2) \to \mathcal{A}(X_1, X_{m+1})$$

其次数为 $m-2$，并满足 A_∞-关系：

$$\sum_{\substack{r+s+t=m\\ s\geq 1}} (-1)^{r+st}\mu_{r+1+t}(1^{\otimes r}\otimes \mu_s\otimes 1^{\otimes t})=0$$

（作用于对象时遵循 Koszul 符号规则）。如果每个对象X 都包含一个元素 e_X，使得 $\mathcal{A}$ 是严格幺的，则称 $\mathcal{A}$ 为严格幺的。

$$\mu_1(e_X)=0$$
$$\mu_2(a,e_X)=\mu_2(e_Y,a)=\begin{cases} a, & \text{if } a\in\mathcal{A}(X,Y)\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$
$$\mu_m(\dots,e_X,\dots)=0,\quad m\geq 3.$$

当 $\mathcal{A}$ 只有一个严格幺对象时，我们便得到熟知的、关于 k 上幺 A_∞-代数的概念。然而，与微分分次范畴一样，我们更关注半单环 $R=ke_1\oplus\cdots\oplus ke_n$ 上的 A_∞-代数。也就是说，当 $\mathcal{A}$ 是一个有 n 个对象 X_1、 ..... 、 X_n，其单位元为 $e_i\in\mathcal{A}(X_i$、 $X_i)$ 的 A_∞- 范畴时。

If μ对于 $m\geq 3$，在上述定义中取 $_m=0$，便可得到上述微分分次概念 .

一个 A_∞-函子 F： $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是对象上的一个映射，并附带一组映射 F_m :$\mathcal{A}(X_{m-1}$， $X_m)\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}(X_0$， $X_1)\to\mathcal{B}(FX_0$， $FX_m)$，其次数为 $m-1$，且满足

$$\sum_{\substack{1\leq r\leq m\\ s_1+\cdots+s_r=m}}\mu_r^{\mathcal{B}}(F_{s_1}\otimes\cdots\otimes F_{s_r})=\sum_{\substack{r+s+t=m\\ s\geq 1}}F_{r+1+t}(1^{\otimes r}\otimes\mu_s^{\mathcal{A}}\otimes 1^{\otimes t}).$$

注意， $H_0(\mathcal{A})$ 和 $H_\bullet(\mathcal{A})$ 始终是范畴（由 μ_2 诱导的复合满足结合律）。如果 F_1 诱导出范畴 $H_\bullet(\mathcal{A})$ 与 $\to H_\bullet(\mathcal{B})$ 之间的等价，那么我们称 F 为拟等价；如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 A_∞-代数，那么 F 是拟同构。

对于任意 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$，在 $H_\bullet(\mathcal{A})$ 上存在一个 A_∞-结构（使得 $\mu_1=0$ 在 A_∞-同构意义下唯一），以及一个到 $\mathcal{A}$ 的 A_∞-拟同构。这称为 $\mathcal{A}$ 的极小模型 。如果对于 $m\geq 3$， $\mathcal{A}$ 上的 $\mu_m=0$ 满足条件，使得 $H_\bullet(\mathcal{A})$ 上的 A_∞-结构令其成为 $\mathcal{A}$ 的极小模型，那么我们称 $\mathcal{A}$ 是形式的。

有时，几何定义的 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$ 没有单位元或幂等元，但其中存在一些元素，它们在 $H_\bullet(\mathcal{A})$ 中成为单位元。在这种情况下，我们称 $\mathcal{A}$ 是同调单位的。然而，每个同调单位的 A_∞-范畴都拟等价于一个严格幺的范畴 [Sei08]。

任意 A_∞-范畴都拟等价于一个微分分次范畴（作为 A_∞-范畴）。此外，扭曲复形和 $D^\pi(\mathcal{A})$ 的定义可推广到 A_∞-范畴，如下所示（另见例如[Boc21, [Sei08]）。给定一个 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$，我们考虑有限形式表达式 $A=\bigoplus_i(X_i[n_i])$,$X_i\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}$, $n_i\in\mathbb{Z}$。在这些对象之间，我们将态射空间定义为矩阵：

$$\operatorname{Add}_{\mathcal{A}}\left(\bigoplus_i X_i[n_i],\bigoplus_j Y_j[m_j]\right)=\bigoplus_{i,j}\mathcal{A}(X_i,Y_j)[m_j-n_i]$$

对于这些对象，通过 A_∞-运算的矩阵版本定义 $\mu_m^{\operatorname{Add}\mathcal{A}}$：

$$(\mu_m^{\operatorname{Add}_{\mathcal{A}}}(g_m,\dots,g_1))_{i,j}=\sum_{i_1,\dots,i_m}\mu_m^{\mathcal{A}}((g_m)_{i,i_1}),(g_{m-1})_{i_1,i_2},\dots,(g_1)_{i_{m-1},j}),$$

其中 $g_r = ((g_r)_{i,\ j}) \in \bigoplus_{i,\ j} \mathcal{A}(X_r,\ X_{r+1})[n_{r+1} - n_r]$。 $\mathcal{A}$ 上的扭曲复形 是一个二元组 $(\bigoplus_i X_i[n_i],\ f)$，其中 $f = (f_{i,\ j})$ 是一个上三角矩阵，满足 $f_{i,\ j}$： $X_j \to X_i$ 的次数为 $n_i - n_j - 1$，且满足毛雷尔–卡当方程

$$\sum_{m \geq 1} \mu_m^{\mathrm{Add}_{\mathcal{A}}}(f, \ldots, f) = 0.$$

扭曲复形是 A_∞-范畴 $\mathrm{Tw}\,\mathcal{A}$ 的对象，其态射为 $\mathrm{Add}_{\mathcal{A}}$。其高阶运算定义如下：

$$\mu_m^{\mathrm{Tw}\,\mathcal{A}}(g_m, \ldots, g_1) = \sum_{i_{m+1}, \ldots, i_1 \geq 0} \mu^{\mathrm{Add}_{\mathcal{A}}}_{m + i_1 \cdots + i_{m+1}}(f_{m+1}, \ldots, f_{m+1}, g_m, f_m, \ldots, f_2, g_1, f_1, \ldots, f_1),$$

其中，g_r 是从 $(A_r,\ f_r)$ 到 $(A_{r+1},\ f_{r+1})$ 的扭曲复形态射；这里插入 i_{m+1} 个 f_{m+1} 副本，后接 g_m，再插入 i_m 个 f_m 副本，后接 g_{m-1}，依此类推。由于要求 f_r 为上三角形式，因此该和是有限的。

一个 A_∞-函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 定义了一个 A_∞-函子 $\mathrm{Tw}\,F\colon \mathrm{Tw}\ \mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\,\mathcal{B}$，其在对象上的定义是将 $(\bigoplus_i X_i[n_i],\ f)$ 映射为 $(\bigoplus_i F(X_i)[n_i],\ \sum F_i(f,\ \ldots,\ f))$，并且

$$(\mathrm{Tw}\,F)_m(g_m, \ldots, g_1) = \sum_{i_{m+1}, \ldots, i_1 \geq 0} \mathcal{F}_{m + i_1 + \cdots + i_{m+1}}(f_{m+1}, \ldots, f_{m+1}, g_m, f_m, \ldots, f_2, g_1, f_1, \ldots, f_1),$$

其中我们插入 i_{m+1} 个 f_{m+1} 副本，后接 g_m，再后接 i_m 个 f_m，等等。 [Boc21，第 3.3 节.3]。

我们将 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$ 的完美导出范畴 定义为 $D^\pi(\mathcal{A}) = H_0\Pi\mathrm{Tw}\,\mathcal{A}$，其中 Π 表示幂等完备化（这意味着我们需要先通过米田嵌入将 $\mathrm{Tw}\,\mathcal{A}$ 嵌入到 $\mathcal{A}$ 上的 A_∞-模范畴中，再添加直和项；例如参见 [Sei08]）。 A_∞-范畴的函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 通过上文定义的 A_∞-函子 $\mathrm{Tw}\,F$ 诱导出函子 $H_0\mathrm{Tw}\,\mathcal{A} \to H_0\mathrm{Tw}\ \mathcal{B}$ 和 $D^\pi(\mathcal{A}) \to D^\pi(\mathcal{B})$。若 F 是拟同构，则它们是拟等价。

生成和分裂生成的概念可原样推广到 A_∞-范畴。Drinfeld 商也可推广，且命题 2.1.10 对 A_∞-范畴仍然成立。特别地，若 $\mathcal{A}$ 是一个 A_∞-范畴，且 $\mathcal{B} = \langle X_1 \ldots,\ X_n \rangle$ 是以对象X_1，$\ldots$，$X_n \in \mathrm{Tw}\,\mathcal{A}$ 为对象的满子 -A_∞- 范畴，那么商 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ 范畴中的态射空间为

$$\mathcal{A}/\mathcal{B}(U, V) = \bigoplus_{\substack{k \geq 0 \\ X_{i_1}, \ldots, X_{i_k} \in \mathcal{B}}} \mathrm{Tw}\,\mathcal{A}(X_{i_k}, V) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Tw}\,\mathcal{A}(X_{i_2}, X_{i_1}) \otimes \mathrm{Tw}\,\mathcal{A}(U, X_{i_1}),$$

而微分由巴微分给出。完整的A_∞-结构描述请参见 [LO06]。

2.2 麦凯对应的背景

麦凯对应是数学不同领域分类结果之间一个引人注目的对应。

2.2.a 经典麦凯对应

我们从图和箭图开始。以下图形（图 4）去掉额外的顶点和虚线边后，便是类型为 A_n、 D_n、 E_6、 E_7 和 E_8 的 Dynkin 图。若~ ~ ~ ~ ~将虚线部分也包括在内，则得到扩展 Dynkin 图： A_n、 D_n、 E_6、 E_7 和 E_8。

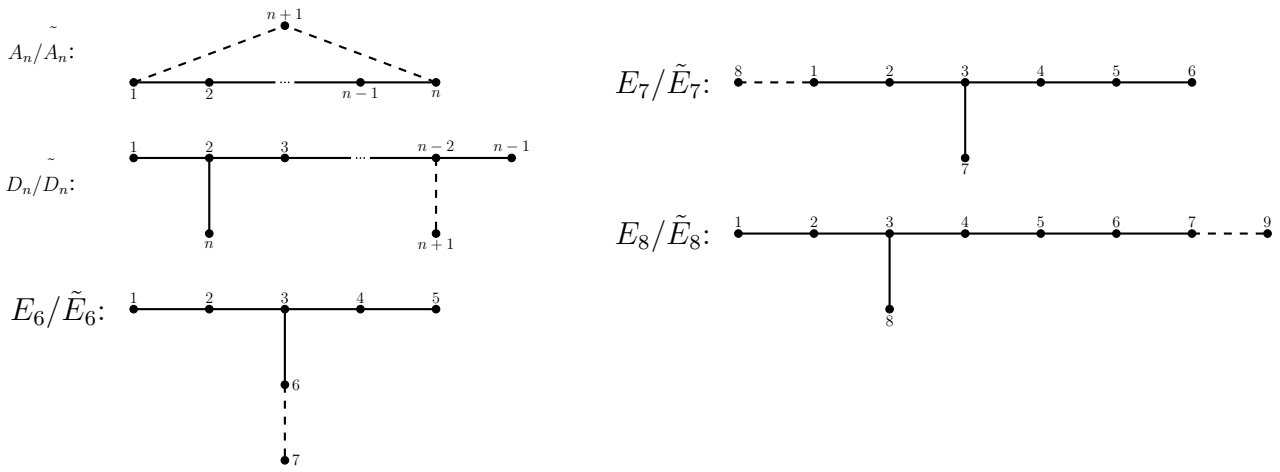


图 4： 图中以实线边展示了类型为 A_n、 D_n 和 E_6 的经典 Dynkin 图，7，8 。若~ ~ ~加入虚线边，则得到扩展 Dynkin 图 A_n、 D_n 和 E_6，7，8。

若箭图 Q 的不可分解 kQ-模的同构类只有有限多个，则称其为有限表示型。Gabriel 定理指出，连通箭图为有限型，当且仅当其底层图是上方所示 Dynkin 型 ADE 图之一。此外，还有驯表示型这一概念；当且仅当底层图是上方所示的扩展 Dynkin 型 ADE 之一时，箭图才属于这一类型。（所有其他箭图都属于野表示型，这大致意味着我们无法全面理解它们的所有不可分解模。）

Dynkin 图对应于有限子群 $G \subset$ SU(2)。SU(2) 的有限子群（按共轭分类）如下：

- 循环群 $\mathsf{Z}_n \cong \mathsf{C}_n = \langle x \,|\, x^n = 1 \rangle$。
- 二元二面体群，又称二循环群，$\mathsf{BD}_{4n} = \langle x,\ y \,|\, x^{2n} = 1,\ x^n = y^2,\ y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$。
- 二元四面体群 $\mathsf{BT} = \langle x,\ y,\ z \,|\, x^2 = y^3 = z^3 = xyz \rangle$。
- 二元八面体群 $\mathsf{BO} = \langle x,\ y,\ z \,|\, x^2 = y^3 = z^4 = xyz \rangle$。
- 二元二十面体群 $\mathsf{BI} = \langle x,\ y,\ z \,|\, x^2 = y^3 = z^5 = xyz \rangle$。

给定有限群 G 及其有限维 C-表示 V，我们可以如下定义 V 的麦凯箭图。对于每个不可约有限维表示 ρ 的（同构类） $G \to V$，我们取一个与之对应的顶点 v_ρ。当且仅当 ρ_2 是 $V \otimes \rho_1$ 的直和项时，我们添加一条箭头 $v_{\rho_1} \to v_{\rho_2}$ 。

在 $G \subset$ SU(2) 的情形下，我们在 $V = \mathsf{C}^2$ 上有一个典范表示。事实证明，这些情形中的麦凯箭图的底层图就是上文相应的扩展 Dynkin

图，其中额外的顶点对应于平凡一维表示，如下所示:

- $G = \mathbf{Z}_{n+1}$ 对应麦凯图 $\tilde{A_n}$
- $G = \mathbf{BD}_{4(n-2)}$ 对应麦凯图 $\tilde{D_n}$
- $G = \mathbf{BT}$ 对应麦凯图 $\tilde{E_6}$
- $G = \mathbf{BO}$ 对应麦凯图 $\tilde{E_7}$
- $G = \mathbf{BI}$ 对应麦凯图 $\tilde{E_8}$。

最后，在经典麦凯对应中，我们还得到了与杜瓦尔奇点的对应关系，它们位于 $\mathbf{C}^3$ 的原点，由下式给出:

- 由 $X^2 + Y^2 + Z^{n+1} = 0$ 给出的 A_n 奇点。
- $X^2 + ZY^2 + Z^{n-1} = 0$ D_n 奇点。
- $X^2 + Y^3 + Z^4 = 0$ E_6 奇点。
- $X^2 + Y^3 + YZ^3 = 0$ E_7 奇点。
- $X^2 + Y^3 + Z^5 = 0$ E_8 奇点。

这些奇点也可以等价地由 $\mathbf{C}^2/G$ 定义，其中 G 是对应群。它们还对某些称为简单奇点的类型进行分类。通过反复爆破可以得到奇点的保正则解消。此时，奇点解消中的例外除子是若干个 $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ 的并，且彼此横截相交。我们通过为每个 $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ 副本取一个顶点来定义该奇点的 相交图 ，并在任意两个顶点之间连一条边，当且仅当相应的 $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ 相交。于是，杜瓦尔奇点的相交图就是相应的 Dynking 图。

2.2.b 导出麦凯对应

前射影　代数之所以进入讨论，是因为范畴的等价 ,

$$\Pi(Q)\text{-mod} \simeq (k[x,y] * G)\text{-mod}$$

（见 [CH98]）。这里， $G \subset \mathbf{SU(2)}$ 是一个有限子群，而 Q 是相应的扩展 Dynkin 箭图。右侧出现的代数 $k[x,y]*G$ 被称为 斜对称代数，它是集合 $G \times k[x,y]$，其乘法为扭曲乘积 $(p(x,\ y)\ g)\ \cdot (q(x,\ y)\ h)\ = (p(x,\ y)\ \cdot g(q(x,\ y))\ gh)$。对于循环群，Morita 等价的证明甚至还给出了代数同构。

下面的导出麦凯对应将其与奇点解消联系起来。一个基本事实是，$\mathbf{Coh}_G(\mathbf{C}^2)$ 等价于 $(\mathbf{C}[x,y] * G)$-模范畴，其中 $\mathbf{Coh}_G(\mathbf{C}^2)$ 是 $\mathbf{C}^2$ 上的 G-等变凝聚层范畴。

定理 2.2.1 （导出麦凯对应 [KV00，定理 1。4]）。 设 $G \subset SU$（2）为一个有限子群，并设 X_{res} 是$\mathbb{C}^2/G$的奇点的保正则解消。则我们有导出范畴的一个等价

$$D^b(\text{Coh}(X_{\text{res}})) \simeq D^b(\text{Coh}_G(\mathbb{C}^2)).$$

因此，奇点消解上的凝聚层有界导出范畴与相应扩展 Dynkin 箭图的预投射代数导出 Morita 等价。

˜2.3 A_n型金兹堡代数的形式性

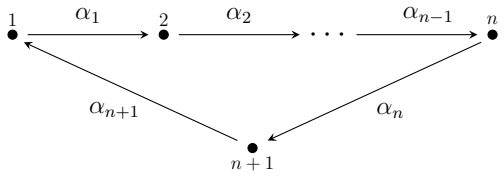
˜稍后我们将把 A_n 型金兹堡微分分次代数实现为一个 Legendrian 附着链环的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数；该 Legendrian 附着链环对应于去除一个除子并配备适当停止集的 A_n-米尔诺纤维的 Weinstein 手柄分解。在此，我们证明这一微分分次代数是形式的这一重要事实。

给定一个箭图 Q，当原始箭图 Q 无环时， $\mathcal{G}(Q)$ 与 $\Pi(Q)$ 的完整同调之间的关系已在 [Her16] 中给出：

定理 2.3.1 ([Her16，定理 A])。 假设 Q 无环。那么 $\mathcal{G}(Q)$ 是形式的，且$H_\bullet(\mathcal{G}(Q)) = \Pi(Q)$，也就是说，金兹堡代数的同调集中在次数0，当且仅当 Q 的底层图不是 *Dynkin* 型。

例如，根据定理 2.3.1， $H_\bullet(\mathcal{G}(Q_{D_4})) \neq \Pi(Q_{D_4})$，但 $H_\bullet(\mathcal{G}(Q_{\tilde{D}_4})) = \Pi(Q_{\tilde{D}_4})$。˜然而，该定理并未涵盖箭具有循环定向的 A_n 情形。可以通过改变定向并施加一个改变部分符号的同构来解决这一问题。不过，我们选择直接给出一个独立证明，证明在 A_n 情形下，金兹堡代数的完整同调˜由预投射代数给出，且不依赖定理 2.3.1（另见 [KY18，引理 9.1]）：

˜ ˜定理 2.3.2. 令 $\mathcal{G}(A_n)$ 表示金兹堡代数，令 $\Pi(A_n)$ 表示图 *5* 中箭图的预投射代数˜ ˜。那么 $H_\bullet(\mathcal{G}(A_n)) = H_0(\mathcal{G}(A_n)) = \Pi(A_n)$。因此，由 $\alpha_i \mapsto \alpha_i$、 $\alpha_i^* \mapsto \alpha_i^*$ 和 $\zeta_i \mapsto 0$ 给出的映射 ˜ ˜$\mathcal{G}(A_n) \to \Pi(A_n)$ 定义了一个拟同构。



˜**图 5：** 循环定向的 A_n。

证明。 令 A 表示由金兹堡代数的二次微分经对偶化而得到乘法的 R-代数（见图 2.3），即科祖尔对偶。换言之， $A = kQ/I$，其中 I 是由关系生成的理想，

$$I = (a_{i+1}a_i,\, a_i^*a_{i+1}^*,\, a_i^*a_i - a_{i-1}a_{i-1}^* \mid i = 1, \ldots, n+1)$$

（最后一个关系中的指标应按 $n+1$ 取模）。我们采用记号 $A = A/R$，并将 α 替换为¯a，以区分 A 中的元素与 $\mathcal{G}$（Q）中的元素。我们通过令 $|a_i| = |a_i^*| = -1$ 将 A 赋予分次代数结构。

我们将 A的条复形记为 BA:

$$R \xleftarrow{\epsilon} \overline{A}[-1] \longleftarrow (\overline{A}[-1])^{\otimes_R 2} \longleftarrow \cdots \longleftarrow (\overline{A}[-1])^{\otimes_R m} \longleftarrow \cdots \quad = \quad BA$$

其中 ϵ 是显然的增广。其微分在纯张量上的定义为

$$\partial_{BA}(sx_1 \otimes \cdots \otimes sx_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1+|x_1|+\cdots+|x_{i-1}|} sx_1 \otimes \cdots \otimes s(x_i x_{i+1}) \otimes \cdots \otimes sx_n,$$

其中我们使用记号 $sx = x[-1]$。

将 BA 与 A 作张量积，即可得到 R 在 A 上的射影分解（作为右 A-模）：

$$R \longleftarrow BA \otimes_R A$$

将 $\mathrm{Hom}_A^\bullet(-,\ R)$（关于总分次的分次对偶）作用于此分解，再取上同调，即可计算 $\mathrm{Ext}_A(R,\ R)$（将 A 视为微分为零的微分分次代数）。此外，我们有如下同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A^\bullet(BA \otimes_R A, R) &\cong \mathrm{Hom}_R^\bullet(BA, \mathrm{Hom}_A^\bullet(A, R)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R^\bullet(BA, R),\end{aligned}$$

利用张量-同态伴随。此外

$$\mathrm{Hom}_R^\bullet(BA, R) \cong \mathcal{G}(Q),$$

作为微分分次代数（关于总分次），通过 R-同构 $(s\alpha_i)^\vee \mapsto \alpha_i$、$(sa_i^*)^\vee \mapsto \alpha_i^*$、$(sz_i)^\vee \mapsto \zeta_i$，其中 $z_i = a_i^* a_i = a_{i-1} a_{i-1}^*$。

因此，我们可以通过计算 $\mathrm{Ext}_A(R,\ R)$ 来计算 $H_\bullet(\mathcal{G}(Q))$。我们使用以下更简单的自由分解：

$$R \xleftarrow{\epsilon} A \xleftarrow{\Phi_1} A^{\oplus 2} \xleftarrow{\Phi_2} A^{\oplus 3} \xleftarrow{\Phi_3} \cdots$$

这些映射定义为

$$\Phi_m = \begin{pmatrix} \phi_1 & (-1)^m\phi_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & (-1)^m\phi_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & (-1)^m\phi_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \phi_1 & (-1)^m\phi_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= (a_1 + \cdots + a_n) \cdot x, \\ \phi_2(x) &= (a_1^* + \cdots + a_n^*) \cdot x\end{aligned}$$

（它们是右模态射 t-module 态射 $A \to A$）。这确实定义了一个解消。首先，

$$\Phi_m \circ \Phi_{m+1} = 0$$

因为 $\phi_1^2 = \phi_2^2 = \phi_1\phi_2 - \phi_2\phi_1 = 0$。其次，由维数理由，该序列必然是正合的。我们有 $\dim(A^{\oplus m}) = 4nm$ and $\mathrm{rank}(\Phi_m) = 2mn + n$。但是，根据线性代数的维数公式，$4(m+1)n = 2mn + n + \dim(\ker(\Phi_m))$，因此 $\dim(\ker(\Phi_n)) = 2mn + 3n = 2(m+1)n + n = \mathrm{rank}(\Phi_{m+1})$。由于 $\ker(\Phi_m) \supset \mathrm{Im}(\Phi_{m+1})$，且它们具有相同的维数，我们得出 $\ker(\Phi_m) = \mathrm{Im}(\Phi_{m+1})$。（同样，$\ker(\epsilon) = \mathrm{Im}(\Phi_1)$ 也可轻易验证。）

注意，由于我们希望得到一个微分次数为 -1 的复形，特别是 Φ_m 的次数应为 -1，因此我们不对 A 的分次进行平移。

应用 $\mathrm{Hom}_A(-,\ R)$ 到该解消上，我们得到微分为零的复形

$$R \xrightarrow{0} R^{\oplus 2} \xrightarrow{0} R^{\oplus 3} \xrightarrow{0} \ldots$$

因此，取同调会得到相同的代数。所以同调集中在 0 次。

□



图 6： ”分别对 $\partial\zeta_i = \alpha_i^*\alpha_i$ 和 $a_i^*a_i = z_i$ 作出贡献的“圆盘”

2.4 同调镜像对称

在弦理论中，所需的额外维度由紧致卡拉比–丘流形X描述。描述物理现象的理论有两种： A侧采用 X 的辛几何，而 B侧采用 X的代数几何。一般来说，这两种理论并不等价。然而，镜像对称猜想认为，对于任意卡拉比–丘流形 X ，都存在一个镜像卡拉比–丘流形 X，使得

$$A\text{-side}(X) \simeq B\text{-side}(\check{X}),$$
$$B\text{-side}(X) \simeq A\text{-side}(\check{X}).$$

基于这些思想，Kontsevich [Kon95] 提出了他的同调镜像对称猜想。该猜想预言了辛簇与代数簇的不变量之间存在联系，特别是不同卡拉比–丘流形之间存在联系；这些流形同时具有代数簇结构和辛流形结构。根据这一猜想， A侧在 X 上的导出 Fukaya 范畴所给出的辛不变量，应当与镜像 X上 B侧的凝聚层导出范畴所给出的代数不变量等价。此外，将 A侧与 B侧在 X 和 X上互换，还应得到另一种等价。这种等价应当是三角范畴意义下的等价。

这一猜想已拓展到卡拉比–丘流形（或更一般地说，紧致卡拉比–丘流形）范围之外。在本文中，我们主要关注以下两类范畴之间的等价：出现在例 2.5.8 中的 Weinstein 流形（带停止集）的（部分）包裹 Fukaya 范畴，以及将同一流形视为代数簇时的凝聚层导出范畴（或朗道–金兹堡模型的奇点范畴）。其中至关重要的是对数卡拉比–丘流形的概念；它们表现为闭卡拉比–丘流形的开对应物。

下面是一个著名的同调镜像对称例子，其变体对应于本文的不同镜像陈述（第 5 节）。运用手术公式的部分（例 2.4.3）展示了本文主体部分所采用的策略。

2.4.a 从 TS1 的情形推导出的同调镜像对称例子

这里我们讨论一些广为人知的基础同调镜像对称例子。

例 2.4.1 (T^*S^1)。 一个自身即为其镜像的流形例子是 $T^*S^1 = \mathbb{C}^*$。我们有 D^b(相干层范畴($\mathbb{C}^*$)) $= D^b(\mathbb{C}[x, x^{-1}])$，因为 $\mathbb{C}$ 上的凝聚层不过是有限生成的 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$-模。

圆柱 $D^\pi\mathcal{W}(T^*S^1)$ 的（导出）包裹福柯范畴（见第 4 节）由一个余切纤维 $L = T_p^*S^1 \subset T^*S^1$ 生成。因此，只需计算自同态代数$CW_{T^*S^1}(L,\ L)$，即该纤维的包裹 Floer 复形。我们证明，这个 A_∞-代数等于

在适当的选择下的 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$。作为向量空间，$CW_{T^*S^1}(L,\ L)$ 由 L 与 $\phi_H^1(L)$ 的交点生成；L 的“绕行”中，ϕ_H^1 是某个二次哈密顿量的时间 1 流，例如 $H(q,\ p) = p^2$（在 $T^*S^1 = S^1_q \times \mathbb{R}_p$ 上）。这给出了可数多个生成元 1，$x^{\pm 1}$，$x^{\pm 2}$，.....（图 7 左侧）。

所有生成元的次数均为 0（采用标准分次，此处省略细节）。端同态代数 $CW_{T^*S^1}(L,\ L)$ 本质上是一个 A_∞-代数，但由于它集中在 0 次，唯一非平凡的乘法是 μ^2，因此它是一个普通的结合代数。

为了确认乘积结构正确，也就是说 $x^i \cdot x^j = x^{i+j}$，我们必须再次扰动 L，例如 $\phi_G^1(F)$，其中带有 $G = 2H$，并计数边界上带有 punctures 的某些浸入全纯圆盘。punctures 应落在交点上，而边界应沿着纤维及其两次扰动。生成元需要加以识别。这类圆盘确实存在，并且可以在万有覆盖中画出（见图 7 右侧）。它们是唯一可能的圆盘，这可以从绕数必须为 0 看出。

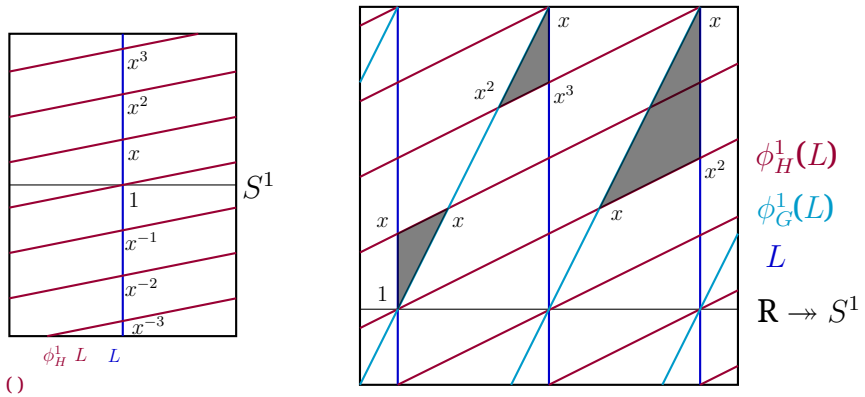


图 7： T^*S^1 与 L 以及左侧的绕行 $\phi_H^1(L)$（属于 L）。万有覆盖中显示的圆盘分别对右侧的 $\mu^2(x,\ 1) = x$、$\mu^2(x^2,\ x) = x^3$ 和 $\mu^2(x,\ x) = x^2$作出贡献。乘法应读作映射 $\mu^2 : CW_{T^*S^1}(\phi_G^1(L)\ \phi_H^1(L)) \otimes CW_{T^*S^1}(L,\ \phi_G^1(L)) \to CW_{T^*S^1}(L,\ \phi_H^1(L))$

.

例 2.4.2（停止集与 $\mathbb{C}P^1$）。回到 $\mathbb{C}$；我们有 $D^b(\mathrm{Coh}(\mathbb{C})) = D^b(\mathbb{C}[X])$，而$D^b(\mathrm{Coh}(\mathbb{C}^*)) = D^b(\mathbb{C}[x, x^{-1}])$可通过将 x局部化得到。这种局部化发生在移除一个除子时，这是一个普遍模式。此外，遵循这一模式，$\mathbb{C}$ 是从 $\mathbb{C}P^1$ 中移除一个除子后得到的，而范畴 $D^b(\mathbb{C}[X])$则通过将该范畴局部化得到

$$D^b(\mathrm{Coh}(\mathbb{C}P^1)) = D^b(kQ), \qquad Q = \quad 1 \quad 2,$$

也就是说，克罗内克箭图的路径代数的有限生成模的导出范畴（例如参见 [Boc21]）。

移除／添加除子（在上述例子中是一个点），对应于在辛几何中移除／添加所谓的停止集。目前，我们可以将其理解为无穷远边界中 Legendrian 子流形的一个邻域，在此处我们停止绕行。在 T^*S^1 的例子中，无穷远边界由两个 S^1 的副本组成，而 Legendrian 子流形就是这两个副本上的一组点。

若在一点处设置停止集，则已知 $D^\pi\mathcal{W}(TS^1,\ \mathrm{pt})$ 由一个纤维（余核）和停止集的一个链接圆盘生成。然而，实际上并不需要将链接圆盘作为生成元。因此

我们需要计算 $CW_{(T^*S^1,\mathrm{pt})}(L,\ L)$。现在，我们在例如负 p 坐标那一部分停止绕行。这些交点之间圆盘的计数保持不变，因此得出 $CW_{(T^*S^1,\mathrm{pt})}(L,\ L) = \mathsf{C}[X]$。

添加两个停止集，在 S^1 的每个副本上各添加一个，会改变生成元：$D^\pi\mathcal{W}(T^*S^1,\ \{\mathrm{pt}_1, \mathrm{pt}_2\})$ 不再仅由一个纤维生成。众所周知，它由一个纤维和两个链接圆盘共同生成，每个停止集对应一个链接圆盘。不过，由此可以证明它也能像下方图 8 所示那样由两个纤维生成（从几何角度看，锥对应于拉格朗日子流形上的“手术”操作，这种操作可以找到新的生成元，参见例如 [Aur14，图 9]）。这里，绕行在一次交集后停止，因此我们得到克罗内克箭图。

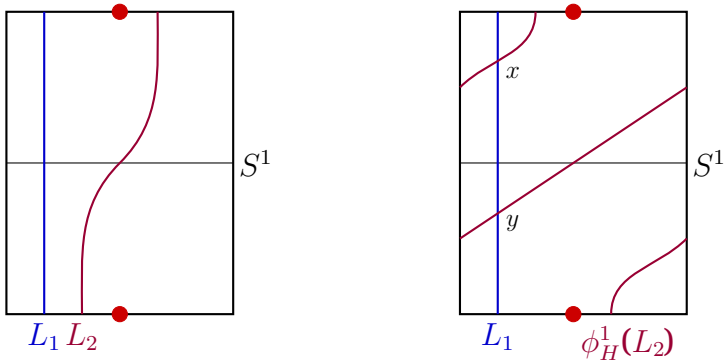


图 8： 左侧为 $D^\pi\mathcal{W}(T^*S^1,\ \{\mathrm{pt}_1, \mathrm{pt}_2\})$ 的生成元 L_1 和 L_2。右侧为 $= L_1 \cap \phi_H^1(L_2)$ 中 $CW_{(T^*S^1,\{\mathrm{pt}_1,\mathrm{pt}_2\})}(L_1,\ L_2)$ 的计算。停止集以红点标出。因此，整个范畴可以用代数 $\bigoplus_{1\le i,\ j\le 2} CW_{(T^*S^1,\{\mathrm{pt}_1,\mathrm{pt}_2\})}(L_i,\ L_j) = \mathsf{C}\left(1 \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} 2\right)$ 来描述。

例 2.4.3（使用切卡诺夫–埃利亚什贝格代数和手术公式）。最后，我们还可以通过计算切卡诺夫–埃利亚什贝格代数（见第 4 节），利用手术公式计算包裹福柯范畴（[BEE12], [EL23] 以及针对这一维数的 [B¨ac23]）。在上面的例子中，T^*S^1 是通过向次临界区域 D^2附加一个临界温斯坦把手得到的。根据手术公式，$CW_{T^*S^1}(L,\ L) = CE(\Lambda)$，其中 $\Lambda \subset S^1 = \partial D^2$ 是无穷远边界上的 Legendrian 附着链环，由两个点组成。这里的 Reeb 流由逆时针旋转给出，因此 Reeb 弦为 c_{01}^0、c_{ij}^p、$0 \le i,\ j \le 1$、$p \ge 1$。分次由 $|c_{i,\ j}^p| = 2p - 1 + \delta_{j,\ 1} - \delta_{i,\ 1}$给出，其中 $\delta_{i,\ j}$ 是克罗内克 δ。可以证明，微分为（见 [B¨ac23]）

$$\partial c_{0,1}^0 = 0, \qquad \partial c_{1,0}^1 = 0, \qquad \partial c_{0,0}^1 = 1 - c_{1,0}^1 c_{0,1}^0,$$
$$\partial c_{1,1}^1 = 1 - c_{0,1}^0 c_{1,0}^1, \qquad \partial c_{0,1}^1 = -c_{0,1}^0 c_{0,0}^1 + c_{1,1}^1 c_{0,1}^0, \qquad \partial c_{i,j}^p = \sum_{l=0}^{p} (-1)^{\delta_{l,1}+\delta_{j,1}} c_{lj}^l c_{il}^{p-l}$$

（其中我们采用上面最后一个等式中的约定 $c_{00}^0 = c_{11}^0 = c_{10}^0 = 0$）。可以证明，这个微分分次代数是形式的，其同调由 $x = c_{0,1}^0$ 和 $x^{-1} = c_{1,0}^1$生成；关系 $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$ 由 $\partial c_{1,1}^1$ 和 $\partial c_{0,0}^1$ 推出（另见 [EL19]）。

