arXiv:2601.12048v1 [math.AG] 17 Jan 2026

与 A_r 曲面奇点相关的分拆恒等式

POONEH AFSHARIJOO、PEDRO D. GONZÁLEZ PÉREZ 和 HUSSEIN MOURTADA

摘要。我们证明了一族涉及三种颜色的整数分拆的分拆恒等式。这些恒等式中出现的分拆类型所满足的条件，包含了 Rogers-Ramanujan 恒等式和 Andrews-Gordon 恒等式及其近期推广中出现的约束。本文建立的恒等式通过弧 HP 级数与 A_r 曲面奇点相关联；弧 HP 级数利用弧空间定义，为代数簇的奇点提供了一种度量。

1. 引言

正整数 n 的一个（普通）分拆 λ 是一个正整数的非递增序列（$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_\ell$），满足 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell = n$。整数 λ_i 称为 λ的部件。我们用 L（λ）表示 λ的部件数（即长度），用 p（n）表示 n的分拆总数。

普通分拆的一类基本恒等式在本文中起着核心作用，即 Gordon 恒等式（见 [14] 中的定理 1）：

定理 *A.*（*Gordon* 恒等式）给定整数 $r \geq 2$ 和 $1 \leq i \leq r$，令 $\mathcal{B}_{r,i}(n)$ 表示由 n 的形如 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ 的分拆所构成的集合，其中 $\lambda_j - \lambda_{j+r-1} \geq 2$ 且部件 *1* 的个数至多为 $i-1$；其基数记为 $B_{r,i}(n)$。令 $\mathcal{A}_{r,i}(n)$ 表示将 n 分拆为模 $2r+1$ 下同余于 $\not\equiv 0, \pm i$ 的部件所得的分拆数，其基数记为 $A_{r,i}(n)$。则对所有整数 n，有 $A_{r,i}(n) = B_{r,i}(n)$。

注意，这些恒等式推广了所谓的罗杰斯–拉马努金恒等式；后者对应于上述定理中的情形 $r = 2$。这些恒等式在多个领域发挥了重要作用，包括统计力学、组合学、数论、表示论、概率论、图论，

致谢。Pooneh Afsharijoo 的研究由玛丽亚·萨姆布拉诺博士后奖学金资助。第一和第二作者还获得了 MICIU/AEI MCIN/AEI /10.13039/501100011033 和 FEDER, UE 的资助项目 PID2020- 114750GB-C32 和 PID2024-156181NB-C32。关键词：有理双点奇点；整数分拆；分次代数；希尔伯特级数；微分代数；弧空间；循环商奇点；Gordon 恒等式；罗杰斯–拉马努金恒等式 数学主题分类 2010：11P84, 11P81, 05A17, 05A19, 05C31, 13F55, 13D40, 14B05。

以及代数几何和交换代数 [7, 18, 5, 12, 9, 3, 2, 11, 10, 13, 16, 17, 21]。

本文关注部件可以具有多种颜色（事实上是三种颜色）的整数分拆。设 $c \geq 1$ 为一个整数。若每个部件都可以呈现 c 种不同的颜色，则称一个分拆为 c色分拆。普通整数分拆对应于 $c = 1$的情形。对于 $c = 3$，我们考虑黑色、红色和绿色这三种颜色。我们用 i_b （分别用 i_r 和 i_g）表示黑色（分别为红色和绿色）的 i 部件。

2 的三色分拆为：

$$2_b, 2_r, 2_g, 1_b + 1_b, 1_b + 1_r, 1_b + 1_g, 1_r + 1_g, 1_r + 1_r, 1_g + 1_g.$$

对于一个三色分拆 λ，我们可以考虑子分拆 λ_b、 λ_r和 λ_g，它们分别由 λ的黑色、红色和绿色部分得到。例如，对于分拆 $\lambda = 7_b + 6_r + 3_b + 3_r + 1_r$，有 $\lambda_b = 7 + 3$、 $\lambda_r = 6 + 3 + 1$ 和 $\lambda_g = \emptyset$。

为陈述主定理，我们引入新的三色整数分拆类别，记作 $\mathcal{F}_r$，并由整数 $r \geq 2$ 编号。

我们先引入一些记号。对于一个三色分拆 λ，我们用 b y

- ℓ_b 表示（分别表示 ℓ_r 和 ℓ_g） λ 中黑色（分别为红色和绿色）部分的数量；
- k λ 的最小黑色部分（如果存在）；
  λ 的第 k 小红色部分，当 $\ell_r \geq k$ 时。

我们将 $\mathcal{F}_r$ 定义为满足 $\lambda_g \in \mathcal{B}_{r,\ r}(n)$ 的三色分拆 λ 的集合，其中某个n成立。此外，λ 满足以下条件之一：

1. $\lambda = \emptyset$；或 λ 只有一种颜色；或 λ 恰好有两种颜色，其中一种为绿色。
2. λ恰好有两种颜色，即黑色和红色，并且 (a) 要么 $\ell_r \leq k - 1$，(b) 要么 $\ell_r \geq k$ 和 $k + i_k \geq r$。3. λ 恰好有三种颜色，并且 (a) 要么 $\ell_r \leq k - 1$，(b) 要么 $\ell_r \geq k$、 $k + i_k \geq r$，且 ℓ_g –#$\{1_g\} < k + i_k - r + 1$，

其中 #$\{1_g\}$ 表示等于 1 的绿色部件的数量。

我们用 $\mathbf{N}$ 表示非负整数集。对于 $n \in \mathbf{N}$ 和 $r \geq 2$，令 $F_r(n)$ 表示 $\mathcal{F}_r(n)$ 的基数，其中 $\mathcal{F}_r(n)$ 是属于 $\mathcal{F}_r$的 n 的整数分拆集合。本文的主要结果是以下这一族恒等式：

定理 B。 对于所有 $n \in \mathbf{N}$ 以及所有整数 $r \geq 2$，数值 $F_r(n)$ 相等：

$$F_2(n) = F_3(n) = F_4(n) = \cdots .$$

此外，这个共同的值等于满足以下条件的 n 的整数分拆数：部件1可以有3 种颜色，而所有其他正整数都可以有2种颜色。

在 Gordon 恒等式中，每个 r 都会产生一个不同的恒等式，表达满足两类条件的分拆数之间的相等关系，而这些条件随 r 变化。定理 B 的非凡之处在于，所有依赖于 r 的条件——这些条件出现在 $\mathcal{F}_r$ 的定义中（其中一些条件源自 Gordon 恒等式中 $\mathcal{B}_{r,\ r}(n)$ 的定义条件）——被统一到一个含有可数无限多个项的单一恒等式中。

这个定理源于对某些曲面奇点的研究，即 A_r 奇点，其中 $r \in \mathbf{N}$ 且 $r \geq 1$。现在我们来说明， $\mathcal{F}_r$ 型三色分拆如何受到这些曲面奇点的启发。设$\mathbf{K}$为特征为零的域，并考虑多项式

$$h_r := z^r - xy \in \mathbf{K}[x, y, z].$$

对于 $r \geq 2$，由 $X_{r-1} = \{h_r = 0\}$ 定义的曲面在原点处有一个所谓的 A_{r-1} 奇点，它是一个有理双重点奇点；这个奇点也可以看作是 $\mathbb{A}^2$ 在一个循环群作用下的商。

X_r 的弧空间$X_{r,\infty}$ 是参数化 X_r 上弧的模空间。弧 γ 由一个幂级数向量给出

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\sum_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} x_i t^i, \sum_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} y_i t^i, \sum_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} z_i t^i) \in (\mathbf{K}[[t]])^3$$

满足

$$h_r(\gamma(t)) = 0.$$

如果我们写出展开式

$$h_r(\gamma(t)) = \sum H_i t^i,$$

那么，弧空间是在具有坐标 x_i, y_i, z_i （其中 $i \geq 0$）的无限维仿射空间中由下列方程定义的代数簇（实际上是一个概形）：

$$H_i = 0, i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}.$$

而 $\mathcal{A}_r$ 上多项式函数的环 $X_{r,\infty}$ 由下式给出：

$$\mathcal{A}_r = \frac{\mathbf{K}[x_i, y_i, z_i, i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}]}{(H_i, i \in \mathbf{Z}_{\geq 0})}.$$

经过变量替换（分别将 x_i, y_i, z_i 替换为 $x_i/(i!)$ $y_i/(i!)$ $z_i/(i!)$），可以证明，理想 $(H_i \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ 的像是$\mathbf{K}[x_i, y_i, z_i \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}]$的一个微分理想。更确切地说，环 $\mathbf{K}[x_i, y_i, z_i \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}]$ 自然带有如下导子 D：

$$D(x_i) = x_{i+1},\ D(y_i) = y_{i+1}\ D(z_i) = z_{i+1}.$$

理想 $(H_i \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ 经变量替换后的变换满足：对于任意 $f \in (H_i \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$，有$D(f) \in (H_i \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$（例如，命题 2.3 见 [19]）；下文中，我们将此理想视为定义在与微分结构相适配的变量中的理想；滥用记号时，也将其记为 $(H_i \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$。

现在，若我们赋予每个变量 x_i，y_i，z_i 权重 i （对应于 $i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$），那么每个多项式 H_j 都是权重为 j的加权齐次多项式。这赋予环 $\mathcal{A}_r$ 一个自然的分次，即，

$$\mathcal{A}_r = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \mathcal{A}_j,$$

其中 $\mathcal{A}_i \cdot \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$. 我们特别关注弧 γ，其中心是奇点 $0 \in X_{r-1}$，即满足条件 $\gamma(0) = 0$ 的弧空间 γ ；我们将其记为 $X^0_{r,\infty}$。$X^0_{r,\infty}$ 上的函数环是商

$$\mathcal{A}^0 := \mathbf{K}[x_i, y_i, z_i, i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}]/\mathfrak{a},$$

其中

$$\mathfrak{a} = (\overline{H}_i, i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}) \subset \mathbf{K}[x_i, y_i, z_i, i \geq 1], \tag{1}$$

并且$\overline{H}_i$ 由 H_i 通过令 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$得到。

环 $\mathcal{A}^0 = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \mathcal{A}^0_j$ 仍然是分次的，因此可以考虑它的希尔伯特级数；按定义，这就是 X_{r-1} 在 0 处的弧希尔伯特-庞加莱级数（弧 HP 级数）：

$$\mathrm{AHP}_{X_{r-1},0}(q) := \sum_{j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \dim_{\mathbf{K}} \mathcal{A}^0_j q^j.$$

现在，可以观察到代数

$$\mathcal{S} := \mathbf{K}[x_i, y_i, z_i, i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}]$$

也继承了由赋予变量的权重所确定的分次。对于 $\mathcal{S}$ 中的每个单项式，都可以通过将大小为 i 的黑色、红色和绿色部件分别赋给 x_i、y_i 和 z_i，与一个三色分拆对应起来。例如，与单项式 $x_2^2 y_2 z_3 z_4$ 对应的三色分拆是 $4_g + 3_g + 2_r + 2_b + 2_b$.

一方面，为了确定向量空间 $\mathcal{A}^0_j$、$j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ 的维数，我们要在 $\mathcal{S}$ 中寻找单项式，使它们在 $\mathcal{A}^0_j$ 中的像构成所需的基。关于哪些单项式能达到这一目的的猜想，源于格罗布纳基的计算；这一猜想促使我们引入整数分拆族，并将其记为 $\mathcal{F}_r$、$r \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$。

另一方面，喷射概形的几何性质使我们能够计算弧-HP 级数 $\mathrm{AHP}_{X_{r-1},0}(q)$ [20]，结果表明，它是 n 的整数分拆的生成级数，其中部件 1 有 3 种颜色，所有其他正整数部件有 2 种颜色。这一观察直接引出了本文主要结果的陈述，其证明依赖于组合学和微分代数领域近期的若干进展；特别是，证明依赖于对以下文献主要结果的一种强化 [3]，，我们利用以下文献的结果建立了这一强化 [11, 6] （见定理 *3.5*）。

2. 奇点处弧空间的一种可能的初始理想

本节中，我们关注环 $\mathcal{S}$ （见式 (1)）的理想 $\mathfrak{a}$ 的格罗布纳基描述，并采用加权逆字典序。更确切地说，我们重点研究其初始（或首项）理想。下面将提出一个描述该初始理想的猜想。

下面定义的理想包含于环 $\mathcal{S}$ 中；令

$$I_r := (z_i^r, z_i^{r-1}z_{i+1}, \cdots, z_i z_{i+1}^{r-1} |\ i \geq 1)$$

并用 J_r 表示由以下单项式生成的理想：

- I_r 的单项式；- 形如

$$x_k y_{i_1} \cdots y_{i_k}$$

其中 $1 \leq k,\ 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k$ 且 $k + i_k \leq r-1$；- 形如

$$x_k y_{i_1} \cdots y_{i_k} z_{j_1} \cdots z_{j_{i_k+k-r+1}},$$

其中 $1 \leq k,\ 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k,\ 2 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{k+i_k-r+1}$ 和 $k + i_k \geq r.$

我们有如下猜想

猜想 2.1。 关于带权逆字典序的初始理想 $\mathfrak{a}$ 是上面定义的理想 J_r 。

如引言中所述，分次环 $\mathcal{S}$ 中的一个单项式自然对应于一个三色分拆，反之亦然。 $\mathcal{F}_r$ 中的分拆恰好对应于不属于理想 J_r，的单项式，或者等价地说，对应于在商环 $\mathcal{S}/J_r$. 中非零的单项式。特别地，序列 $F_r(n)$ 的生成级数等于 $\mathcal{S}/J_r$的希尔伯特级数，因为 $\mathcal{S}$ 中权重为 n 且不在 J_r 中的单项式构成了 $\mathcal{S}/J_r$ 中权重为 n的加权齐次分量的一个基。现在，交换代数中的一个标准结果表明，理想的希尔伯特级数与其关于保持分次的单项式序的首理想的希尔伯特级数相同（例如，参见 [15], [11]的附录）。因此，如果猜想 2.1 成立，则可推出 $\mathcal{S}/J_r$ 的希尔伯特级数等于 $\mathcal{S}/\mathfrak{a}$的希尔伯特级数，而后者按定义等于 $AHP_{X_{r-1}}(q)$。我们从 [20] 知道

定理 2.2。

$$AHP_{X_{r-1}}(q) = \frac{1}{1-q^3} \prod_{i \geq 2} \frac{1}{1-q^i}$$

可以观察到，定理 2.2 中的级数是 n 的整数分拆的生成级数，其中部件 1 可以有 3 种颜色，而所有其他正整数都可以有 2 种颜色。特别地，猜想 2.1 蕴含定理 B。然而，一般来说，要为一个非有限生成的理想求出格罗布纳基非常困难，我们的理想 $\mathfrak{a}$. 就属于这种情况。这说明了定理 B 背后的动机，而它成立这一事实为该猜想提供了有力的支持。