添加一个停止集后，得到 S^1 上三点的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数，其中一个幂等元对应附着球面 $\Lambda = S^0$，另一个幂等元对应停止集。由从这些点出发并终止于这些点的 Reeb 弦构成的代数，与余核和链接圆盘的部分包裹余链拟同构

然而，我们知道该范畴仅由柄的余核生成，因此根据手术公式，我们只需计算由从 S^0 出发并终止于 S^0 的弦组成的子微分分次代数。这个微分分次代数也可以在移除停止集后得到的 Weinstein 扇区的边界中计算；该边界就是一个区间。区间上的 S^0 的微分分次代数显然是 $k[x]$ （见图 9）。



图 9： 左侧是绿色的附着球面和红色的停止集。从绿色点出发并以绿色点为终点的弦给出余核的子微分分次代数，而余核由此生成。右侧同样是余核的微分分次代数，但采用扇区的视角，并包含唯一的 Reeb 弦 $\Lambda \to \Lambda$。

最后，像上面的圆柱那样添加两个停止集，得到以下图示：在两个圆盘的边界上各添加一个 1-把手，并在每个圆盘的边界上添加一个停止集。同样，在扇区图中，计算切卡诺夫–埃利亚什贝格代数很容易，所得结果为克罗内克箭图。

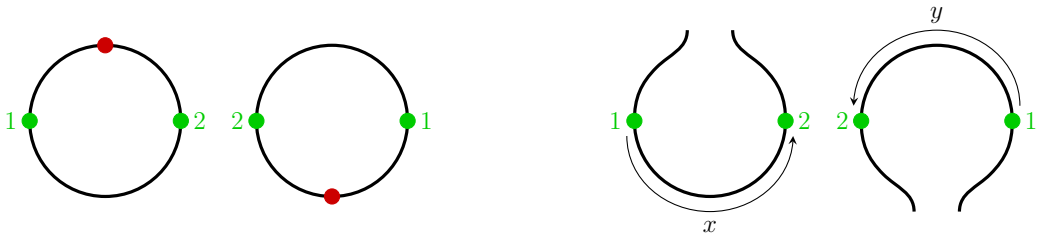


图 10： 左侧是 Weinstein 域边界上的停止集以及 1-手柄的附着球面。同一 S^0 上的点用相同的数字标记。右侧是 Weinstein 扇区边界上的附着球面。

例 2.4.4 （朗道–金兹堡模型）。 我们也可以考虑 C 或 CP^1 上的 A 侧。此时，镜像并非由一个流形给出，因此我们不附加停止集，而是附加一个（朗道–金兹堡）势 w : C* $\to$ C，该势由对指标为 2 的 Maslov 圆盘进行特定计数定义。 B 侧的范畴由与 w 的奇异值对应的奇点三角范畴的乘积给出（或者等价地，由矩阵分解范畴给出）

$$DB(w) = \prod_{\lambda \in \mathbb{C}} D_{\mathrm{sg}}(w^{-1}(\lambda)) = \prod_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{D^b(\mathrm{Coh}(w^{-1}(\lambda)))}{D^\pi(\mathrm{Coh}(w^{-1}(\lambda)))}.$$

在例 C 中， $D^\pi\mathcal{W}$(C) $= 0$。势由 $w = z$ 给出，因此 $DB(w) = 0$，因为 w 没有临界点。

在例子 CP^1 中，相关的 A 侧并非包裹福柯范畴，而是紧福柯范畴（这不是 Liouville 流形；还要注意，此情形是 $\mathbb{Z}_2$ 分次的）。这里的镜像对称

已知为 $\mathcal{F}(\mathbb{C}P^1) = DB(w)$，对应势 $w = z + z^{-1}$。注意， w有两个临界点$z = \pm 1$，因此 $DB(w)$ $= D_{\mathrm{sg}}(1) \times D_{\mathrm{sg}}(-1)$。（例如，参见 [Orl04]，了解这个例子以及更多关于朗道–金兹堡模型的内容。）

2.5 对数 Calabi–Yau 性质与超 Kähler 结构

本文的结果源于这样的预期：对数卡拉比–丘超 Kähler 族中的流形，其镜像应由超 Kähler 旋转给出（类似于某些闭超 Kähler K3 曲面的情形，参见例如 [BS98]）。下文将进一步阐述其含义，以及它与 ADE 奇点的关系。

一个对数卡拉比–丘流形是一个流形 $U = X \setminus D$，其中 X 是光滑射影簇，而 D是一个正则交叉反典范除子（即 $D \in |-K_X|$）。一般而言，定义U 的对偶 (X, D) 并不唯一，称为卢伊延加对。对数卡拉比–丘流形在簇簇与代数的研究中占据核心地位，而对数卡拉比–丘曲面的同调镜像对称已得到相当广泛的研究（参见例如 [GHK15], [HK22] 以及 [HK18]）。

下文采用的 U 为对数卡拉比–丘的等价定义是：存在一个光滑射影复流形 X，其中包含 U，使得 $D = X \setminus U$ 是正规交叉除子，并且存在一个定义在 U 上的处处不为零的全纯体积形式 Ω，它在 D上有简单极点。

例 2.5.1. 对于 $\mathbb{C}P^n$，在局部坐标图 $\mathbb{C}^n = \{(1 : z_1 : \cdots : z_n)\}$ 中，典范丛由 $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$给出。它在 $\mathbb{C}P^{n-1}_\infty = \{(0 : z_1 : \cdots : z_n)\}$处有 $n + 1$ 阶极点。因此，反典范除子可由从 $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}_\infty$中去掉一个次数为 n 的正规交叉除子得到，例如 $D = V(f)$，其中 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 是一个次数为 n的光滑正则函数，并与 $\mathbb{C}P^{-1}_\infty$横截相交于一个光滑子簇。

对于 $n = 1$，我们可以从 $\mathbb{C}$ 中去掉任意一点，因此例如 $\mathbb{C}^*$ 是对数卡拉比–丘曲线。对于 $n = 2$，我们可以从 $\mathbb{C}^2$中去掉任意一条光滑圆锥曲线 C。因此，例如 $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = -1\}$ 是对数卡拉比–丘曲面。或者，也可以从以下事实看出这一点：

$$\Omega = \frac{dz_1 \wedge dz_2}{z_1 z_2 + 1}$$

是 $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = -1\}$ 上的全纯体积形式，它处处不消失，并且沿正规交叉除子 $D = \{z_1 z_2 = -1\} \cup \mathbb{C}P^1_\infty$有简单极点。

超 Kähler 流形 (M, g, I, J, K) 是带有度量 g的黎曼流形 M，并具有三个协变常数的可积复结构 I、 J和 K，它们满足四元数关系$IJK = -1$。每个复结构都通过公式 $\omega_I(-,-) = g(I(-)\ -)$、 $\omega_J(-,-) = g(J(-)\ -)$和 $\omega_K(-,-) = g(K(-)\ -)$定义一个辛形式，使其成为 Kähler 流形；事实上，对于任意 $u = (u_I, u_j, u_K) \in S^2$， $I_u = u_I I + u_J J + u_K K$都是一个复结构，并且 M与 $\omega_u(-,-) = g(I_u(-)\ -) = u_I\omega_I + u_J\omega_J + u_K\omega_K$共同使其成为 Kähler 流形。

例 2.5.2。 超凯勒流形的标准例子是 $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$，其 g 度量为欧几里得度量，并且

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

例 2.5.3（ALE 空间作为超 Kähler 商空间 [Kro89]）。 根据 [Kro89]（另见 [Rit10，第 7] 节），给定一个单连通的超 Kähler 流形 X，其上有紧李群的作用

群 F，则存在三个动量映射 μ_I，μ_J和 μ_K（分别相对于 ω_I、ω_j和 ω_K得到），将它们组合起来可得到映射 $\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K)$： $X \to \mathbf{R}^3 \otimes \mathfrak{f}^\vee$（其中 $\mathfrak{f}$表示 F的李代数）。给定 $\zeta \in \mathbf{R}^3 \otimes Z$，其中 $Z =$ 属于$\mathfrak{f}^\vee$的中心，超 ***Kähler*** 商空间 定义为以下空间

$$X_\zeta = \mu^{-1}(\zeta)/F.$$

如果 F自由作用，那么 X_ζ是一个（实）维数为 $\dim(X) - 4\dim(F)$ [Kro89，命题 2.1] 中的流形。它继承了来自 X 的超 Kähler 结构。

对于有限群 $G \subset \mathrm{SU}(2)$ 作用下的 $\mathbf{C}^2$，我们令 $X = (Q \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{End}(R))^G$，其中 Q 是典范的二维表示，$R = \mathbf{C}[G]$ 是赋予自然欧几里得度量的正则表示（带有由群乘法诱导的作用的群代数）。我们如下将空间 $Q \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{End}(R)$，从而也将 X，赋予 H-模结构。张量积 $Q \otimes \mathrm{End}(R)$ 的元素可视为 $\mathrm{End}(R)$ 中的一对态射 (α, β)。I 的作用定义为 $I(\alpha, \beta) = (i\alpha, i\beta)$，而 J 的作用定义为 $J(\alpha, \beta) = (-\alpha^*, \beta^*)$；其中，度量用于在复向量空间 $\mathrm{End}(R)$ 上定义实结构（反线性对合）$(-)^*$。据此，X 被赋予超 Kähler 流形结构。

接下来我们描述李群 F 及其在 X上的作用。注意，X 带有 $U(R)$ 的对角作用，该作用在每个因子上都通过共轭作用给出：$f \cdot (\alpha, \beta) = (f\alpha f^{-1}, f\beta f^{-1})$。我们令 F'为 $U(R)$ 中与 G 对易的元素，然后定义 $F = F'/T$，其中 T是单位标量子群。

对于 $\zeta = 0$，超 Kähler 商为 $X_0 \cong \mathbf{C}^2/G$；对于一般的 ζ 取值（参见 [Rit10，定义 38] 或 [Kro89]），X_ζ 是一个与 $\mathbf{C}^2/G$的奇点消解微分同胚的光滑流形；改变 $\zeta \in Z \otimes \mathbf{R}^3$（或更准确地说，其一个开子集）的取值，就能对所谓的 ALE 空间进行分类。

我们将关注范围限制在 $\zeta = (\zeta_1, 0, 0)$ 对应的空间 X_ζ。于是，通过同构 $Z \cong H^2(X_\zeta; \mathbf{R})$，Kähler 形式的上同调类为：$[\omega_I] = \zeta_1$和 $[\omega_J] = [\omega_K] = 0$。对于这些 ζ取值中的每一种，我们都有一族 Kähler 流形 (X_ζ, I_u, ω_u)，$u = (u_I, u_J, u_K) \in S^2$。对于 $u_I = \pm 1$（即 $u_J = u_K = 0$），$(X_\zeta, \pm I)$ 是奇点 X_{res} 的最小消解，它是通过反复爆破该奇点得到的。对于 $u_I = 0$，我们得到一族由 S^1 参数化的辛流形 (X_ζ, ω_u)，它们是正合的；这些流形彼此等价且为 Weinstein 流形。更确切地说，它们是米尔诺纤维 X_{Mil}（参见第 3.2 节）。

我们甚至可以说得更多：对于辛结构 ω_u，对于所有满足 $u \in S^2$ with$u_I \neq 0$ 的 X_ζ，(X_ζ, ω_u) 是一个非恰当辛流形。可以将它们视为带有例外球面面积的奇点消解；然而，改变 ζ_1- 参数会改变这些 (-2)-球面的面积，并可能导致不等价的辛流形。对于固定的 ζ_1，改变 $u \in S_2 \smallsetminus \{u_I = 0\}$ 会将例外 (-2)-球面的辛面积按一个公因子缩放（有关更多细节，请参见下文的注 2.5.10，在 $G = \mathbf{Z}_{n+1}$ 的情形下）。

关于复结构，对于 $u \in S^2 \smallsetminus \{(\pm 1, 0, 0)\}$，也就是说远离这些极点时，$(X_\zeta, I_u)$ 是一个作为仿射簇来考察的米尔诺纤维。在类型 A_n 的情形下，即当$G = \mathbf{Z}_{n+1}$时，它可以表示为如下形式的超曲面：$\{P(Z) = XY\} \subset \mathbf{C}^{3,}$，其中$P(Z)$ 是一个单变量多项式，次数为 $n+1$，次数为 $n+1$ 且具有互异根。作为仿射簇，这类超曲面不一定彼此同构，这与奇点解消上的辛结构类似（但请参见注 2.5.10）。

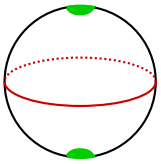


图 11： 所示的 K¨ahler 结构的 S^2族。在赤道上，$u_I = 0$ 辛流形 (X_ζ, ω_u) 是正合辛的，且等价于米尔诺纤维。对于其他取值，流形由赋予例外球面的面积决定。在两极处，簇 (X_ζ, I_u) 是奇点解消，而对于其他取值，它们是仿射簇。在类型 A_n 情形下，当 $G = \mathbb{Z}_{n+1}$ 时，仿射簇由方程 $P(Z) = XY$ 定义的超曲面给出，其中 $P(Z)$ 是一个次数为 $n+1$ 且没有重根的多项式。

接下来，我们给出一族流形为对数卡拉比–丘超-K¨ähler 流形的定义，并举出两个例子，将这一概念与上文的例 2.5.2 和例 2.5.3 联系起来。

定义 2.5.4。 我们称一族开 K¨ahler 流形 (U_u, I_u, ω_u)，$u \in O \subset S^2$（其中 O 是一个开子集）为对数卡拉比–丘超-*K¨ahler*，如果满足以下条件：

(i) 存在一个超K¨ähler流形 (U, g, I, J, K)，使得 $U_u = U \setminus D_u$，其中 D_u 是 I_u-全纯除子的连续族，并且 (U_u, I_u, ω_u) 上的 K¨ähler 结构与 U 上的超K¨ähler 结构相容，亦即对于 $u = (u_I, u_J, u_K)$，有 $I_u = u_I I + u_J J + u_K K$ 和 $\omega_u = u_I\omega_I + u_J\omega_J + u_K\omega_K \in S^2$。

(ii) 对于每个 $u \in O \subset S^2$，存在一个通过复流形 X_u 对 $U = U_u \cup D_u$ 进行的紧化，使得相对于（延拓到该紧化上的）I_u，$D'_u = X_u \setminus U_u$ 是一个正规交叉反典范除子。

特别地，每个 U_u 都是对数卡拉比–丘。另请注意，$D_u \subset D'_u$，但我们不要求相等。

注 2.5.5. 我们预计，此类族中的 K¨ähler 流形的镜像可以通过超 K¨ähler 旋转获得，即旋转到该族中的另一个 K¨ähler 流形。不过请注意，在证明任何同调镜像对称的例子时，都不会用到这个定义。它只是一项试探性的提议，希望借此概括一种更普遍的现象。

注 2.5.6. 人们自然会寻找一个除子 D_u 的全局族，也就是说 $O = S^2$，正如下面的例 2.5.7 中那样。然而，若不改变除子的拓扑，就无法将例 2.5.8 中选取的除子扩展为一个全局族；这样的选择必然会在某个极点处变成节点型。

例 2.5.7. 考虑例 2.5.2 中的超-K¨ähler 流形 $(\mathbb{H}, g, I, J, K)$。每个$I_u = u_I I + u_J J + u_K K$, $u = (u_I, u_J, u_K) \in S^2$都属于 SU(2)，且特征值为 $\pm i$。因此，我们可以找到酉矩阵 M_u，使得 $I_u = M_u^{-1} I M_u$（其中取 $M_{(1,0,0)} =$ 恒等映射）。此外，作为一个族，我们可以选择 M_u 随 $u \in S^2$光滑变化。利用这一点，我们分两步定义 $f_u : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$：先令 $f_{(1,0,0)} = z_1 z_2$，然后令 $f_u = f_{(1,0,0)} \circ M_u$，其中 $u \in S^2$。简单计算可得 $df_{(1,0,0)} \circ I = i\, df_{(1,0,0)}$。因此，

$$df_u \circ I_u = df_{(1,0,0)} \circ M_u \circ M_u^{-1} I M_u = i\, df_{(1,0,0)} \circ M_u = i\, df_u.$$

因此，f_u 是 I_u全纯的，而 $D_u = \{f_u = 0\}$ 是一个 I_u全纯除子。

令 $U_u = \mathbf{H} \setminus D_u$。我们断言，$(U_u,\ I_u,\ \omega_u)$是一个对数卡拉比–丘超 K¨ahler 族（其中$I_u$ 和 ω_u 继承自 H 上的超 K¨ahler 结构）。

根据构造，定义 2.5.4 的条件 (i) 由 $U = \mathbf{H}$ 满足。对于条件 (ii)，注意到 M_u^{-1}定义了一个双全纯同构 $M_u^{-1}\colon (U_{(1,0,0)},\ I_{(1,0,0)}) \to (U_u,\ I_u)$。因此，只需找到 $(U_{(1,0,0)},\ I_{(1,0,0)}) = ((\mathbf{C}^*)^2,\ I)$ 的一个紧化 X，使得 $D' = X \setminus (\mathbf{C}^*)^2$ 相对于 I 是一个正规交叉除子。当然，可以通过 $X = \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ 来实现这一点（其中在第二个因子上使用复结构 $-i$ 的延拓）。由此可得，每个 $(U_u,\ I_u)$ 都是一个对数卡拉比–丘曲面，因此 $(U_u,\ I_u,\ \omega_u)$，$u \in S^2$，是一个对数卡拉比–丘超凯勒族。

接下来，我们验证这一族的同调镜像对称可以通过超-K¨ahler旋转得到。首先，$\mathrm{Coh}(U_u, I_u) \cong \mathrm{Coh}((\mathbf{C}^*)^2) \cong \mathbf{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$-mod，因此

$$D^b(\mathrm{Coh}(U_u, I_u)) = D^b([x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]\text{-mod}).$$

其次，由于 M_u^{-1}是酉的（且为线性的），它是一个辛同胚:

$$(M_u^{-1})^*\omega_u = g(I_u M_u^{-1}(-), M_u^{-1}(-)) = g(M_u^{-1} I(-), M_u^{-1}(-)) = g(I(-), -) = \omega_I.$$

我们已经看到，$D^\pi\mathcal{W}(\mathbf{C}^*, \omega_{\mathrm{std}}) = D^\pi\mathcal{W}(T^*S^1, \omega_{\mathrm{std}})$与以下对象三角等价

$$D^\pi(\mathbb{C}[x, x^{-1}]\text{-mod}) = D^b(\mathbb{C}[x, x^{-1}]\text{-mod})$$

（例 2.4.1）。因此，利用$(\mathbf{C}^*, \omega_{\mathrm{std}}) \cong (\mathbf{C}^*, -\omega_{\mathrm{std}})$以及K¨unneth公式 [GPS24，推论1.18]，我们得出以下等价关系

$$D^\pi\mathcal{W}(U_u, \omega_u) \simeq D^\pi\mathcal{W}((\mathbb{C}^*)^2, \omega_I) \simeq D^\pi\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]\text{-mod}.$$

因此，在这个例子中，镜像对称可通过任意超-K¨ahler旋转得到，例如通过自镜像，即平凡的超-K¨ahler旋转。

下面的例子至关重要。我们研究 Example 2.5.3 中的超-K¨ahler 流形 X_ζ，并限制在 $G = \mathbf{Z}_{n+1}$ 的情形。我们移除适当的一族 I_u-除子D_u。我们将在下文的命题 2.5.9 中证明，这会将其变为定义 2.5.4 意义下的对数卡拉比–丘超-K¨ahler 族。

例 2.5.8（$X_{\mathrm{res}} \setminus D_r$ 和 $X_{\mathrm{Mil}} \setminus D_m$的底层对数卡拉比–丘超-K¨ahler 族）。我们考虑 Example 2.5.3 中的 $U = X_\zeta$，但现在仅限于 $G = \mathbf{Z}_{n+1}$的情形。令 $O = \{u \in S^2 \mid I_u \geq 0\}$ 为 S^2 中的上半球。我们证明，可以以一种使该族成为对数卡拉比–丘超-K¨ahler 的方式，移除 I_u-除子 D_u（$u \in O$）。

对于 $u \in O \setminus \{(1,\ 0,\ 0)\}$，如注 2.5.10 所述，仿射簇 $(X_\zeta,\ I_u)$ 可以具体实现为由以下方程定义的超曲面:

$$XY = P_{\tilde{u}}(Z),$$

其中

$$P_{\tilde{u}}(Z) = (Z - \tilde{u}b_1) \cdots (Z - \tilde{u}b_{n+1}).$$

其中 $0 = b_{n+1},\ b_1,\ \ldots\ldots,\ b_n$均为实数且彼此不同，并依赖于 ζ；$\tilde{u} \in \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| \leq 1\} \subset \mathbf{C}P^1$ 由 u 通过立体投影确定（分别将 $\tilde{u} = 0$、$\tilde{u} = 1$ 和 $\tilde{u} = \infty$ 映射到$u = (1,\ 0,\ 0)$、$u = (0,\ 1,\ 0)$和 $u = (-1,\ 0,\ 0)$）。

令 $D_u=\{Z=-C\}$，其中 C 为某个满足 $C>|b_i|$ 的常数，对 $i=1,\ldots\ldots,\ n+1$ 均如此。注意，仿射簇 $(X_\zeta,\ I_u)=\{XY=P_{\tilde{u}}(Z)\}$ 彼此同构（此处 $u\in O\setminus\{(1,\ 0,\ 0)\}$）。一个显式同构

$$(X_\zeta,I_u)=\{XY=P_{\tilde{u}}(Z)\}\xrightarrow{\sim}(X_\zeta,I_{(0,1,0)})=\{XY=P_1(Z)\}$$

由 $X\mapsto\tilde{u}^{n+1}X$、$Y\mapsto Y$ 和 $Z\mapsto\tilde{u}Z$ 给出。然而，当 $\tilde{u}\neq\tilde{u}'$ 时，这个同构并不将 D_u 与 $D_{u'}$ 对应起来。因此，去掉除子 $(X_\zeta\setminus D_u,\ I_u)$ 后得到的仿射簇不一定同构。

接下来，我们令 $U_u=U\setminus D_u$、$u\in O$。于是这是一族 K¨ahler 流形（I_u 和 ω_u 的定义见例 2.5.3）。我们将在下文的命题 2.5.9 中证明，这是一族对数卡拉比–丘超 K¨ahler 族。

因此，我们预期可以通过超 K¨ahler 旋转得到同调镜像对称，也就是说，我们预期对于任意 $u\in S^2$，$X_\zeta\setminus D_u$ 都与另一个 $\check{}u\in S^2$ 的超 K¨ahler 旋转 $X_\zeta\setminus D_{\check{u}}$ 互为镜像。特别值得关注的是极点 $u=(1,\ 0,\ 0)$ 和赤道 $\check{}u=(0,\ \check{}u_J,\ \check{}u_K)$。更具体地说，我们在此预期（稍后我们将证明一个方向，并部分证明另一个方向），对于 $u\in\{u_I=0\}\subset S^2$，$(X_\zeta\setminus D_{(1,0,0)},\ I,\ \omega_I)$ 与 S^1-族 $(X_\zeta\setminus D_u,\ I_u,\ \omega_u)$ 互为镜像。

对于 $u=(1,\ 0,\ 0)$，当 $(X_\zeta,\ I_{(1,0,0)})$ 是 A_n-奇点的保正则解消 X_{res} 时，我们令 $D_{(1,0,0)}=\{Z=-C\}\subset\{XY=Z^{n+1}\}\setminus\{(0,\ 0,\ 0)\}=X_{\mathrm{res}}\setminus E$，其中 E 表示例外除子。或者，也可以通过 G-不变除子（这也是我们将讨论范围限制在循环群上的原因之一）$\tilde{D}_{(1,0,0)}=\{z_1z_2=-C\}\subset\mathbb{C}^2$ 得到该除子。这是一条与原点不相交的光滑圆锥曲线（参见例 2.5.1）。我们将其向下投影，得到 $\mathbb{C}^2/G$ 中的一个除子，随后再将其拉回到 U 中的除子 $D_{(1,0,0)}$。这是一族随 u 在上半球 O 内光滑变化的除子。注意，通过坐标变换，在极点处，常数 C 的所有取值都定义了同构簇；参见命题 5.1.4 和注 5.1.5。

我们有时 将 D_m 记作除子 D_u，其中 $u=(0,\ u_J,\ u_K)$；而当 $u=(1,\ 0,\ 0)$ 时，记作 D_r。

命题 2.5.9. 例 *2.5.8* 中的开 *K¨ahler* 流形族 $(U_u,\ I_u,\ \omega_u)$ 是一个对数卡拉比–丘超 *K¨ahler* 族。

证明. 还需证明例 2.5.8 中的 $U_u=X_\zeta\setminus D_u$ 是对数卡拉比–丘流形；也就是说，我们需要确保对于每个复结构 I_u，都可以在无穷远处紧化 X_ζ，并添加 D_u^∞，使得 $D'_u=D_u\cup D_u^\infty$ 为反典范除子且具有节点奇异性。

我们从 $u=(1,\ 0,\ 0)$ 开始，即奇点消解（这当然等价于取 $u=(-1,\ 0,\ 0)$），并且不失一般性地假设 $D_r=\{z_1z_2=-1\}$，因为从解消中去掉除子 $\{z_1z_2=-C\}$ 后，对所有 C 都会得到同构簇。我们考虑不处处为零的全纯体积形式

$$\Omega=\frac{dz_1\wedge dz_2}{z_1z_2+1}$$

在 $\mathbb{C}^2\setminus\{z_1z_2=-1\}$ 上。它沿 $\tilde{D}_r=\{z_1z_2=-1\}$ 以及无穷远 $\mathbb{C}P^1$ 处有简单极点（注意，$dz_1\wedge dz_2$ 在 $\mathbb{C}P^1_\infty$ 处有 3 阶极点）。该形式在 G-作用下保持不变，因此在 $\mathbb{C}^2/G\setminus D_r$ 上定义了一个处处不消失的全纯体积形式，其沿 $D_r=\pi(\{z_1z_2=-1\})$ 有简单极点，其中 $\pi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2/G$ 是投影。由于解消是 crepant 的，该形式可延拓为 $X_\zeta\setminus D_r$ 上一个处处不消失的 I-全纯体积形式；我们仍将此形式记为 Ω，不会造成混淆。

注意，G 在 $\mathbb{C}^2$ 上的作用可按如下方式延拓为 $\mathbb{C}P^2$ 上的作用。使用 $\mathbb{C}P^2$上的齐次坐标，我们将标准邻域 $U_0=\mathbb{C}^2\subset\mathbb{C}P^2$ 表示为以下子集

$\{[1\colon z_1\colon z_2]\}$。于是 $\mathbf{C}P^1_\infty = \mathbf{C}P^2 \setminus U_0 = \{[0\colon z_1\colon z_2]\}$。复射影平面 $\mathbf{C}P^2$由三个仿射坐标图覆盖： U_0 以及 $U_1 = \{[w_1' : 1 : w_2']\} \cong \mathbf{C}^2$ 和 $U_2 = \{[w_1 : w_2 : 1]\} \cong \mathbf{C}^2$。通过简单的坐标变换可知，该作用延拓到 $\mathbf{C}^2 \cong U_1$ 上时为$\xi \cdot (w_1', w_2') = (\xi^{-1}w_1', \xi^{-2}w_2')$，延拓到 U_2 上时为 $\xi \cdot (w_1, w_2) = (\xi w_1, \xi^2 w_2)$。

注意，除了 U_0 中已处理的原点奇点外，$\mathbf{C}P^2/G$ 还有另外两个奇点：一个是图表 U_1 中原点的像，另一个是图表 U_2 中原点的像。我们通过消解这些奇点来构造 $X_u = X_{(\pm 1,0,0)}$。记 $f_u\colon X_u \to \mathbf{C}P^2/G$，那么我们的目标是证明 $(f_u)^*\Omega$ 沿着 $\tilde{D}_r = f_u^{-1}(\pi(\mathbf{C}P^1_\infty))$ 有简单极点，并且 $D_r' = D_r \cup \tilde{D}_r$ 具有节点奇异性。

我们在 U_2/G 中证明这一点；注意，由于群自同构 $\xi \mapsto \xi^{-1}$，这一结论在 U_1/G 中也成立。注意，通过坐标变换 $w_1 = 1/z_2$， $w_2 = z_1/z_2$，我们可以写成

$$\Omega = \frac{dw_1 \wedge dw_2}{w_1(w_2 + w_1^2)}.$$

依照 [Rei93，定理 3.2],，先从 $n+1$ 为奇数的情形开始。在这种情况下，商空间 U_2/G 可以写成奇异超曲面

$$\{(u_0, \ldots, u_{n/2}) \mid u_{i-1}u_{i+1} = u_i^2\} \subset \mathbb{C}^{n/2+1}$$

（这里将 u_i 识别为单项式 $w_1^{n+1-2i}w_2^i \in \mathbf{C}[w_1, w_2]^G$）。特别地， $\pi(\mathbf{C}P^1_\infty) = U_2/G \cap \{u_1 = 0\}$。此外，我们注意到

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{du_0 \wedge du_1}{u_0(u_1 + u_0)} = \frac{dw_1 \wedge dw_2}{w_1(w_2 + w_1^2)}.$$

解消可由 $f_u^{-1}(U_2/G) = Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2$ 描述，其中 $Y_i \cong \mathbf{C}^2$,；这里我们用 (ξ_i, η_i) 表示 Y_i 中的坐标；粘合由下式给出

$$Y_i \setminus \{\eta_i = 0\} \xrightarrow{\sim} Y_{i+1} \setminus \{\xi_{i+1} = 0\}, \qquad \xi_{i+1} = \frac{1}{\eta_i},\ \eta_{i+1} = \xi_i \eta_i^{b_i},$$

其中 $b_0 = n/2 + 1$ 和 $b_1 = 2$（这些数由 $(n+1)/2$ 的 Hirzebruch–Jung 连分数得到）。双有理映射 $Y_0 \to U_2/G$ 由下式给出

$$(\xi_0, \eta_0) \mapsto (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n/2}) = \left(\xi_0, \xi_0\eta_0, \xi_0\eta_0^2, \ldots, \xi_0\eta_0^{n/2}\right)$$

（即 $\xi_0 = u_0 = w_1^{n+1}$ 和 $\eta_0 = u_1/u_0 = w_2/w_1^2$）。因此，

$$((f_u)^*\Omega)_{|Y_0} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d\xi_0 \wedge d\eta_0}{\xi_0(\eta_0 + 1)}.$$

特别要注意的是，这个形式只有简单极点，它们位于具有节点交叉的除子上。这里，部分 $\{\xi_0 = 0\}$ 是 Y_0 与 $f_u^{-1}(\pi(\mathbf{C}P^1_\infty))$ 的交集，而部分$\{\eta_0 = -1\}$ 是与 D_r 的交集。

同样（利用坐标变换），我们推导出

$$((f_u)^*\Omega)_{|Y_1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d\xi_1 \wedge d\eta_1}{\xi_1\eta_1(1 + \xi_1)},$$
$$((f_u)^*\Omega)_{|Y_2} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d\xi_2 \wedge d\eta_2}{\xi_2\eta_2(1 + \xi_2^2\eta_2)}.$$

再次注意到，该形式沿正规交叉除子有简单极点。除子 $\{\xi_1 = 0\}$ 和 $\{\eta_1 = 0\}$ 的并集是 Y_1 与 $f_u^{-1}(\pi(\mathbb{C}P^1_\infty))$ 的交集，而部分 $\{\xi_1 = -1\}$ 是 Y_1 与 D_r 的交集；部分 $\{\xi_2 = 0\}$ 和 $\{\eta_2 = 0\}$ 是 Y_2 与 $f_u^{-1}(\pi(\mathbb{C}P^1_\infty))$ 的交集，而除子 $\{\xi_2^2\eta_2 = -1\}$ 是 Y_2 与 D_r 的交集。

由此可得，当 $n+1$ 为奇数时，$(X_\zeta \smallsetminus D_r, \pm I)$是对数卡拉比–丘。接下来假设$n+1$ 为偶数。在这种情况下，我们注意到该映射

$$(w_1, w_2) \mapsto (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = (w_1^2, w_2)$$

诱导出一个同构 $\mathbb{C}^2/G \to \mathbb{C}^2/\tilde{G}$，其中 $\tilde{G} = \mathbb{Z}/(\frac{n+1}{2})$，且 $\tilde{G}$ 通过$\tilde{\xi} \cdot (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = (\tilde{\xi}\tilde{w}_1, \tilde{\xi}\tilde{w}_2)$作用于 $\mathbb{C}^2$，其中 $\tilde{\xi} = \xi^2 = e^{2\pi i/(\frac{n+1}{2})}$是循环群 $\tilde{G}$的生成元。（更一般的理由，参见例如[Fuj75，第 1.1]节。）

在这种情况下，我们可以将 U_2/G写作

$$\{(u_0, \ldots, u_{(n+1)/2}) \mid u_i u_{j+1} = u_{i+1}u_j,\ 0 \le i < j < (n+1)/2\} \subset \mathbb{C}^{(n+1)/2+1},$$

（这里我们将 u_i 与 $\tilde{w}_1^{(n+1)/2-i}\tilde{w}_2^i = w_1^{n+1-2i}w_2^i$等同）。用这些表示，和上文一样，我们可以将全纯体积形式写作

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{du_0 \wedge du_1}{u_0(u_1 + u_0)} = \frac{dw_1 \wedge dw_2}{w_1(w_2 + w_1^2)}.$$

该奇点可以通过以下方式消解

$$f_u^{-1}(U_2/G) = Y_0 \cup Y_1,$$

其中 $Y_i \cong \mathbb{C}^2$ 沿着 $(\xi_1,\ \eta_1) = \left(1/\eta_0, \xi_0\eta_0^{(n+1)/2}\right)$ 粘合，而映射 $Y_0 \to U_0/G$ 由下式给出

$$(\xi_0, \eta_0) \mapsto (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{(n+1)/2}) = \left(\xi_0, \xi\eta_0, \xi_0\eta_0^2, \ldots, \xi_0\eta_0^{(n+1)/2}\right)$$

（即 $\xi_0 = u_0 = \tilde{w}_1^{(n+1)/2} = w_1^{n+1}$和 $\eta_0 = u_1/u_0 = \tilde{w}_2/\tilde{w}_1 = w_2/w_1^2$）。全纯体积形式在这些坐标图中可表示为

$$((f_u)^*\Omega)_{|Y_0} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d\xi_0 \wedge d\eta_0}{\xi_0(\eta_0 + 1)},$$
$$((f_u)^*\Omega)_{|Y_1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d\xi_1 \wedge d\eta_1}{\xi_1\eta_1(1 + \xi_1)}.$$

同样，我们得出结论，该形式在一个正规交叉除子上有简单极点。不同坐标图中除子的描述之间的转换与上述情形相同，其中 $n+1$ 为奇数。

除极点之外，即 $u = (u_I,\ u_J,\ u_K) \in S^2$，当 $u_I \neq \pm 1$ 时，复流形 $(X_\zeta,\ I_u)$ 是一个米尔诺纤维，可描述为由 $P(Z) = XY$ 给出的超曲面，其中 $P(Z)$ 是一个次数为 $n+1$ 且没有重根的一元多项式。当 X_ζ 由 $P(Z) = Z^{n+1} - 1$ 定义时，文献 [Pas19 的例 3.2.4] 已证明复流形 $(X_\zeta \smallsetminus D_u,\ I_u)$ 是对数卡拉比–丘流形。在一般情形下，将 $P(Z)$ 的根记为 Q_1、……、Q_{n+1}。由于 [Eva11 第 7.1 节引理 7.1], 中的构造和证明同样适用于此情形（不过，证明的关键在于这些根互不相同），将 ξ_k 替换为 Q_k后，我们得出 $(X_\zeta \smallsetminus D_u,\ I_u)$ 是对数卡拉比–丘流形。

□

注 2.5.10。 对于例 2.5.3 和例 2.5.8 中的 X_ζ，在 $G = \mathbf{Z}^{n+1}$ 的情形下，我们稍作展开，说明其代数结构以及它与 $u \in O \smallsetminus \{(1, 0, 0)\}$ 的辛结构之间的关系。