回顾引言，对于一个三色分拆 λ，我们用 ℓ_b（分别用 ℓ_r 和 ℓ_g）表示 λ 中黑色（分别为红色和绿色）部分的数量。若 λ 中存在最小黑色部分，我们用 k 表示它。若 $\ell_r \geq k$，我们用 i_k 表示 λ 中从小到大第 k 个红色部分。主定理的证明引出了对 $\mathcal{F}_r$ 中分拆的定义条件稍有不同的表述（不同于引言中的表述）；$\mathcal{F}_r$ 是由满足以下某一条件的三色分拆 λ 构成的集合：

1. 要么 $\lambda = \emptyset$，要么 λ 的所有部件都染成同一种颜色：黑色、红色或绿色；若该颜色为绿色，则 $\lambda \in \mathcal{B}_{r,\ r}(n)$ 属于某个正整数 n. 所对应的 Gordon 恒等式。2. λ 有两种颜色：黑色和绿色，或红色和绿色，其中绿色子分拆 λ_g 属于整数 n 所对应的 Gordon 恒等式 $\mathcal{B}_{r,\ r}(n)$。3. λ有两种颜色：黑色和红色，其中 (a) 要么 $\ell_r \leq k-1$，(b)，要么 $\ell_r \geq k$ 且 $k + i_k \geq r$。4. λ 有三种颜色（黑色、红色和绿色），其中绿色子分拆 λ_g 属于整数 n 所对应的 Gordon 恒等式 $\mathcal{B}_{r,\ r}(n)$，且 (a) 要么 $\ell_r \leq k-1$，(b)，要么 $\ell_r \geq k$ 且 $k + i_k \geq r$，其中 $\ell_g - \#\{1_g\} < k + i_k - r + 1$.

因此，$F_r(n)$ 的生成级数等于这四种分拆的生成级数之和。我们先引入一些关于特定生成级数的记号。

我们用以下式子表示所有分拆的生成级数：

$$\mathbf{H} := \sum_{n\in\mathbb{N}} p(n)q^n.$$

它满足众所周知的恒等式：

$$\mathbf{H} = \prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-q^j}.$$

我们用$\mathbf{G}_r$ 表示生成级数

$$\mathbf{G}_r := \sum_{n\in\mathbb{N}} B_{r,r}(n)q^n,$$

其中，$B_{r,\ r}(n)$ 是 Gordon 恒等式中出现的 n 的分拆数 s.

Th类型 1 的分拆数的生成级数显然等于 :

$$S_1 := \underbrace{1}_{\text{empty set}} + \underbrace{2(\mathbf{H}-1)}_{\text{single-colored black or red partitions}} + \underbrace{(\mathbf{G}_r - 1)}_{\text{single-colored green partitions}} \tag{2}$$

计算类型 2 的分拆的生成级数也很直接：

$$S_2 := 2(\mathbf{H}-1)(\mathbf{G}_r - 1). \tag{3}$$

确定 $\mathcal{F}_r$ 中其他类型分拆的数量的生成级数则要复杂得多，需要用到几个公式，我们将在接下来的章节中证明这些公式。

3. 有用的生成级数

本节将给出某些类型分拆的生成级数，稍后将用它们证明我们的主定理。

设 $k \geq 1$ 为一个整数。众所周知，长度至多为 k 的非空分拆的生成函数为（见 [8]）：

$$P_{\leq k} := \frac{1}{(q)_k} - 1, \tag{4}$$

其中 $(q)_0 := 1$，且 $(q)_n := (1-q)\cdots(1-q^n)$，对所有整数 $n \geq 1$ 均成立。

若要了解这一公式的交换代数证明，请注意，这些分拆正是与分次代数中的单项式相关联的分拆

$$\frac{\mathbf{K}[y_1, y_2, \cdots]}{(y_{i_1} \cdots y_{i_{k+1}})},$$

其希尔伯特-庞加莱级数等于 $\frac{1}{(q)_k} - 1$（见 [4] 中的注 3.2.）。

现在我们有如下引理，它给出了 $\mathcal{F}_r$ 的类型 3 和类型 4 黑色子分拆的生成级数：

引理 3.1. 设 $k \geq 1$ 是一个整数。最小部分等于 k 的分拆的生成函数为：

$$\frac{q^k}{\prod_{j\geq k}(1-q^j)}.$$

证明。一方面，我们可以将每个分拆 $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq k)$ 分解为两个子分拆：$\mu = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m)$ 和 $\eta = (k)$。另一方面，由于 μ 的所有部件都至少等于 k，其生成函数为 $\frac{1}{\prod_{j\geq k}(1-q^j)}$。另一方面，$\eta$ 由 q^k. 生成 □

注 3.2. 前一个引理可以用交换代数证明。注意，在此引理证明中，分拆集合 μ 与 $\mathbf{K}[x_k, x_{k+1}, \ldots]$ 中单项式的集合构成双射，其希尔伯特-庞加莱级数为 $\frac{1}{\prod_{j\geq k}(1-q^j)}$。

引理 3.3。 对于整数 $m \geq 1$，我们有：

$$\sum_{k\geq m} q^k (q)_{k-1} = (q)_{m-1} - \frac{1}{\mathbf{H}}.$$

证明。证明采用对 m. 的归纳法。回想一下，$\mathbf{H}$ 是所有分拆的生成级数。这些分拆包括空分拆，以及最小部分等于 k 的分拆，其中 $k \geq 1$. 因此，由引理 3.1 可得：

$$\mathbf{H} = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{q^k}{\prod_{j\geq k}(1-q^j)} = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{q^k (q)_{k-1}}{\prod_{j\geq 1}(1-q^j)} = 1 + \mathbf{H} \sum_{k\geq 1} q^k (q)_{k-1},$$

由此，归纳法的初始情形成立。现在假设命题中的公式对介于 1 和 $m.$ 之间的任意整数 m' 都成立。对于情形 $m' = m+1$，有：

$$(q)_m - \sum_{k\geq m+1} q^k(q)_{k-1} = (q)_m + q^m(q)_{m-1} - \sum_{k\geq m} q^k(q)_{k-1} = (q)_{m-1} - \sum_{k\geq m} q^k(q)_{k-1},$$

根据归纳假设，它等于 $1/\mathbf{H}$.

□

下面的引理给出了类型为 $3.b$ 和类型为 $4.b$的 $\mathcal{F}_r$红色子分拆的生成级数：

引理 3.4. 设 k、$i_k \geq 1$ 为整数。长度至少为 k 且第 k小部分等于 i_k 的分拆的生成级数为

$$\mathbf{H}\, q^{k+i_k-1}\frac{(q)_{k+i_k-2}}{(q)_{k-1}}.$$

证明. 一方面，我们可以将每个满足$\ell \geq k$的分拆 $\lambda = (i_\ell \geq \cdots \geq i_1)$分解为三个子分拆： $\mu = (i_\ell \geq \cdots \geq i_k)$ $\gamma = (i_{k-1} - 1 \geq \cdots \geq i_1 - 1)$和 $\eta = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{(k-1)\ \text{times}})$.

分拆 η 由 q^{k-1} 生成，而根据引理 3.1，分拆 μ由

$$\frac{q^{i_k}}{\prod_{j\geq i_k}(1-q^j)}.$$

注意， γ 是一个分拆，其杨图包含在大小为（i_k −1） ×（$k-1$）的矩形中，该矩形由 q-项二项式系数生成：

$$\begin{bmatrix} k+i_k-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_q := \frac{(q)_{k+i_k-2}}{(q)_{k-1}(q)_{i_k-1}}.$$

将这三个生成级数相乘即可得到结果。

□

设 $\ell, n \geq 0$ 和 $r \geq 2$ 为整数。设 $\mathcal{G}_{r,\ell}(n)$ 为由 $\mathcal{B}_{r,r}(n)$ 的分拆组成的集合，其中大于 1 的部件数小于或等于 $\ell.$ 。用 $G_{r,\ell}(n)$ 表示该集合的基数。 命题 3.7 给出了这些分拆的生成级数。注意，这与 $\mathcal{F}_r$ 的 $4.b$ 型绿色子分拆的生成级数有关（见下文注释 3.8）。在给出这个 q-级数之前，我们将介绍证明它时会用到的一些关键工具。

在 [1], 中，第一作者猜想了 Gordon 恒等式的一个新成员。换言之，她定义了一个新的分拆集合 $\mathcal{C}_{r,i}(n)$，其基数 $C_{r,i}(n)$ 等于 Gordon 恒等式的数量 $B_{r,i}(n)$。最近，这一猜想在 [3] 中得到了证明（另见 [2], 和 [6], 后者采用了微分代数方法）。为了证明这一猜想， [3]的作者定义了另一个分拆集合 $\mathcal{D}_{r,i}(n)$，并证明它等于集合 $\mathcal{C}_{r,i}(n)$（见 [3]中的定理 2.3）。

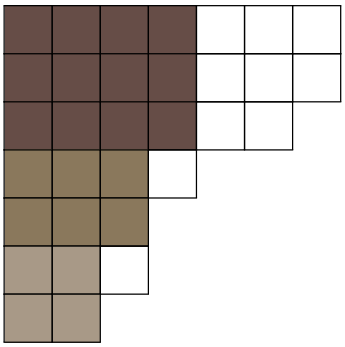

图 1. 分拆 $\lambda=(7,7,6,4,3,3,2)$ 的杨图。图中的 Durfee 矩形和 Durfee 方展示了 $\lambda\in\mathcal{D}_{4,2}(32)$。

为了引入$\mathcal{D}_{r,i}(n)$，我们需要定义分拆的*Durfee* 方和水平德福矩形：分拆的 Durfee 方（分别为水平 Durfee 矩形）是指能够放置在其杨图左上角的最大正方形（分别为尺寸为 $d\times(d+1)$ 的最大矩形）。类似地，我们可以定义连续的 Durfee 方／矩形：先画出第一个正方形／矩形，再在其下方画出下一个，以此类推。

集合 $\mathcal{D}_{r,i}(n)$ 包含 n 的分拆，这些分拆至多有 $r-i$ 个连续的水平 Durfee 矩形，后接 $i-1$ 个 Durfee 方，并且最后一个方形/矩形之后没有部件（当存在等于 1 的部件时，我们可以将水平 Durfee 矩形视为大小为 1×0）。例如，分拆 $\lambda=(7,7,6,4,3,3,2)$ 属于 $\mathcal{D}_{4,2}(32)$（见图 3）。另请注意，$\lambda\in\mathcal{D}_{6,4}(32)$。

根据 [3]方程 (2.4)，$\mathcal{D}_{r,i}(n)$ 的生成级数等于：

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_{r,i}(n)q^n=\sum_{\partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq 0}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2-\partial_1-\cdots-\partial_{r-i}}}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}(1-q^{\partial_{r-i}}),\tag{5}$$

其中 ∂_j 是第 j个 Durfee 方/矩形的最大边，且对于 $i=r$ ，我们有：

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_{r,r}(n)q^n=\sum_{\partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq 0}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2}}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}.$$

例如，在前面的例子中，我们有 $\partial_1=4$，$\partial_2=3$ 且 $\partial_3=2$ （见图 3）。

用 $b_{r,i}(m,n)$（分别用 $c_{r,i}(m,n)$ 和 $d_{r,i}(m,n)$）表示$\mathcal{B}_{r,i}(n)$（分别为 $\mathcal{C}_{r,i}(n)$ 和 $\mathcal{D}_{r,i}(n)$）中恰有 m个部件的分拆数。根据 [11] 和 [6], 的结果，我们可以推导出：

定理 3.5. 令 m,n 为整数。我们有如下恒等式

$$b_{r,i}(m,n)=c_{r,i}(m,n)$$

证明. 我们证明 $i = r$ 情形下的定理；其他情形可类似地得出。考虑环的微分理想 $\mathcal{I}$

$$\mathcal{S}_1 := \mathbf{K}[x_i,\ i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}],$$

由 x_1^r 以及其所有迭代导数 $D^j(x_1^r)$ 生成，其中 $j \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$。这里，与引言中一样，$D$ 表示由 $D(x_i) = x_{i+1}$ 定义的导子，并通过莱布尼茨法则将其扩展到整个代数。迭代导数递归定义为 $D^j(x_1^r) = D(D^{j-1}(x_1^r))$，其中 $D^1 = D$ 和 D^0 为恒等映射。如引言中所述，理想 $\mathcal{I}$ 是加权齐次的，若我们赋予 x_i 权重i，但它对于通常次数也齐次，即，若对每个 i都赋予x_i 权重 1（这是因为 x_1^r 是齐次的，因此其所有迭代导数也都是齐次的）。由此我们推得环

$$\mathcal{R} := \mathcal{S}_1/\mathcal{I} = \sum_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \mathcal{R}_{i,d}$$

是双分次的，其中$\mathcal{R}_{i,\ d}$ 是权重为 i且次数为 d的元素的双齐次分量。考虑由通常次数定义在 $\mathcal{S}_1$ 上的部分单项式序，然后用加权逆字典序或加权字典序进一步细化，前者给出全单项式序 $<_1$，后者给出全单项式序 $<_2$（此处，x_i的权重为 i）。也就是说，给定两个单项式 M，$M' \in \mathcal{S}_1$，那么当 M 的次数严格小于 M'的次数，或者二者次数相同且 M按加权逆字典序（分别按加权字典序）小于 M'时，有 $M <_1 M'$（分别有 $M <_2 M'$）。现在，若从上文定义的 $\mathcal{I}$ 的齐次生成元开始，并按照 Buchberger算法计算两个生成元的 $S-$多项式（分别相对于 $<_1$ 和 $<_2$），我们会发现，这与按照加权逆字典序（分别按加权字典序）计算这两个生成元的 $S-$多项式相同；即，考虑通常次数所定义的偏序并不会改变算法。由此可知，相对于加权逆字典序（分别相对于加权字典序）的初始理想，等于相对于序 $<_1$（分别相对于$<_2$）的初始理想。 我们称 $\mathcal{I}'$（分别称 $\mathcal{I}''$）为 $\mathcal{I}$ 相对于加权逆字典序（分别相对于加权字典序）的初始理想。这些环

$$\mathcal{R}' := \mathcal{S}_1/\mathcal{I}' = \sum_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \mathcal{R}'_{i,d}$$

$$\mathcal{R}'' := \mathcal{S}_1/\mathcal{I}'' = \sum_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \mathcal{R}''_{i,d}$$

再次是双分次的，其中 i 表示权重，d 表示次数。由于理想 $\mathcal{I}'$ 和 $\mathcal{I}''$ 是关于兼顾权重和次数的单项式序的初始理想，我们得到以下等式：

$$\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{R}'_{i,d} = \dim_{\mathbf{K}} \mathcal{R}_{i,d} \text{ and } \dim_{\mathbf{K}} \mathcal{R}''_{i,d} = \dim_{\mathbf{K}} \mathcal{R}_{i,d}.$$

由 [11] 可得

$$\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{R}'_{i,d} = b_{r,i}(m,n)$$

以及 [1]和 [6] ，从而

$$\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{R}''_{i,d} = c_{r,i}(m,n).$$

因此，等式 $b_{r,i}(m,n) = c_{r,i}(m,n)$ 成立。 □

下面给出一个命题，其中给出了验证 Gordon 恒等式差分条件的分拆的生成级数，并固定其长度$m \geq 0$:

命题 3.6。对于整数 m、$n \geq 0$、$r \geq 2$和 $1 \leq i \leq r$，有:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} b_{r,i}(m,n)q^n = \sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=m+r-i \\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq 0}} \frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2-\partial_1-\cdots-\partial_{r-i}}(1-q^{\partial_{r-i}})}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}$$

证明。由定理 3.5，我们有 $b_{r,i}(m,n) = c_{r,i}(m,n)$。由 [3], 中的定理 2.3，我们有 $c_{r,i}(m,n) = d_{r,i}(m,n)$，因此这三个数相等。若记 ∂_j 为第 j 个 Durfee 方 / 矩形的最长边，则我们可以按照 [3] 中计算$D_{r,i}(n)$的生成级数的方法，计算$d_{r,i}(m,n)$的生成级数。不同之处在于，这里必须将分拆的长度设为 m，它等于 $(\partial_1 - 1) + \cdots + (\partial_{r-i} - 1) + \partial_{r-i+1} + \cdots + \partial_{r-1}$。我们得到与公式（5）相同的公式，只是固定长度为 m:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} d_{r,i}(m,n)q^n = \sum_{\substack{(\partial_1-1)+\cdots+(\partial_{r-i}-1)+\partial_{r-i+1}+\cdots+\partial_{r-1}=m \\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq 0}} \frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2-\partial_1-\cdots-\partial_{r-i}}(1-q^{\partial_{r-i}})}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}.$$

□

现在我们可以确定 $G_{r,\ell}(n)$ 的生成级数:

命题 3.7. 设 ℓ、$n \geq 0$ 和 $r \geq 2$ 为整数。$G_{r,\ell}(n)$ 的生成级数 $G_{r,\ell}$ 等于:

$$\sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=0 \\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq 0}}^{\ell+r-1} \frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2}}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}} - \sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=\ell+r \\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq 0}} \frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2-(\ell+r)}(1-q^{\ell+r})}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}.$$

证明。 设 $\lambda \in \mathcal{G}_{r,\ell}(n)$. 因此，它的各部件满足 Gordon 差分条件，我们有

$$L(\lambda) - \#\{\text{parts equal to 1 of } \lambda\} \leq \ell.$$

由于 λ 至多有 $r-1$ 个等于 1 的部件，因此 $\mathcal{G}_{r,\ell}(n)$ 等于集合 λ 的并集，其中包含 $\mathcal{B}_{r,r}(n)$ 的分拆，且恰有 j 个部件等于 1，并且满足 $L(\lambda) - j \leq \ell$,其中 $j = 0, \ldots, r-1$.

回顾一下，$b_{r,i}(m,n)$ 是满足 Gordon 差分条件、恰有 m 个部件且等于 $i-1$ 的部件至多有 n 个的分拆数

1. 令 $b_{r,\,0}(m,\ n)\ =0$。注意，$b_{r,\,i}(m,\ n)-b_{r,\,i-1}(m,\ n)$ 等于 $\mathcal{B}_{r,\,r}(n)$ 的分拆数，其中恰有 m 个部件，且其中恰有 $i-1$ 个部件等于 1（见 [8] 中定理 7.5 的证明）。因此

$$\mathcal{G}_{r,\ell}(n)=\bigcup_{i=1}^{r}\{\lambda\in\mathcal{B}_{r,r}(n)|\ m-(i-1)\leq\ell\ \text{ and }\lambda\text{ is counted by }b_{r,i}(m,n)-b_{r,i-1}(m,n)\},$$

由于并集中各集合互不相交，我们有：

$$G_{r,\ell}(n)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{m=0}^{\ell+i-1}\Big(b_{r,i}(m,n)-b_{r,i-1}(m,n)\Big)=\sum_{m=0}^{\ell+r-1}b_{r,r}(m,n)-\sum_{i=1}^{r-1}b_{r,i}(\ell+i,n).$$

利用上述方程考察$G_{r,\ell}(n)$的生成级数，然后在$b_{r,r}(m,n)$和$b_{r,i}(\ell+i)$上应用命题 3.6，可得：

$$G_{r,\ell}=\sum_{n\in\mathbb{N}}G_{r,\ell}(n)q^n=\sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=0\\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq0}}^{\ell+r-1}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2}}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}$$

$$-\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{\substack{(\partial_1-1)+\cdots+(\partial_{r-i}-1)+\partial_{r-i+1}+\cdots+\partial_{r-1}=\ell+i\\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq0}}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2-\partial_1-\cdots-\partial_{r-i}}}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}(1-q^{\partial_{r-i}}).$$

注意，对于每个 $1\leq i\leq r$，最后一个和的条件是 $\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=\ell+r.$。因此，我们可以交换最后两个和的顺序。现在展开最后一个和，然后将分数通分，得到：

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}G_{r,\ell}(n)q^n&=\sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=0\\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq0}}^{\ell+r-1}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2}}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}\\&\quad-\sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=\ell+r\\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq0}}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2}\Big(q^{-\partial_1-\cdots-\partial_{r-1}}(1-q^{\partial_{r-1}})+\cdots+q^{-\partial_1}(1-q^{\partial_1})\Big)}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}\\&=\sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=0\\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq0}}^{\ell+r-1}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2}}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}\\&\quad-\sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=\ell+r\\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq0}}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2}\Big(q^{-\partial_1-\cdots-\partial_{r-1}}-1\Big)}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}\end{aligned}$$

将分子中最后一个和里的 $-\partial_1-\cdots-\partial_{r-1}$ 替换为 $-(\ell+r)$，并按 $q^{-(\ell+r)}$ 因式分解，即得所需结果。

□

注释 3.8。 对于每个类型为 $4.b$ 的分拆 $\lambda \in \mathcal{F}_r(n)$，都有 $\lambda_g \in \mathcal{G}_{r,\ k+i_k-r}(n)$，其中 n 是某个正整数，k 是 λ_b 的最小部分，而 i_k 是 λ_r. 中第 k 小的部分

注 3.9。 注意，$\mathcal{G}_{r、\ell}（n）$的分拆就是与代数的单项式相关联的分拆

$$\frac{\mathbf{K}[z_1, z_2, \cdots]}{(I_r, z_{j_1} \cdots z_{j_{\ell+1}} |\ 2 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{\ell+1})}.$$

因此，该代数的希尔伯特-庞加莱级数等于 $G_{r、\ell}（n）$ 的生成级数，这在命题 *3.7* 中有所表示。

对于正整数 $m \geq 0$，记

$$X_m := \sum_{n \in \mathbb{N}} d_{r,r}(m, n) q^n.$$

根据命题 3.6，我们有等式

$$X_m = \sum_{\substack{\partial_1 + \cdots + \partial_{r-1} = m \\ \partial_1 \geq \cdots \geq \partial_{r-1} \geq 0}} \frac{q^{\partial_1^2 + \cdots + \partial_{r-1}^2}}{(q)_{\partial_1 - \partial_2} \cdots (q)_{\partial_{r-2} - \partial_{r-1}} (q)_{\partial_{r-1}}}.$$

因此，采用此记号，$G_{r、\ell}$ 中的第一个和等于 $\sum_{m=0}^{\ell+r-1} X_m$.