例外球面 E_i 相对于 ω_I 的辛面积（即 n-元组 $\zeta_1 = (\zeta_1^1, \dots, \zeta_1^n)$ 中的值 ζ_1^i）对于 $i = 1, \dots, n$ 与 $b_i - b_{i-1}$ 成比例，比例因子为公因子，其中我们令 $b_0 = b_{n+1} = 0$（参见 [Hit79，第 475] 页；另见 [Hit25，第 2] 节，以及 [Hit21，第 2 节、第 4] 节）。这里我们采用假设 $\zeta = (\zeta_1, 0, 0)$（这意味着例外球面 E_i 相对于 ω_J 和 ω_K 的辛面积为 0）。对于远离极点的固定复结构，即固定的 $\tilde{u} \in \mathbf{C}^*$，我们令 $\Lambda_i = \tilde{u} b_i$ 表示 $P_{\tilde{u}}(Z)$ 的根（因此 $\Lambda_0 = \Lambda_{n+1} = 0$）。我们令 $\lambda_i = \Lambda_i - \Lambda_{i-1}$，其中 $i = 1, \dots, n+1$。于是，对于 $i = 1, \dots, n+1$，有 $\Lambda_i = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j$，并且满足以下关系： $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 0$。将此与命题 5.3.6（以及通过注 5.3.7 得到的命题 5.1.1 和命题 5.1.2）进行比较。

就 ζ [Rit10 的一般性条件而言，定义 38], 要求所有面积 ζ_1^i 都满足 $\sum_{l=i}^{j} \zeta_l \neq 0$。这等价于 $\sum_{l=i}^{j} \lambda_l = \Lambda_j - \Lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n+1$。特别是，所有根 Λ_i 都互不相同，这等价于 X_ζ 光滑；另请参见命题 5.3.6。

此外，一般性条件的充分性也意味着， $0 = b_{n+1} = b_0, b_1, \dots, b_n$ 的所有取值都能在某个 X_ζ 中实现。

最后，在定义 $D_u = \{Z = -C\}$ 中，请注意，改变常数 C 等价于固定除子（例如固定为 $\{Z = -1\}$），同时改变复结构。事实上，这可由坐标变换 $Z \mapsto ZC$, $X \mapsto C^{n+1}X$ 看出。

3 A_n-米尔诺纤维的辛几何

我们描述本研究中相关的辛几何。首先简要介绍 Weinstein 流形和扇区。我们将移去一个纤维后的米尔诺纤维描述为 Weinstein 流形，它们由向 $T^*\mathbf{T}^2$ 附加临界把手得到。覆盖论证结合 Legendrian Kirby计算表明，该流形等价于由 T^*S^2 循环拼接得到的 Weinstein 流形。

最后，我们确定一个 Legendrian $S^1 \simeq \Lambda_{\text{stop}} \subset S^1 \times S^2$，并将停止集置于其上；同时证明，停止集的一个邻域的补集可识别为一个 Weinstein 扇区 W_σ，其无穷远边界为 $\partial_\infty W_\sigma = J^1 S^1$，并带有标准接触结构。下一节中，我们将利用这一点计算部分包裹福柯范畴。

3.1 预备知识：Weinstein 扇区

3.1.a Weinstein 流形

Liouville 域是一个带边界 $M = \partial W$ 的正合紧辛流形 $(W, \omega = d\lambda)$，其李雅尔向量场 Z 由 $\iota_Z \omega = \lambda$ 定义，并且指向边界外侧且与边界法向一致。这意味着 (M, ξ)（其中 $\xi = \ker \lambda_{|M}$）是一个（余定向的）接触流形。

A *Liouville* 流形 是一个正合辛流形（W, λ），它在无穷远处呈柱状且凸，这意味着：存在一个 Liouville 域 $W \subset W$，使得正向 Liouville流 $\phi_Z^t : \mathbf{R}_t \times \partial W \to W$ 对所有 t 都有定义，且诱导映射 $W \cup_{\partial W} (\mathbf{R}_{t \geq 0} \times \partial W) \to W$ 是一个辛同胚；其中，柱状端 $\mathbf{R}_t \times \partial W$ 上的辛形式由辛化形式 $d(e^t \lambda)$ 给出。

接触流形（$M, \xi = \ker\ \alpha$） $=$（$\partial W, \ker \overline{\lambda}_{|\partial W}$）在接触同胚意义下是唯一的（由Liouville流给出），也就是说，对于任何其他选择的 Liouville 域 W'，只要上述诱导映射是辛同胚，（$\partial W, \ker\ \lambda_{|\partial W}$） $\simeq$（$\partial W', \ker \overline{\lambda}_{|\partial W'}$）就接触同胚。特别地，柱状端中任何处处横截于李乌维尔向量场的接触型超曲面，都与（M, ξ）接触同胚。我们将此接触流形记为（$\partial_\infty W, \xi$），并称之为无穷远边界。

任意 Liouville 域（$W,\ \overline{\lambda}$）都可以通过如下方式附加柱状端，将其完备化为 Liouville 流形。沿着 $-Z$ 流动会得到边界（$W,\ \lambda$）的领圈邻域 $\supset$（$U,\ \lambda$） $\cong$（$-\infty,\ 0] \times M$，其中 $M = \overline{\partial W}$。将 M的其余部分辛化附加到 W上，这一过程称为附加柱状端，从而得到一个没有边界的开流形 $W = W \cup_M$（$[0, \infty) \times M$）。Liouville 形式 λ 延拓为一个 Liouville 形式，在柱状端处为 $\lambda = e^t \lambda_{|M}$。

Liouville 域的骨架 是那些在 Liouville 流作用下确实会流向边界的点的集合：

$$\mathrm{skel}(\overline{W}) = \bigcap_{t<0} \phi_Z^t(\overline{W}).$$

对于一般的 Liouville 域，骨架可能很“大”，其余维数可能为 1；但对于魏因斯坦域（定义如下），骨架总是（可能带有奇点的）各向同性的，因此“至多”是拉格朗日的。

如果两个李乌维尔流形可以通过李乌维尔流形结构的光滑族彼此同伦变形，则称它们是等价的；这些结构是李乌维尔子域的光滑族的完备化。

如果一个 Liouville 域具有一个 Morse 函数（或 Morse-Smale 函数） f，使得李乌维尔向量场 Z 是 f 的伪梯度向量场（特别地，临界点是有限的，且远离边界），则称其为一个 ***Weinsetin*** 域。如果一个 Liouville 流形是 Weinstein 域 $W \subset W$的完备化，并且 Morse 函数 f 可以延拓到整个流形，且在 W 之外没有临界点，则称其为一个 ***Weinstein*** 流形。

Liouville流会扩张辛形式这一性质意味着， f 的临界点的指标必须小于或等于 n，即 W 维数的一半，并且 W 由辛把手附着构成，如下所示。我们将指标为$0 \le k \le n$、大小为 $\epsilon > 0$ 的***Weinstein*** 标准把手定义为以下子集

$$H_k = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-k} y_i^2 \le \epsilon \right\} \cap \left\{ \sum_{i=n-k+1}^{n} y_i^2 \le 1 \right\} \cong D^{2n-k} \times D^k$$

（$\mathbf{R}^{2n},\ \omega_{\mathrm{std}}$）的，其中 $\omega_{\mathrm{std}} = \sum_i dy_i \wedge dx_i$。它带有一个 Weinstein 结构，由以下内容定义

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-k} \Big(y_i dx_i - x_i dy_i \Big) - \sum_{i=n-k+1}^{n} \Big(y_i dx_i + 2x_i dy_i \Big),$$

$$Z_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-k} \Big(x_i \partial_{x_i} + y_i \partial_{y_i} \Big) + \sum_{i=n-k+1}^{n} \Big(2x_i \partial_{x_i} - y_i \partial_{y_i} \Big),$$

$$f_k = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-k} \Big(x_i^2 + y_i^2 \Big) + \sum_{i=n-k+1}^{n} \Big(x_i^2 - \frac{1}{2} y_i^2 \Big).$$

圆盘 $\{x_1 = \cdots = x_n = y_1 = \ldots y_{n-k} = 0\} \cap H_k \cong D^k$称为核，其边界（$\cong S^{k-1}$）称为附着球面，而圆盘 $\{y_{n-k+1} = \cdots = y_n = 0\} \cap H_k \cong D^{2n-k}$称为

余核。注意，核是各向同性的，余核是余各向同性的，而附着球面在接触边界中是各向同性的。特别地，如果 $k = n$，则核和余核都是拉格朗日子流形，而附着球面是边界中的一个勒让德球面。

我们用 $\partial_h H_k = \left\{\sum_{i=n-k+1}^{n} y_i^2 = 1\right\} \cong D^{2n-k} \times S^{k-1} \subset D^{2n-k} \times D^k$ 表示附着区域。将柄 H_k 附着到 Weinstein 域 W 上，由 $W \cup_\phi H_k$ 给出。这里指的是 W 与 H_k 的不交并，模去将附着区域 $\partial_h H$ 与其在嵌入（即 附着映射） $\phi : \partial_h H_k \to \partial W$ 下的像相识别。由此得到一个带角边界流形，随后对其进行光滑化，同时确保辛结构彼此兼容，且李乌维尔向量场仍指向边界外侧；这样便得到一个新的 Weinstein 域。手柄附着由附着球面 $S^{k-1} \xrightarrow{\sim} L \subset \partial W$ 的嵌入以及其共形辛正规丛 CSN(L) $= (TL)^\perp / TL$ 的平凡化唯一确定。特别地，指标为 n 的标准 Weinstein 柄的附着，由附着 Legendrian [Wei91] 的嵌入唯一确定。

给定一个 Weinstein 域 W，可以对 Weinstein 结构进行变形（尤其是改变 Morse 函数），使其构造过程为：首先将指标为 $1 \le k \le n-1$ 的手柄附着到标准球 B^{2n} 上；对于 f 的每个具有相应指标的临界点，附着一个手柄。由此得到次临界 部分 W_{sub}，然后再附着指标为 n 的手柄，称为临界把手。次临界流形在辛几何意义上并无实质内容，因为它的包裹福柯范畴是平凡的，所有相关的辛不变量也都消失。

通过这种方式，Weinstein 流形在 Weinstein 结构的变形意义下，都可以先附着手柄，再附着柱状端来构造。

3.1.b Weinstein Kirby 演算

为了描述通过一系列手柄附着构造的 Weinstein 四维流形，我们将使用 Weinstein 柄体图和勒让德 Kirby 演算（见 [Gom98]）。这种演算可用于判定两个 Weinstein 流形何时等价。具体而言，当且仅当两个 Weinstein 流形的 Weinstein 结构可以通过所谓的 Weinstein 同伦联系起来时，它们才等价；这种同伦包括结构的同痕、柄滑动以及产生/消亡时刻。当 Weinstein 流形是四维的时，所有这些操作都可以通过附着球面的二维前投影来描述。

要构造一个***Weinstein*** 手柄体图，我们总可以从一个0-把手 B^4开始，先附加1-把手，得到边界为 M =#^{m}($S^1 \times S^2$)的次临界 Weinstein 域（带有其标准接触形式），然后沿 M中的 Legendrian 结附加2-把手。在这种情况下，我们只附加1-把手（其附着球面为 S^0）和2-把手，后者是临界把手。1-把手的附着区域有一种标准选取（参见 [Gom98]），而临界把手的附着映射由附着球面确定。

我们将绘制一个前图来表示构成 Weinstein 流形的手柄附着。因此，这幅图完全确定了该 Weinstein 流形。

0-把手就是标准 Liouville 域（D^4, λ_0）。其边界是标准接触S^3。所有手柄附着都必须发生在某个点 pt $\in S^3$的补集中，因此我们可以将手柄附着视为发生在标准接触 $\mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \{\text{pt}\}$ 中（其中 ξ =ker($dz - ydx$)）。这通过前投影 π_F: $\mathbb{R}^3_{x,\,y,\,z} \to \mathbb{R}^2_{x,\,z}$以背景的形式“描绘”出来。1-把手描绘为水平对齐的一对球（附着区域为 $S^0 \times D^3$），而2-把手则由其附着球面表示。示例见图 14和图 15。我们称该交换图为***Gompf***标准形式。

两个勒让德链环在 M 中是勒让德同痕的，当且仅当它们可以通过以下变换相互关联：

Legendrian Reidemeister 变换和 Gompf 变换，二者合称为 Legendrian Kirby 变换。这会诱导出由手柄附着构造的 Weinstein 流形之间的等价（以及拟同构的切卡诺夫–埃利亚什贝格微分分次代数，见第4.1节）。如果 Weinstein 手柄体图可以通过把手滑动和把手消去相互关联，则相应的 Weinstein 流形也等价（这些操作会诱导出包裹 Fukaya 范畴之间的拟等价，见第4.1节）。

3.1.c 停止集与扇区

Liouville/Weinstein 扇区是一类带边界的 Liouville/Weinstein 流形。假设其边界具有某种特定类型的领圈邻域，使得该扇区可以加倍为一个无边界的 Liouville/Weinstein 流形，这类似于对带边界的光滑流形进行加倍。只要在边界附近适当选取几乎复结构，这些流形上的 Floer 理论便有良好定义（参见 [GPS20]）。

如 [GPS20] 中所定义，*Liouville* 扇区 是一个带边界的 Liouville 流形 W （因此，如上所述，相应的 Liouville 域 W 是一个带角流形），且对于某个（或所有）正数 $a > 0$，存在一个函数 $I\colon \partial W \to \mathbb{R}$，使得 $ZI = aI$ 在无穷远处成立（当 t 足够大时，其中 t 是柱状端中的 R 坐标），并且 $dI_{|\mathcal{F}_{\mathrm{Ch}}} > 0$，其中 $\mathcal{F}_{\mathrm{Ch}}$是特征叶状结构。

I 的存在带来的一个结果是， $\partial_\infty W$ 是具有凸边界$\partial\partial_\infty W$ 的接触流形，并且存在一个微分同胚 $\partial W \xrightarrow{\sim} F \times \mathbb{R}$，它将 $\partial_\infty W$的特征叶状结构映到叶状结构 $\mathbb{R} \times F$by $\mathbb{R} \times \{\mathrm{pt}\}$的叶片上。

典型的例子是 T^*M，其中 M是一个带边界的流形。

接下来我们讨论与停止集的关系，这归功于 [Syl15]。我们回顾 [GPS20] 中的定义：

定义 3.1.1. 设 (F^{2n-2}, λ_F) 和 (W^{2n}, λ_W) 是李乌维尔流形，且设 $\epsilon > 0$。具有纤维的停止集 F 是一个真嵌入

$$\sigma : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}\leq\epsilon} \times F \to W$$

满足 $\sigma^*\lambda_W = \lambda_F + \lambda_{\mathbb{C}} + df$，其中 f是某个紧支撑函数。这里 $\lambda_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}(ydx - xdy)$。 -

带停止集的 Liouville 流形 $(W,\ \sigma)$ 通过从 W 中移除 $\sigma(\mathbb{C}_{\mathrm{Re}<0} \times F)$，定义了一个 Liouville 扇区，记作 W_σ。另一方面，也可以从 Liouville 扇区得到 Liouville 流形（在变形意义下唯一），大致上是将边界视为停止集。因此，带停止集的 Liouville 流形与 Liouville 扇区这两个概念本质上是相同的（另见定理 4.1.4）。

通过下面的例子，我们将讨论如何在 Legendrian 子流形处设置停止集（类似于沿它们附加 Weinstein 把手）；这些正是此处关注的停止集：

例 3.1.2. 设 $\Lambda \subset M = \partial_\infty W$ 是一个 Legendrian 子流形。根据 Legendrian 管状邻域定理， Λ 有一个管状邻域 U，它在接触同胚意义下等价于 1-喷射丛 $J^1\Lambda = T^*\Lambda \times \mathbb{R}$ 中零截面的一个开凸邻域。将这两个邻域相互对应，我们得到一个停止集 σ，其纤维为 $T^*\Lambda$，位于 W 中（详情参见 [Syl15，例 2.8]）。

给定任意一点 $p \in \Lambda$，可以在 Λ 周围的 Darboux 图中定义一个特定的球面 S_p，它与 Λ 链接。该球面界定了一个位于称为 M 的辛化中的拉格朗日圆盘 D_p 链接圆盘，它大致由 $T^*\Lambda$ 中的一个余切纤维与 C 因子中的一条曲线的笛卡尔积给出。随后可将其视为 Weinsetin 流形 W（完备化）中的一个拉格朗日子流形。（参见 [GPS24，第 5 节。3]）

链接圆盘与余核共同生成 Weinstein 扇区的部分缠绕 Fukaya 范畴（参见定理 4.1.5）。

3.1.d 截断 Reeb 动力学

为了定义扇区上的包裹福柯范畴，需要控制无穷远边界处的 Reeb 动力学。

设 W是一个具有无穷远边界 $(\partial_\infty W,\ \xi) = (M,\ \xi = \ker\ \alpha)$ 的 Liouville 扇区，其中 M是一个具有凸边界的接触流形。回顾一下，在 M 上由接触形式 α 定义的 ***Reeb*** 向量场 是满足以下条件的唯一向量场:

$$\alpha(R_\alpha) = 1,$$
$$\iota_{R_\alpha} d\alpha = 0.$$

我们假设接触形式 α 在 $\partial_\infty W = M$ 上定义了截断 Reeb 向量场，具体含义如下所述。回顾一下，接触向量场 是一个向量场 X，其流保持接触结构，或等价地，对于某个函数 $f\colon M \to \mathbf{R}$，有 $\mathcal{L}_V \alpha = f \cdot \alpha$，其中 $\mathcal{L}$ 表示李导数。接触向量场与接触哈密顿量一一对应，即与截面 $H\colon M \to TM/\xi$一一对应。给定固定的接触形式 α后，接触哈密顿量等价地定义为函数 $H : M \to \mathbf{R}$, 而接触向量场等价地定义为哈密顿向量场，即通过要求满足以下条件定义的向量场 X_H：

$$\alpha(X_H) = H,$$
$$\iota_{X_H} d\alpha = dH(R_\alpha)\alpha - dH,$$

成立。（特别地， $H = 1$ 定义了 Reeb 向量场。）

若接触向量场由如下形式的哈密顿量生成，则称其为截断接触向量场： $H = f^2 G$，其中函数 $f\colon M \to \mathbf{R}$ 在 ∂M 上横截消失，而截面 $G > 0$ 定义在整个 M 上（包括 ∂M）。

3.2 米尔诺纤维与丛接的等价性

我们将 A_n-奇点的光滑化记为 X_{Mil}。去掉一个纤维后，即 $X_{\text{Mil}} \smallsetminus D_m$，它可以用循环拼接 T^*S^2 给出一种优美的几何描述。特别地，这种循环拼接具有一种众所周知的简单把手分解，我们将会用到它。

3.2.a 米尔诺纤维

在 [Mil68], Milnor 研究了由 $\{f = 0\}$ 给出的奇异超曲面的拓扑，其中解析映射 $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}$ 定义在原点附近。

简要总结一下，设 f 是一个非常数多项式函数（更一般地说，是一个解析函数） $f : \mathbf{C}^{m+1} \to \mathbf{C}$，$m \geq 1$，它在原点有一个孤立奇点。对于足够小的 $\epsilon > 0$，令 S_ϵ^{2m+1} 表示半径为 ϵ 的球面。它与 $f^{-1}(0)$ 横截相交，由此我们得到一个以 S^1 为底空间的光滑纤维丛，

$$\phi : S_\epsilon^{2m+1} \smallsetminus K \to S^1, \qquad z \mapsto \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

存在 $\delta = \delta(\epsilon)$，使得对于所有满足 $0 < |c| < \delta$ 的 c，我们都有

$$f^{-1}(c) \cap \overline{B}_\epsilon \simeq \phi^{-1}(\arg(c)),$$

是带边界的微分同胚光滑流形，其中 B_ϵ 表示半径为 ϵ 的开球。

对于固定的 c 和 ϵ，我们将 f 的米尔诺纤维 记作 $F_{c,\,\epsilon} = f^{-1}(c) \cap B_\epsilon$。米尔诺纤维具有一个魏因斯坦域结构，该结构由限制径向结构得到：

$$f_{\mathrm{rad}} = \sum_i |z_i|^2,$$
$$\lambda_{\mathrm{rad}} = \frac{i}{4}\sum_i (z_i d\overline{z}_i - \overline{z}_i dz_i).$$

事实上，可以证明，诱导出的李乌维尔向量场沿边界向外指。域 $F_{c,\,\epsilon}$ 在精确辛同胚意义下唯一 [Kea14，第 3 节.1]。添加柱状端得到的完备化给出了等价的李乌维尔流形。此外，若 g 由 f 经过全纯重参数化得到，则 f 和 g 的米尔诺纤维精确辛同胚。

米尔诺纤维的同伦型是由 μ m 维球面组成的楔和，其中 μ 是米尔诺数。

我们关注情形 $f = x^2+y^2+z^{n+1}$。（等价地，我们可以考虑任意形如 $f = x^2+y^2+p(z)$ 或 $f = xy+p(z)$ 的多项式，其中 $p(z)$ 是一个次数为 $n+1$ 且具有互异根的多项式。）例如，令 $c = 1$，即可得到相应的米尔诺纤维 $F_{A_n} \subset \mathbb{C}^3_{x,y,z}$。在这种情况下，通过投影到 z 坐标，我们得到一个勒夫谢茨纤维化 $\pi_z : F_{A_n} \to \mathbb{C}$。这意味着，除有限多个点外，纤维均由光滑圆锥曲线 $\pi_z^{-1}(z_0) = \{x^2+y^2 = z_0\} \simeq \mathbb{C}^* \simeq T^*S^1$ 给出。奇异纤维是集合 $\{(x,\ y,\ \xi_{n+1}) \mid x^2+y^2 = 0\}$，其中 ξ_{n+1} 是一个$n+1$次单位根。我们将完备魏因斯坦流形记作 X_{Mil}。

我们移除一个一般纤维，比如 $D_m = \pi_z^{-1}(0)$，它是一个除子。现在，上述向量场不再沿对应区域的整个边界横向向外指。对此可以进行修正，但我们将改用把手分解的描述来理解这个 Weinstein 流形。

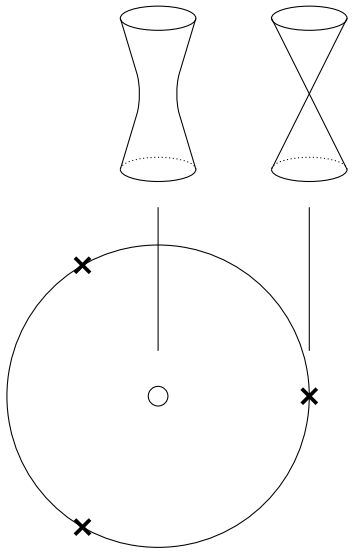


图12： 勒夫谢茨纤维化 $\{x^2+y^2+z^3 = 1\} \xrightarrow{\pi_z} \mathbb{C}_z$ 的示意图，显示了临界纤维（叉号）以及原点处的一个一般纤维。

命题 3.2.1。 从 $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$ 米尔诺纤维中去掉一个纤维后，可由 $T^*\mathbb{T}^2$ 通过

沿着$\mathbb{T}^2$,上如图 *13* 所示的 $n+1$ 平行嵌入曲线的余法向提升附加 *Weinstein* 2柄（其中 $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$）。

证明。注意，当 ϵ 较小时，也就是说，当 $\pi_z^{-1}(D_\epsilon)$ 不包含任何奇异纤维时，其中 D_ϵ 是半径为 ϵ 的圆盘，$\pi_z^{-1}(D_\epsilon \setminus \{0\})$ 的完备化等价于平凡纤维化 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* = T^*\mathbb{T}^2$。当到达临界层时，也就是当转到 $\pi_z^{-1}(D_\epsilon)$ 且 ϵ 足够大、能够包含这些奇异纤维时，我们在其上附着 $n+1$ 个临界把手，每个奇异纤维对应一个。Jef22 第 3], 节用略有不同的图示展示了这一过程，据此我们可以从图 13 看出如何理解这种手柄附着。蓝线的余法向提升是单位余切丛 $ST^*\mathbb{T}^2$ 中的 Legendrian 附着球面。Acu+25] 展示了如何将这些交换图转化为 Weinstein 手柄体图（见图 15）。（骨架另见图 16。）

□

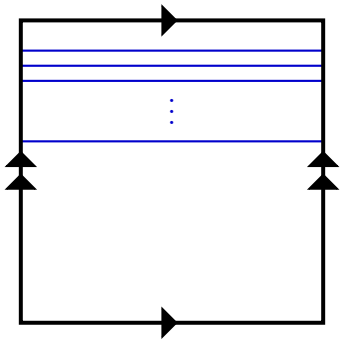


图 13： 将 Legendrian 附着球面（蓝色）投影到 $\mathbb{T}^2$ 上，得到 $ST^*\mathbb{T}^2$中的 $X_{\text{Mil}} \setminus D_m$。附着球面是平行曲线的余法丛提升。

3.2.b T^*S^2的循环丛接

我们回顾余切丛丛接的基本性质，这是一种辛连通和。特别地，我们介绍球面余切丛的循环丛接。

定义 3.2.2. 设 M和 N为 n维流形，且 $X = T^*M$和 $Y = T^*N$。X 与 Y的丛接 构造如下。取 $q_0 \in M$ 和 $q_1 \in N$，以及分别包含 q_0 和 q_1 的开邻域$B_0 \subset M$和 $B_1 \subset N$。记 X 与 Y的丛接为 $X\#_{\text{pl}}Y$，将其定义为 $X \sqcup Y/\sim$的光滑化，其中 $\sim$表示沿辛同胚 $(q,p) \mapsto (-p,q)$ 对 DT^*B_1和 DT^*B_2进行的粘合。（这里，DT^*B_i表示由满足 $\|p\| \leq 1$ 的 (q,p) 构成的圆盘余切丛，其中度量经过某种选取。）

$X = T^*M$的自丛接 通过在 M中选取 q_0, q_1和 B_0，并分别选取 q_0 与 q_1 的不相交邻域 B_1来定义。然后，$\#_{\text{pl}}X$ 定义为 $X/\sim$的光滑化，其中 $\sim$ 表示与上述相同的识别。为了使该操作定义良好，还需要额外的定向数据。当 M 的维数 n 为偶数时，这意味着在零截面的浸入的唯一自交点处，选取局部交数 $+1$或 -1。

例3.2.3 （T^*S^2的管道图）。给定一个（有限）图 $\Gamma = (V, E)$，按照 Γ 对副本 T^*S^2 进行丛接，具体而言，是为每个顶点 $i \in V$ 取一个副本 $S_i = T^*S^2$，并按照边将它们丛接起来。更确切地说，对于每条边 $e: i \leftrightarrow j$，我们将 S_i

和 S_j 丛接，其中我们为每条边选择彼此不同的丛接基点，并且为不同丛接选取的邻域互不相交。

为了使其定义良好，需要为图 Γ 中的每个循环元额外选择定向数据。注意，对应于每条边的唯一交点处的局部交数为 $+1$ 或 -1。对于 Γ中的每个循环元，所需的额外数据是选择交数乘积为 $+1$ 或 -1，其中乘积取自该循环元各边对应的交数。这里我们始终假设该乘积为 1。这等价于以下条件：取循环元中各节点对应的球面，并消解循环元各边对应的双重点后得到的拉格朗日浸入是可定向的。

作出这些选择后，对于给定的图 Γ，我们将所得的辛流形记为 $\#_\Gamma T^*S^2$。特别地，两个副本 T^*S^2的丛接为 $T^*S^2\#_{\mathrm{pl}}T^*S^2 = \#_{A_2}T^*S^2$，其中 A_2表示有两个节点的 A 型 Dynkin 图。自丛接为 $\#_{\mathrm{pl}}T^*S^2 = \#_{\tilde{A}_0}T^*S^2$，即按照扩展 Dynkin 图 A_0进行丛接~。

丛接 $\#_\Gamma T^*S^2$ 是 Weinstein 流形。其包裹 Fukaya 范畴已在 [EL19] 中计算。

T^*S^2的循环丛接，即 $\#_{\tilde{A}_n}T^*S^2$，有一种广为人知的把手分解：由一个 1-手柄和 $n+1$ 2 个手柄构成，如下方图 14 所示。

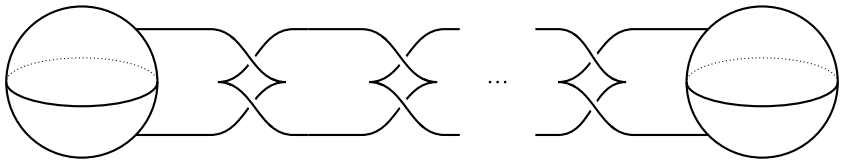


图 14： T^*S^2的副本的循环丛接的 Weinstein 手柄体图，展示了穿过一个 1-手柄的 Legendrian 附着链环。

3.2.c $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$ 与 T^*S^2的循环丛接等价性的证明

第 3.2 节的主要目的是证明以下命题：

命题 3.2.4。 *去掉一个纤维后的米尔诺纤维 $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$ 与循环丛接 $\#_{\tilde{A}_n}T^*S^2$ 作为 Weinstein 流形等价。*

证明。 从图 13 可见，Weinstein 流形 $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$ 是通过向 $\mathbb{C}^* \times\mathbb{C}^*$ 附加一个临界把手得到的 Weinstein 流形的 $n+1$ 重覆盖空间。下面的例子（见 [Acu+21, 图 19], 另见 [Acu+25, 例 10.6]）表明，以这种方式附加一个临界把手会得到一个与 T^*S^2 的自丛接等价的 Weinstein 流形。由于图 14 中的交换图所表示的 Weinstein 流形是 T^*S^2 的自丛接的 $n+1$ 重覆盖空间，我们得出 $\#_{\tilde{A}_n}T^*S^2$ 与 $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$ 等价。 □

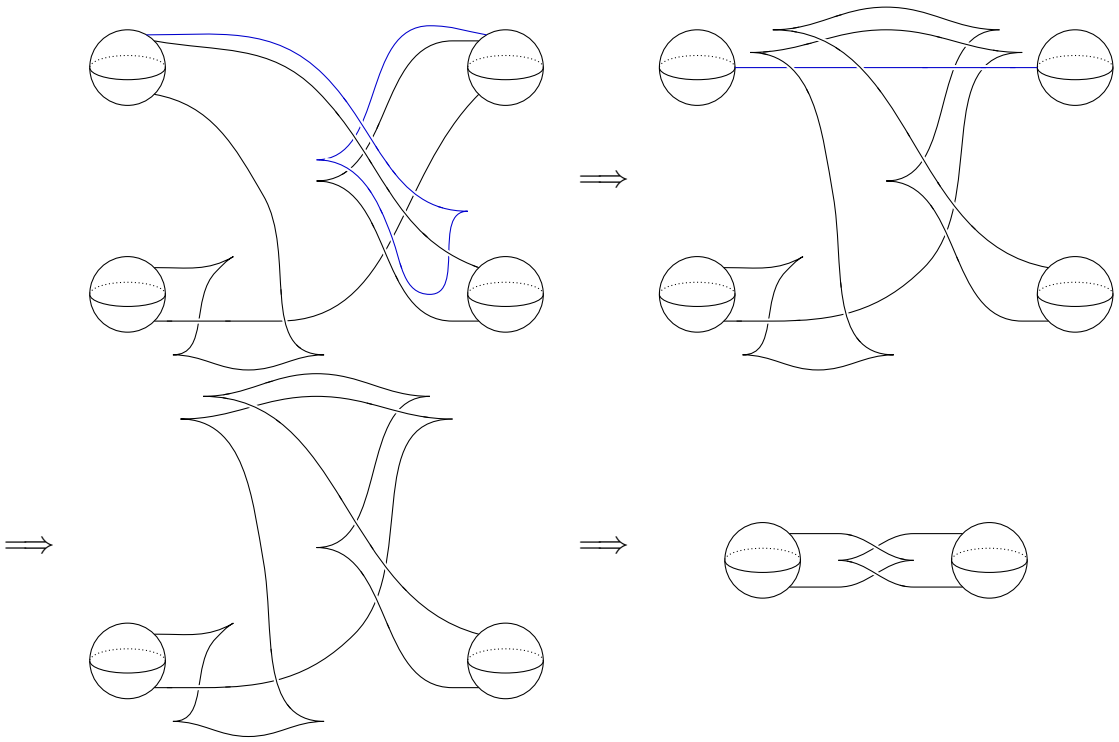


图 15： 利用 Legendrian Kirby 变换进行的计算表明，自丛接 T^*S^2等价于在 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$上附加一个临界把手。（引自 [Acu+21，图 19], 中包含缺失的步骤。）两个 1-手柄与黑色的勒让德里结共同构成 $T^*\mathbb{T}^2$的把手分解；蓝色的勒让德里结由蓝色曲线的余法丛提升得到，如图 13 所示。

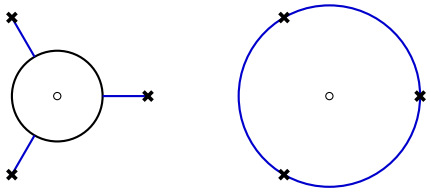


图 16： 两个交换图都显示了在 $n = 2$情况下向 z-坐标的投影。左侧是附加手柄后得到的骨架，其中 $ST^*\mathbb{T}^2$, 显示了四个拉格朗日 S^2。右侧是等价流形的骨架，其中三个拉格朗日球面在双重点相交；该流形由 T^*S^2的循环拼接得到。

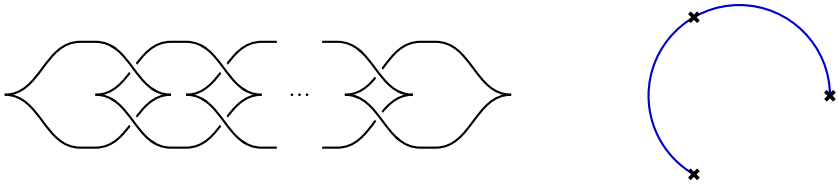


图 17： 将上面的图与未移除纤维的 $x^2 + y^2 + z^{n+1} = 1$ 情况进行比较。此时得到 n 个 T^*S^n 的线性丛接，即 A_n-丛接。左侧展示的是 $n = 2$ 情况下的勒让德附着链环，右侧展示的是骨架。

3.3 停止集的几何

这里我们描述施加在 T^*S 的循环丛接上的停止集。我们将停止集置于 Legendrian 子流形 $\Lambda_{\text{stop}} \subset S^1 \times S^2$ 上，如 [Syl15，例 2.8]，所示，其前图见图18。更准确地说，我们首先证明，$S^1 \times S^2$ 可以描述为两个零截面管状邻域的副本，它们在 $(J^1S^1, \xi_{\text{std}})$ 中粘合在一起。这为切除停止集的邻域后得到的扇区提供了一个简洁的几何描述。此外，我们证明，定义 Legendrian 附着球面接触不变量的 Reeb 弦和全纯曲线可以在 $(J^1S^1, \xi_{\text{std}})$ 内计算。



图18： 前投影中所示的 Legendrian $\Lambda_{\text{stop}} \subset S^1 \times S^2$。切除 Λ_{stop} 的邻域后，得到的流形与 J^1S^1 中零截面的一个凸邻域接触同胚。

3.3.a 拼接构造

我们考虑由米尔诺纤维去掉一个纤维上的勒夫谢茨纤维化给出的 Weinstein 流形：我们从

$$\{x^2 + y^2 + z^{n+1} = 1\} \xrightarrow{\pi_z} \mathbb{C},$$

并考虑 $\{x^2+y^2+z^{n+1} = 1\} \setminus \pi^{-1}(0)$。我们已经看到，这是由 $n+1$ 个 T^*S^2的副本进行的循环拼接。现在我们想描述停止集。为了让几何结构更简单，我们将停止集视为在连接手柄之前先连接上去。因此，我们限制到$\pi^{-1}(D_\epsilon \setminus 0)$，其中 D_ϵ是一个半径为 ϵ的圆盘，且半径足够小，使得其逆像是次临界的。于是， $\pi^{-1}(D_\epsilon \setminus 0)$ 是通过将一个 1-手柄连接到标准球 B^4上所得到的 Weinstein 域。我们将其完备化视为平凡勒夫谢茨纤维化 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \times T^*S^1 \to \mathbb{C}$ 的全空间所构成的 Weinstein 流形。