关于$G_{r,\ \ell}$ 我们有以下引理，稍后将在最后一节中使用它来计算 $\mathcal{F}_r$ 类型为 $4.b$ 的分拆的生成级数（见下文引理 4.3）：

引理 3.10。以下方程成立：

$$\sum_{\ell \geq 0} q^{r+\ell} (q)_{r+\ell-1} \sum_{m=0}^{\ell+r-1} X_m = 1 - \frac{\mathbf{G}_r}{\mathbf{H}} + \sum_{m \geq r} X_m (q)_m.$$

证明。我们有：

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \geq 0} q^{r+\ell} (q)_{r+\ell-1} \sum_{m=0}^{\ell+r-1} X_m = {} & q^r (q)_{r-1} \sum_{m=0}^{r-1} X_m \\
& + q^{r+1} (q)_r \Big(\sum_{m=0}^{r-1} X_m + X_r \Big) \\
& + q^{r+2} (q)_{r+1} \Big(\sum_{m=0}^{r-1} X_m + X_r + X_{r+1} \Big) \\
& \vdots
\end{aligned}$$

对各列求和，得到：

$$\sum_{m=0}^{r-1} X_m \sum_{k \geq r} q^k (q)_{k-1} + X_r \sum_{k \geq r+1} q^k (q)_{k-1} + X_{r+1} \sum_{k \geq r+2} q^k (q)_{k-1} + \cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{r-1} X_m \sum_{k\geq r} q^k (q)_{k-1} + \sum_{m\geq r} X_m \sum_{k\geq m+1} q^k (q)_{k-1}.$$

两次应用引理 3.3，得到：

$$\sum_{m=0}^{r-1} X_m \Big((q)_{r-1} - \frac{1}{\mathbf{H}}\Big) + \sum_{m\geq r} X_m \Big((q)_m - \frac{1}{\mathbf{H}}\Big) = (q)_{r-1} \sum_{m=0}^{r-1} X_m - \frac{1}{\mathbf{H}} \sum_{m\geq 0} X_m + \sum_{m\geq r} X_m (q)_m.$$

回顾：

$$\sum_{m\geq 0} X_m = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\geq 0} d_{r,r}(m,n) q^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} D_{r,r}(n) q^n = \mathbf{G}_r,$$

并且：

$$\sum_{m=0}^{r-1} X_m = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{r-1} d_{r,r}(m,n) q^n.$$

这是 $\mathcal{D}_{r,r}(n)$ 中至多有 $r-1$ 个部件的分拆的生成函数。注意，每个长度为 $\leq r-1$ 的分拆也至多有 $r-1$ 个连续 ***Durfee*** 方块，并且对于某个正整数 $n.$，属于 $\mathcal{D}_{r,r}(n)$。这意味着 $\sum_{m=0}^{r-1} d_{r,r}(m,n)$ 等于至多有 $r-1$ 个部件的 n 的分拆数。因此，由等式（4）可得：

$$\sum_{m=0}^{r-1} X_m = \underbrace{1}_{\text{empty set}} + P_{\leq r-1} = 1 + \frac{1}{(q)_{r-1}} - 1 = \frac{1}{(q)_{r-1}}.$$

因此我们有：

$$\sum_{\ell\geq 0} q^{r+\ell} (q)_{r+\ell-1} \sum_{m=0}^{\ell+r-1} X_m = 1 - \frac{\mathbf{G}_r}{\mathbf{H}} + \sum_{m\geq r} X_m (q)_m.$$

□

4. 代数 $\mathcal{S}/J_r$ 的希尔伯特-庞加莱级数

正如我们在第二节中提到的，$\mathcal{S}/J_r$ 的希尔伯特-庞加莱级数等于 $\mathcal{F}_r(n)$的生成级数。我们还计算了 $\mathcal{F}_r(n)$的类型 1 和类型 2 分拆的生成级数。本节中，我们计算它另外两种类型的生成级数，最后给出 $\mathcal{F}_r(n)$的生成级数。

引理 4.1。对于整数 $r \geq 2$ 和 $n \geq 0$，$\mathcal{F}_r(n)$的类型 3分拆的生成级数等于：

$$S_3 := 1 - 2\mathbf{H} + \mathbf{H}^2 \, \frac{(q)_{r-1}}{(q)_1}.$$

证明。为给出 S_3，我们将分别计算$\mathcal{F}_r(n)$中类型为 $3.a$和 $3.b$的分拆的生成级数，然后将它们相加。注意，每个类型 3 的分拆$\lambda \in \mathcal{F}_r(n)$恰好 有两种颜色：黑色和红色。

对于类型为 $3.a$的 λ 分拆，将 λ_b 的最小部分记为 k。回顾一下，在这种情况下，λ_r 的长度 ℓ_r 介于 1 和 $k-1$ 之间（因此 $k \geq 2$）。注意，类型为 $3.a$ 的分拆由与生成级数相同的 q-级数生成

1-着色分拆的生成级数 λ_b 乘以 1-着色分拆的生成级数 λ_r. 因此，利用引理 3.1 和等式（4），类型为$3.a$的分拆由下式生成:

$$\sum_{k\geq 2} \underbrace{\frac{q^k}{\prod_{j\geq k}(1-q^j)}}_{3.a \text{ 型黑色子分拆}} \Big(\underbrace{\frac{1}{(q)_{k-1}}-1}_{3.a \text{ 型红色子分拆}} \Big) = \mathbf{H}\,\frac{q^2}{(q)_1} - \sum_{k\geq 2}\frac{q^k}{\prod_{j\geq k}(1-q^j)}.$$

注意，根据引理 3.1，和 $\sum_{k\geq 2}\prod_{j\geq k}\underbrace{q^k\ (1-q^j)\ \text{生成}}$除空集以及最小部分等于 1 的分拆之外的所有分拆。因此，这个和等于 $\mathbf{H}-1-q\mathbf{H}$，所以分拆 $3.a$ 的生成级数等于:

$$S_{3,a} := \mathbf{H}\left(\frac{2q-1}{(q)_1}\right)+1. \tag{6}$$

对于类型为 $3.b$的分拆 λ，记 λ_b 的最小部分为 $k.$。回想一下， λ_r 的长度 ℓ_r 大于或等于 k，其第 k 小的部分为 $i_k\geq 1$，满足 $k+i_k\geq r.$。因此，利用引理 3.1 和引理 3.4，我们得到类型为 $3.b$ 的分拆的生成级数如下:

$$S_{3,b} = \sum_{k\geq 1}\sum_{\substack{i_k\geq r-k\\ i_k\geq 1}} \underbrace{\frac{q^k}{\prod_{j\geq k}(1-q^j)}}_{\text{Black sub-partitions of type } 3.b} \Big(\underbrace{\mathbf{H}.q^{k+i_k-1}\frac{(q)_{k+i_k-2}}{(q)_{k-1}}}_{\text{red sub-partitions of type } 3.b} \Big). \tag{7}$$

这等于:

$$\mathbf{H}^2\sum_{k\geq 1}q^k\sum_{\substack{i_k\geq r-k\\ i_k\geq 1}}q^{k+i_k-1}(q)_{k+i_k-2} = \mathbf{H}^2\Big[\sum_{k=1}^{r-1}q^k\sum_{i_k\geq r-k}q^{k+i_k-1}(q)_{k+i_k-2} + \sum_{k\geq r}q^k\sum_{i_k\geq 1}q^{k+i_k-1}(q)_{k+i_k-2}\Big],$$

分别对 $m=r-1$ 和 $m=k$ 各应用一次引理 3.3，得到 :

$$\begin{aligned}&\mathbf{H}^2\Big[\sum_{k=1}^{r-1}q^k\big((q)_{r-2}-\frac{1}{\mathbf{H}}\big)+\sum_{k\geq r}q^k\big((q)_{k-1}-\frac{1}{\mathbf{H}}\big)\Big]\\ &=\mathbf{H}^2\Big[\big((q)_{r-2}-\frac{1}{\mathbf{H}}\big)\frac{q(1-q^{r-1})}{(q)_1}+\sum_{k\geq r}q^k(q)_{k-1}-\frac{1}{\mathbf{H}}\frac{q^r}{(q)_1}\Big].\end{aligned}$$

再次应用引理 3.3 于 $m=r$ 并进行化简，我们得到类型为 $3.b$的分拆的生成级数如下:

$$S_{3,b} = \mathbf{H}^2\frac{(q)_{r-1}}{(q)_1}-\mathbf{H}\frac{1}{(q)_1},$$

将这一最后公式与公式 (6) 相加，即得结果。 □

引理 4.2. 对于整数 $r \geq 2$ 和 $n \geq 0$，类型为 $4.a$的 $\mathcal{E}_{r-1}(n)$分拆的生成级数等于:

$$S_{4,a} := (\mathbf{G}_r - 1)S_{3,a}.$$

证明。 注意，对于每个类型为 $4.a$ 的分拆 λ，子分拆 λ_b, λ_r 和 λ_g均非空。记 λ_b 的最小部分为 k。回想此时$\ell_r \leq k-1$，且 $\lambda_g \in \mathcal{B}_{r,r}(n)$. 因此， λ_g 由 $\mathbf{G}_r - 1$ 生成；结合引理 3.1 和方程（4），我们得到:

$$S_{4,a} = \sum_{k\geq 2} \underbrace{\frac{q^k}{\prod_{j\geq k}(1-q^j)}}_{\text{Black sub-partitions of type } 4.a} \Big(\underbrace{\frac{1}{(q)_k} - 1}_{\text{red sub-partitions of type } 4.a} \Big) \Big(\underbrace{\mathbf{G}_r - 1}_{\text{Green sub-partitions of type } 4.a} \Big).$$

我们可以将$\mathbf{G}_r - 1$ 移出求和号。剩余部分等于 $S_{3,a}$ （见引理 4.1 的证明）。□

命题 4.3. 对于整数 $r \geq 2$ 和 $n \geq 0$，类型为 $4.b$ 的 $\mathcal{F}_r(n)$ 分拆的生成级数等于:

$$S_{4,b} := \frac{\mathbf{H}^2 - \mathbf{H}\,\mathbf{G}_r}{(q)_1} - S_{3,b}.$$

证明。 对于每个类型为 $4.b$ 的 $\mathcal{F}_r$ 的分拆 λ，记 k 为 λ_b.的最小部分。回忆一下，在这种情况下， $\ell_r \geq k$，其中 $k+i_k \geq r$ 且 $\ell_g - \#\{1_g\} < k+i_k-r+1$，其中 i_k 是 λ_r. 中第 k 小的部分。还要回忆，$\lambda_g \in \mathcal{G}_{r,\ k+i_k-r}$（$n$）对某个正整数 n 成立（见注释 3.8）。因此，利用引理 3.1 和引理 3.4，我们得到::

$$\sum_{k\geq 1} \sum_{\substack{i_k \geq r-k \\ i_k \geq 1}} \underbrace{\frac{q^k}{\prod_{j\geq k}(1-q^j)}}_{\text{Black sub-partitions of type } 4.b} \Big(\underbrace{\mathbf{H}.q^{k+i_k-1}\frac{(q)_{k+i_k-2}}{(q)_{k-1}}}_{\text{red sub-partitions of type } 4.b} \Big) \Big(\underbrace{G_{r,k+i_k-r} - 1}_{\text{Green sub-partitions of type } 4.b} \Big).$$

经过化简并利用方程 (7)，我们得到:

$$S_{4.b} = \mathbf{H}^2 \sum_{k\geq 1} \sum_{\substack{i_k \geq r-k \\ i_k \geq 1}} q^{2k+i_k-1}(q)_{k+i_k-2} G_{r,k+i_k-r} - S_{3,b}.$$

因此我们有:

$$S_{4.b} + S_{3.b} = \mathbf{H}^2 \Big[\sum_{k=1}^{r-1} \sum_{i_k \geq r-k} q^{2k+i_k-1}(q)_{k+i_k-2} G_{r,k+i_k-r} + \sum_{k\geq r} \sum_{i_k \geq 1} q^{2k+i_k-1}(q)_{k+i_k-2} G_{r,k+i_k-r} \Big]$$

展开每个双重和中的第二个和可得:

$$\mathbf{H}^2\Big[\sum_{k=1}^{r-1}\Big(q^{r+k-1}(q)_{r-2}G_{r,0}+q^{r+k}(q)_{r-1}G_{r,1}+q^{r+k+1}(q)_rG_{r,2}+\cdots\Big)$$
$$+\sum_{k\geq r}\Big(q^{2k}(q)_{k-1}G_{r,k-r+1}+q^{2k+1}(q)_kG_{r,k-r+2}+q^{2k+2}(q)_{k+1}G_{r,k-r+3}+\cdots\Big)\Big].$$

现在展开这两个和，我们得到 $\mathbf{H}^2$ 倍:

$$\begin{array}{lll}
q^r(q)_{r-2}G_{r,0} & +q^{r+1}(q)_{r-1}G_{r,1} & +q^{r+2}(q)_rG_{r,2}+\cdots\\
+q^{r+1}(q)_{r-2}G_{r,0} & +q^{r+2}(q)_{r-1}G_{r,1} & +q^{r+3}(q)_rG_{r,2}+\cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
+q^{2r-2}(q)_{r-2}G_{r,0} & +q^{2r-1}(q)_{r-1}G_{r,1} & +q^{2r}(q)_rG_{r,2}+\cdots\\
 & +q^{2r}(q)_{r-1}G_{r,1} & +q^{2r+1}(q)_rG_{r,2}+\cdots\\
 & & +q^{2r+2}(q)_rG_{r,2}+\cdots\\
 & & \ddots
\end{array}$$

对列求和，得到:

$$\begin{aligned}
S_{4.b}+S_{3.b}&=\mathbf{H}^2\sum_{\ell\geq 0}(q^{r+\ell}+\cdots+q^{2r+2\ell-2})(q)_{r+\ell-2}G_{r,\ell}\\
&=\mathbf{H}^2\sum_{\ell\geq 0}\frac{q^{r+\ell}(1-q^{r+\ell-1})}{(q)_1}(q)_{r+\ell-2}G_{r,\ell}\\
&=\mathbf{H}^2\sum_{\ell\geq 0}\frac{q^{r+\ell}}{(q)_1}(q)_{r+\ell-1}G_{r,\ell}.
\end{aligned}$$

利用命题 3.7，我们现在替换 $G_{r,\ \ell}$:

$$S_{4.b}+S_{3.b}=\frac{\mathbf{H}^2}{(q)_1}\sum_{\ell\geq 0}q^{r+\ell}(q)_{r+\ell-1}\Big(\sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=0\\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq 0}}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2}}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}$$
$$-\sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=\ell+r\\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq 0}}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2-(\ell+r)}(1-q^{\ell+r})}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}\Big).$$

化简并采用引理 3.10 的记号，我们得到:

$$S_{4.b}+S_{3.b}=\frac{\mathbf{H}^2}{(q)_1}\Big(\sum_{\ell\geq 0}q^{r+\ell}(q)_{r+\ell-1}\sum_{m=0}^{\ell+r-1}X_m$$
$$-\sum_{\ell\geq 0}(q)_{r+\ell}\sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=\ell+r\\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq 0}}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2}}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}\Big).$$

利用 引理 3.10，并在最后两个和中将变量 $\ell+r$ 换为 m，得到 :

$$S_{4.b}+S_{3.b}=\frac{\mathbf{H}^2}{(q)_1}\Big(1-\frac{\mathbf{G}_r}{\mathbf{H}}+\sum_{m\geq r}X_m(q)_m$$
$$-\sum_{m\geq r}(q)_m\sum_{\substack{\partial_1+\cdots+\partial_{r-1}=m\\ \partial_1\geq\cdots\geq\partial_{r-1}\geq 0}}\frac{q^{\partial_1^2+\cdots+\partial_{r-1}^2}}{(q)_{\partial_1-\partial_2}\cdots(q)_{\partial_{r-2}-\partial_{r-1}}(q)_{\partial_{r-1}}}\Big).$$