我们将把无穷远边界 $M = \partial_\infty(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*) = S^1 \times S^2$ 描述为两个粘合在一起的 J^1S^1 中零截面凸邻域的副本。停止集将附着在其中一个副本的零截面上。Weinstein 把手将沿另一个副本的零截面附着。我们附着停止集处的 Legendrian 的松弛性意味着，我们可以计算另一个 J^1S^1 副本中的包裹 Fukaya 范畴。将接触边界划分为两部分的做法，是将该纤维化视为开书分解（下文将沿用 [Etn06] 的定义），而这两个部分的公共边界是一张凸曲面，由两页并合而成。

定义3.3.1. 闭 3-流形的开书分解 M 由一对 (B, π) 构成，其中绑定 $B \subset M$ 是一个定向链环，并且 $\pi\colon M \setminus B \to S^1$ 是一个纤维化，使得对于所有 $\theta \in S^1$，$\pi^{-1}(\theta)$ 是一个紧曲面 Σ_θ（其边界为 $\partial\Sigma_\theta = B$）的内部。曲面 $\Sigma \cong \Sigma_\theta$ 称为页。

接触结构 ξ 在 M 上由开书分解 (B, π)支撑，当且仅当 ξ 可以通过接触结构的同伦变形到一个具有接触形式 α 的接触结构，使得

- $d\alpha$ 是页内部上的正辛形式，即定义在 $\pi^{-1}(\theta)$上，并且相对于页的定向为正；该定向由 B的定向诱导得出，并且
- $\alpha > 0$ 在 B 上。

这里的同伦是指一参数光滑接触结构族 $\xi_t, t \in [0,1]$。由 Gray 稳定性定理可知，这意味着存在一参数微分同胚族 ϕ_t： $M \to M$使得 $d\phi_t(\xi_0) = \xi_t$ （例如参见 [Gei08，定理 2.2.2]）。

给定一个勒夫谢茨纤维化 f： $(W, \lambda) \to \mathbb{C}$，其全空间 W 是一个 Weinstein 流形，我们在 $M = \partial_\infty W$ 上得到一个开书分解，该分解的支集为 $\xi = \ker \lambda_{|M}$ （见 [AEO23，构造 2.9]）。它的绑定为 $B = f^{-1}(0)$，纤维化 π： $M \setminus B \to S^1$ 由将 f 与 $D = \{|z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$ 上的角坐标 θ 复合得到。在 $W = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ 的情形下，绑定于是为 $B = f^{-1}(0) \cap M = S^1 \sqcup S^1$。等价地，我们可以将该纤维化视为 $D \times DT^*S^1 \to D$，而光滑化发生在远离 B 的“角点”附近。于是，各页可表示为 $\Sigma_\theta = DT^*S^1$，其边界为 $F_\theta = B$，如图 19 所示。

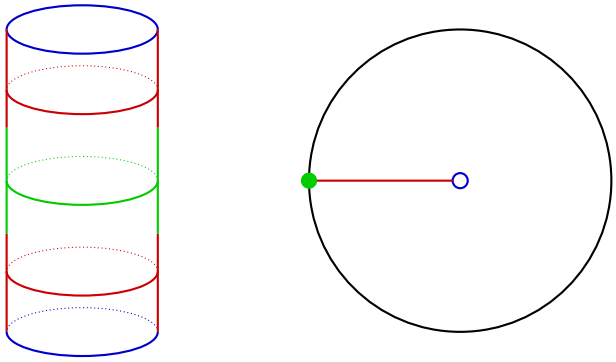


图 19： 该图展示了开书分解 (B, π) 的页 DT^*S^1，以及它与勒夫谢茨纤维化 $W = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ 之间的关系。绑定 B 以蓝色表示， π 的纤维中位于 ∂D 上方的部分以绿色表示，而位于 D 内部上方的部分以红色表示。

虚轴 $\pi^{-1}(\{\mathrm{Re}\, z = 0\} \cap D)$ 的逆像是沿着 B光滑粘合在一起的两页，即一个环面 $S^1 \times S^1$，我们将其记为 S。在 ξ上进行同伦后， S 是一个凸曲面；根据下文的定义 3.3.2，我们可以取 B 作为其分割集，参见[Etn06，引理 4.1]。此外， ξ 在 $M \setminus S$的两个连通分支上都是紧的。以下定义源自 [Gir91]。

定义 3.3.2。 若闭曲面 $S \subset M$ 上存在一个与 S横截的接触向量场 V，则称其为凸曲面。

给定一个凸曲面和一个横截接触向量场 V，分割集 是多重曲线 $\Gamma_S = \{x \in S \mid V(x) \in \xi_x\}$。

接下来考虑 $J^1S^1 = S^1_\theta \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$，其标准接触结构定义为 $\alpha = dz - ydθ$ 的核，其中零截面 $U_\epsilon = \{(\theta, y, z) \mid y^2 + z^2 \leq \epsilon^2\}$ 具有标准管状邻域。这是一个实心环面。令 $V_{\mathrm{rad}} = y\partial_y + z\partial_z$ —— 这是一个从零截面径向向外指的向量场，因此它与 U_ϵ 的边界横截。它是一个接触向量场，因为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{V_{\mathrm{rad}}}\alpha &= d\iota_{V_{\mathrm{rad}}}\alpha + \iota_{V_{\mathrm{rad}}}d\alpha \\
&= dz - \iota_{V_{\mathrm{rad}}}(dy \wedge d\theta) \\
&= dz - ydθ \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

U_ϵ 的边界的分割集由满足 $V \in \xi$ 的点构成，即 $\alpha(V) = z = 0$。因此，分割集由两条经线的并集 $\ell_\pm = \{(\theta, \pm\epsilon, 0)\}$ 构成。

将 $M \setminus S$ 的两个连通分支分别记为 T_0 和 T_1，注意它们是实心环面的内部（回想一下，$S = \pi^{-1}(\{\mathrm{Re}\, z = 0\} \cap D)$ 是它们共同的凸边界，同胚于一个环面 $S^1 \times S^1$）。有两个 S^1 的 Legendrian 复制，分别作为两个点 $\partial D \cap \{\mathrm{Im}\, z = 0\}$处纤维中的零截面。将它们记为 Λ_0和 Λ_1，并称 Λ_0位于 T_0 中的 -1 上方，而 Λ_1 位于 T_1中的 1 上方。我们可以分别找到两个 Legendrian 子流形 U^0和 U^1的邻域，使它们与 J^1S^1中零截面的管状邻域 U_ϵ 接触同胚。事实上，正如下一个引理所示，我们可以假设 $U^i = T^i$:

引理 3.3.3. 闭凸邻域 U^i和 $T_i = T_i \cup S$接触同胚。

证明。 这是 [Kan97，定理 8.2] 的推论：实心环面上存在唯一的紧接触结构，且其分割集为经线。 □

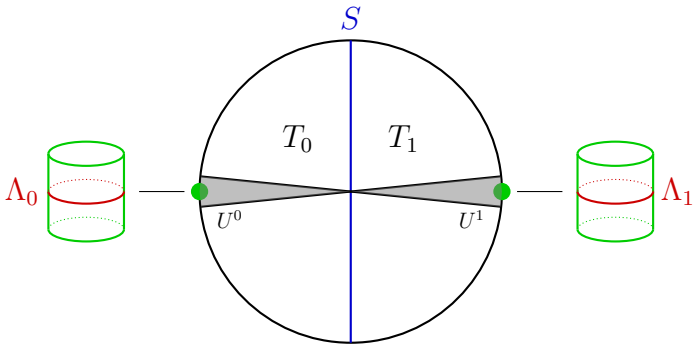


图 20： 展示投影到底空间 D上的不同集合，以及点 ± 1上方的纤维，其中 Legendrian S^1 形成的零截面以红色标出。

因此我们得出:

定理 3.3.4。 从 $(S^1 \times S^2, \xi_{\mathrm{std}})$ 中移除 Λ_0 的一个邻域 U^0；该邻域与具有凸边界的实心环面内部接触同胚。所得接触流形与零截面的一个凸闭邻域接触同胚，该零截面在 $(J^1S^1, \xi_{\mathrm{std}})$ 中被识别为 Λ_1 （或 Λ_0）。因此，从 *Weinstein* 域 $S^1 \times D^3$ 中移除置于 Λ_0 处的停止集，将得到一个 *Weinstein* 扇区，其无穷远边界是 $(J^1S^1, \xi_{\mathrm{std}})$ 中零截面的一个凸闭邻域。

3.3.b Ree停止集补集中的 b 弦与全纯曲线

为了使上述通过移除某个 Legendrian 子流形 Λ_i 的邻域 U^i 所得到的扇区的包裹福柯范畴定义良好，我们需要调整该邻域中的接触形式，使其具有截断 Reeb 向量场。此外，为了能够断言无穷远边界上的接触不变量与在 $(J^1S^1, \xi_{\mathrm{std}})$ 中计算出的相同，我们需要确保不存在周期 Reeb 轨道，并且离开较小管状邻域的 Reeb 弦不会再返回该邻域。最后，我们还必须确保所有相关的伪全纯圆盘都包含在这个较小的邻域内。

现在假设我们已移除 U^0，并且正在 U^1 中工作。通过适当缩小邻域并重新缩放，我们可以假设

$$U^1 = U^1_2 = \{(\theta, y, z) \,|\, \rho = y^2 + z^2 < 2\}.$$

我们将 $f(\rho)$ 定义为一个函数 $[0,2)$，使得

- $f(\rho) = 1, \quad 0 \le \rho \le 1,$
- $f(\rho) = \frac{1}{H}(\rho)$'对于一个光滑函数 H，使得 $H(2) = H'(2) = 0,$
- $f'(\rho) \ge 0.$

然后令 $\beta = f\alpha$，使得在邻域 $U_1^1 = \{\rho < 1\}$ 内，(U^1, β) 上的 Reeb 动力学与 J^1S^1 中的动力学一致，并且 Reeb 向量场 R_β 是一个截断接触向量场 [（GPS20，第 2.9] 节）。

引理 3.3.5。 对于上文定义的接触形式 β，*Reeb* 向量场 R_β 没有周期轨道，也没有离开区域 $U_1^1 = \{\rho < 1\}$ 后又重新进入的 *Reeb* 弦。

证明。 记 $R_\beta = a\partial_\theta + b\partial_y + c\partial_z$，其中 a，b，c 是函数： $J^1S^1 \to \mathbf{R}$。由于 $R_\beta = \partial_z$ 在 U^1 中，只需证明 $c \neq 0$ （从而 $c > 0$ 处处成立）。因此，为了导出矛盾，假设在 J^1S^1 的某点处有$c = 0$ 。我们计算 $d\beta$:

$$\begin{aligned} d\beta &= df \wedge \alpha + f \wedge d\alpha \\ &= f'(\rho)d\rho \wedge \alpha + f(\rho)d\alpha \\ &= f'(\rho)(2ydy + 2zdz) \wedge (dz - yd\theta) + f(\rho)d\theta \wedge dy \\ &= 2f'(\rho)\left(ydy \wedge dz + y^2 d\theta \wedge dy + yzd\theta \wedge dz\right) + f(\rho)d\theta \wedge dy. \end{aligned}$$

因此，在 $c = 0$ 的点处,

$$\begin{aligned} 0 =& d\beta(R_\beta, -) \\ =& a\left(2y^2 f'(\rho)dy + f(\rho)dy + 2yzf'(\rho)dz\right) \\ &+ b\left(2yf'(\rho)dz - 2y^2 f'(\rho)d\theta - f(\rho)d\theta\right). \end{aligned}$$

但这意味着 $a = 0$ 和 $b = 0$，因为 $y^2 f'(\rho) + f(\rho) > 0$。这表明 c 不会消失，正如所需。 □

假设 $\Lambda \subset U^1$ 是一个只有有限条 *Reeb* 弦 的 Legendrian，即从 Λ 出发并终止于 Λ 的 Reeb 向量场积分曲线。我们希望考虑刚性的 J-全纯曲线u： $D \setminus \{x, y_1, \ldots, y_n\} \to (\mathbf{R}_t \times U_2^1, d(e^t\beta))$，其中 u 在 x 处有正穿孔，并在边界 ∂D 上的 $y_1, \ldots, y_n$ 处有负穿孔，分别渐近于 Reeb 弦 $\alpha_0\beta_1, \ldots, \beta_n$（其含义见 [Dim16，定义 3.6]），并将 $\partial D \setminus \{x, y_1, \ldots, y_n\}$ 映射到 $\Lambda \times \mathbf{R}_t$。这里， J 是一个相容的一般几乎复结构，假设它是柱状的。

引理 3.3.6. 假设 $\Lambda \subset U_1^1 \subset U_2^1$足够小（必要时可沿 z 方向重新缩放）。若 u 是如上所述的 J-全纯圆盘（其 *punctures* 收敛至Λ上的 *Reeb* 弦），则 $\mathrm{im}(u) \subset \mathbb{R}_t \times U_1^1$.

证明。 例如，按照 [Dim16 第 3], 节的约定， u的总*Hofer*能量定义为

$$E(u) = \int_u d\beta + \sup_{\varphi \in \mathcal{C}} \int_u \varphi(t)dt \wedge \beta,$$

其中， $\mathcal{C}$ 是由具有紧支集的光滑非负函数 φ 构成的集合，且满足$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1$。它满足

$$E(u) = 2\ell(\alpha_0) - \sum \ell(\beta_i),$$

其中 $\ell(\gamma) = \int_\gamma \beta$ 是 Reeb 弦的长度。通过缩小 Λ，我们可以假设，对于任意常数 $C > 0$，都有 $E(u) < C$；这是因为根据假设， u 只有一个正穿孔，而且 Λ 上只有有限条 Reeb 弦。这一性质在接触化中泛型成立，因此对 U_2^1 中的 Λ 也成立（由引理 3.3.5 得出）。

我们希望找到一个仅依赖于几乎复结构 J 的下界 $C_0 > 0$，使得若对于某个 $p \in U_2^1 \setminus U_1^1$，有 $(s, p) \in \mathrm{im}(u)$，则 $E(u) > C_0$。若能给出这样的界，结论便随之成立。

对于任意实数 s，令

$$A_s(u) = e^{-1} \int_{u \cap \{t \in [s-1, s+1]\}} d(e^{t-s}\beta).$$

根据总 Hofer 能量的定义，我们有不等式 $0 \leq A_s(u) \leq E(u)$；第二个不等式由恒等映射 $d(e^{t-s-1}\beta) = e^{t-s-1}d\beta + e^{t-s-1}dt \wedge \beta$ 以及界 $e^{t-s-1} \leq 1$（对 $t \in [s-1, s+1]$）和 $\int_{s-1}^{s+1} e^{t-s-1}dt = 1 - e^{-2} < 1$ 得出。

假设 $p \in U_2^1 \setminus U_1^1$，并假定 $(s, p) \in \mathrm{im}(u)$，其中 s 为某个实数。先假设 $s = 0$。由单调性定理（Sik94，命题 4.3.1.(ii)） [] 应用于带边界的紧流形 $[-1, 1] \times U_2^1$，由于对于 $\Lambda \subset U_1^1$， Λ 到 $\partial(U_2^1 \setminus U_1^1)$ 的距离固定为 $r_0 > 0$（如果我们沿 z 方向减小 Λ，这个距离只会增大），这意味着

$$A_0(u) > C_0' r_0^2 = C_0,$$

其中 C_0' 仅取决于 J。

接下来假设 $s \neq 0$。于是，通过沿 R 方向平移，我们定义一条新的 J-全纯曲线 $\tilde{u}$，其定义为 $\tilde{u}(q) = (u_t(q) - s, u_{U_2^1}(q))$，其中 $u(q) = (u_t(q), u_{U_2^1}(q)) \in \mathbb{R}_t \times U_2^1$。注意，此时

$$A_s(u) = A_0(\tilde{u}) > C_0,$$

利用 J 是柱状的这一点。 □

因此，由引理 3.3.5 和引理 3.3.6，结合定理 3.3.4，可得：

定理3.3.7。 对于 $\partial_\infty(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*) \setminus \sigma_{\mathrm{stop}} = (S^1 \times S^2 \setminus U^0, \xi_{\mathrm{std}})$ 上的一个适当接触形式，存在一个从 J^1S^1 到 U^1 的零截面凸邻域的嵌入，该嵌入保持接触形式，并将零截面与 Λ_1 等同起来（见图 *20*）。它满足以下性质：对于一个适当的相容柱状几乎复结构，任意链环 $\Lambda \subset U^1$ 的伪全纯圆盘计数都与 J^1S^1 中的计数一致（这里指切卡诺夫–埃利亚什贝格代数定义中相关圆盘的计数）。特别地，这两个切卡诺夫–埃利亚什贝格代数相等。

因此，在实际计算 $\partial_\infty(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*) \setminus \sigma_{\mathrm{stop}} = (S^1 \times S^2 \setminus U^0, \xi_{\mathrm{std}})$ 中附着球面的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数（见第4.1节）时，我们可以在 $(J^1S^1, \xi_{\mathrm{std}})$ 中进行计算。

˜4 A_n 加法预投射代数的辛实现

我们使用上一节中的定理3.3.7，从而得出：在 $\Lambda \subset S^1 \times S^2$ 放置一个停止集 Λ_{stop} （假设 Λ 与该停止集的邻域不相交）后，Legendrian 的切卡诺夫–埃利亚什贝格子微分分次代数可以在 J^1S^1 中计算。我们进一步证明，通过在 J^1S^1 中计算切卡诺夫–埃利亚什贝格代数，就可以计算部分包裹福柯范畴。这也意味着，对于沿 $\Lambda \subset S^1 \times S^2$ 进行手柄附着所得到的流形，可以通过对在 J^1S^1 中计算得到的有限生成代数的模范畴进行微分分次局部化，来计算其完全缠绕福柯范畴。

特别地，带有停止集的 T^*S^2 的循环丛接的部分包裹福柯范畴，可以通过 J^1S^1 中附着链环的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数计算。我们证明，˜该附着链环的微分分次代数是 A_n 的金兹堡代数。

4.1 预备知识：辛不变量

我们回顾接触流形中 Legendrian 子流形的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数，以及 Liouville 扇区的包裹福柯范畴的定义。特别地，我们回顾用于计算 $(J^1\mathbb{R}, \xi_{\text{std}})$、$(J^1S^1, \xi_{\text{std}})$ 和 $(\#^k(S^1 \times S^2), \xi_{\text{std}})$ 的组合模型。我们还回顾这两种不变量之间通过手术公式建立的关系；结合部分包裹福柯范畴的一个生成性结果，这些是本文结果所依据的主要工具。

4.1.a 切卡诺夫–埃利亚什贝格代数

切卡诺夫–埃利亚什贝格代数作为辛场论的一部分，在 [EGH00], 中被提出，并于 [Che02] 中由 $\mathbb{R}^3$ 严格定义。它在正合辛流形的接触化中被定义于 [EES07], ，并在 [NT04] 中以组合方式定义；此外，[EN15] 还在 $\#^k(S^1 \times S^2)$ 中给出了组合定义（另见 [EL19] ，其中给出了一个有限生成版本）。它是一种半自由微分分次代数，其同调也称为 Legendrian 接触同调，是一种 Legendrian 同痕不变量，比此前已知的经典不变量更有力；这些经典不变量包括光滑同痕类、瑟斯顿–贝尼昆数和旋转数。

给定一个接触流形 $(M, \xi = \ker \alpha)$，以及选定的接触形式 α。Reeb 向量场R_α 定义为

$$\begin{aligned} \iota_{R_\alpha} d\alpha &= 0, \\ \iota_{R_\alpha} \alpha &= 1. \end{aligned}$$

R_α 从 Λ 到自身的非平凡流线称为***Reeb* 弦**。给定一个分解为若干连通分支 $\Lambda = \Lambda_1 \sqcup \cdots \sqcup \Lambda_n$ 的 Legendrian 子流形 $\Lambda \subset M$。若 Legendrian 子流形在 Reeb 弦起点处的切空间沿 Reeb 向量场流动后，得到的子空间在 ξ 内与其在 Reeb 弦终点处的切空间横截相交，我们就称 Λ处于**弦一般** 位置。通过 Legendrian 同伦，我们总能使 Λ 处于弦一般位置。因此，我们将假设情况如此，从而 Reeb 弦构成一个离散集合。我们如下定义 Λ 的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数 $CE(\Lambda)$。

我们通过为每个连通分支 Λ_i选取一个顶点 i，并为每条从 Λ_i 出发、到达 Λ_j的 Reeb 弦 c 选取一条箭 α_c：$i \to j$，来定义一个箭图 Q （箭的数量可能是可数无穷的）。作为一个代数，$CE(\Lambda) = \mathbb{C}Q$，也就是说，它是该箭图的路径代数（我们将箭的乘法记作复合）。

分次通过 Conley–Zehnder 指数定义在生成元上，并扩展到字（箭的乘法/串接）上，定义为生成元分次之和（$|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta|$）。事实上，对于多分支链环，分次有许多可能的选择，这取决于对某些路径的选择。此外，必须要求 Legendrian 的所有分支的 Maslov 类都消失，才能得到良定义的整数分次（否则得到的是模最小 Maslov 数的整数上的分次。

现在作出这一假设，我们如下定义生成元上的分次。给定一个 Reeb 弦c ： $\Lambda_i \to \Lambda_i$ 始于并终于同一分支，我们选择一条封口路径 γ_c，即γ ： $I \to \Lambda$，使得 $\gamma_c(0)$ = 为 c 的起点，而 $\gamma_c(1)$ = 为 c的终点。这定义了一条拉格朗日 子空间的路径Γ_c ： $I \to \xi_{|\gamma_c}$。我们令

$$|c| = \mathrm{CZ}(\Gamma_c) - 1,$$

其中，CZ 表示 [EES07] 中定义的 Conley-Zehnder 指标。

为了给 c ： $\Lambda_i \to \Lambda_j$ 混合分支之间的弦赋予分次，我们在所有分支上选取基点 $*_i \in \Lambda_i$ ，并选取从 $*_i$ 到 $*_j$ 的路径 γ_{ij} 和路径 Γ_{ij} ： $I \to \xi_{|\gamma_{ij}}$。我们假设 $\gamma_{ji} = \gamma_{ij}$ 和 $\Gamma_{ji} = \Gamma_{ij}$，其中上划线表示反向遍历路径；并且 $\gamma_{ij} * \gamma_{jk} \simeq \gamma_{ik}$ 和 $\Gamma_{ij} * \Gamma_{jk} \simeq \Gamma_{ik}$，因此实际上只需选取从 $*_i$ 到 $*_n$、 $i = 1$、.....、 $n-1$ 的路径 γ_i 和 Γ_i。给定 c： $\Lambda_i \to \Lambda_j$ ，我们还选取两条路径 $\gamma_{c,j}$ ，从 c 的终点到 $*_j$ ；以及 $\gamma_{c,i}$ ，从 $*_i$ 到 c 的终点；和之前一样，它们诱导出路径 $\Gamma_{c,l}$ ： $I \to \xi_{\gamma_{c,l}}$、 $l = i$、 j。令 $\Gamma_c = \Gamma_{c,j} * \Gamma_{ji} * \Gamma_{c,i}$（路径的串接），再次由公式 $|c| = \mathrm{CZ}(\Gamma_c) - 1$ 定义分次。上述 Γ_{ij} 的选择相当于选取一个马斯洛夫势，见 [Sei00]。

微分 $\partial : CE(\Lambda) \to CE(\Lambda)$（按此处约定，其次数为 -1）通过计数辛化中的全纯曲线来定义在生成元上，这些曲线有一个输入（正向穿孔）和多个输出（负向穿孔）。再要求它满足分次莱布尼茨法则，从而将其扩展到整个代数上

$$\partial(\alpha\beta) = \partial\alpha \cdot \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \cdot \partial\alpha.$$

接下来，我们专门讨论 1-喷射空间 $M = J^1N = T^*N \times \mathbb{R}_z$ 的情形，其中 $N = \mathbb{R}$ 或 $N = S^1$。它们是接触流形，接触结构为 $\xi = \ker(\alpha)$，其中 $\alpha = dz - ydx$， x 是 N 上的一个坐标图，而 (x, y) 是余切丛上的诱导坐标图。在前图 $\pi_F(\Lambda) \subset N \times \mathbb{R}_z$ 中，假设 Λ处于一般位置，则这是一个浸入子流形，其奇点为自交或尖点边。

Reeb 向量场为 ∂_z。前投影 $\pi_F(\Lambda)$ 没有竖直（z方向）相切，且链环 $\Lambda \subset J^1N$ 可由方程 $y = dz/dx$恢复。因此，在前投影中，Reeb 弦是从下分支上的点指向上分支上的点的弦，并且这些点处的切空间相等。在 $N = \mathbb{R}$ 的情形下，可以看出它们与右尖点和交叉点一一对应（必要时经过扰动）。在 $N = S^1$ 的情形下，还必须添加来自柄中弦的额外交叉点，这些交叉点在解消中如图26所示。

在 1-喷射空间的情形下，马斯洛夫势可按以下方式选取；当 Legendrian 是一维时，这一选取便成为组合性的。我们选取一个局部常值函数 m： $\Lambda \setminus \pi_F^{-1}(\{\text{尖点}\}) \to \mathbb{Z}$，使得当我们

向下经过尖点时，减 1；向上经过尖点时，则加 1（当马斯洛夫类不为零时，还需要从各连通分支中移除基点）。随后，对应于右尖点的弦的分次为 1，而对于一个与交叉对应的弦 c，

$$|c| = m(\text{overstrand of } c) - m(\text{understrand of } c).$$

注意，对于具有 $n \geq 2$ 个连通分支的 Legendrian 链环，分次并不唯一，但有 $\mathbb{Z}^{n-1}$ 种选择。对于 $N = S^1$，还有两族额外的弦，它们在拉格朗日投影中表现为交叉点，如图26所示。左侧的交叉点按通常方式进行分次，而对于右侧的特殊弦，分次由 $|c| = m$（c的上弦）$- m$（c的下弦）$- 1$定义。

对于一般的 1-喷射空间 $M = J^1N$（流形 N的），固定选择相容几乎复结构后，可以通过计算刚性梯度流树来计数 $N \times \mathbb{R}_z$ 中的圆盘，前提是该 Legendrian 在其前投影 [Ekh07] 中除了尖点边或燕尾之外没有其他奇点。对于 $N = \mathbb{R}$ 或 $N = S^1$，微分可以在拉格朗日投影 π_L 中组合地计算：$J^1N \to T^*N$。注意，Reeb 弦与拉格朗日投影中的双重点一一对应。微分 $\partial\alpha$ 在双重点 $\alpha = \pi_L$（c）处计算具有一个正穿孔于 α、若干负穿孔于 $\beta_1 = \pi_L$（b_1）$\ldots$，$\beta_n = \pi_L$（b_n）的圆盘，并对全纯重参数化取模。更准确地说，

$$\partial\alpha = \sum_{\substack{n\geq 0,\, \beta_1,\ldots,\beta_n \in R \\ u \in \mathcal{M}(\alpha;\beta_1,\ldots,\beta_n)}} (-1)^{\sigma(u)} \beta_1 \ldots \beta_n,$$

其中 R 是 Reeb 弦或双重点的集合。对于有限多个元组，集合 $\mathcal{M}(\alpha;\ \beta_1、\ldots\ldots、\ \beta_n)$ 是有限且非空的，因此上述直和是有限的（利用作用量论证即可轻松证明这一点）。对于 $n = 0$，如果 $\mathcal{M}(\alpha) \neq \emptyset$，那么 α 必须在同一个分支处开始和结束，并且空字应理解为相应的幂等元。集合 $\mathcal{M}(\alpha;\ \beta_1、\ldots\ldots、\ \beta_n)$ 定义为圆盘 u 的集合：$D \setminus \{x, y_1, \ldots, y_n\} \to T^*N$，其中 $D \subset \mathbb{C}$ 是单位圆盘，$\{x, y_1, \ldots, y_n\} \subset \partial D$ 按循环顺序排列在其边界上；这些圆盘是满足 $\lim_{z\to x} u(z) = \alpha$ 且 $\lim_{z\to y_i} = \beta_i$ 的浸入。此外，要求 u 将 x 的一个邻域映射到图21中以正号标记的某个象限，并将 y_i 的一个邻域映射到以负号标记的某个象限。



图21： 左侧拉格朗日投影中交叉点处的 Reeb 符号，右侧拉格朗日投影中交叉点处的定向符号。左侧：圆盘的正穿孔在左侧或右侧象限转过 90 度，同时圆盘覆盖同一象限；负穿孔的情况也相同，但位于顶部或底部象限。右侧：展示了与弦c 对应的定向符号。对于次数为偶数的交叉点，该符号取决于同伦的选择，使负斜率的弦位于正斜率的弦上方。例如，当交换图来自前沿的解消时（图 24 和图 25），便是这种情况。对于图26中的特殊弦$s_{i,\,j}$，我们选择将图顺时针旋转 90 度后得到的定向符号。这样，它们便对应于短手柄弦 $c^0_{i,\,j}$（符号保持不变）。

最后，根据交叉点处的定向符号（如图21所示）以及每个分支上基点的选择，一个圆盘要么按正号计数，要么按负号计数。如果 u 具有负定向符号的交叉点总数与沿边界经过基点的次数之和为奇数，则该圆盘按负号计数，即 $\sigma(u) = 1$。否则按正号计数，即 $\sigma(u) = 0$。

一个4维次临界魏因斯坦域的边界为（$\#^k(S^1 \times S^2)$ ξ_{std}），它是通过向 B^4附加 k 1-把手得到的。在拟同构意义下，我们可以按如下方式计算切卡诺夫–埃利亚什贝格代数，见 [EN15]。

假设魏因斯坦手柄体图处于标准形式，也就是说，每个1-手柄都由两个球表示，这两个球在水平方向上彼此相对，并沿垂直方向排列；2-把手进入或离开这些手柄，并延伸到1-手柄之间发生链接的方框中。可以对Legendrian 子流形进行同伦变形，使其与1-手柄的交集由平行线股组成。因此，对于每个有 k 条线股进入的1-手柄，我们会得到一个可数的手柄弦族（在 [EL19]中，借助代数方法可将其简化为有限个，但这里不会用到）。这些弦为$c_{i,j}^p$，它们在手柄中绕行，从第 i条线股到第 j条线股，并经过某个基点 p 次。我们可以像图22那样将它们想象成绕圆周的弦，线股位于右侧，而弦$c_{i,j}^p$ 沿圆周左侧绕行 p次。

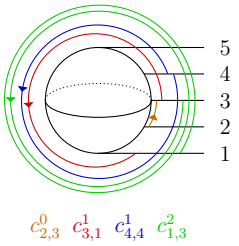


图22： 五条弦进入一个柄时的手柄弦示例（请注意，它们可能位于链环的同一个分支上，也可能不在同一个分支上）。观察图中一条弦如何分裂为较短的弦，即可看出微分（$\partial c^1_{i,i}$ 中出现的幂等项除外）。

上文通过选择马斯洛夫势来描述前投影中的分次，这种描述可推广至处于标准位置的Weinstein 手柄体图。现在必须要求 m 穿过 1-手柄时保持不变。于是，手柄弦 $c = c_{i,j}^p$ 的分次为

$$|c_{i,j}^p| = 2p - 1 + m(\text{endpoint of } c_{i,j}^p) - m(\text{starting point of } c_{i,j}^p)$$

（这里的端点/起点是指相应弦上靠近 1-手柄的任意一点）。手柄弦上的微分计算如下：

$$\begin{aligned}
\partial c_{i,j}^0 &= \sum_{i<l<j} (-1)^{m(l)+m(j)} c_{l,j}^0 c_{i,l}^0, \\
\partial c_{i,j}^1 &= \delta_{i,j} e_{c(i)} + \sum_{i<l} (-1)^{m(l)+m(j)} c_{l,j}^1 c_{i,l}^0 + \sum_{l<j} (-1)^{m(l)+m(j)} c_{l,j}^0 c_{i,l}^1, \\
\partial c_{i,j}^p &= \sum_{m=0}^{p} \sum_{l} (-1)^{m(l)+m(j)} c_{l,j}^{p-m} c_{i,l}^m, \quad p \geq 2.
\end{aligned}$$

这里 $\delta_{i,\ j}$ 是克罗内克 δ，$e_{c(i)}$ 是对应于第 i 条弦的幂等元，而 $m(i)$ 是第 i 条弦上的 Maslov 势函数值。在上面的最后一个公式中，形如 $c^0_{i,\ j}$ 且满足 $i \geq j$ 的表达式应解释为 0。

交叉点处的微分照常通过拉格朗日投影计算，但现在我们也允许负向穿孔汇聚于手柄，并对字贡献 $\beta = c^0_{i,\ j}$。见下方图23左侧的例子。若圆盘从右侧靠近手柄弦（如图23所示），则手柄弦处负向穿孔的定向符号为正；若从左侧靠近，则定向符号为 $(-1)^{m(j)-m(i)}\ c^0_{i,\ j}$。

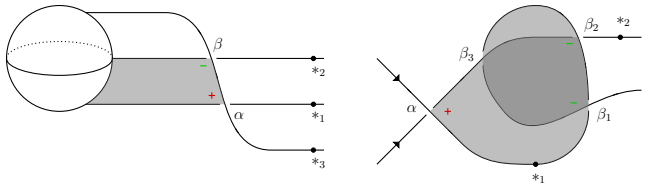


图23： 拉格朗日投影中两个不同链环图里的两个圆盘示例。左侧展示 $\partial\alpha = (-1)^{|\beta|+1}\beta c^0_{1,\ 2} + \cdots$。右侧展示 $\partial\alpha = (-1)^{|\alpha|+|\beta_2|+1}t_1\beta_1\beta_2 + \cdots$。

下面的注释描述了三维情形中带环空间系数的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数的一个组合版本。它基于微分分次代数 $C_*(\Omega S^1; k)$ 与单变量劳朗多项式 $k[t, t^{-1}]$ 之间的拟同构；前者即是赋予庞特里亚金乘积的 S^1 的基点环空间上的链。这一点很重要，因为它被用于手术公式（定理 4.1.3, [EL23]）。

注 4.1.1（环空间系数）。对于 Legendrian 链环 Λ 的某些分支 $\Lambda_{i_1}, \ldots \Lambda_{i_j}$，若在这些分支处设置停止集，而非附加手柄，则相应的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数应在这些分支上使用环空间系数来计算。对于三维接触流形，即 $\Lambda_i \simeq S^1$，这可以通过定义分次时使用的基点 $*_{i_l}$、封口路径的选取，以及对每个分支 Λ_{i_l} 定向的选取来建模。就 $CE(\Lambda)$ 的生成元而言，这会为每个满足 $|t^{\pm 1}_{i_l}| = 0$ 且 $\partial t^{\pm 1}_{i_l} = 0$，并且满足 $e_j t^{\pm 1}_{i_l} = t^{\pm 1}_{i_l} e_j = 0$（其中$j \neq i_l$、$e_{i_l} t^{\pm 1}_{i_l} = t^{\pm 1}_{i_l} e_{i_l} = t^{\pm 1}_{i_l}$ 和 $t_{i_l} t^{-1}_{i_l} = t_{i_l} t^{-1}_{i_l} = e_{i_l}$）的分支 $\Lambda_{i_1}, \ldots \Lambda_{i_j}$ 增添两个生成元 t_{i_l}，$t^{-1}_{i_l}$。此外，圆盘 u（例如，其正穿孔为α，负穿孔依次为 β_1、……、β_n），若其边界在 β_i 和 β_{i+1} 之间经过基点 $*_{j_i}$ n_i 次（按 Λ_i 上的定向计符号，且 $i = 0$、……、n 和 $\alpha = \beta_0 = \beta_{n+1}$），现在贡献的字为

$$(-1)^{\sigma(u)} t^{n_0}_{j_0} \beta_1 t^{n_1}_{j_1} \beta_2 \cdots t^{n_{n-1}}_{j_{n-1}} \beta_n t^{n_n}_{j_n}$$

至 $\partial\alpha$（通过设置 $t_i = e_i$ 可恢复 $(-1)^{\ \sigma(u)}\beta_1 \ldots \beta_n$）。

最后，有些性质用前投影更容易描述，有些则用拉格朗日投影更容易描述。利用 *Ng* 分辨，总能从前投影得到拉格朗日投影，如图 24、图 25 和图26所示。这意味着，经过对前图作同伦（即不引入新的交叉点）后，我们可以假设拉格朗日投影在同伦意义下如图所示。注意，这足以确定微分定义中的刚性圆盘。

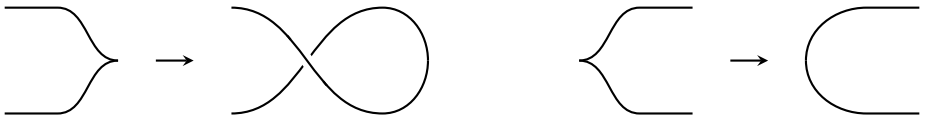


图 24： 展示从前图转为拉格朗日图时如何解消尖点。



图 25： 展示在四条弦穿过 1-手柄的情形下，投影到拉格朗日投影时弦在 1-手柄附近如何变化。

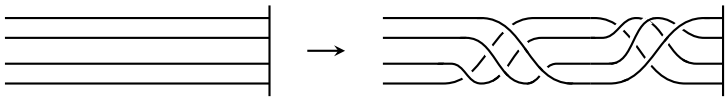


图26： 展示在 J^1S^1 中从前沿投影转为拉格朗日投影时的解消过程。图中最右侧的特殊弦，是正斜率弦与负斜率弦交叉的位置，对应于相应 1-手柄中的短手柄弦$c^0_{i,\ j}$。

4.1.b 包裹Fukaya 范畴

我们概述（部分）包裹福柯范畴的定义，并回顾相关的重要结果。关于深入的论述，请读者参阅 [GPS20], [GPS24], [EL23], [Cha+24]和 [Syl15]。直观地说，Fukaya 范畴是一个 A_∞-范畴，其对象为拉格朗日流形，态射空间由交点生成，而 A_∞-映射则通过对带有交点处 punctures 的 J-全纯多边形计数来定义； A_∞-关系则源于这些曲线可能发生的断裂。包裹福柯范畴是这一范畴的一个版本，适用于一大类开辛流形——Liouville 扇区。在这类流形中，假设拉格朗日子流形是以 Legendrian 子流形为底的圆柱，并且通过使用 Reeb 流，在无穷远处（柱状端）绕行拉格朗日子流形之后，对交点进行计数。部分包裹福柯范畴允许使用停止集来阻止绕行，例如在无穷远边界处某个 Legendrian 子流形（的圆柱）邻域内设置停止集。等价地，它可以看作是对包裹福柯范畴所定义对象的类别的扩充：从 Weinstein 流形扩充到 Weinstein 扇区。

设 (W,λ) 为一个 Liouville 扇区，我们如下定义包裹福柯范畴 $\mathcal{W}(W,\lambda)$。其对象为带柱状端的恰当拉格朗日子流形 $L \subset W$，即 λ 拉回后在 L上成为一个正合形式˜，并且在紧子集 W之外，在某个 Legendrian 子流形$\Lambda \subset \partial_\infty W$的条件下， L 在恒等映射 $\phi : (\mathrm{R}_{t\geq 0} \times \partial_\infty W) \cong (W \smallsetminus W, \lambda)$ 所给的识别下与圆柱 $L = \mathrm{R} \times \Lambda$ 重合。我们也纳入紧致正合拉格朗日子流形，它们可以视为具有满足 $\Lambda = \emptyset$ 条件的柱状端。拉格朗日子流形还应配备额外数据，以便定义整数分次和 C-系数。

态射空间 $CW(L_0,\ L_1)$ 是由一族哈密顿量 H 所对应的交点张成的 C-向量空间的极限，其中交点位于 L_0 与 $\phi^1_H(L_1)$ 之间。

和往常一样，定义依赖于若干选择，例如几乎复结构，但它给出了与 $(W,\ \lambda)$ 相关联的一个 A_∞-范畴 $\mathcal{W}(W,\ \lambda)$；该范畴是同调单位的，并且在拟等价意义下不依赖于这些选择。（通常这里采用上同调分次来定义，而非第 2.1.e 节中的约定，但这不会造成任何问题。）

给定一个停止集 $\sigma \subset W$（或停止集的并），可以定义 $\mathcal{W}(W,\ \sigma)$，即在 W 处停止 σ 的部分包裹福柯范畴。这是另一个 A_∞-范畴，其中绕行不允许与停止集相交，并且全纯曲线也必须避开停止集。

本文中的计算并未显式使用（部分）包裹福柯范畴的定义，而是使用了以下两个版本的手术公式。第一个涉及沿 Legendrian 链环附加标准 Weinstein 把手：

定理 4.1.2 ([BEE12])。 假设 W 是通过沿 ***Legendrian*** 链环 $\Lambda \subset \partial_\infty W_0$ 附加标准 ***Weinstein*** 把手定义的，并令 Λ_1、……、Λ_m 表示其连通分支。令 C_1、……、C_m 表示这些手柄的余核。那么存在一个由全纯曲线计数定义的手术映射，它诱导一个 A_∞-拟同构

$$\bigoplus_{i,j} CW(C_i, C_i) \simeq CE(\Lambda).$$

第二个公式（在 [AE22] 中证明）涉及沿 Legendrian 子流形设置停止集。

定理 4.1.3 ([EL23])。 假设 W 由 W_0 沿 ***Legendrian*** 球面 $\Lambda^- = \Lambda_1^- \sqcup \cdots \sqcup \Lambda_{m_1}^-$的链环附加手柄而得到，并考虑在 σ处设置停止集的 W部分包裹福柯范畴，其中 σ 是设置在 ***Legendrian*** 链环 $\Lambda^- = \Lambda_1^+ \sqcup \cdots \sqcup \Lambda_{m_2}^+ \subset \partial W_0 \setminus \Lambda_-$处的停止集。那么

$$\bigoplus_{i,j} CW_{(W,\sigma)}(L_i^\pm, L_j^\pm) \simeq CE(\Lambda^- \cup \Lambda^+),$$

其中，等式右侧应取 Λ_1^+、……、$\Lambda_{m_2}^+$上的基点环空间的链作为系数。对于1维 ***Legendrian*** 子流形，这等价于在这些连通分支上添加生成元 $t_i^\pm$（见注 ***4.1.1***）。等式左侧的求和遍历所有可能的组合，其中 $L^- = C_i$ 是手柄的余核，而 $L_i^+ = D_i$ 是停止集的链接圆盘。

以下定理将部分包裹福柯范畴与相应扇区的包裹 Fukaya 范畴联系起来，后者通过移除停止集的一个邻域得到（见第 3.1 节）。

定理 4.1.4 ([GPS20])。 设 W 为带停止集 σ的 ***Liouville*** 流形。那么包含映射$W_\sigma \to W$ 诱导出一个等价

$$D^\pi \mathcal{W}(W, \sigma) \simeq D^\pi \mathcal{W}(W_\sigma).$$

最后，要计算（部分）包裹 Fukaya 范畴，我们不仅需要态射空间，还需要该范畴的一组生成元；对于 Weinstein 流形，这些生成元由临界手柄的余核给出：

定理 4.1.5 ([Cha+24], [GPS20])。 通过沿着 Λ_1、……、Λ_m 在一个次临界 ***Weinstein*** 域上附加手柄所得到的包裹 ***Fukaya*** 范畴，由与这些手柄对应的余核 C_1、……、C_m生成。

沿球面的勒让德链环 $\Lambda^- = \Lambda_1^- \sqcup \cdots \sqcup \Lambda_{m_1}^- \subset \partial_\infty W_0$ 在次临界 ***Weinstein*** 流形 W_0上附加手柄，并沿 $\Lambda^+ = \Lambda_1^+ \sqcup \cdots \sqcup \Lambda_{m_2}^+ \subset \partial_\infty W_0 \setminus \Lambda^-$设置停止集后，所得的部分包裹福柯范畴由相应的余核 C_1、……、C_{m_1}以及链接圆盘 D_1、……、D_{m_2}生成。

4.2 在 J^1S^1和 $S^1\times S^2$中计算切卡诺夫–埃利亚什贝格代数

˜我们将金兹堡代数 $\mathcal{G}(A_n)$实现为 J^1S^1中附着链环的循环定向$\tilde{A}_n$ 的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数。我们将其与 $S^1\times S^2$中计算的、用于 T^*S^2循环拼接的附着链环代数进行比较。

4.2.a 在 J^1S^1中的 $\tilde{A}_n$-计算

我们计算 $CE(\Lambda_{\text{cyc}})$，其中 $\Lambda_{\text{cyc}}\subset J^1\,S^1$ 是由平凡结 $n+1$ 组成的循环链环，如下方图27所示的前图所示。

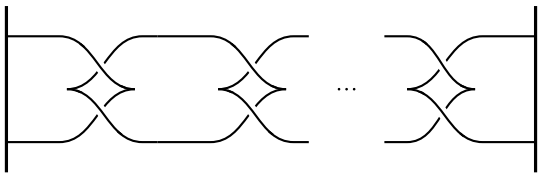


图 27： $\Lambda_{\text{cyc}}=\Lambda_1\sqcup\cdots\sqcup\Lambda_{n+1}$ 在 $J^1\,S^1$中的前投影。

我们有 $n+1$ 个连通分支 $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n+1}$。我们可以结合 Ng 分辨（图 24 和图 26）以及 III 型保面积 Reidemeister 变换，推得在勒让德同痕类的某种适当表示中，Reeb 弦与右尖点和交点一一对应（图 29 中的 Reeb 弦对应于交点）。因此，对于 $i=1,..,n+1$，我们有 Reeb 弦 $\alpha_i:\Lambda_i\to\Lambda_{i+1}$、$\alpha_i^*:\Lambda_{i+1}\to\Lambda_i$ 和 $\zeta_i:\Lambda_i\to\Lambda_i$。（直接比较前投影中的斜率也很容易看出这一点。）因此，底层路径代数是具有循环排序的 A_n-箭图的金兹堡代数 ˜的底层代数。

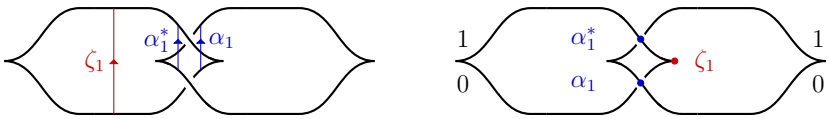


图 28: 在 $\Lambda_1\sqcup\Lambda_2$ 的前投影中显示的 Reeb 弦 ζ_1、α_1 和 α_1^*。对应的交叉点和马斯洛夫势显示在右侧。

接下来计算分次。首先注意到 rot(Λ_i) $=0$，因此我们将得到整数分次。我们选择如图 28 所示的马斯洛夫势。采用这一选择，我们得到：

$$\begin{aligned}|\zeta_i|&=1\\|\alpha_i|&=0-0=0\\|\alpha_i^*|&=1-1=0\end{aligned}$$

对于微分，我们注意到没有圆盘以 α_i 或 α_i^* 为正穿孔。在 ζ_i 处，每个微分都有四个圆盘作贡献（其中一个例子见图 29），其中两个贡献 $e_i-e_i=0$，因此得到

$$\partial\zeta_i=\alpha_i^*\alpha_i-\alpha_{i-1}\alpha_{i-1}^*$$

（模 $n+1$ 计数）。

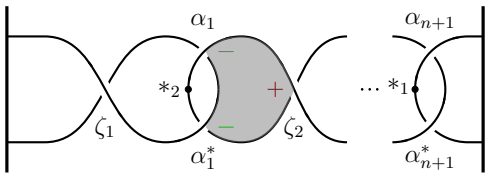


图 29： 拉格朗日投影中的 Legendrian Λ_{cyc}，由前投影经过 Ng 分辨和（保面积的）Reidemeister III变换得到。阴影部分显示了从 $-\alpha_1\alpha_1^*$ 到 $\partial\zeta_2$的贡献。

命题 4.2.1。 在上述选择下，n 标准平凡结 CE（Λ_{cyc}）的循环链环的 *Chekanov–Eliashberg* 微分分次代数的表示，与 *Ginzburg* ˜ ˜代数 $\mathcal{G}$（A_n）的循环定向 A_n-箭图作为微分分次代数相等。

4.2.b $\tilde{A}_n$在 $S^1 \times S^2$中的附着链环

我们已经在图 14 中看到了 Weinstein 手柄的附着链环。其切卡诺夫–埃利亚什贝格代数在 [EL19] 中被证明等价于导出乘法预投射代数（对于任意图上的丛接，这一点都成立），而后者又在 [Kap23]中被证明是形式的，并且与（未变形的）乘法拟射影代数拟同构。然而，这并不包括停止集；其附着球面 Λ_{stop} 在下面的图 30 中以红色标出。

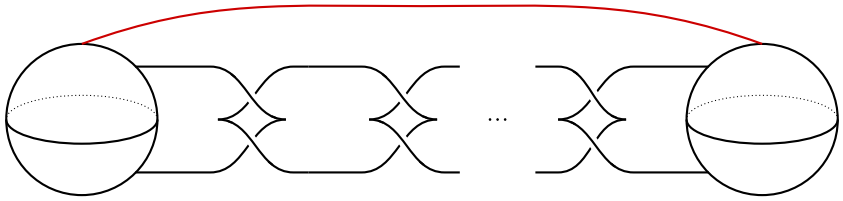


图 30： 图 14 中的附着链环及加入的停止集（红色） d.

由于我们希望将带有附着球面红色分支 Λ_{stop} 的停止集，以及标准 Weinstein 手柄置于其他分支上，因此我们只在该分支上添加生成元 $t_0^{\pm 1}$，用于刻画环空间系数（并使用 e_0 表示相应的幂等元）。

通过对 Ng 分辨进行 Reidemeister III变换，将其变为上面的链环（同样保持面积不变），我们得到如下位于 $S^1 \times S^2$ 中的 Legendrian 链环的拉格朗日投影，并将其称为 $\Lambda_{\text{tot}} = \Lambda_1 \sqcup \ldots \sqcup \Lambda_{n+1} \sqcup \Lambda_{\text{stop}}$。

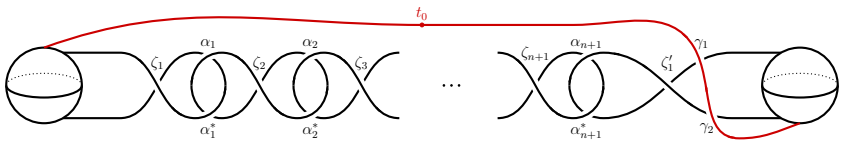


图31： 链环 $\Lambda_{\text{tot}} = \Lambda_1 \sqcup \ldots \sqcup \Lambda_{n+1} \sqcup \Lambda_{\text{stop}}$ 的拉格朗日投影。图中以红色绘制的分支表示停止集，而不是附着球面。

因此，我们得到一个由以下 Reeb 弦生成的微分分次代数：α_1，α_1^*、……、α_n，α_n^*，与之前相同；现在其中一个自交生成元分裂成两个 ζ_1，ζ_1'，ζ_2，……、ζ_n；两个新的生成元 γ_0、γ_1，其中停止集在投影中与 Λ_1 相交；生成元 $t_0^{\pm 1}$，满足关系 $t_0 t_0^{-1} = e_0 = t_0^{-1} t_0$，

对应于停止集上的环空间系数；最后是把手生成元 $c^p_{i\ ,\ j}$，其中 $p \geq 0$ 为整数，若 $p = 0$ 则有 $1 \leq i < j \leq 3$，而当 $p \geq 1$ 时，$1 \leq i,\ j \leq 3$。

在选择定理 28 中所述的马斯洛夫势后，微分分次代数具有如下分次，并且配有 m(停止集/红色分支) $= 0$:

$$
\begin{aligned}
&|\alpha_i| = |\alpha_i^*| = 0, && |\zeta_1| = |\zeta_1'| = |\zeta_i| = 1,\\
&|\gamma_1| = |\gamma_2| = 0, && |t_0^{\pm 1}| = 0,\\
&|c^p_{1,2}| = 2p, && |c^p_{2,1}| = 2p-2,\\
&|c^p_{1,3}| = 2p, && |c^p_{3,1}| = 2p-2,\\
&|c^p_{2,3}| = 2p-1, && |c^p_{3,2}| = 2p-1,\\
&|c^p_{1,1}| = |c^p_{2,2}| = |c^p_{3,3}| = 2p-1.
\end{aligned}
$$

微分可以按照上文所述计算，但此处我们并不需要它，除了把手生成元处的微分。

命题 4.2.2。 在幂等元 $e_1, \ldots, e_{n+1}$ 处对 $CE(\Lambda_{\text{tot}})$ 取 ***Drinfeld*** 商后，其同调是平凡的，其中 e_i 是对应于分支 Λ_i 的幂等元。

证明。 该构造相当于添加次数为 1 的生成元 κ_i，使得 $\partial\kappa_i = e_i$，其中$i = 1,\ldots, n+1$（对应于微分分次代数底层箭图中的环路，即带有$e_i\kappa_i = \kappa_i = \kappa_i e_i$ 和 $e_j\kappa_i = 0 = \kappa_i e_j$，若 $j \neq i$）。接下来需要证明，在这个新的微分分次代数中，e_0（对应于 Λ_{stop} 的幂等元）是一个边界（因为这样一来 $1 = e_0 + e_1 + \cdots + e_{n+1}$ 就是边界）。

我们有

$$\partial c^1_{33} = e_0 - c^0_{13}c^1_{31} + c^0_{23}c^1_{32}.$$

令

$$
\begin{aligned}
a &= c^0_{1,3}\kappa_1 c^1_{3,1} + c^0_{2,3}\kappa_1 c^1_{3,2},\\
b &= c^0_{2,3}\kappa_1 c^0_{1,2}\kappa_1 c^1_{3,1},
\end{aligned}
$$

并注意到

$$
\begin{aligned}
\partial a &= c^0_{2,3}c^0_{1,2}\kappa_1 c^1_{3,1} + c^0_{1,3}c^1_{3,1} - c^0_{2,3}c^1_{3,2} - c^0_{2,3}\kappa_1 c^0_{1,2}c^1_{3,1}\\
\partial b &= -c^0_{2,3}c^0_{1,2}\kappa_1 c^1_{3,1} + c^0_{2,3}\kappa_1 c^0_{1,2}c^1_{3,1}.
\end{aligned}
$$

因此

$$\partial(c^1_{3,3} + a + b) = e_0.$$

□

推论 4.2.3. CE（Λ_{tot}）上的有限生成（右）***dg***-模的完美导出范畴由模 e_iCE（Λ_{tot}）分裂生成，其中 $i = 1, \ldots, n+1$。

证明. 结合命题 4.2.2 与命题 2.1.10 即得。 □

事实上，同样的策略在更一般的情形下也适用:

定理 4.2.4。 设 $\Lambda \subset S^1 \times S^2$ 为一个链环， Λ_{stop} 为图 *32* 所示的一个停止集。那么，由模 $e_i CE(\Lambda \cup \Lambda_{\text{stop}})$、 $i = 1$、……、 m分裂生成由有限生成 $CE(\Lambda \cup \Lambda_{\text{stop}})$-模构成的完美导出范畴，其中 e_i 是对应于 Λ的各连通分支的幂等元。

证明。由命题 2.1.11 可知，在幂等元 $e_1, \ldots, e_m$ 处取商后， $CE(\Lambda \cup \Lambda_{\text{stop}})$ 的 Drinfeld 商与 $B = CE(\Lambda_{\text{stop}})$ 拟同构。此外，利用 $\partial_B c^1_{1,1} = 1$，有 $H_\bullet(B) = 0$。因此，由命题 2.1.10 可得定理。

AI也可以如下利用谱序列直接证明：

设 $\mathcal{A} = CE(\Lambda \cup \Lambda_{\text{stop}})[\kappa_1, \ldots, \kappa_m]$，其中每个 κ_i 都是次数为 1 的生成元，且满足 $\partial \kappa_i = e_i$（若 $j \neq i$，还满足 $e_i \kappa_i = e_i = \kappa_i e_i$ 和 $e_j \kappa_i = 0 = \kappa_i e_j$）；我们要证明 $H_\bullet(\mathcal{A}) = 0$。只需证明由手柄弦和 κ_i生成的子微分分次代数 $\mathcal{B}$ 的同调消失，因为若 1 是 $\mathcal{B}$ 中的边界，它也必定是 $\mathcal{A}$ 中的边界；事实上，只需证明 $H_0(\mathcal{B}) = 0$。

令 $\ell(c_i^p{}_{,\ j}) = p(n+1) + (j - i)$ 和 $\ell(\kappa_i) = 0$，我们将其视为弦的长度。于是， $F^p\mathcal{B} = \langle \alpha \,|\, \ell(\alpha) \leq p \rangle$ 是由长度为 p 或更短的弦生成的 $\mathcal{B}$ 子代数，它定义了 $F^0\mathcal{B} \subset F^1\mathcal{B} \subset \cdots \subset F^p\mathcal{B} \subset \cdots$ 在 $\mathcal{B}$ 上的一个滤过，并满足 $\partial(F^p\mathcal{B}) \subset F^p\mathcal{B}$。

这个滤过定义了一个谱序列，其 $E^0_{d,\ p} = F^p\mathcal{B}^d / \mathcal{F}^{p-1}\mathcal{B}^{d-1}$。接着，对于不是 $n+1$ 的倍数的 p，利用 $\partial \kappa_i = e_i$，令 $E^1_{d,\ p} = 0$，对 $i = 1, \ldots, m$，从左侧或右侧（或两侧）消去圈。对于 $r \geq n+1$，我们有 $E^r_{d,\ p} = 0$，利用

$$\partial c^1_{n+1,n+1} = e_0 + \sum_{l=1}^{n} (-1)^{m(l)+m(n+1)} c^0_{l,n+1} c^1_{n+1,l},$$

因此，谱序列中的诱导微分会消去 e_0。由此，谱序列收敛到 $E^\infty_{d,\ p} = 0$，这意味着 $H_\bullet(\mathcal{B}) = 0$。 □

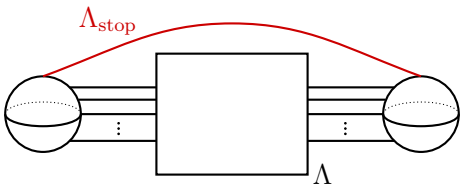


图 32： 勒让德链环 Λ，其中有 n条弦穿过由m 个连通分支组成的柄；在 Legendrian Λ_{stop} 处设置了一个停止集（红色所示），图中展示的是前投影。

4.3 实现 $\tilde{}$化 $\Pi(A_n)$ 为部分包裹福柯范畴

我们结合上一小节的内容和手术公式，论证带有附加停止集的 T^*S^2 循环铅接，以及因此带有被移除的纤维和附加停止集的米尔诺纤维，其部分包裹福柯范畴与类型 A_n 箭图上的预投射代数的有限生成模范畴导出等价。论证如下。

定理 4.3.1. 设 $\Lambda \subset J^1S^1$，并令 Λ_{stop} 如图 *32* 所示，即如定理 *3.3.4* 所示。令 ι：$J^1S^1 \to S^1 \times S^2$ 表示包含映射。则 ι 诱导出一个拟同构 $CE(\Lambda) \xrightarrow{\text{拟同构}} eCE(\iota(\Lambda) \cup \Lambda_{\text{stop}})e$，其中 e 是 $CE(\iota(\Lambda) \cup \Lambda_{\text{stop}})$ 中对应于 $\iota(\Lambda)$的连通分支的幂等元之和。

证明。 由定理 4.1.2、定理 4.1.3 以及定理 4.1.4，我们可推出：

$$CE(\Lambda) \simeq_{\text{q.i.}} CW_{X_\sigma}(C,C) \simeq_{\text{q.i.}} CW_{(X,\sigma_{\Lambda_{\text{stop}}})}(C,C) \simeq_{\text{q.i.}} eCE(\iota(\Lambda) \cup \Lambda_{\text{stop}})e,$$

其中拟同构是作为 A_∞-代数的拟同构。这里， X_σ 表示沿 $\Lambda \subset J^1S^1$ 附加 Weinstein 把手得到的 Weinstein 扇区，而 X 表示沿 $\iota(\Lambda) \subset S^1 \times S^2$附加 Weinstein 把手得到的 Weinstein 流形； C 表示沿 Λ 以及（滥用记号）沿 $\iota(\Lambda)$附加的 Weinstein 把手的余核直和。□

由此可推出：

定理 4.3.2. 在定理 *4.3.1* 的情形下，设 X 为沿 ι（Λ）附加手柄得到的 *Weinstein* 流形。则在 $\sigma = \sigma_{\Lambda_{\text{stop}}}$ 处设停止集的部分包裹福柯范畴由余核分裂生成。因此，

$$D^\pi \mathcal{W}(X,\sigma) \simeq D^\pi(CE(\Lambda)).$$

证明。 这由定理 4.1.5、定理 4.1.3、定理 4.2.4 和定理 4.3.1 得出。 □

完成论证后，在无穷远边界处以第 3.3 节所述的 Legendrian 为停止集的、由 T^*S^2的余切丛作循环拼接 $\#_{\tilde{A}_{n-1}} T^*S^2$所得的部分包裹福柯范畴，或等价地，去掉一个纤维后的（完备化）米尔诺纤维的 $\mathcal{W}(X_{\text{Mil}} \smallsetminus D_m, \sigma)$，根据定理 4.1.5，拟等价于由余核生成的 A_∞-范畴C_1、.....、C_n，它们对应于附着链环的各个连通分支；以及对应于停止集 $\sigma = \sigma_{\Lambda_{\text{stop}}}$的链接圆盘$D_0$。利用定理 4.1.3，这与 $CE(\Lambda_{\text{tot}})$ 上有限生成 dg 模的范畴拟等价。但我们已经看到，该范畴由在 1-喷射空间中计算得到的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数分裂生成，因此：

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\text{Mil}} \smallsetminus D_m, \sigma) \simeq D^\pi(CE(\Lambda_{\text{cyc}})).$$

因此：

定理 4.3.3。 存在一个三角范畴之间的等价

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\text{Mil}} \smallsetminus D_m, \sigma_{\Lambda_{\text{stop}}}) \simeq D^b(\Pi(\tilde{A}_n)).$$

证明。 根据 定理 4.3.2，结合定理 4.2.1 和定理 2.3.2，我们得到

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\text{Mil}} \smallsetminus D_m, \sigma_{\Lambda_{\text{stop}}}) \simeq D^\pi(CE(\Lambda_{\text{cyc}})) \simeq D^\pi(\mathcal{G}(\tilde{A}_n)) \simeq D^\pi(\Pi(\tilde{A}_n)).$$

此外，

$$D^\pi(\Pi(\tilde{A}_n)) \simeq D^b(\Pi(\tilde{A}_n))$$

这是众所周知的，且可由 [BB03，定理 3.1.3] 得出。证毕。 □

还可以证明，停止集是一个迭代锥，由从停止集下方的弦出发并以其为终点的短手柄弦构成。由此可以得出生成，而非分裂生成。

˜4.4 高维空间中 A_n-链环的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数

定义 2.1.7 中所考察的箭图的金茨堡微分分次代数具有一种分次，使其成为 2-卡拉比–丘代数。金兹堡代数还存在其他自然的分次约定，使其成为 m-卡拉比–丘代数，参见 $m \geq 3$ [Kel11, 第 6] 节（此处我们不考虑带势的情形）。这里我们展示如何将这些微分分次代数实现为上述链环的高维版本的 Chekanov–Eliashberg代数，并因此将它们的模范畴实现为包裹 Fukaya 范畴。然而，没有明显对应的同调镜像对称陈述；特别是，三维中 A_n 奇点的保正则解消的相干层有界导出范畴，并非 ˜ 一个 A_n-箭图的预投射代数的导出模范畴。此外，在高维中，很容易将图 D_n 或 E_6、E_7 和 E_8 的预投射代数实现为 Legendrian 链环（请注意，我们不知道任何此类一维 Legendrian 子流形的代表），因为在一维 Legendrian 子流形情形下对微分的高阶项有贡献的圆盘（见 [EL17]）在高维中会变得非刚性。

首先注意，移除正则圆锥曲线后的米尔诺纤维

$$\{x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 + x_{m+2}^{n+1} = 1\} \smallsetminus \{x_{m+2} = 0\} \xrightarrow{x_{m+2}} \mathbb{C}^*$$

可通过手柄附着获得，具体构造如第 3.2 节所述。也就是说，我们先附着一个˜Weinstein 1-柄，然后沿着穿过该手柄的 A_n-链环附着临界手柄。与第 3.3 节一样，我们先附着一个停止集；或者，更确切地说，我们考虑移除沿以附着停止集的各向同性子流形的一个邻域后得到的扇区；然后沿该扇区无穷远边界上的链环附着手柄。

更确切地说，移除正则圆锥曲线后的米尔诺纤维的 Weinstein 结构可通过以下方式构造：从以最后一个坐标为投影的平凡 Lefschetz 纤维化开始

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C},$$

其正则纤维为 $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^{m-1} \cong T^*(S^1 \times \mathbf{R}^{m-1})$。由此，根据 [AEO23，第 2.9], 项构造，我们得到 $M = \partial_\infty(\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^m) = (S^1 \times S^{2m},\ \xi_{\text{std}})$的平凡单值化开书分解。这里的纤维化为 π：$M \smallsetminus B \to S^1$，其中绑定是接触子流形 $B \cong S^1 \times S^{2m-2}$，而页 $\Sigma_\theta = \pi^{-1}(\theta)$（经过光滑化并取完备化后）与 $T^*(S^1 \times \mathbf{R}^{m-1})$辛同胚。

与四维情形类似，即 $m = 1$，我们考虑页 $\pi^{-1}(-1)$ 的各向同性骨架周围的凸超曲面。应该可以推广 $m = 1$情形，并证明移除骨架的一个邻域等价于移除一页，从而将 $(S^1 \times S^{2m}, \xi_{\text{std}})$ 描述为两个 $J^1(S^1 \times \mathbf{R}^{m-1})$ 副本粘合在一起。截断 Reeb 动力学以及全纯曲线有界性的论证也同样适用。

现在我们以略有不同的方式绘制这些平凡结的链接。我们通过提升图33中的前图来构造 $\Lambda \subset J^1(S^1 \times \mathbf{R}^{m-1})$。

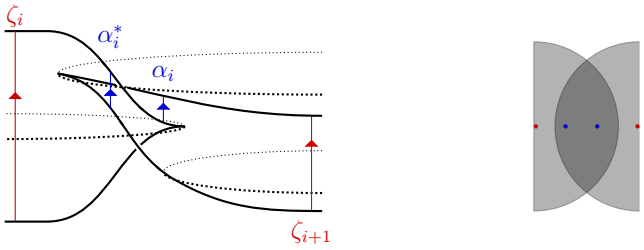


图33： 展示了如何在高维空间的前投影中链接 Legendrian 平凡结。图中 S^1 方向为水平方向，右侧图展示了从上方观察到的链接。

应将该图理解为：各个连通分支围绕 ζ_i Reeb 弦进行 S^{m-2} 对称旋转。

要得到该链环，必须将结的左侧部分与右侧部分粘合，同时不产生新的 Reeb 弦。然后按循环方式重复链接。

分次会发生变化，其计算公式为

$$|c| = m(\text{overstrand of } c) - m(\text{understrand of } c) + \text{index}_p(f_u - f_l) - 1,$$

其中 f_u 是上分支的局部高度函数， f_l 是下股的局部高度函数。在 ζ_i， ζ_{i+1} 处，高度差取最大值，因此指标为 m。在 α_i^* 处，高度差沿 S^1 方向取最小值，但在其他方向取最大值，因此指标为 $m-1$。在 α_i 处，高度差沿 S^1 方向取最大值，但在其他方向取最小值，因此指标为 1。因此分次为：

$$\begin{aligned} |\zeta| &= 1 - 0 + m - 1 = m \\ |\alpha_i| &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ |\alpha_i^*| &= 1 - 0 + (m-1) - 1 = m - 1. \end{aligned}$$

$J^1(S^1 \times \mathbb{R}^{m-1})$ 中的微分通过计数刚性梯度流树得到（参见 [Ekh07]），这些树对应于全纯曲线。结合分次（以及当 m=2 时的作用量），我们看到 α_i 和 $alpha_i^*$ 都是循环元。上图中有两棵刚性梯度流树分别对微分中的 $\partial\zeta_i = \alpha_i^*\alpha_i$ 和 $\partial\zeta_{i+1} = -\alpha\alpha_i^*$ 作出贡献（产生相消幂等元的曲线在此维数下并不刚性，即它们对应于非刚性树，因此不会被微分计数）。

最后，由于在高维情形下（即对于 $m \geq 2$），停止集沿各向同性非勒让德子流形附着，生成与手术（定理 4.1.2 和定理 4.1.5）立即推出，在 $J^1(S^1 \times \mathbb{R}^{m-1})$ 中计算的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数上的模，与沿 Legendrian A_n-链环附着 ˜ 个临界把手后所得 Weinstein 扇区的部分包裹福柯范畴等价（无需额外的生成论证，参见第 4.3 节）。

5 同调镜像对称性结果

在此，我们研究例 2.5.3 和例 2.5.8 中所描述的、作为该A_n-奇点基础的超-K¨ahler 流形的同调镜像对称。我们主要关注图 11 中赤道处 K¨ahler 结构的 S^1-族的同调镜像对称，

也就是当 $u_I = 0$ 时，以及我们现在将注意力限制于的极点 $u_I = 1$ 处的 K¨ahler 流形。前一种结构对应于辛流形为 Weinstein 流形的情形，后一种结构则对应于复流形由该奇点的保正则解消给出的情形。我们将赤道处的结构记为 $u_I = 0$ X_{Mil}，并将极点 (1,0,0) 处的结构记为 X_{res}；相应的除子分别记为 D_m 和 D_r。

我们固定 ζ，首先考虑对数卡拉比–丘超 K¨ahler 族，即例 2.5.8 中的族$X_\zeta \smallsetminus D_u$：从 X_ζ 的紧化中去除包含 D_u 的反典范正规交叉除子 D'_u 而得。我们预期，该族的同调镜像对称可通过超 K¨ahler 旋转得到。我们对 A_n-奇点的解消使用局部化论证，从而推出此˜情形下同调镜像对称的一个方向，将两侧都与 A_n-箭图上的非变形乘法预投射代数联系起来。此外，我们概述另一个方向：将去除一个纤维后的 A_n-米尔诺纤维视为仿射簇，同时将 A_n-奇点消解视为非恰当辛流形。我们将这两种情形都与 A_n-箭图的变形乘法预投射代数˜联系起来。我们发现，这些代数在无穷小变形意义下等价。（见图 34。）

此外，将除子重新加入，无论是在解消上还是在米尔诺纤维上，预计都会得到同调镜像对称的两个新例子：其镜像是附带停止集的对数 Calabi–Yau 镜像（视为 A 侧），或是配备势的对数 Calabi–Yau 镜像（视为 B 侧）。这与加法预投射代数和 A_n-金兹堡代数的变形有关。（见图 35 和图 38。）同样，分别在 A 侧和 B 侧得到的变形预投射代数，在无穷小变形意义下将等价。

这部分证明了例 2.5.8 中提出的同调镜像对称猜想，以及与之相关的、未移除除子的情形下的论述；这些论述类似于第 2.4.a 节中的例子。确切地说，在非恰当情形下，我们的论证假设了关于包裹 Fukaya 范畴的某些基础性结果，而这些结果尚未在文献中得到确立。这些假设类比于正合情形，并用于将所考察的范畴与（变形预投射代数上的）模联系起来。

此外，我们将注意力限制在超 K¨ahler 流形的 K¨ahler 结构族中的极点（解消）和赤道（一个 S^1-族的米尔诺纤维）上（图 11）。然而，这并不是严格的限制：所计算的、涉及变形的范畴（见图 34、图 35 和图 38 中从西北到东南的对角线）可以解释为，对于该族中任意选取的 K¨ahler 结构，也就是在图 11 的 S^2 上半球中任意选取 u，都能为远离极点／赤道处的情形提供答案。重要的是，这里的等价仅在变形意义下得到证明（事实上，也只有在这种意义下才被认为成立）：我们将例外球面的面积在 0 附近作无穷小变化，并将复结构在极点处的结构附近作无穷小变形。也就是说，我们将赤道上的 B-侧解释为由极点处复结构的无穷小变形得到；反过来，极点处的 A-侧则由辛结构的无穷小变形得到。