这等于:

$$\frac{\mathbf{H}^2}{(q)_1}\Big(1-\frac{\mathbf{G}_r}{\mathbf{H}}+\sum_{m\geq r}X_m(q)_m-\sum_{m\geq r}X_m(q)_m\Big)=\frac{\mathbf{H}^2-\mathbf{H}\,\mathbf{G}_r}{(q)_1}.$$

□

回想一下， $F_r(n)$ 是与代数$\mathcal{S}/J_r$相关的权重为 n 的分拆数。现在我们可以证明本文的主要结果，该结果在引言中表述为定理 B，并给出了与 A_{r-1}相关的一族无穷多个三色分拆恒等式:

The定理 4.4. 对于所有 $n\in\mathbf{N}$ 以及所有整数 $r\geq 2$，数值 $F_r(n)$ 均相等:

$$F_2(n)=F_3(n)=F_4(n)=\cdots.$$

此外，这个共同的数值等于 n 的整数分拆数，其中部件 1 可以有 3 种颜色，而所有其他正整数都可以有2种颜色。

证明。 如前所述，对于任意整数 $r\geq 2$，$F_r(n)$ 的生成级数等于类型 **1** 至 **4** 的分拆的生成级数之和$\mathcal{F}_r(n)$。由命题 4.2 和 4.3 可得:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} F_r(n)q^n &= S_1 + S_2 + S_3 + S_{4,a} + S_{4,b} \\ &= S_1 + S_2 + S_3 + (\mathbf{G}_r - 1)S_{3,a} + \frac{\mathbf{H}^2 - \mathbf{H}\,\mathbf{G}_r}{(q)_1} - S_{3,b} \\ &= S_1 + S_2 + \mathbf{G}_r S_{3,a} + \frac{\mathbf{H}^2 - \mathbf{H}\mathbf{G}_r}{(q)_1}.\end{aligned}$$

结合方程 (2) 和 (3) 以及方程 (6)，可得：

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} F_r(n)q^n &= \Big(2\mathbf{H} + \mathbf{G}_r - 2\Big) + \Big(2(\mathbf{H}-1)(\mathbf{G}_r - 1)\Big) \\ &\quad + \mathbf{G}_r\Big(\mathbf{H}\left(\frac{2q-1}{(q)_1}\right) + 1\Big) + \frac{\mathbf{H}^2 - \mathbf{H}\,\mathbf{G}_r}{(q)_1} \\ &= \frac{\mathbf{H}^2}{(q)_1} + \mathbf{H}\,\mathbf{G}_r\Big(2 + \frac{2q-1}{(q)_1} - \frac{1}{(q)_1}\Big) \\ &= \frac{\mathbf{H}^2}{(q)_1}.\end{aligned}$$

因此，对于任意整数 $r \geq 2$，$\mathcal{F}_r(n)$ 的基数 $F_r(n)$ 等于$\mathbf{H}^2/(q)_1$ 中 q^n 的系数。这意味着，对于任意整数 $r \geq 2$，$F_r(n) = F_{r+1}(n)$。□

注 4.5。正如我们在定理 *4.4* 的证明中所见，我们其实不需要计算 $S_{3,\,b}$。不过，我们已在引理 *4.1* 中完成了计算。

参考文献

[1] Afsharijoo, P. 探寻 Gordon 恒等式的新成员。组合学年刊 *25* (2021), 543–571. 8, 11[2] Afsharijoo, P., Dousse, J., Jouhet, F., and Mourtada, H. 交换代数带来的 Gordon 恒等式新伴随式。*Lothar* 组合学研讨会 *86B* (2022), Art. 48, 12. 2, 8[3] Afsharijoo, P., Dousse, J., J ouhet, F., and Mourtada, H. 受交换代数启发的 Andrews-Gordon 恒等式新伴随式。《数学进展》*417* (2023), Paper No. 108946, 40. 2, 4, 8, 9, 11[4] Afsharijoo, P., and Mourtada, H. 分拆恒等式及其在无限维格罗布纳基中的应用，反之亦然。弧概形会议论文集 (2019), 145–160. 7[5] Afsharijoo, P., and Mourtada, H. 邻接分拆、超图与 Gordon 恒等式。《组合理论杂志》*A*辑 *210* (2025), Paper No. 105963, 16. 2[6] Ait El Manssour, R., and Pogudin, G. 胖点弧空间的重数结构。《代数与数论》(2023). 4, 8, 9, 11[7] Andrews, G. E. q级数：其在分析、数论、组合学、物理学和计算机代数中的发展与应用，第 66 卷，收录于*CBMS* 数学区域会议丛书。数学科学会议委员会，华盛顿特区；由美国数学会出版，普罗维登斯，罗得岛，1986。2

[8] Andrews, G. E. 分拆理论。剑桥数学丛书。剑桥大学出版社，1998。7, 12[9] Baxter, R. J. 硬六边形：精确解。《物理学杂志*A*》*13*, 3 (1980), L61–L70. 2[10] Bressoud, D., Ismail, M. E. H., and Stanton, D. Bailey 对的换底。《拉马努金杂志》*4*, 4 (2000), 435–453. 2[11] Bruschek, C., Mourtada, H., and Schepers, J. 弧空间与罗杰斯–拉马努金恒等式。《拉马努金杂志》*30*, 1 (2013), 9–38. 2, 4, 5, 9, 11[12] Fulman, J. 罗杰斯–拉马努金恒等式的概率证明。《伦敦数学学会会刊》*33*, 4 (2001), 397–407. 2[13] Garrett, K., Ismail, M. E. H., and Stanton, D. 罗杰斯–拉马努金恒等式的变体。《应用数学进展》*23*, 3 (1999), 274–299. 2[14] Gordon, B. 罗杰斯–拉马努金恒等式的一种组合推广。《美国数学杂志》*83* (1961), 393–399. 1[15]Greulel, G. M., and Pfister, G. 交换代数导论。施普林格出版社，2002。5[16] Griffin, M. J., Ono, K., and Warnaar, S. O. 罗杰斯–拉马努金恒等式及其算术性质的一个框架。《杜克数学杂志》*165*, 8 (2016), 1475–1527. 2[17] Lepowsky, J., and Zhu, M. Gordon 恒等式的一个启发式证明。《拉马努金杂志》*29*, 1-3 (2012), 199–211. 2[18] Mohsen, Z., and Mourtada, H. 邻接分拆与罗杰斯–拉马努金恒等式的分子。《国际数论杂志》*19*, 4 (2023), 859–872. 2[19] Mourtada, H. 复平面分支的喷射概形与等奇异性。《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》*61*, 6 (2011), 2313–2336. 3[20] Mourtada, H. 有理双点曲面奇点的喷射概形。赋值理论互动，欧洲数学学会会议报告丛书，欧洲数学学会 (2014), 373–388. 4, 5[21] Mourtada, H. Hilbert 遇见 Ramanujan：奇点理论与整数分拆。《美国数学学会通报》（新系列）*62*, 1 (2025), 93–111. 2

跨学科数学研究所、代数、几何与拓扑系、数学科学学院、马德里康普顿斯大学、科学广场3号，马德里28040，西班牙。pafshari@cyu.fr pgonzalez@mat.ucm.es

巴黎西岱大学、索邦大学、法国国家科学研究中心、Jussieu-Paris Rive Gauche数学研究所，巴黎75013，法国，hussein.mourtada@imj-prg.fr