5.1 对数卡拉比–丘情形下的同调镜像对称

T^*S^2 的丛接的包裹福柯范畴已在 [EL19] 中计算得出。特别是，对于循环拼接，或等价地对于 $X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$，包裹福柯范畴与 $Q_{\tilde{A}_n}$ 的未变形导出乘法预投射˜代数的有限生成模导出等价（ A_n 情形可通过手术和切卡诺夫 – 埃利亚什贝格

代数在 $S^1 \times S^2$ 中对图 14 所示链环的计算轻易得出）。这个微分分次代数是形式的，且与其同调拟同构（集中于 0 次），即非变形乘法预投射代数[KS23]。这个代数上的模也为除去一个除子后的解消上的相干层导出范畴提供了一个模型；我们将在命题 5.1.4 中通过对 A_n-箭图的预投射代数˜进行局部化来证明这一点。

关于反方向，我们给出一个简短的概述。然而，要对例 2.5.8 中出现的非正合空间的包裹 Fukaya 范畴进行严格计算，所需的理论尚不完备。我们猜想，这些范畴与某些变形乘法预投射代数导出等价。

我们首先证明，对于某些参数，˜箭图的变形乘法预投射代数与去掉一个纤维的某个 A_n-米尔诺纤维的相干层导出范畴导出 Morita 等价。

5.1.a A_{n} 型米尔诺纤维与变形乘法预投射代数

作为勒夫谢茨纤维化（即在 A 一侧），米尔诺纤维去掉一个纤维后是唯一的，并且等价于仿射簇

$$\{Z^{n+1} - 1 = XY\} \cap \{Z \neq 0\} \subset \mathbb{C}^3,$$

纤维化由投影到 z 坐标给出。然而，将其视为代数簇时，米尔诺纤维有许多种形式；它们具有 $\{P(Z) = XY\}$ 的形式，其中 $P(Z)$ 是一个没有重根的 $n+1$ 次多项式。在 [Hit79], 中，例 2.5.3 中远离极点处出现的簇上的仿射结构（图 11）是用超 K¨ahler 结构描述的，其根由例外球面的面积计算得出（见注 2.5.10）。另请注意，此处 $D_m = \{Z = 0\}$，而在例 2.5.8 中则是 $D_m = \{Z = -C\}$。这是由于一次简单的坐标变换，注 5.3.7 对此作了解释，并且我们也在该注中将其与加法和乘法预投射代数的参数联系起来（参见第 5.3.a 节）。

由于 $X_{\text{Mil}} \smallsetminus D_m$ 是仿射的，我们有 $D^b(\text{相干层范畴}(X_{\text{Mil}} \smallsetminus D_m)) = D^b(\mathbb{C}[X, Y, Z^{\pm 1}]/(P(Z) - XY))$。下面的命题将这一结果与变形乘法预投射代数联系起来（见例 2.1.5 ）。

˜**命题 5.1.1**。 设 $B = \Lambda^q(A_n)$ 为参数为 $q_1, \ldots, q_{n+1} \in \mathbb{C}^\times$ 的变形乘法预投射代数，且满足 $q_1 \cdots q_{n+1} = 1$。那么

$$A = e_{n+1} B e_{n+1} \cong \mathbb{C}[X, Y, Z^{\pm 1}]/(P(Z) - XY),$$

其中 $P(Z)$ 的次数为 $n+1$。此外， $P(Z)$ 的根为 $Q_i = \prod_{j=1}^{i} q_j$，其中 $i = 1, \ldots, n+1$。

证明。 设 $X = \alpha_n \cdots \alpha_1 \alpha_{n+1}$, $Y = \alpha_{n+1}^* \alpha_1^* \cdots \alpha_n^*$ 和 $Z = z$。首先， X, Y 和 Z 显然生成 A。

接下来我们证明 A 是交换的。首先

$$\begin{aligned}
ZX = z\alpha_n \cdots \alpha_1 \alpha_{n+1} &= (e_{n+1} + \alpha_{n+1}^* \alpha_{n+1}) \alpha_n \cdots \alpha_1 \alpha_{n+1} \\
&= (e_{n+1} + (q_{n+1}^{-1} - e_{n+1} + q_{n+1}^{-1} \alpha_n \alpha_n^*) \alpha_n \ldots \alpha_1 \alpha_{n+1} \\
&= q_{n+1}^{-1} \alpha_n \cdots \alpha_1 \alpha_{n+1} + q_{n+1}^{-1} \alpha_n (q_n^{-1} - e_n + q_n^{-1}) \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_{n+1} \\
&= \cdots = q_{n+1}^{-1} \cdots q_2^{-1} \alpha_n \cdots \alpha_1 \alpha_{n+1} + q_{n+1}^{-1} \cdots q_2^{-1} (q_1^{-1} - e_1 + q_1^{-1} \alpha_{n+1} \alpha_{n+1}^*) \alpha_{n+1} \\
&= X(1 + \alpha_{n+1}^* \alpha_{n+1}) = XZ.
\end{aligned}$$

类似地， $YZ = ZY$。通过反复应用关系 $e_i + \alpha_{i-1}\alpha_{i-1}^* = q_i e_i + q_i \alpha_i^* \alpha_i$ 和 $Z = z = \alpha_{n+1}^* \alpha_{n+1} + e_{n+1}$，

$$XY = P(Z),$$
$$YX = Q(Z)$$

其中 P和 Q 的次数为 $n+1$。由于 X（或 Y）与 Z 交换，因此也与 XY（以及 YX）交换，我们得出

$$X(XY - YX) = XYX - XYX = 0.$$

同理， $Y(XY - YX) = 0$。事实上， $XA(XY - YX) = 0$，因此 $XB(XY - YX) = 0$。利用 B 是素的这一点，即 $rBs = 0$ 意味着 $r = 0$ 或 $s = 0$，参见 KS23，命题 6.11]，我们得出 $XY - YX = 0$。

令 $A_i = \alpha_n \cdots \alpha_i \alpha_i^* \ldots \alpha_n^*$，其中 $i = 1$、.....、 n。于是

$$XY = \alpha_n \cdots \alpha_1 \alpha_{n+1} \alpha_{n+1}^* \alpha_1^* \ldots \alpha_n^* = \alpha_n \cdots \alpha_1 (q_1 - e_1 + q_1 \alpha_1^* \alpha_1) \alpha_1^* \cdots \alpha_n^*$$

$$= (q_1 - 1)A_1 + q_1 \alpha_n \cdots \alpha_1 \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_1^* \cdots \alpha_n^* = (q_1 - 1)A_1 + q_1 \alpha_n \cdots \alpha_2 (q_2 - e_2 + q_2 \alpha_2^* \alpha_2) \alpha_1 \alpha_1^* \cdots \alpha_n^*$$
$$= (q_1 q_2 - 1)A_1 + q_1 q_2 \alpha_n \cdots \alpha_3 (q_3 - e_3 + q_3 \alpha_3^* \alpha_3) \alpha_2 \alpha_1 \alpha_1^* \cdots \alpha_n^*$$
$$= \cdots = (q_1 \cdots q_{n+1} - 1)A_1 + q_1 \cdots q_{n+1} a_{n+1}^* a_{n+1} A_1 = (Z - 1)A_1.$$

同理，

$$A_i = (q_i \cdots q_{n+1} - 1)A_{i+1} + q_i \cdots q_{n+1}(Z - 1)A_{i+1} = ((q_i \cdots q_{n+1})Z - 1)A_{i+1}.$$

我们得出

$$P(Z) = XY = (Q_1^{-1} Z - 1) \cdots (Q_{n+1}^{-1} Z - 1).$$

□

命题 5.1.2。 在上述定理 *5.1.1* 的设定下，若进一步对所有 $1 \le i \le j \le n$，都有 $\prod_{i \le l \le j} q_l \neq 1$，即 $P(Z)$ 的根互不相同，则 $D^b(B\text{-模范畴}) \simeq D^b(A\text{-模范畴})$。

˜证明。我们将 B 替换为拟同构的半自由微分分次代数 $\mathcal{G}_M^q(A_{n+1})$ [KS23，定理 3.7，命题 4.4]。在 e_{n+1} 处取 Drinfeld 商后，由命题 2.1.11 可知其与 $\mathcal{G}_M^{q'}(A_n)$ 拟同构，其中 $q' = (q_1, \ldots..., q_n)$，即 q 中的前 n 个条目。

利用 $H_0\,\mathcal{G}_m^{q'}\,A_n = \Lambda^{q'}\,A_n \neq 0$ $i < j$ $\prod_{i \le l \le j} q_l = 1$ (( )) ( ) 当且 [23, 2 3], 2 1 10 $D^\pi\,A \simeq D^\pi\,B$ 仅当存在满足条件的 使得 KS 示例 ., 我们现在应用命题 . ., 推得 ( ) ( )（因为$\Lambda^{q'}(A_n) = 0$，所以特别地 $1 = 0$ 属于代数 $H_\bullet(\mathcal{G}_M^{q'}(A_n))$ ）。最后， $D^b(A) = D^\pi(A)$，因此 $D^b(A) \simeq D^b(B)$，因为 A 是正则仿射代数 [BB03，定理 3.1.3]。

□

˜5.1.b A_n 型的变形乘法预投射代数与非正合情形

现在我们将考虑一个略有不同的设定，使用一个（对数）诺维科夫参数 s。也就是说，我们考虑系数取自形式洛朗级数域 $k = \mathbb{C}((s))$ 的变形乘法预投射代数（即关于 $s^{\pm 1}$ 的幂级数，且负指数项只有有限多个）。与 X_ζ 相关联的参数为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$，它们与解消的例外除子的辛

面积相关（见例 2.5.8 和注 2.5.10），并满足 $\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}=0$ 和 $\sum_{l=i}^{j}\lambda_l\neq 0$，对所有选择 $1\leq i\leq j\leq n$ 均如此。我们令

$$q_i(s)=e^{s\lambda_i}=\sum_{m\geq 0}\frac{\lambda_i^m}{m!}s^m\in\mathbb{C}((s)),$$

我们将定义在 $\mathbb{C}((s))$ 上、参数为 $q_i(s)$ 的变形乘法预投射代数记为 $\Lambda^{q(s)}(\tilde{A}_n)$。注意，$\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}=0$ 意味着 $q_1(s)\cdots q_{n+1}(s)=1$，而 $\sum_{l=i}^{j}\lambda_l\neq 0$ 意味着 $\prod_{l=i}^{j}q_l(s)\neq 1$。

同样，我们将定义在 $\mathbb{C}((s))$ 上、参数为 $q_i(s)=e^{s\lambda_i}$ 的变形导出乘法拟射影代数记为 $\mathcal{G}_M^{q(s)}(\tilde{A}_n)$。

猜想 5.1.3。完美导出非精确包裹 *Fukaya* 范畴 $D^\pi\mathcal{W}(X_{\mathrm{res}}\smallsetminus D_r)$ 与 $D^b(\Lambda^{q(s)}(\tilde{A}_n))$三角等价，其中 $q_i(s)=e^{s\lambda_i}$。

证明概要。作为辛流形，X_{res}是例 2.5.3 中的 (X_ζ,ω_I)。再去掉 D_r 后，从拓扑上看，它是 T^*S^2 的循环拼接；但相对于 ω_I，(-2)-球面是辛的（见 [Rit10，引理 40]）。假设非精确包裹 Fukaya 范畴满足与定理 4.1.5 和定理 4.1.2 类似的结果（即手术公式以及由余核生成），那么我们可以得出结论：$\mathcal{W}(X_{\mathrm{res}}\smallsetminus D_r)$ 与拉格朗日余核的自同态代数上的模完美导出等价（这些余核在向球面添加面积时仍然存在）；而该自同态代数可由手术公式计算。接下来，这一计算应当表明，$D^\pi\mathcal{W}(X_{\mathrm{res}}\smallsetminus D_r)$ 与变形导出乘法拟射影代数 $\mathcal{G}_M^{q(s)}(\tilde{A}_n)$ 的完美导出范畴等价，这与 [EL19]，类似；或者也可通过图 14 和注 4.1.1 直接计算。更确切地说，这是通过计算带环空间系数的 Chekanov–Eliashberg 代数 $t_i^{\pm 1}$，再将 $t_i\mapsto q_i(s)=e^{s\lambda_i}\in$ 专门化为 $\mathbb{C}((s))$ 来实现的。注意，非正合性迫使我们引入一个（对数）诺维科夫参数 s。

微分分次代数 $\mathcal{G}^{q_{i(s)}\ M}(\tilde{A}_n)$ 是形式的，并且与变形的乘法型预射影代数 $\Lambda^{q_{i(s)}}(\tilde{A}_n)$ [KS23]（或根据注 5.3.5）拟同构，这意味着 $D^\pi(\mathcal{G}_M^{q(s)}(\tilde{A}_n))$ 与 $D^b(\Lambda^{q(s)}(\tilde{A}_n))$ 等价（这里我们还利用了 $D^\pi(\Lambda^{q(s)}(\tilde{A}_n))=D^b(\Lambda^{q(s)}(\tilde{A}_n))$；见命题 5.1.2 的证明）。□

注意，循环拼接包含一个 A_n-丛接，其中球面是例外除子 $E_1,\ldots,E_n$。延拓顶点对应于一个球面，它应与 $-[E_1]-\cdots-[E_n]$ 同调等价，这解释了关系 $\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}=0$。

˜5.1.c 作为 $\Lambda^q(A_n)$ 在 $q=(1,\ldots,1)$附近的无穷小变分的等价

例 2.5.8 描述了如何将 $(X_\zeta\smallsetminus D_u,I_u)$ 表示为仿射簇，其中 $u\in O\smallsetminus\{(1,0,0)\}$，即位于上半球中远离北极的位置

$$\{XY=P(Z)\}\smallsetminus\{Z=-C\},$$

对于 $P(Z)=(Z-\Lambda_1)\cdots(Z-\Lambda_{n+1})$。特别地，这对沿赤道的 $X_\zeta\smallsetminus D_u$ 也成立，此处记作 $X_{\mathrm{Mil}}\smallsetminus D_m$。根由 $\Lambda_i=\lambda_1+\cdots+\lambda_i$ 给出。通过坐标变换$Z\mapsto CZ-C$, $X\mapsto C^{n+1}X$，可将其改写为

$$\{XY=(Z-(C^{-1}\Lambda_1+1))\cdots(Z-(C^{-1}\Lambda_{n+1}+1))\}\smallsetminus\{Z=0\}.$$

因此，根据第5.1.a节，我们得出

$$D^b(\mathrm{Coh}(X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m)) = D^b(\Lambda^q(\tilde{A}_n)),$$

其中参数由下式给出

$$q_i = \frac{1 + C^{-1}\Lambda_i}{1 + C^{-1}\Lambda_{i-1}} = \frac{1 + C^{-1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_i)}{1 + C^{-1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1})},$$

或者等价地，由关系式 $C^{-1}\lambda_i = q_1 \cdots q_{i-1}(q_i - 1)$ 给出。（参见注 5.3.7。）

注意，这意味着我们也可以将 C^{-1} 视为一个使根发生变形的参数。根据例 2.5.8 和注 2.5.10 中的描述， C^{-1} 也可以等价地视为一个参数，用来描述底层超 Kähler 结构中极点附近复结构的变形。

若将 $s = C^{-1}$ 视为一个无穷小变化参数，也就是说，考虑上述定义在环 $\mathbb{C}[[s]]/(s^2)$ 上的变形乘法预投射代数，那么该代数可以与第 5.1.b 节中得到的 $\Lambda^{q(s)}(\tilde{A}_n)$ 认同，前提是该代数也被解释为系数取自 $k = \mathbb{C}[[s]]/(s^2)$。事实上，此时变形参数为

$$q_i(s) = e^{s\lambda_i} = 1 + s\lambda_i,$$

因此

$$q_1(s) \cdots q_{i-1}(s)(q_i(s) - 1) = (1 + s\lambda_1) \cdots (1 + s\lambda_{i-1})(s\lambda_i) = s\lambda_i.$$

换言之，若选择足够大的参数 $C \gg 0$ ，则解消的部分包裹福柯范畴将赤道处的仿射簇族确定为一个极限情形。

5.1.d $X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r$ 上的凝聚层

回顾一下， X_{res} 是从奇异簇 $Z^{n+1} = XY$ 出发，经反复爆破奇点而得到的光滑簇。 X_{res} 上的相干层复形对应于 $\Pi(A_n)$-模的复形 $\tilde{}$（考虑导出范畴后），而结构层的整体截面与该代数的中心元相对应。

我们计算 D^b(相干层范畴($X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r$))。由于我们去掉了一个除子，这意味着该范畴应是 $D^b(\Pi(\tilde{A}_n))$ 的局部化。确实:

命题 5.1.4。 设 $D_r = \{Z + 1 = 0\} \subset X_{\mathrm{res}}$。存在一个等价 D^b(相干层范畴($X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r$)) $= D^b$(相干层范畴(X_{res}))$/\mathcal{M} \cong D^b(\Lambda^1(\tilde{A}_n))$，其中 $\mathcal{M}$ 是由支集位于 D_r 上的凝聚层生成的三角子范畴。该等价可由局部化 $\Pi(\tilde{A}_n) \to \Lambda^1(\tilde{A}_n)$诱导得到；该局部化使 $1 + \sum_i \alpha_i^* \alpha_i$ 可逆。

证明。 移除 D_r 相当于消去所有支集位于 D_r的相干层复形。也就是说， D^b(相干层范畴($X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r$)) $= D^b$(相干层范畴(X_{res}))$/\mathcal{M}$，等价地， $\mathcal{M}$ = 厚子范畴$\langle im(\iota_*)\rangle$，对于$\iota$: $\{Z + 1 = 0\} \hookrightarrow X_{\mathrm{res}}$，即， $\mathcal{M}$ 是由同调被子簇 $Z + 1$所定义的结构层的整体截面湮灭的相干层复形生成的三角子范畴。

设 $S = \mathbb{C}[U, V]^{\mathbb{Z}_{n+1}} = \Gamma(\mathcal{O}(X_{\mathrm{res}}))$ 为 $\mathbb{Z}_{n+1}$-不变多项式环（作用为$\xi \cdot (z_1, z_2) = (\xi z_1, \xi^{-1} z_2)$，其中我们通过 $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n+1}}$ 生成的乘法群作用）。令$M = \mathbb{C}[U, V]$ 为典范 S-模。则 $\Pi(A_n) = \mathbb{C}[U, V] * \mathbb{Z}_{n+1} = \mathrm{End}_S(M)$（其中

中间项是斜对称代数，参见第 2.2.b 节末尾）可视为非交换无亏格分解（例如参见 [˜SV17]），通过全忠实函子

$$D^b(S) \to D^b(\Pi(\tilde{A}_n)),$$
$$N \mapsto N \otimes^{\mathbb{L}}_S M.$$

这里 M 通过求值成为一个 $\mathsf{End}_S(M)$-模，并且与 S-模结构相容；将 $S \subset \mathsf{End}_S(M)$ 视为规范嵌入的中心。

因此，利用 $S \subset \mathsf{End}_S(M)$ 通过层$\mathcal{O}(X_{\mathrm{res}})$ 的正则函数的整体截面进行乘法作用这一事实，$D^b(\mathsf{Coh}(X_{\mathrm{res}}))/\mathcal{M}$ 可以等价地计算为 $D^b(\Pi(\tilde{A}_n))/\mathcal{M}'$，其中 $\mathcal{M}'$ 是由模 N 生成的三角子范畴，这些模被$UV+1$湮灭，而$UV+1$是在同构 $\mathsf{C}[U,V]^{\mathbb{Z}_{n+1}} \cong \mathsf{C}[X,Y,Z]/(XY-Z^{n+1})$ 下对应于 $Z+1$ 的元素。再次等价地，$\mathsf{C}[X,Y,Z]/(XY-Z^{n+1}) \cong S \hookrightarrow \Pi(\tilde{A}_n)$，其中 $S = Z(\Pi(A_n))$，通过以下方式与中心相对应：

$$X = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i-1}\cdots\alpha_{i+1}\alpha_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^*\cdots\alpha_{i-2}^*\alpha_{i-1}^*, \quad Z = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^*\alpha_i.$$

˜因此，作为 $\Pi(A_n)$ 中的一个元素，

$$p = Z+1 = \sum_{i=1}^{n+1}(\alpha_i^*\alpha_i + e_i).$$

根据 [KS23]，中采用的约定，在这个中心元处局部化得到的代数 $\Pi(\tilde{A}_n)[p^{-1}]$，按定义为 $\Lambda^1(\tilde{A}_n)$；该约定等价于 [KS23，注 4.7] 中的定义 2.1.4。令 $i\colon \Pi(\tilde{A}_n) \to \Lambda^1(\tilde{A}_n)$ 表示局部化映射。根据局部化的定义，由于 p 不是零因子，对于一个 $\Pi(A_n)$-模范畴 M，其推前满足 $i_*M = 0$ 当且仅当 $M \cdot p = 0$。此外，这个推前是正合的。因此，诱导的商空间 $D^b(\Pi(\tilde{A}_n)) \to D^b(\Lambda^1(\tilde{A}_n))$ 与商空间 $D^b(\Pi(\tilde{A}_n)) \to D^b(\Pi(\tilde{A}_n))/\mathcal{M}'$ 具有相同的核。因此，根据 Verdier局部化的泛性质，三角范畴 $D^b(\Lambda^1(\tilde{A}_n))$ 和 $D^b(\Pi(\tilde{A}_n))/\mathcal{M}'$ 等价。

□

注 5.1.5。注意，对于 $C \neq 0$，移除形如 $D_r = \{Z + C = 0\}$ 的除子的不同选择定义出同构簇。通过例如将所有箭 α_i, $i = 1, \ldots, n+1$ 乘以因子 C，可以实现预投射代数 ˜ $\Pi(A_n)$ 的不同局部化之间的同构。参见例 2.5.8。

	$X_{\mathrm{res}} \setminus D_r$	$X_{\mathrm{Mil}} \setminus D_m$
A侧	$D^b(\Lambda^{q(s)}(\tilde{A}_n))$? 猜想 5.1.3	$D^b(\Lambda^1(\tilde{A}_n))$ [EL19], [KS23]
B侧	$D^b(\Lambda^1(\tilde{A}_n))$ 命题 5.1.4	$D^b(\Lambda^q(\tilde{A}_n))$ 命题 5.1.2

图 34： 第 5.1 节结果总结。在相同的底层超 K¨ahler 流形 X_ζ 中考察时，主对角线上的参数作为 $\Lambda^1(\tilde{A}_n)$ 的无穷小变分时，定义了相同的代数（见第 5.1.c 节）。

5.2 奇点解消的同调镜像对称

受对未移除除子的奇点解消上的相干层导出范畴的计算（定理 2.2.1）启发，我们将有限生成的 $\Pi(\tilde{A}_n)$- 模范畴实现为 T^*S^2 的循环拼接的包裹福柯范畴，或者等价地，实现为移除了一个纤维并附加了一个停止集的 A_n-米尔诺纤维（定理 4.3.3）。通过这种方式，我们将第 5.1 节中导出等价的一个方向扩展为：奇点 A_n 的解消上的相干层复形，与移除了一个除子并附加了一个停止集的 A_n-米尔诺纤维的包裹福柯范畴之间的导出等价。为了得到奇点 A_n 的解消上同调镜像对称的完整表述，我们还需要将其视为一个 A-侧。于是，我们不应向其附加一个停止集，而应为循环拼接（即移除了一个纤维的米尔诺纤维）赋予一个势。

5.2.a The 米尔诺纤维 $X_{\text{Mil}} \setminus D_m$ 通过朗道–金兹堡模型作为 B 侧

势是一个全纯函数 $w_m\colon\ X_{\text{Mil}} \setminus D_m \to \mathbb{C}$。镜像范畴称为朗道–金兹堡模型，应由奇点范畴的乘积给出

$$DB(w_m) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sg}(w_m)} D_{\mathrm{sg}}(w_m^{-1}(\lambda))$$

（例如参见 [Orl04]）。势是在 A 侧计算的，即在 $X_{\text{res}} \setminus D_r$中计算。在紧福柯范畴中，它通过计数边界位于 $X_{\text{res}} \setminus D_r$的拉格朗日骨架上的 Maslov 指数为 2 的全纯圆盘来定义。在包裹福柯范畴中，相同的圆盘计数会产生 Borman–Sheridan 类（参见 [BSV22，第 1.6.4] 节），进而产生一个循环词 $w_m \in CE(\Lambda)$（更准确地说，是 $HH_0(CE(\Lambda))$ 中的一个元素，即零次霍赫希尔德同调），它可以通过计数边界位于勒让德附着链环 Λ上且 punctures 收敛到 Reeb 弦的 Maslov 指数为 2 的圆盘得到（精确定义见 [RET22] ）。

我们首先考虑 $X_{\text{res}} \setminus D_r = \tilde{X}_{\text{Mil}} \setminus D_m = \{XY = Z - 1\} \subset \mathbb{C}^3 \setminus \{Z = 0\}$，势在 [RET22，第 5 节] 中计算为 $\tilde{w}_0 = X + Y^2 Z^{-1}$。然而，这一计算是在紧化中进行的（未去掉 $\mathbb{C}P^1_\infty$ ），而在此处考虑的开情形中，对 Y^2Z^{-1} 有贡献的圆盘不再存在。因此

$$w_0 = X,$$

其中 X 与 Reeb 弦 α 相对应（参见命题 5.1.1 的证明 ）.

一般而言，去掉一个纤维后的 A_n-Milnor 米尔诺纤维是 A_0情形的 $(n+1)$ 重覆盖空间，因此势由 $\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha_{n+1} \in CE(\Lambda)$ 给出（更准确地说，是 $HH_0(CE(\Lambda))$ 中对应的循环词），我们将其与正则函数w_m：$X_{\text{Mil}} \setminus D_m \to \mathbb{C}$ 联系起来，该函数由 $w(X,\ Y,\ Z) = X$ 给出。

这个正则函数是光滑的，这意味着 $DB(w_m) = 0$。

5.2.b 将 A_n-奇点 X_{res} 作为 A-侧，通过非精确缠绕 Fukaya 范畴

注 5.2.1。 在关于 X_{res} 的非精确 Fukaya 范畴中的生成元和态射的假设与猜想 5.1.3 类似的情况下，也就是说， X_{res} 的非精确 Fukaya 范畴是 $\Lambda^{q(s)}(A_n)$，且满足 $q_1(s) \dots, q_n(s)$，以及 $\prod_{l=i}^{j} q_l(s) \neq 1$，对所有选择 $1 \le i \le j \le n$ 均成立。和命题 5.1.2 的证明一样，我们得到该范畴为零。

这也应当是 [Rit10], 的主要结果的推论，即 $SH^\bullet(X_{\mathrm{res}}) = 0$。这一结果（以及猜想 5.1.3）的一个保留之处在于，据作者所知，非精确范畴的理论基础（例如生成和手术公式）尚未建立。

	X_{res}	$X_{\mathrm{Mil}} \smallsetminus D_m$ +停止/势
A侧	0 [Rit10](注 5.2.1)	$D^b(\Pi(\tilde{A}_n))$ 定理 4.3.3
B侧	$D^b(\Pi(\tilde{A}_n))$ [KV00](定理 2.2.1)	0 第 5.2.a 节

图 35: 第 5.2 节结果概述。

5.3 米尔诺纤维的同调镜像对称：变形

最后，我们考虑将除子放回米尔诺纤维上的情形，以及在奇点消解上改为设置停止集或势的情形；我们将这一情形分为两节讨论。米尔诺纤维是一个线性管道，即按照 A_n-交换图进行丛接的管道（见图 17）。其包裹福柯范畴已在 [EL17], 中计算，并等价于 $D^\pi(\mathcal{G}(A_n))$（利用生成性结果和手术公式，从图 17 可立即看出这一点）。我们将其与通过移除除子后的奇点消解上的势所计算出的一个范畴联系起来。

在此之前，类似于精确情形，我们猜想，去掉除子并附加停止集后的解消的包裹福柯范畴可以由 J^1S^1 中的 Chekanov–Eliashberg 代数计算，并且等价于 ˜ 上的 A_n 型预投射代数变形的模范畴（引入于 [CH98]）。这类预投射代数的变形还刻画了 A_n-米尔诺纤维上的凝聚层。

5.3.a 在 $X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r$ 上附加停止集的示意图

现在我们希望在 J^1S^1 中计算 $CE(\Lambda)$，但要加入源自辛流形非精确性的某些面积参数。由此可猜想:

猜想 5.3.1。 $X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r$ 上带有停止集 σ 的非精确部分包裹福柯范畴满足

$$D^\pi \mathcal{W}(X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r, \sigma) \cong D^b(\Pi^{\lambda(s)}(\tilde{A}_n)),$$

也就是说，它等价于变形预投射代数上的有限生成模的有界导出范畴，其中参数属于 *Laurent* 级数域 $\mathbb{C}((s))$，并且由下式给出

$$\lambda_i(s) = q_1(s) \cdots q_{i-1}(s)(q_i(s) - 1),$$

其中 $q_i(s) = e^{s\lambda_i} \in \mathbb{C}((s))$，而 $\lambda_i \neq 0$ 由非正合拉格朗日球面的辛面积决定。

下面我们概述一个证明。另请参阅猜想 5.1.1。

令 $CE^{q(s)}(\Lambda)$表示如下得到的微分分次代数：计算带有环空间系数 $t_i^{\pm 1}$ 的 $\tilde{A}_n$链环的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数（图 29；参见注 4.1.1），然后特化$t_i \mapsto q_i(s) \in \mathbb{C}((s))$（并将该代数视为定义在此域上）。

我们还作如下辅助定义：对于 $q = (q_1, \ldots\ldots, q_{n+1})$， $q_i \in k^\times$，令$\mathcal{G}^q_{M,\ \text{非局部化}}(A_n)$表示一个微分分次代数，其定义方式与变形导出乘法拟射影代数几乎相同，唯一的区别是这里没有生成元 $z^{\pm 1}, \tau$（参见定义 2.1.9 和例 2.1.5）。根据生成元消去，这个代数在拟同构意义下，正是从 $\mathcal{G}^q_M(A_n)$得到的、带有一个未局部化变量 z的微分分次代数。（下文中我们主要关注 $k = \mathbb{C}$ 和 $k = \mathbb{C}((s))$这两种情况。）

引理 5.3.2. 通过恰当地选择定向和基点的位置，我们可以精确地得到 $CE^{q(s)}(\Lambda) = \mathcal{G}_M^{q(s)}{}_{,\text{non-loc}}(\tilde{A}_n)$。

证明。 选择定向，使前投影中的平凡结（例如见图 28）均沿顺时针方向定向（即，具有较大 z 坐标的弦从左向右定向）。我们调整图 29 中拉格朗日投影的基点位置，使得在每个分支 Λ_i 上，沿该分支的定向，基点 $*_i$ 位于对应于 ζ_i 的交叉之后，且位于对应于 α_i^* 的交叉之前。

□

令 $\Lambda^q{}_{\text{non-loc}}(A_n) = H_0(\mathcal{G}^q_{M,\text{non-loc}}(A_n))$，也就是说，与 $\Lambda^q(A_n)$ 的唯一区别是我们没有逆 z^{-1}。

引理 5.3.3. 微分分次代数 $\mathcal{G}^q_{M,\text{non-loc}}(A_n)$，取参数 $q_i \in k^\times$ 使得 $q_1 \cdots q_{n+1} = 1$，则它与变形金兹堡代数 $\mathcal{G}^\lambda(\tilde{A}_n)$ 同构，后者的参数为 $\lambda_i = q_1 \cdots q_{i-1}(q_i - 1)$，满足 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 0$。此外，取相同参数时，代数 $\Lambda^q{}_{\text{non-loc}}(A_n))$与变形乘法预投射代数 $\Lambda^q(A_n)$ 同构。

证明. 作代换 $\alpha_i \leftrightarrow q_1 \cdots q_i \alpha_i$，同时令 $\lambda_i = q_1 \cdots q_{i-1}(q_i - 1)$，即可得到这两个同构。

□

命题 5.3.4.（循环定向） $\tilde{A}_n$-箭图的变形金兹堡代数 $\mathcal{G}^\lambda(\tilde{A}_n)$ 是形式的，并且与变形预投射代数 $\Pi^\lambda(\tilde{A}_n)$ 拟同构。

证明。 这包含于 [KY18，引理 9.1] 中。由定理 2.3.2，并结合对分别与 $G(\tilde{A}_n)$ 和 $G^\lambda(\tilde{A}_n)$ 相关的谱序列进行比较可得结论，比较表明它们的前两页相同。

□

注 5.3.5。 由引理 5.3.4 和引理 5.3.3， $\mathcal{G}^q_{M,\ \text{non-loc}}(A_n)$ 是形式的，并且拟同构于 $\Lambda^q{}_{\text{non-loc}}(A_n)$，当 $q_1 \cdots q_{n+1} = 1$ 时。可以证明，由 $e_i + \alpha_i^* \alpha_i$、 $i = 1 \ldots, n+1$ 生成的乘法集 $S \subset \Lambda^q(A_n)$ 是右 Ore 集（这由定义 2.1.4、例 2.1.5 中的定义关系$e_i + \alpha_{i-1}\alpha_{i-1}^* = q_i e_i + q_i \alpha_i^* \alpha_i$推出）。根据 [KS23，注 4.7]，，对 S 进行局部化为（变形的）导出乘法预投射代数提供了另一种模型。因此，根据 [18, 5 14] $G^q_M\ A_n$ 0 BCL 命题 . , ( ) 是形式的，并且拟同构于其次数同调 $\Lambda^q(A_n)$。这为 $q_1 \cdots q_{n+1} = 1$ 情形下的这种形式性提供了另一种证明，而该情形正是第 5.1 节中所使用的情形。

猜想 *5.3.1* 的证明概要。 这与猜想 5.1.3 类似。通过手术公式计算，预期的范畴为 $D^\pi(CE^{q(s)}(\Lambda))$。参数 $q_i = e^{s\lambda_i} \in \mathbb{C}((s)) \setminus \{0\}$ 使用（对数）诺维科夫参数 s 定义。面积参数 λ_i 满足 $\sum_{l=i}^{j} \lambda_l \neq 0$，对于

所有选择 $1 \le i \le j \le n$ 和 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 0$，这意味着 $\prod_{i\le l\le j} q_l(s) \neq 1$ 且 $q_1(s)\cdots q_{n+1}(s) = 1$。

根据引理 5.3.2、引理 5.3.3 和命题 5.3.4，我们有 $D^\pi(CE_{q(s)}^{q(s)}(\Lambda)) = D^\pi(\Pi^{\lambda(s)}(\tilde{A_n}))$. 应用 [CH98 定理 1.5]，用 D^π 替换 D^b，即可得出结论。 □

5.3.b 变形预投射代数与米尔诺纤维

另一方面，我们考虑 A_n-米尔诺纤维 $X_{\mathrm{Mil}} = \{XY = P(Z)\}$，其中 $P(Z)$ 是一个次数为 $n+1$ 且没有重根的多项式。于是 $D^b(\text{相干层范畴}(X_{\mathrm{Mil}})) = D^b(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(XY - P(Z)))$，我们将这种情形与变形预投射代数联系起来，具体如下。

命题 5.3.6. 对于所有满足 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 0$ 的 $\lambda_i \in \mathbb{C}$，我们有

$$e_{n+1}\Pi^\lambda(\tilde{A}_n)e_{n+1} \cong \mathbb{C}[X,Y,Z]/(XY - P(X)),$$

这里 $P(X)$ 是一个次数为 $n+1$ 的多项式，其根为 $\Lambda_i = \sum_{j=1}^{i}\lambda_j$，其中 $i = 1, \ldots, n+1$。如果 λ_i 满足对所有 $l < k$ 都有 $\sum_{l\le i\le k}\lambda_i \neq 0$，即根互不相同，那么也有

$$D^b(\Pi^\lambda(\tilde{A}_n)) \cong D^b(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(XY - P(Z))).$$

证明。证明方法与命题 5.1.1 和命题 5.1.2 相同（另见注 5.3.7），其中令 $X = \alpha_n\cdots\alpha_1\alpha_{n+1}$、$Y = \alpha_{n+1}^*\alpha_1^*\cdots\alpha_n^*$ 和 $Z = \alpha_{n+1}^*\alpha_{n+1}$。条件 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 0$ 确保变量 X、Y 和 Z 的交换性。所得多项式为

$$P(Z) = (Z - \Lambda_1)\cdots(Z - \Lambda_{n+1}).$$

对于第二部分，注意到 $\Pi^\lambda(A_n) \neq 0$ 当且仅当存在 $l < k$ 使得 $\sum_{l\le i\le k}\lambda_l = 0$（另见 [KS23，例 2.3]）。 □

注 5.3.7. 关于引理 5.3.3 证明中参数 λ_i 和 q_i 之间的关系，注意，对所有 $l < k$ 都有条件 $\prod_{l\le i\le k} q_i \neq 1$ 等价于对所有 $l < k$ 都有 $\sum_{l\le i\le k}\lambda_i \neq 0$，而条件 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 0$ 等价于 $\prod_{i=1}^{n+1} q_i = 1$。

此外，对比命题 5.3.6 与命题 5.1.1，可知根之间满足关系 $\Lambda_i = \sum_{j=1}^{i}\lambda_j = \prod_{j=1}^{i} q_j - 1 = Q_i - 1$。命题 5.1.1 中的方程 $XY - P(Z) = 0$，是将命题 5.3.6 中的同一方程作代换 $X \leftrightarrow Q_1\cdots Q_{n+1}X$ 和 $Z \leftrightarrow Z+1$ 得到的，这与引理 5.3.6 证明中的代换一致。这些坐标变换对应于米尔诺纤维上的坐标变换，它使除子 D_m 位于 0 的原像处，而非 -1 处，如例 2.5.8 所示。因此，在命题 5.1.1 中，我们局部化变量 Z，而非 $Z+1$。

5.3.c E作为 $\Pi^\lambda(\tilde{A}_n)$ 在 $\lambda = (0,\ldots,0)$ 附近的无穷小变分的等价

本节紧接第 5.1.c 节展开。沿着赤道 $u_I = 0$，例 2.5.8 描述了如何将 (X_ζ, I_u)（此处记作 X_{Mil}）表示为仿射簇

$$\{XY = (Z - \Lambda_1)\cdots(Z - \Lambda_{n+1})\},$$

其中，等式右侧多项式的根记为 $P(Z)$，分别为 $\Lambda_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$。

变形复结构（参见注 2.5.10）对应于添加一个变形参数 s，使根发生变形，即

$$\{XY = (Z - s\Lambda_1)\cdots(Z - s\Lambda_{n+1})\}.$$

注意到（与第 5.1.c 节的情形不同），这些仿射簇彼此都同构。使用 $\lambda_i = \Lambda_i - \Lambda_{i-1}$，对于 $i = 1$、……、$n+1$（其中有 $\Lambda_0 = \Lambda_{n+1} = 0$），这等价于对参数 λ_i进行变形。因此，根据第 5.3.b 节，我们得出

$$D^b(\mathrm{Coh}(X_{\mathrm{Mil}})) = D^b(\Pi^{s\lambda}(\tilde{A}_n)).$$

如果我们将 s 视为无穷小变化参数，也就是说，考虑环 $k = \mathbf{C}[[s]]/(s^2)$ 上的上述变形前投射代数，那么，只要也将该代数解释为系数取自 $k = \mathbf{C}[[s]]/(s^2)$，它就可以与第 5.3.a 节中得到的$\Pi^{\lambda(s)}(\tilde{A}_n)$等同。事实上，此时变形参数为

$$\lambda_i(s) = q_1(s)\cdots q_{i-1}(s)(q_i(s) - 1) = (1 + s\lambda_1)\cdots(1 + s\lambda_{i-1})(s\lambda_i) = s\lambda_i.$$

5.4 米尔诺纤维的同调镜像对称：LG 势

我们得到一个势 w_r，并计算奇点处的奇点三角范畴（见第 2.1.c 节）。与上文（第 5.2.a 节）类似，该势计算边界位于除子上的马斯洛夫指标为 2 的圆盘，并可将奇点消解˜视为自丛接的覆盖空间（ A_0情形），利用 [RET22，第 5.3] 节得到。该势由复合 w_r 给出：$X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r \to \{XY = Z^{n+1}\} \smallsetminus \{Z = -1\} \xrightarrow{\pi_X} \mathbf{C}$，其中 π_X 表示投影到 X 坐标。对于这一势，我们证明如下结果。

正则函数 w_r 有一个等于 0 的孤立奇异值。因此，$DB(w_r) = D_{\mathrm{sg}}(w_r^{-1}(0))$。从几何上看，$w_r^{-1}(0)$ 是由例外除子（一个由 $\mathbf{C}P^1$ 的副本构成的 A_n构型，其自交数为 -2）以及平面 $\{X = 0\} \subset \{XY = Z^{n+1}\}$组成的非仿射簇。然而，作为簇的结构也由 w的消失阶决定：在复射影直线上依次为 $n+1$，n，…，2，而在 $\{X = 0\}$上为 1。

定理 5.4.1。对于势 w_r：$X_{\mathrm{res}} \smallsetminus D_r \to \mathbb{C}$，它由投影到 X 坐标的映射复合而成，我们有一个等价 $D_{\mathrm{sg}}(w_r^{-1}(0)) \simeq D^\pi(\mathcal{G}(A_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T^{\pm 1}])$，其中 $|T| = -2$。

注 5.4.2. 这里存在一种不对称：这个 B侧模型，也就是奇点范畴，采用 $\mathbf{C}[T^{\pm}]$系数，其中有 $|T| = 2$。作者认为，这是因为我们考察的并非彼此独立的线性管道和循环拼接，而是将由 $n+1$ 个 T^*S^2 副本构成的循环拼接，以非精确嵌入的方式嵌入由 n 个 T^*S^2副本构成的线性管道中；此外，这种嵌入与复行列式丛的平凡化不相容（这意味着整数分次也不相容）。一般而言，这类非精确嵌入需要使用某种诺维科夫系数。借此，我们可以在 A侧得到相同的范畴。这里，在线性管道上，通过令 $T = 1$，将该参数特化；这通常未必能使 A侧的理论收敛，同时也会破坏分次。

定理 *5.4.1* 的证明。首先，我们可以将 w 视为定义在整个 X_{res} 上的函数，并忽略对 D_r 的移除，因为它是一个与奇异轨迹不相交的闭集。注意，此时 π_X 是

由 X^{n+1} 给出的不变环 $\mathbb{C}[X,Y]^{\mathbb{Z}_{n+1}} \to \mathbb{C}$ 上的函数所确定的。根据 [Qui09，第 8.6] 定理，我们可以考虑由 G-等变模在 $\mathbb{C}[X,Y]/(X^{n+1})$ 上给出的非交换模型，即

$$D_{\mathrm{sg}}(w_r^{-1}(0)) \cong D_{\mathrm{sg}}^G(\pi_X^{-1}(0)) = D_{\mathrm{sg}}(A),$$

其中 $A = (\mathbb{C}[X,Y]/(X^{n+1})) * \mathbb{Z}_{n+1}$（斜对称代数，斜对称积的定义见第 2.2.b 节）。此外，该代数同构于原始 A_n 箭所对应的预投射˜代数模去所有完整转向路径所得的代数：

$$A = \Pi(\tilde{A}_n)/(\alpha_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_{n+1}\alpha_1\cdots\alpha_{i-1} \mid i = 1,\ldots,n+1).$$

因此，我们要证明 $D_{\mathrm{sg}}(A) \simeq D^\pi(\mathcal{G}(A_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T^{\pm 1}])$。

这由下文的引理 5.4.3 和定理 5.4.5 得出，同时也用到了作者在 [Ryd25] 中对穿过 1-手柄的平行线股的极小模型所作的计算。 □

引理 5.4.3。 *沿着穿过 Weinstein 1-手柄的平行 Legendrian 线股附加 $n+1$ Weinstein 2-手柄，所得的 Weinstein 流形等价于 n 个 T^*S^2 的线性管道。换言之，图 36 所示不同 Legendrian 链环的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数的完美导出范畴之间存在等价。*

证明。 图36中的第一步是通过连续滑动其他所有2-把手，使其越过顶部的2-把手并穿过1-手柄，然后将1-手柄与顶部的2-把手抵消而得到的（例如参见 [Acu+21，图 9]）。第二步通过一系列重复的2-把手滑动和Reidemeister 变换得到，具体如下：首先，将顶部的分支滑过下一个分支。然后，可以将这个分支从右侧拉出。接着重复这一操作，将从顶部数第二个平凡结（也就是现在位于顶部的那个）滑过下一个平凡结。然后，可以利用Reidemeister 变换将这个平凡结拉出。继续这一过程，最终便得到右侧的勒让德链环（之后还要利用Reidemeister 变换进行一些额外修改）。

□

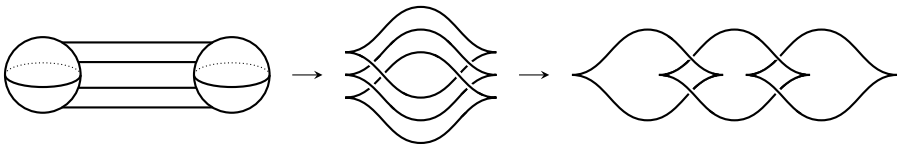


图36： 左侧是 $S^1 \times S^2$ 由 $n+1$ 条平行弦组成的勒让德链环。它等价于 $\mathbb{R}^3$ 中的勒让德链环，该链环定义了 n 份 T^*S^2 的线性管道，见右侧。这里展示的是前投影，适用于 $n = 3$。

因此，正如定理 5.4.1 的证明中所指出的，通过 [Ryd25], $D^\pi(\mathcal{G}(A_n))$ 与 $D^\pi(B)$ 拟等价，其中 B 是如下的 A_∞-代数。（不过请注意，其分次与 [Ryd25], 不同，这是由 Maslov 类的选择所致。通过改变该选择，或调整引理 5.4.6 中生成元的次数，可以使两者的分次一致。）

定义 5.4.4. 令 $Q_B = (Q_0, Q_1)$ 为具有 $n+1$ 个顶点和两条箭 a_i, b_i 的循环箭图：$i \to i-1$（指标按 $n+1$ 取模）。我们通过令 $|a_i| = 0$ 和 $|b_i| = -1$（其中 $i = 1, \ldots, n$），以及 $|a_{n+1}| = 2$ 和 $|b_{n+1}| = 1$，为此箭图赋予分次。令 $B = \mathbb{C}Q/I$，其中 I 是由关系 $b_{i-1}b_i = 0$ （除了 $n = 1$，此时 $b_{i-1}b_i = \mu_2(b_{i-1}, b_i) = e_i$）和 $a_{i-1}b_i = b_{i-1}a_i$（模 $n+1$）生成的理想。我们通过赋予它高阶乘积 $\mu_{n+1}(a^{m_{n+1}}b_{i_{m+1}}, \ldots, a^{m_1}b_{i_1}) = a^{m_1+\cdots+m_{n+1}}$，将 B 变为一个 A_∞-代数。该记号应读作

如下：左边是 $a^{m_i}b_j = a_{i+m_i}\cdots a_{i+1}b_j$，且当且仅当各项在 $\mathsf{C}Q$ 中可复合时，μ_{n+1} 才非零；在这种情况下，右边等于 $a^{m_1+\cdots+m_{n+1}} = a_{i_1+m_1+\cdots+m_{n+1}-1}\cdots a_{i_1}$。

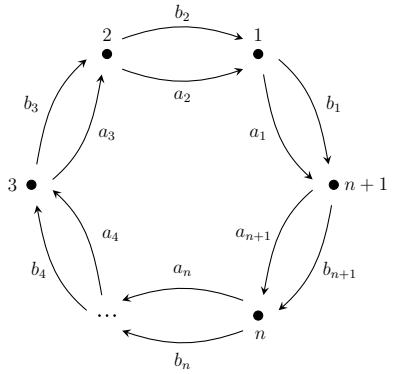


图37： 箭图 Q_B。关系可概括为 $b^2 = 0$ 和 $ba = ab$；高阶运算可概括为 $\mu_{n+1}(a^{n_1}b, \ldots\ldots, a^{n_{n+1}}b) = \pm a^{n_1+\cdots+n_{n+1}}$，其余情况均为 0。

从现在起，我们将使用记号 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1}$（因此 $\alpha^m = \sum_i \alpha_{i-1}\alpha_{i-1}\cdots\alpha_{i-m}$，$\tilde{}$ $\tilde{}$，其中指标按模 $n+1$ 读取）。特别地，$(e_i\Pi(A_n))/(\alpha^m) = (e_i\Pi(A_n))/(e_i\alpha^m)$，并且我们$\tilde{}$有由左乘给出的态射 $\alpha^m : e_i\Pi(A_n) \to e_{i+m}\Pi(A_n)$（同理，将$\Pi(A_n)$替换为 A）。

定理 5.4.5。 奇点范畴 $D_{\mathrm{sg}}(A) = D_{\mathrm{sg}}(\Pi(\tilde{A}_n)/(\alpha^{n+1}))$ 等价于三角范畴 $D^\pi(B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T^{\pm 1}])$，其中 $|T| = -2$，并将 A_∞-结构扩展为关于 $T^{\pm 1}$ 线性。

我们将该定理分为四个引理。

引理 5.4.6。 A-模范畴 $D^b(A)$ 的导出范畴由模 $C_i = e_i(A/(\alpha))$ 分裂生成，其中 $i = 1, \ldots\ldots, n+1$。因此，奇点范畴 $D_{\mathrm{sg}}(A)$ 也由模 C_i、$i = 1$、……、$n+1$分裂生成。

证明。设 $M_\bullet \in \mathsf{Ch}(A)$ 是一个下有界且具有有界同调的链复形，它在 $D^b(A)$ 中定义了一个任意对象。不妨通过平移 $M_\bullet$，假设 $M_i = 0$，其中 $i < 0$。该对象有一个由投射模组成的复形作为代表元，即一个复形 $Q'_\bullet$，使得每个 Q'_i 都是投射模，并带有一个拟同构 $Q'_\bullet \to M_\bullet$（注意，$Q'_\bullet$ 可以是不下有界的，但对于 $i < 0$，$Q'_i = 0$）。

令 N 为满足对所有 $i \geq N$ 都有 $H_i(M_\bullet) = 0$ 的最小整数。将 $K = \ker(M_N \to M_{N-1})$ 视为一个 $\Pi(A_n)$-模。作为这样的模，它有一个射影分解

$$\tilde{Q}_2 \xrightarrow{\tilde{f}_2} \tilde{Q}_1 \xrightarrow{\tilde{f}_1} \tilde{Q}_0 \simeq_{\mathrm{q.i.}} K,$$

$\tilde{}$利用 $\Pi(A_n)$ 的全局维数为 2 [KV00，例 3.4] 这一事实。我们定义一个新的 $Q_\bullet$投射 A-模复形，它通过有限次取锥、直和与直和项由 C_i 构造而成，并且与 $M_\bullet$ 拟同构。它由有限投射部分和其后的无限交替部分组成；这两部分都可以通过有限次操作由 C_i 构造而成。

我们分两步进行，具体如下：首先，对 $i \leq N-1$，令 $Q''_\bullet$ 由 $Q''_i = Q'_i$ 定义为 $Q''_{N+i} = \tilde{Q}_i \otimes_{\Pi(\tilde{A}_n)} A = \tilde{Q}_i/(\alpha^{n+1})$；对 $i = 0, 1, 2$，则定义为 $Q''_i = 0$；其他情况下则定义为 $Q''_i = 0$。这里，$\tilde{Q}_i$ 是 $\Pi(A_n)$-模的不可分解投射模的直和，即形如 $e_j\Pi(A_n)$ 的模；而 $Q''_i = \tilde{Q}_i/(\alpha^{n+1})$ 表示相应的 A-模的不可分解投射模的直和 $e_jA = (e_j\Pi(\tilde{A}_n))/(\alpha^{n+1})$。注意，$Q''$ 有一个到 $M_\bullet$ 的链映射，该映射在除 $N+1$ 和 $N+2$ 之外的所有次数上都诱导同调同构。在这两个次数上，同调映射为零。这构成了第一个有限投射部分。

如果复形 Q'' 在次数 $N+1$ 和 $N+2$ 上正合，我们就完成了；否则，接下来我们将说明如何修正 Q'' 中的这一非正合性，从而构造出所需的复形 $Q_\bullet$，使其与 $M_\bullet$ 拟同构。具体做法是加入交替部分。给定 Q''_{N+i} 中任意不可分解直和项 e_jA，对于 $i=1$ 或 $i=2$，映射 $e_jA \hookrightarrow Q''_{N+i} \xrightarrow{f_1} Q''_{N+i-1}$ 由左乘 $\sum c_r$ 给出，其中 ${}_s\alpha^r(\alpha^*)^s$ 是某个有限和；这里，α^r 表示以顶点 j 结束的 r 个连续 α_i 的乘积；类似地，(α^*) 表示以 α^r 的起始顶点结束的连续 α_i^* 的乘积，并且 $c_{r,s} \in \mathsf{C}$（这由定义预投射代数的交换子关系推出）；这里我们用 $f_i = \tilde{f}_i \otimes_{\Pi(\tilde{A}_n)} A$ 表示所诱导的映射。令 J^i 为指标集合，用于标记 Q''_{N+i} 的不可分解直和项 Q^i_j，对于 $i = 1, 2$（这里我们利用有限生成投射模具有唯一分解这一事实：除直和项的重新排序外，它们可分解为不可分解投射模；同时利用 R 是半单的）。对于每个 $j \in J^i$，令 $f_{i,j}$ 表示由复合 $Q^i_j \hookrightarrow Q''_{N+i} \to Q''_{N+i-1}$ 给出的映射。在对应于 $f_{i,j}$ 的和中，令 $r_{i,j}$ 表示最小的 r-指数。

通过对每个不可分解直和项 Q''_{N+1} 和 Q''_{N+2}，在 $N+i+1$ 次的位置添入 $(e_{(j-(n+1-r_{i,j}))A})/(\alpha^{r_{i,\ j}})$，并附上由乘以 $\alpha^{n+1-r_{i,\ j}}$ 给出的到 Q^i_j 的映射（若 $r_{i,\ j} \leq n$），即可得到一个正合复形。在这种情况下，我们将其转化为投射模 $Q_\bullet$ 构成的复形：将每个 $(e_{(j-(n+1-r_{i,j}))A})/(\alpha^{r_{i,\ j}})$ 替换为下文给出的解消，该解消由 C_i 的迭代锥构成。另外，当 $r_{i,\ j} \geq n+1$ 时，上述映射等于乘以 0，因此我们将这一直和项从复形 Q''_{N+i} 中移除。

由于所得复形 $Q_\bullet$ 由两部分构成：一部分是在有限步内由投射模得到的（取直和、直和项和锥，并应用移位），另一部分是有限多个商空间 $(e_jA)/(\alpha^m)$ 的解消。要得出 $M_\bullet$ 属于厚子范畴 $\langle C_1, \ldots\ldots, C_{n+1}\rangle$，只需证明 $(e_jA)/(\alpha^m) \in$ 属于厚子范畴 $\langle C_1, \ldots\ldots, C_{n+1}, \rangle$，其中 $m = 1, \ldots\ldots, n+1$。（注意，这一陈述包含投射模 $P_i = e_iA = (e_i\Pi(\tilde{A}_n))/(\alpha^{n+1})$。）

我们首先考虑以下投射分解：

$$(e_iA)/(\alpha^m) \quad \simeq \quad P_i \xleftarrow{\alpha^m} P_{i-m} \xleftarrow{\alpha^{n+1-m}} P_i \xleftarrow{\alpha^m} P_{i-m} \xleftarrow{\alpha^{n+1-m}} \cdots$$

特别地，当 $m=1$ 时，这给出了 C_i 的投射分解，我们将相应的复形记为 D^1_i。我们考虑迭代锥

$$D^{m+1}_i = \mathrm{cone}(b_{m,i} : \mathrm{cone}(b_{m-1,i}(\cdots \mathrm{cone}(b_{1,i} : D^1_i \to D^1_{i-1})\cdots) \to D^1_{i-m})$$

通过以下态射获得 $b_{m,\ i}$，其定义如下：

$$\begin{array}{ccccccccc}
P_{i-m+1}\oplus\cdots\oplus P_{i-1}\oplus P_i & \xleftarrow{d_1} & P_{i-m}\oplus\cdots\oplus P_{i-2}\oplus P_{i-1} & \xleftarrow{d_2} & P_{i-m+1}\oplus\cdots\oplus P_{i-1}\oplus P_i & \xleftarrow{d_1} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \\
0 & \longleftarrow & P_{i-m} & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-m-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots
\end{array}$$

在以下两个映射之间交替进行：$f_{1;m,\ i} = f_1$ 和$f_{2;m,\ i} = f_2$，定义如下：

$$\begin{aligned} f_1(x_{i-m}, \dots, x_{i-1}) &= x_{i-m}, \\ f_2(x_{i-m+1}, \dots, x_i) &= -\alpha^{n-1} x_{i-m+1} - \cdots - \alpha^{n-m+1} x_{i-1} + \alpha^{n-m} x_i. \end{aligned}$$

这里，微分 $d_1 = d_{1;m,i}$ 和 $d_{2;m,i} = d_2$ 由上文迭代锥 D_i^{m+1} 的定义中给出的映射 f_1, f_2递归定义。在 D_i^m上，它们为

$$d_1 = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad d_2 = \begin{bmatrix} -\alpha^n & -\alpha^{n-1} & \cdots & -\alpha^{n-m+2} & \alpha^{n-m+1} \\ 0 & -\alpha^n & \cdots & -\alpha^{n-m+3} & \alpha^{n-m+2} \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha^{n-m+4} & \alpha^{n-m+3} \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha^n & \alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha^n \end{bmatrix}.$$

为了证明 $e_i A/(\alpha^m)$ 是 D_i^m 的一个直和项（这正是分裂生成所需的），我们考虑下面映射 $g_{m,\ i} = g$ 和 $h_{m,i} = h$ 的复合：

$$\begin{array}{ccccccc} P_i & \xleftarrow{\alpha^m} & P_{i-m} & \xleftarrow{\alpha^{n+1-m}} & P_i & \xleftarrow{\alpha^m} & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \\ P_{i-m+1} \oplus \cdots \oplus P_i & \xleftarrow{d_1} & P_{i-m} \oplus \cdots \oplus P_{i-1} & \xleftarrow{d_2} & P_{i-m+1} \oplus \cdots \oplus P_i & \xleftarrow{d_1} & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \\ P_i & \xleftarrow{\alpha^m} & P_{i-m} & \xleftarrow{\alpha^{n+1-m}} & P_i & \xleftarrow{\alpha^m} & \cdots \end{array}$$

简单验证可知，g和 h 定义了链映射，并且 $h \circ g =$ 恒等映射，其中 h 和 g分别为

$$\begin{aligned} g_1(x_i) &= (0, \dots, 0, x_i) \\ g_2(x_{i-m}) &= (x_{i-m}, \alpha x_{i-m}, \dots, \alpha^{m-1} x_{i-m}) \\ h_1(x_{i-m+1}, \dots, x_i) &= -\alpha^{m-1} x_{i-m+1} - \cdots - \alpha x_{i-1} + x_i \\ h_2(x_{i-m}, \dots, x_{i-1}) &= x_{i-m}. \end{aligned}$$

□

接下来，令 B_T 为如下定义的 A_∞-代数。

定义 5.4.7. 我们定义一个分次箭图 Q_B^T：在图3中的箭图 Q_B 的每个顶点 $i \in Q_0$ 上添加次数为 $|T_i| = -2$ 的环路 T_i，并改变分次，使得 $|a_{n+1}| = 0$ 和$|b_{b+1}| = -1$。作为一个代数，我们将 B_T 定义为路径代数的商空间，其中施加与 B 中相同的关系（见定义 5.4.4），并进一步施加关于 T_i 的交换子关系： $T_{i-1} b_i = b_{i-1} T_i$ 和 $T_{i-1} a_i = a_{i-1} T_i$。 A_∞-结构定义如下： μ_2 是乘积（串接）， $\mu_{n+1}(T^{r_{n+1}} a^{s_{n+1}} b_{j_{n+1}}, \ \dots\dots, \ T^{r_1} a^{s_1} b_{j_1}) = a^{\sum_i s_i} T^{1+\sum_i r_i}$ 和 $\mu_i = 0$，若 $i \neq 2, n+1$。应当理解，只有当输入可串接（即 $T^{r_i} a^{s_i} b_{j_i}$ 终止于与 $T^{r_{i+1}} a^{s_{i+1}} b_{j_{i+1}}$ 起始相同的顶点），且每个输入都包含一个 b_i 时， μ_{n+1} 才非零；此时，输出的起始顶点与 $T^{r_1} a^{s_1} b_{j_1}$ 相同，终止顶点与 $T^{r_{n+1}} a^{s_{n+1}} b_{j_{n+1}}$ 相同。另一种描述方式是令 $\mu_{n+1}(b_{i-1}, \ \dots\dots, \ b_{i+1}, \ b_i) = T_i$，并将其在线性地扩展到 a_i 和 T_i 中的字上。

令 $C = \bigoplus_{i=1}^{n+1} C_i$，其中 C_i 如引理 5.4.6 中所述。对于每个 C_i，回忆上文给出的极小投射分解：

$$D_i = D_i^1 \quad = \quad P_i \xleftarrow{\alpha} P_{i-1} \xleftarrow{\alpha^n} P_i \xleftarrow{\alpha} \cdots$$

设 $D = \bigoplus_{i=1}^{n+1} D_i$。那么 $\mathrm{End}_A(D)$，即所有 A-态射 $f\colon D \to D$ 模的链复形（不仅仅是链映射）所构成的代数，是一个微分分次代数，其微分在齐次映射 f 上定义为 $\partial = \partial_{\mathcal{B}}(f) = \partial_D \circ f + (-1)^{|f|} f \circ \partial_D$，其中 ∂_D 是 D 上的交错微分，如上文的D_i 所示。根据定义，$\mathrm{Ext}_A^n(C, C) = H_n(\mathrm{End}_A(D))$。

引理 5.4.8。我们有

$$H_\bullet(\mathrm{End}_A(D)) \cong B_T,$$

作为代数。

证明。根据定义，$\mathrm{End}_A(D)$ 的 n 次同调可通过次数为 n 的链映射模去零伦映射来计算。我们分别考察各个齐次部分，并按四种情况对链映射加以描述：非负偶数度、正奇数度、负偶数度和负奇数度。

首先，假设 $f\colon D_i \to D_j$ 的次数为非正偶数。接着，仅利用它在每个次数上都是投射 A-模之间的态射这一点，可知它具有如下形式：

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\
0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_j & \xleftarrow{\alpha} & P_{j-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_j & \xleftarrow{\alpha} & \cdots
\end{array}$$

我们可以写成 $f_k = \sum_{a_k,b_k} \lambda_{a_k,b_k} \alpha^{a_k} (\alpha^*)^{b_k}$（其中该态射由左乘此元素给出），其中每个求和遍历所有满足 $a_k - b_k$ 与 $j - i$ 模 $n+1$ 等价的配对 a_k, b_k，并且对于有限多个配对 a_k, b_k，有 $\lambda_{a_k,b_k} \neq 0$。当且仅当下列条件成立时，该交换图可交换：对于奇数 k，每个配对 $a_k = a_{k+1}$, $b_k = b_{k+1}$ 和 $a_k \neq n$ 都有 $\lambda_{a_k,b_k} = \lambda_{a_{k+1},b_{k+1}}$；对于偶数 k，对于所有满足 $a_k = 0$ 的配对 a_k, b_k，每个配对 $a_k = a_{k+1}$ 和 $b_k = b_{k+1}$ 都有 $\lambda_{a_k,b_k} = \lambda_{a_{k+1},b_{k+1}}$。由此可得，我们可以写成 $f = f^0 + f'$，其中$f_k^0 = \sum_{b_k} \lambda_{0,b_k} (\alpha^*)^{b_k}$，且当 $b_k = b_l$ 时有 $\lambda_{0,b_k} = \lambda_{0,b_l}$；并且其中 $f' = \sum_{a_k, b_k} \lambda_{a_k,b_k} \alpha^{a_k} (\alpha^*)^{b_k}$，且$a_k \geq 1$。

接下来，我们定义一个同伦 H，以表明 $f' \simeq 0$，即它是零伦（见下方交换图）。我们写作 $f'_k = (f'_k)^n + (f'_k)^{<n}$，其中 (f'_k) 是包含 $a_k = n$ 的部分。回想一下，若 k 是奇数，根据上一段，$(f'_k)^{<n} = (f'_{k+1})^{<n}$。我们按如下方式归纳定义 H：令 $H_1 = f'_1/\alpha$，$H_2 = -(f'_1)^n/\alpha^n$，当 $k \geq 3$ 为奇数时；当 $k \geq 4$ 为偶数时，$H_k = (f'_k)^n - (f'_{k-1})^n + H_{k-2}$。（这是良定义的，因为每个次数中该和都是有限的。）

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \searrow^{0} & \downarrow{\scriptstyle f'_1} & \searrow^{H_1} & \downarrow{\scriptstyle f'_2} & \searrow^{H_2} & \downarrow{\scriptstyle f'_3} & \searrow^{H_3} & \\
0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_j & \xleftarrow{\alpha} & P_{j-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_j & \xleftarrow{\alpha} & \cdots
\end{array}$$

其次，我们考虑一个负奇数度的映射：

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\
0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_j & \xleftarrow{\alpha} & P_{j-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_j & \xleftarrow{\alpha} & \cdots
\end{array}$$

与上文类似，我们写作 $f_k = \sum_{a_k,\ b_k} \lambda_{a_k,\ b_k} \alpha^{a_k} (\alpha^*)^{b_k}$。要使其成为链映射，必须满足以下条件。对于奇数 k，以及一对 a_k，b_k，若 $a_k = 0$，则当$a_{k+1} = n-1$ 且 $b_k = b_{k+1}$时，$\lambda_{a_k,\ b_k} = \lambda_{a_{k+1},\ b_{k+1}}$。对于偶数 k，当 $a_k < n-1$ 时，必须有 $\lambda_{a_k,\ b_k} = 0$。

因此，我们可以写成 $f = f^0 + f'$其中 $f_k^0 = \sum_{b_k} \lambda_{0,\ b_k} (\alpha^*)^{b_k}$，当 k为奇数时；而$f_k^0 = \sum_{b_k} \lambda_{b_k} \alpha^{n-1} (\alpha^*)^{b_k}$，当 k为偶数时；$f'_k = \sum_{b_k} \lambda_{n,\ b_k} \alpha^n (\alpha^*)^{b_k}$，当 k为偶数时；以及 $f'_k = \sum_{a_k,\ b_k} \lambda_{a_k,\ b_k} \alpha^{a_k} (\alpha^*)^{b_k}$，使得当 k 为奇数时 $a_k \geq 1$。现在我们可以构造一个同伦 H，表明 $f' \simeq 0$ （见下方交换图）：令 $H_1 = f'_1/\alpha$ 和 $H_2 = f'_2/\alpha^n - f'_1/\alpha$。当 $k \geq 3$为奇数时，我们取 $H_k = f_3/\alpha - H_{k-1}$；当 $k \geq 4$ 为偶数时，我们取 $H_k = f_k/\alpha^n - H_{k-1}$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \searrow^{0} & \downarrow{\scriptstyle f'_1} & \searrow^{H_1} & \downarrow{\scriptstyle f'_2} & \searrow^{H_2} & \downarrow{\scriptstyle f'_3} & \searrow^{H_3} & \\
0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_j & \xleftarrow{\alpha} & P_{j-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_j & \xleftarrow{\alpha} & \cdots
\end{array}$$

第三种和第四种情形，即次数分别为偶数和奇数的正次数映射，同样可以证明是零伦的。这是因为在分解 $f = f^0 + f'$ 中，映射 f^0 必须等于 0，否则 f 将无法定义一个链映射（顶行含有 $0 \leftarrow P_i$ 的第一个方块将不交换）；而 f' 是零伦的，这一点可用与上文完全相同的方式证明。

由此可知，所有非零伦链映射都可以表示为以下映射的复合的线性组合：由 α_{i-1}^* 乘法给出的 0 次映射 $D_i \to D_{i-1}$，我们将其认作 a_i；如前一个证明所述的次数为 -1 的映射 $b_i = b_{1,\ i}$；以及由下式给出的次数为 -2 的映射 $T_i : D_i \to D_i$

$$\begin{array}{ccccccccc}
P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots
\end{array}$$

所有这些映射都可交换。

事实上，先设 f^0 如上所述具有偶数次数，设为 $2l$。那么我们可以假设 f_k^0 具有 $x \mapsto \lambda (\alpha^*)^b x$ 的形式，其中 $b \geq 0$ 为某个数（分别考察可能的直和项即可）。于是 $f^0 = T_{i-b}^k a_{i-b+1} \cdots a_{i-1} a_i$。接着设 f^0 具有奇数次数，设为 $2l+1$。那么我们可以假设 f_k^0 具有如下形式

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda (\alpha^*)^b & \text{if } k \text{ is odd,} \\ \lambda \alpha^n (\alpha^*)^b & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases}$$

在这种情况下 $f^0 = T_{i-b-1}^l b_{i-b} a_{i-b+1} \cdots a_i$。

此外，它们之间不可能存在更多关系，除非在 $n = 1$ 的情况下，此时 $b_{i+1} b_i = T_i$ （乘法由复合诱导）。因此存在一个代数同构 $H_\bullet(\mathrm{End}_A(D)) \cong B_T$。

□

引理 5.4 **.9.** 我们可以将引理 *5.4.8* 中的同构提升为一个同构

$$\mathrm{Ext}_A^\bullet(C, C) \cong B_T,$$

作为 A_∞-代数。

证明。根据定义， A_∞-代数 $\mathrm{Ext}_A^\bullet(C,C) = H_\bullet(\mathrm{RHom}_A(C,C))$ 是微分分次代数 $\mathcal{B} = \mathrm{End}_A(D)$ 的极小模型。根据 [Lu+09]和 [Mer99] （此处遵循 [Thu22 第 6 节定理 17]中对这些结果的阐述），我们可以按以下方式构造 A_∞-结构。我们选择一个分次分解 $\mathcal{B} = H \oplus \mathrm{im}(\partial) \oplus L$，使其成为分次向量空间，其中 H_k 是循环元 $\ker(\partial_k) \subset \mathcal{B}$ 中 $\mathrm{im}(\partial_{k+1})$ 的补空间，而 L_k 是 $\mathcal{B}_k$ 中循环元的补空间。我们还选取一个同构 $\iota : \mathrm{Ext}_A^\bullet(C,C) \to H$，并令 $\pi : \mathcal{B} \to \mathrm{Ext}_A^\bullet(C,C)$ 表示复合 $\iota^{-1} \circ \pi'$，其中 $\pi' : \mathcal{B} \to H$ 是投影。给定此分解，注意到 ∂_k 将 $H_k \oplus \mathrm{im}(\partial_{k+1}) \oplus L_k$ 映到 $\mathrm{im}(\partial_k)$ 上，且其核为 $H_k \oplus \mathrm{im}(\partial_{k+1})$。因此，我们可以通过 $h_{|H_k \oplus L_k} = 0$ 和 $h_{|\mathrm{im}(\partial_k)} = (\partial_k)^{-1}$来定义 ∂ 的一个“逆” h。利用这一点，归纳地，对于 $m \geq 1$，我们定义$\lambda_n : \mathcal{B}^{\otimes m} \to \mathcal{B}$ 为

$$h\lambda_1 = -\mathrm{id}_{\mathcal{B}}, \qquad \lambda_2 = \text{composition}, \qquad \lambda_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 1}} (-1)^{j+1} \lambda_2(h\lambda_i \otimes h\lambda_j).$$

于是，对于 $m \geq 2$, $\mu_m = \pi \circ \lambda_n \circ \iota$ 定义了 A_∞-结构。

为了使表达更易读，我们省略指标，并注意到这些指标可由上下文隐式确定。在上述情形中，我们选择一个分解，其中 $H_k = \{T^r a^s b\}$，当 $k = 2r+1$ 为奇数时；而 $H_k = \{T^r a^s\}$，当 $k = 2r$ 为偶数时。注意， b^2 由 α^{n-1} 与T复合后再进行乘法给出。我们将 $h(Tb^2)$ 定义为下方的态射：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P_i & \xleftarrow{\alpha^n} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{n-2}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{n-2}} & & \\
0 & \longleftarrow & P_{i-2} & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-3} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_{i-2} & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-3} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots
\end{array}$$

那么， $\lambda_2(h\lambda_1(b)\ h\lambda_2(b,\ b))$ 由下式给出

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{n-2}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{n-2}} & & \\
0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_{i-3} & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-4} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_{i-3} & \xleftarrow{\alpha} & \cdots
\end{array}$$

而 $\lambda_2(h\lambda_2(b,\ b)\ h\lambda_1(b))$ 由下式给出

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{n-2}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\
0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_{i-3} & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-4} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_{i-3} & \xleftarrow{\alpha} & \cdots
\end{array}$$

因此， $\lambda_3(b,\ b,\ b)$ 是两个交错映射之和，并由 α^{n-2} 与 T 复合后再进行乘法给出。

接下来，我们令 $h(\lambda_3(b,b,b)) = h(Tb^3)$ 由下式给出

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-1} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_i & \xleftarrow{\alpha} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{n-3}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{n-3}} & & \\
0 & \longleftarrow & P_{i-3} & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-4} & \xleftarrow{\alpha^n} & P_{i-3} & \xleftarrow{\alpha} & P_{i-4} & \xleftarrow{\alpha^n} & \cdots
\end{array}$$

若计算 λ_4，它将是两个交错映射 $\lambda_2(h\lambda_1(b) \otimes h\lambda_3(b,b,b))$ 和$\lambda_2(h\lambda_3(b,b,b) \otimes h\lambda_1(b))$ 的和（以及一个映射 $\lambda_2(h\lambda_2(b,b) \otimes h\lambda_2(b,b)) = 0$）。它将等于乘以 α^{n-3}，再与 T 复合。

我们可以以类似的方式继续定义 h （从 0 开始，并与 α的适当幂交替出现）。于是，对于 i, $j \geq 2$，有 $h\lambda_i(b, \ldots, b) \otimes h\lambda_j(b \ldots, b) = 0$，并且归纳地，

$$\lambda_j(b,\ldots,b) = h\lambda_1(b) \otimes h\lambda_{j-1}(b,\ldots,b) + h\lambda_{j-1}(b,\ldots,b) \otimes h\lambda_1(b),$$

这随后等于与 T复合的 α^{n+1-j} 的乘法。

由此我们推得，对于 $2 < j < n+1$，有 $\mu_j(b, \ldots, b) = 0$。此外，我们推得$\mu_{n+1}(b, \ldots, b) = T$。

由于 $h\lambda_{n+1}(b, \ldots, b) = 0$，这个过程将停止；如果 $j > n+1$，我们将有 $\lambda_j(b, \ldots, b) = 0$。同样，如果我们将 a 中的 b 替换为任意字 w，并将 T中的相应项一并替换，则 $h(w) = 0$。因此，$\lambda_j(\ldots, w, \ldots) = 0$。

最后，如果将 b替换为任意形如 $T^r a^s b$的字，那么总可以将 $T^r a^s$从定义 λ_j的方程中因式分解出来。由此得到引理正上方所述的公式。 □

特别地，$D^b(A) \cong D^\pi(B_T)$，但我们关注的是奇点范畴。特别注意，在引理 5.4.6 的证明中，投射 A-模与扭曲复形 D_i^{n+1} 拟同构。在此同构下，这些扭曲复形对应于 $D^\pi(B_T)$ 中的对象，而这些对象与由 B_T 上的扭曲复形给出的下列对象拟同构：

$$P_i \simeq S_i = (e_{i+1}B_T \oplus \cdots \oplus e_{i-1}B_T \oplus e_iB_T, f_i), \qquad f_i = \begin{bmatrix} 0 & b_{i+2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_{i+3} & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 R是半单的，与节点对应的不可分解投射模 $P_1, \ldots, P_{n+1}$生成 $\mathbf{Perf}(A)$。我们推得

$$D_{\mathrm{sg}}(A) \simeq D^\pi(B_T)/D^\pi(S_1,\ldots,S_{n+1}) \simeq D^\pi(B_T/\langle S_1,\ldots,S_{n+1}\rangle),$$

其中，中间的商是 Verdier 商，最后的商是 A_∞-商（见第 2.1.e 节），这是由于 [LO06], ，其中第二个拟同构也已得到证明。

令 $B_{T^\pm}$表示通过在所有节点添加 T_i^{-1}得到的 A_∞-代数，即在底层箭图中添加环路并施加额外关系 $T_i^{-1}T_i = e_i = T_iT_i^{-1}$，再用 b_i 和 a_i扩展交换关系，同时满足关于 μ_{n+1}的线性。

引理 5.4.10. 在扭曲复形 $S_1, \ldots, S_{n+1}$ 处取 B_T的 A_∞-商空间，与 A_∞-代数 $B_{T^\pm}$拟同构。

证明。我们有一个包含映射 $\iota\colon B_T \to B_{T^\pm}$（这是一个 A_∞-态射，具有 $f_1 = \iota, f_k = 0, k \geq 2$）。这定义了一个从扭曲复形的 A_∞-范畴到 Tw $B_T \to$ Tw $B_{T^\pm}$ 的函子，这里我们也将其记作 ι（参见第 2.1.e 节）。因此，对于每个 S_i，在 $B_{T^\pm}$ 上都有一个扭曲复形 $\iota(S_i)$。以下计算表明

$$\mu_1^{\iota(S_i)}(g_i) = \mu_1^{\mathrm{Tw}\, B_{T^\pm}}(g_i) = \mathrm{Id}_{\iota(S_i)}, \quad \text{where} \quad g_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{i+1}T_{i+1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

确实，

$$\mu_1^{\mathrm{Tw}\, B_{T^\pm}}(g_i) = \sum \mu_{n+1}^{\mathrm{Add}_{B_{T^\pm}}}(\iota(f_i), \ldots, \iota(f_i), g_i, \iota(f_i), \ldots, \iota(f_i)),$$

其中求和遍历 g_i 的所有不同位置。在各个分支上，令 g_i 位于第 l 个位置来计算，对于 $l = 1$、……、$n+1$,

$$\left(\mu_{n+1}^{\mathrm{Add}_{B_{T^\pm}}}(\iota(f_i), \ldots, \iota(f_i), g_i, \iota(f_i), \ldots, \iota(f_i))\right)_{s,t}$$

$$= \begin{cases} \mu_{n+1}^{B_{T^\pm}}(b_{i+l-1}, \ldots, b_i T_i^{-1}, \ldots, b_{i+l}) = e_{i+l}, & \text{if } s = t = n+2-l, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

（这一点通过矩阵相乘最容易看出。）

因此，根据 [LO06，第 3] 节，或者等价地，根据 [OT24，定理 4.13], 中的泛性质，存在一个态射 $h = (h_n)_{n\geq 1}$，它是 A_∞-代数之间的态射，并使交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} B_T & \xrightarrow{\quad\iota\quad} & B_{T^\pm} \\ \downarrow & \overset{\exists h}{\nearrow} & \\ B_T/\langle S_1、\ \ldots\ldots、\ S_{n+1}\rangle & & \end{array}$$

我们需要证明 h 定义了一个拟同构。

我们可以按照 [BCL18], 的意义，考虑 B_T 在 $T = T_1 + \cdots + T_{n+1}$ 处的导出局部化 $L_T(B_T)$, 即用一个与其拟同构的微分分次代数替换它。我们选择考虑由 B_T 的余酒吧构造 $\Omega B(B_T)$ 给出的半自由微分分次代数替代模型；它带有一个典范拟同构 $\Omega B(B_T) \to B_T$。我们有微分分次代数的包含映射 $\Omega B(B_T) \hookrightarrow L_T(\Omega B(B_T))\tilde{}$ 以及 $H_\bullet(L_T(B_T)) = H_\bullet(L_T(\Omega B(B_T))) = B_{T^\pm}$，其中按定义， $B_{T^\pm}$ 是 $L_T(B_T) = L_T(\Omega B(B_T))$ 的极小模型。注意，根据 [BCL18，定理 5.3]，$B_{T^\pm}$ 作为代数等于 $B_{T^\pm}$，因为 T 是同调中的中心元，但它们作为 A_∞-代数不一定相等。不过，存在一个由局部化 $B_T \to B_{T^\pm}$ 诱导的 A_∞-代数映射 $i = (i_k)_{k\geq 1}\tilde{}$，使得 i_1 是包含映射：这是通过复合以下映射得到的： $B_T \to \Omega B(B_T) \to L_T(\Omega B(B_T)) \to B_{T^\pm}$，其中第一个和最后一个映射是 A_∞-拟同构，其一元部分分别为选取循环元和投影到同调类。

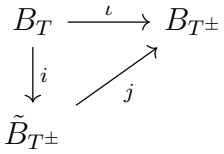
接下来也考虑 A_∞ 代数 $B_{T^\pm}$ 的余酒吧构造 $\Omega B(B_{T^\pm})$，于是得到如下交换图，其中竖直箭是拟同构：

$$\begin{array}{ccc} \Omega B(B_T) & \xrightarrow{\Omega B(\iota)} & \Omega B(B_{T^\pm}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_T & \xrightarrow[\iota]{} & B_{T^\pm} \end{array}$$

根据泛性质 [BCL18，定义 3.3] 存在一个微分分次代数的态射，使下方交换图成立，因为对于同调类 T的任意代表元 T'，$\Omega B(\iota)(T')$ 在同调中是可逆的：

$$\begin{array}{ccc} \Omega B(B_T) & \xrightarrow{\Omega B(\iota)} & \Omega B(B_{T^\pm}) \\ \downarrow & \nearrow & \\ L_T(\Omega B(B_T)) & & \end{array}$$

回到极小模型的层面，这诱导出一个 A_∞-代数的态射 $j=(j_k)_{k\geq 1}$，使下方交换图成立：



根据交换性， j_1 是限制到 $B_T\subset \tilde{B}_{T^\pm}$ 上的恒等映射。利用 $\mu_2^{B_{T^\pm}}(i_1,\ i_1)=i_1\circ\mu_2^{B_{T^\pm}}$，由于 $\mu_1^{B_{T^\pm}}=0$和 $\mu_1^{B_{T^\pm}}=0$，该等式成立，我们推得 $j_1(T_i^{-1})=T_i^{-1}$。因此， j_1必然是恒等映射，特别地， j 是同构。于是，我们将 $B_{T^\pm}$ （它在 A_∞-拟同构意义下定义）与 $B_{T^\pm}$等同，并将 $L_T(\Omega B(B_T))$ 视为 $\Omega B(B_{T^\pm})$。

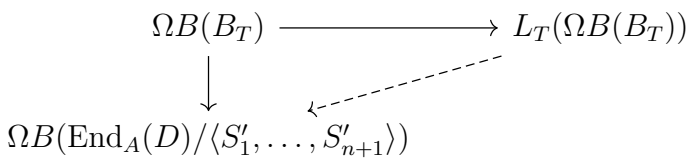
由上可知，对 T进行导出局部化意味着消去 S_i、 $i=1$、……、 $n+1$，从而得到映射 h。另一方面，消去所有 S_i 意味着对所有 T_i进行局部化；考察 Verdier 商并利用 cone(T_i) 同构于完美复形，即可得到这一点

$$S_i'\simeq P_i\xleftarrow{\alpha} P_{i-1}$$

（参见引理 5.4.8 的证明中对 T 的描述）。更准确地说，dg 代数 $\mathrm{End}_A(D)$ 与 A_∞代数 B_T 之间存在一个拟同构。T 扭曲复形 S_i 在此拟同构下对应于扭曲复形 S_i'，因此，dg 商

$\mathrm{End}_A(D)/\langle S_1',\ \ldots\ldots,\ S_{n+1}'\rangle$（这是自同态微分分次代数，它通过在 $\mathrm{End}_A(D)$ 上的扭曲复形 dg 范畴中取商得到）与 A_∞-商$B_T/\langle S_1,\ \ldots\ldots,\ S_{n+1}\rangle$ 拟同构。元素 $T\in \mathrm{End}_A(D)/\langle S_1',\ \ldots\ldots,\ S_{n+1}'\rangle$ 被视为 $\mathrm{Tw}\ \mathrm{End}_A(D)/\langle S_1',\ \ldots\ldots,\ S_{n+1}'\rangle$ 中对应的自同态，其同调类则被视为 $H_0\mathrm{Tw}\ \mathrm{End}_A(D)/\langle S_1',\ \ldots\ldots,\ S_{n+1}'\rangle$ 中的类；该类又对应于态射，在 $(\mathrm{End}_A(D)/\langle S_1',\ \ldots\ldots,\ S_{n+1}'\rangle)\simeq D_{\mathrm{sg}}(A)$ 中也记作 T。

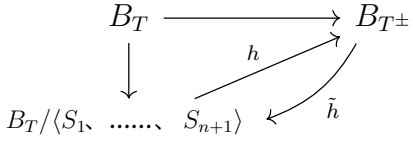
因此，根据 [BCL18，定义 3.3], ，存在一个使该交换图可交换的微分分次态射：



此处，竖直映射定义为以下复合

$$\Omega B(B_T)\to \Omega B(B_T/\langle S_1,\ldots,S_{n+1}\rangle)\xrightarrow{\sim \text{q.i.}}\Omega B(\mathrm{End}_A(D)/\langle S_1',\ldots,S_{n+1}'\rangle).$$

因此，存在一个 A_∞-态射 $h=(h_n)_{n\geq 1}$： $B_{T^\pm}\to B_T/\langle S_1、\ \ldots\ldots、\ S_{n+1}\rangle$，以及一个交换图：



由 [BCL18], 中的泛性质与 [OT24 定理 4.13], 中的泛性质进一步可知，该微分分次态射必为拟逆。事实上，在下方范畴 $\Omega B(B_T)$（微分分次代数范畴）的同伦范畴中，$\Omega B(h\circ h)$ 必须等于恒等映射$_{L_T(\Omega B(B_T))}$。

˜ ˜这意味着 $h\circ h \simeq$恒等映射$_{B_{T^\pm}}$。此外，同理， $h\circ h$在 ∞-范畴的 A_∞-范畴中等于恒等映射$_{B_T/\langle S_1,\dots,S_{n+1}\rangle}$，这意味着它们是同伦 A_∞-态射。因此， h 在 $B_T/\langle S_1,\dots,S_{n+1}\rangle$ 的极小模型上诱导的映射是一个 A_∞-同构。

□

定理 *5.4.5* 的证明。我们可以进行代换 $b_{n+1}\leftrightarrow b_{n+1}T_{n+1}^{-1}$和 $a_{n+1}\leftrightarrow a_{n+1}T_{n+1}^{-1}$。于是 $\mu_{n+1}(a_i,\ a_{i-1},\ \dots\dots,\ a_{i+1}) = e_{i+1}$，且 μ_{n+1}仍然是关于 b_i和 $T_i^{\pm1}$的线性式。这表明，$B_{T^\pm}\cong B\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{C}[T^{\pm1}]$与 $|T|=-2$作为 A_∞-代数同构；其中，我们在右侧张量积一个分次代数，使得 A_∞-关系扩展为关于 $T^{\pm1}$的线性关系。

□

	$X_{\text{res}}\smallsetminus D_r$ +停止/势	X_{Mil}
A侧	$D^b(\Pi^{\lambda(s)}(\tilde{A}_n))$? 猜想 5.3.1	$D^\pi(\mathcal{G}(A_n))$ [EL17]
B侧	$D^\pi(\mathcal{G}(A_n)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{C}[T^{\pm1}])$ 定理 5.4.1	$D^b(\Pi^\lambda(\tilde{A}_n))$ 命题 5.3.6

图 38： 第 5.3 节和第 5.4 节结果概要。关于非对角线中的不对称性，参见注 5.4.2。在同一个底层超 K¨ahler 流形 X_ζ中考虑时，主对角线上的参数定义了相同的代数（当作 $\Pi(A_n)$ 的无穷小变分 ˜来考虑时）（参见第 5.3.c 节）。

参考文献

[AAK16] Mohammed Abouzaid、Denis Auroux 和 Ludmil Katzarkov。“托里克簇吹起上的拉格朗日纤维化与超曲面的镜像对称”。载于：高等科学研究所数学出版物´研究报告123（2016），第 199–282 页。 ISSN：0073-8301,1618-1913。 URL: https://doi.org/10.1007/s10240-016-0081-9.[Acu+21] Bahar Acu 等。“光滑化托里克除子补集的温斯坦把手体导论”。载于：辛几何与接触几何及拓扑的研究方向。第 27 卷。女性数学家协会丛书。Springer，Cham， [2021]©2021，第 217–243 页。 ISBN：978-3-030-80978-2；978-3-030-80979-9。 URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-80979-9_4.[Acu+25] Bahar Acu 等。“光滑化托里克除子补集的温斯坦把手体”。载于：美国数学会回忆录309.1561（2025），第 iii + 115 页。 ISSN：0065-9266,1947-6221。 URL： https://doi.org/10.1090/memo/1561.[AE22] Johan Asplund 和 Tobias Ekholm。“奇异勒让德子流形的切卡诺夫–埃利亚什贝格微分分次代数”。载于：辛几何杂志20.3（2022），第 509–559 页。 ISSN：1527-5256,1540-2347。 URL： https://doi.org/10.4310/jsg.2022.v20.n3.a1.[AEO23] Bahar Acu、John B. Etnyre 和 Burak Ozbagci。“平面接触流形向高维的推广”。载于：辛几何杂志21.4（2023），第 683–721 页。 ISSN：1527-5256,1540-2347。 URL： https://doi.org/10.4310/jsg.2023.v21.n4.a2。

[Aur14] Denis Auroux。“Fukaya 范畴初学者导论”。载于：接触与辛拓扑。第 26 卷。Bolyai 数学学会研究丛书，J´anos Bolyai 数学学会，布达佩斯，2014年，第 85–136 页。 ISBN: 978-3-319-02035-8；978-3-319-02036-5。 URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-02036-5_3.[B¨ac23] Martin B¨acke。奇异勒让德结的接触同调计算及二维中的手术公式。2023年。arXiv: 2303.12178 [math.SG]。 URL: https://arxiv.org/abs/2303.12178.[BB03] Alexei Bondal 和 Michel van den Bergh。“交换几何与非交换几何中的生成元及函子可表示性”。载于：Mosc. Math. J. 3.1（2003），第 1–36、258 页。 ISSN: 1609-3321,1609-4514。 URL: https://doi.org/10.17323/1609-4514-2003-3-1-1-36.[BCL18] Christopher Braun、Joseph Chuang 和 Andrey Lazarev。“代数与模的导出局部化”。载于：Adv. Math. 328（2018），第 555–622 页。 ISSN: 0001-8708,1090-2082。 URL: https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.02.004.[BEE12] Fr´ed´ericBourgeois、Tobias Ekholm 和 Yasha Eliashberg。“Legendrian 手术的影响”。载于：Geom. Topol. 16.1（2012）。附录由 Sheel Ganatra 和 Maksim May- danskiy 撰写，第 301–389 页。 ISSN: 1465-3060,1364-0380。 URL: https://doi.org/10.2140/gt.2012.16.301.[Boc21] Raf Bocklandt。《同调镜像对称简明导论》。第 99 卷。伦敦数学学会学生教材。剑桥大学出版社，剑桥，2021年，第 xi+390 页。 ISBN: 978-1-108-48350-6；978-1-108-72875-1。 URL: https://doi.org/10.1017/9781108692458.[BS98] U. Bruzzo 和 G. Sanguinetti。K3 曲面上的镜像对称作为超凯勒旋转。1998年。arXiv: physics/9802044 [math-ph]。 URL: https://arxiv.org/abs/physics/9802044.[BSV22] Matthew Strom Borman、Nick Sheridan 和 Umut Varolgunes。“量子上同调作为辛上同调的变形”。载于：《辛几何——纪念 Claude Viterbo 60 华诞文集》。再版自 [4437454]。Birkh¨auser/Springer，Cham， [2022] ©2022，第 1073–1149 页。 ISBN: 978-3-031-19110-7。 URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-19111-4_34.[Buc21] Ragnar-Olaf Buchweitz。《极大 Cohen-Macaulay 模与 Tate 上同调》。第 262 卷

《数学调查与专著》。附录及导言由 Luchezar L. Avramov、Benjamin Briggs、Srikanth B. Iyengar 和 Janina C. Letz 撰写。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯， [2021] ©2021，页码 xii+175。 ISBN: 978-1-4704-5340-4。 URL: https://doi.org/10.1090/surv/262.[CH98] William Crawley-Boevey 和 Martin P. Holland。“克莱因奇点的非交换变形”。载于：《*Duke Math. J.*》92.3 (1998)，页码 605–635。 ISSN: 0012-7094,1547- 7398。 URL: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-98-09218-3.[Cha+24] Baptiste Chantraine 等。“Weinstein 流形及扇区的包裹福柯范畴的几何生成”。载于：《*Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4)* 57.1 (2024)，页码 1–85。 ISSN: 0012-9593,1873-2151。

[Cha13] Kwokwai Chan。“ A_n-解消的同调镜像对称作为一种 T-对偶”。载于：J. Lond. Math. Soc. (2) 87.1 (2013)，页码 204–222。 ISSN：0024-6107,1469-7750。 URL: https://doi.org/10.1112/jlms/jds048.[Che02] Yuri Chekanov。“Legendrian 链环的微分代数”。载于：Invent. Math. 150.3 (2002)，页码 441–483。 ISSN：0020-9910,1432-1297。 URL： https://doi.org/10.1007/s002220200212.[CS06] William Crawley-Boevey 和 Peter Shaw。“乘法预投射代数、中间卷积与 Deligne-Simpson 问题”。载于：Adv. Math. 201.1 (2006)，页码 180–208。 ISSN：0001-8708,1090-2082。 URL: https://doi.org/10.1016/j.aim.2005.02.003.[Dim16] Georgios Dimitroglou Rizell。“ Legendrian 环境手术与 Legendrian 接触同调”。载于：J. Symplectic Geom. 14.3 (2016)，页码 811–901。 ISSN：1527-5256,1540- 2347。 URL: https://doi.org/10.4310/JSG.2016.v14.n3.a6.[Dri04] Vladimir Drinfeld。“DG 范畴的 DG 商”。载于：J. Algebra 272.2 (2004)，页码 643–691。 ISSN：0021-8693,1090-266X。 URL： https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2003.05.001.[EES07] Tobias Ekholm、John Etnyre 和 Michael Sullivan。“$P\times$R 中的 Legendrian 接触同调”。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 359.7 (2007)，页码 3301–3335。 ISSN：0002-9947,1088- 6850。 URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04337-1.[EGH00] Y. Eliashberg、A. Givental 和 H. Hofer。“ 辛场论导论 ”。载于：GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999)。2000，页码 560–673。 URL: https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0425-3_4.[Ekh07] Tobias Ekholm。“1-喷射空间中的 Morse 流树与 Legendrian 接触同调”。载于：Geom. Topol. 11 (2007)，页码 1083–1224。 ISSN：1465-3060,1364-0380。 URL： https://doi.org/10.2140/gt.2007.11.1083.[EL17] Tolga Etg¨u 和 Yankı Lekili。“Floer 理论中的 Koszul 对偶模式”。载于：Geom. Topol. 21.6 (2017)，页码 3313–3389。 ISSN：1465-3060,1364-0380。 URL： https://doi.org/10.2140/gt.2017.21.3313.[EL19] Tolga Etg¨u 和 Yankı Lekili。“丛接的 Fukaya 范畴与乘法预投射代数”。载于：Quantum Topol. 10.4 (2019)，页码 777–813。 ISSN：1663-487X,1664-073X。 URL： https://doi.org/10.4171/qt/131.[EL23] Tobias Ekholm 和 Yankı Lekili。“拉格朗日不变量与 Legendrian 不变量之间的对偶”。载于：Geom. Topol. 27.6 (2023)，页码 2049–2179。 ISSN：1465-3060,1364-0380。 URL: https://doi.org/10.2140/gt.2023.27.2049.[EN15] Tobias Ekholm 和 Lenhard Ng。“次临界 Weinstein 四维流形边界上的 Legendrian 接触同调”。载于：J. Differential Geom. 101.1 (2015)，页码 67– 157。 ISSN：0022-040X,1945-743X。 URL: http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1433975484.[Etn06] John B. Etnyre。“开书分解与接触结构讲义”。载于：Floer 同调、规范理论与低维拓扑。第 5 卷。Clay Math. Proc. 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2006，页码 103–141。 ISBN：0-8218-3845-8。

[Eva11] Jonathan David Evans. “若干 Stein 曲面与有理曲面的辛映射类群”. In: J. Symplectic Geom. 9.1 (2011), pp. 45–82. ISSN: 1527-5256,1540-2347.URL: https://doi.org/10.4310/jsg.2011.v9.n1.a4.[Fuj75] Akira Fujiki. “关于循环商奇点的解消”. In: Publ. Res. Inst. Math. Sci. 10.1 (1974/75), pp. 293–328. ISSN: 0034-5318,1663-4926. URL: https://doi.org/10.2977/prims/1195192183.[Gei08] Hansj¨org Geiges. 《接触拓扑导论》 . Vol. 109. 剑桥高等数学研究丛书. 剑桥大学出版社, 剑桥, 2008, pp. xvi+440.ISBN: 978-0-521-86585-2. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511611438.[GHK15] Mark Gross, Paul Hacking, and Sean Keel. “对数卡拉比-丘曲面的镜像对称 I”. In: Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 122 (2015), pp. 65–168. ISSN: 0073-8301,1618-1913. URL: https://doi.org/10.1007/s10240-015-0073-1.[Gir91] Emmanuel Giroux. “接触拓扑中的凸性”. In: Comment. Math. Helv. 66.4 (1991), pp. 637–677. ISSN: 0010-2571,1420-8946. URL: https://doi.org/10.1007/BF02566670.[Gom98] Robert E. Gompf. “Stein 曲面的把手体构造”. In: Ann. of Math. (2) 148.2 (1998), pp. 619–693. ISSN: 0003-486X,1939-8980. URL: https://doi.org/10.2307/121005.[GPS20] Sheel Ganatra, John Pardon, and Vivek Shende. “Liouville 扇区上的协变函子性包裹弗洛尔理论”. In: Publ. Math. Inst. Hautes ´ Etudes Sci. 131 (2020), pp. 73–200. ISSN: 0073-8301,1618-1913. URL: https://doi.org/10.1007/s10240-019-00112-x.[GPS24] Sheel Ganatra, John Pardon, and Vivek Shende. “包裹 Fukaya 范畴的扇区下降”. In: J. Amer. Math. Soc. 37.2 (2024), pp. 499–635. ISSN: 0894-0347,1088- 6834. URL: https://doi.org/10.1090/jams/1035.[Her16] Stephen Hermes. “金兹堡代数的极小模型”. In: J. Algebra 459 (2016), pp. 389–436. ISSN: 0021-8693,1090-266X. URL: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.03.041.[Hit21] Nigel Hitchin. “ALE 空间的中心球面”. In: Q. J. Math. 72.1-2 (2021), pp. 253–276. ISSN: 0033-5606,1464-3847. URL: https://doi.org/10.1093/qmath/haaa051.[Hit25] Nigel Hitchin. “ALE 空间与结点曲线”. In: Q. J. Math. 76.1 (2025), pp. 337– 347. ISSN: 0033-5606,1464-3847. URL: https://doi.org/10.1093/qmath/haaf004.[Hit79] Nigel J. Hitchin. “多边形与引力子”. In: Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 85.3 (1979), pp. 465–476. ISSN: 0305-0041,1469-8064. URL: https://doi.org/10.1017/S0305004100055924.[HK18] Paul Hacking and Sean Keel. “镜像对称与簇代数”. In:《国际数学家大会论文集——里约热内卢 2018》. Vol. II. 特邀讲座. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, pp. 671–697. ISBN: 978-981-3272-91-0; 978-981-3272-87-3. URL: https://doi.org/10.1142/11060.

[HK22] Paul Hacking and Ailsa Keating. “对数卡拉比-丘曲面的同调镜像对称”. In: *Geom. Topol.* 26.8 (2022). 附录由 Wendelin Lutz 撰写, pp. 3747– 3833. ISSN: 1465-3060,1364-0380. URL: https://doi.org/10.2140/gt.2022.26.3747.[Jef22] Maxim Jeffs. “奇异超曲面的镜像对称与 Fukaya 范畴”. In: *Adv. Math.* 397 (2022), Paper No. 108116, 36. ISSN: 0001-8708,1090-2082. URL:https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.108116.[Kan97] Yutaka Kanda. “三维环面上的紧接触结构分类”. In:*Comm. Anal. Geom.* 5.3 (1997), pp. 413–438. ISSN: 1019-8385,1944-9992. URL: https://doi.org/10.4310/CAG.1997.v5.n3.a2.[Kap23] Daniel Kaplan. “Dynkin 箭图的乘法预投射代数”. In:*J. PureAppl. Algebra* 227.1 (2023), Paper No. 107146, 26. ISSN: 0022-4049,1873-1376. URL:https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2022.107146.[Kea14] Ailsa MacgregorKeating. 米尔诺纤维的辛性质. 博士学位论文–Massachuset

ts

理工学院。ProQuest LLC，Ann Arbor，MI，2014年，（无页码）。 URL： http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqm&rft_dat=xri:pqdiss:0830168。[Kel06] Bernhard Keller。“关于微分分次范畴”。载于：《国际数学家大会论文集》第二卷。欧洲数学学会，Z¨urich，2006年，第151–190页。 ISBN：978-3- 03719-022-7。[Kel11] Bernhard Keller。“变形的卡拉比–丘完备化”。载于：《纯粹与应用数学杂志》654（2011年）。附录由 Michel Van den Bergh 撰写，第125–180页。 ISSN：0075- 4102,1435-5345。 URL： https://doi.org/10.1515/CRELLE.2011.031。[Kon95] Maxim Kontsevich。“镜像对称的同调代数”。载于：《国际数学家大会论文集》，第1、2卷（Z ¨urich，1994年）。Birkh¨auser，巴塞尔，1995年，第120–139页。 ISBN：3-7643-5153-5。[Kro89] Peter B. Kronheimer。“将 ALE 空间构造为超凯勒商空间”。载于：《微分几何杂志》29.3（1989年），第665–683页。 ISSN：0022-040X,1945-743X。 URL:http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214443066。[KS23] Daniel Kaplan 和 Travis Schedler。“乘法预投射代数是 2-卡拉比–丘的”。载于：《代数与数论》17.4（2023年），第831–883页。 ISSN：1937-0652,1944-7833。URL： https://doi.org/10.2140/ant.2023.17.831。[KV00] Mikhail Kapranov 和 Eric Vasserot。“克莱因奇点、导出范畴与 Hall 代数”。载于：《数学年刊》316.3（2000年），第565–576页。 ISSN：0025-5831,1432-1807。URL： https://doi.org/10.1007/s002080050344。[KY18] Martin Kalck 和 Dong Yang。《相对奇异范畴 II：微分分次模型》。2018年。arXiv: 1803.08192 [math.AG]。 URL： https://arxiv.org/abs/1803.08192。[LO06] Volodymyr Lyubashenko 和 Sergiy Ovsienko。“商 A_∞ 范畴的一个构造”。载于：《同调与同伦应用》8.2（2006年），第157–203页。 ISSN：1532-0073,1532-0081。URL： https://doi.org/10.4310/hha.2006.v8.n2.a9。

[Lu+09] Diming Lu 等。“Ext代数上的 A-无穷结构”。载于：《纯粹与应用代数杂志》213.11（2009年），第2017–2037页。 ISSN：0022-4049,1873-1376。 URL： https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2009.02.006。[LU21] Yankı Lekili 和 Kazushi Ueda。“简单奇点 Milnor纤维的同调镜像对称”。载于：《代数与几何》8.5（2021年），第562–586页。 ISSN：2313-1691,2214- 2584。 URL： https://doi.org/10.14231/ag-2021-017。[Mer99] Sergei A. Merkulov。“凯勒流形的强同伦代数”。载于：《国际数学研究通知》3（1999年），第153–164页。 ISSN：1073-7928,1687-0247。 URL： https://doi.org/10.1155/S1073792899000070。[Mil68] John Milnor。《复超曲面的奇点》。第61卷。数学年刊研究。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ；东京大学出版社，东京，1968年，第iii+122页。[NT04] Lenhard Ng 和 Lisa Traynor。“Legendrian实心环面链环”。载于：《辛几何杂志》2.3（2004年），第411–443页。 ISSN：1527-5256,1540-2347。 URL：https://doi.org/10.4310/jsg.2004.v2.n3.a6。[Orl04] Dmitri Olegovich Orlov。“奇点三角范畴以及 Landau-Ginzburg模型中的 D膜”。载于：《斯捷克洛夫数学研究所汇刊》246（2004年），第240–262页。 ISSN：0371-9685,3034-1809。[Orl06] Dmitri Olegovich Orlov。“奇点三角范畴，以及 Landau-Ginzburg模型之间的等价”。载于：《数学文集》197.12（2006年），第117–132页。 ISSN：0368-8666,2305-2783。 URL：https://doi.org/10.1070/SM2006v197n12ABEH003824。[OT24] Yong-Geun Oh 和 Hiro Lee Tanaka。商与 A∞范畴的局部化的 ∞范畴普适性质。2024年。arXiv：2003.05806 [math.CT]。URL： https://arxiv.org/abs/2003.05806。[Pas19] James Pascaleff。“对数卡拉比-丘曲面的辛上同调”。载于：《几何与拓扑》23.6（2019年），第2701–2792页。 ISSN：1465-3060,1364-0380。 URL： https://doi.org/10.2140/gt.2019.23.2701。[Qui09] Alexander Quintero V´elez。“Landau-Ginzburg模型的麦凯对应”。载于：《数论与物理学通信》3.1（2009年），第173–208页。 ISSN：1931-4523,1931-4531。URL：https://doi.org/10.4310/CNTP.2009.v3.n1.a4。[Rei93] Miles Reid。“曲面循环商奇点与 Hirzebruch–Jung解消”。见 https://webhomes.maths.ed.ac.uk/ v1ranick/papers/reid.pdf。1993年（？）[RET22] Georgios Dimitroglou Rizell、Tobias Ekholm 和 Dmitry Tonkonog。“浸入拉格朗日曲面的精化圆盘势”。载于：《微分几何杂志》121.3（2022年），第459–539页。 ISSN：0022-040X,1945-743X。 URL：https://doi.org/10.4310/jdg/1664378618。[Rit10] Alexander F. Ritter。“辛上同调的变形与 ALE 空间中的恰当拉格朗日子流形”。载于：《几何与泛函分析》20.3（2010年），第779–816页。 ISSN：1016-443X,1420- 8970。 URL：https://doi.org/10.1007/s00039-010-0074-7。[Ryd25] Johan Rydholm。“由停止移除诱导的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数的微分分次局部化”。准备中。2025年。

[Sei00] Paul Seidel.《分次拉格朗日子流形》。载于：Bull. Soc. Math. France 128.1（2000），第103–149页。 ISSN：0037-9484,2102-622X。 URL： http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_1_103_0.[Sei08] Paul Seidel.《Fukaya 范畴与 Picard-Lefschetz理论》。苏黎世高级数学讲座。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2008年，第viii页+326。ISBN：978-3-03719-063-0。 URL： https://doi.org/10.4171/063.[Sik94] Jean-Claude Sikorav.《几乎复流形中全纯曲线的一些性质》。载于：《辛几何中的全纯曲线》。第117卷。数学进展。Birkhäuser，巴塞尔，1994年，第165–189页。 ISBN：3-7643-2997-1。 URL： https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8508-9_6.[˘SV17] ˘Spela ˘Spenko and Michel Van den Bergh.《约化群的商奇点的非交换解消》。载于：Invent. Math. 210.1（2017），第3–67页。 ISSN：0020-9910,1432-1297。 URL： https://doi.org/10.1007/s00222-017-0723-7.[Syl15] Zachary Aaron Sylvan.《关于部分缠绕 Fukaya 范畴》。博士论文——加利福尼亚大学伯克利分校。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2015年，第104页。 ISBN：978-1339- 01985-7。 URL： http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqm&rft_dat=xri:pqdiss:3720854.[Thu22] Markus Thuresson.《对偶扩张代数上标准模的Ext代数》。载于：J. Algebra 606（2022年），第519–564页。 ISSN：0021-8693,1090-266X。 URL： https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.05.011.[Wei91] Alan Weinstein.《接触手术与辛把体》。载于：Hokkaido Math. J. 20.2（1991），第241–251页。 ISSN：0385-4035。 URL： https://doi.org/10.14492/hokmj/1381413841。