arXiv:2601.12059v1 [math.AC] 17 Jan 2026

几乎相干环

Xiaolei Zhang天水师范学院数学与统计学院，中国天水 741001

摘要

受 P. Scholze 关于 p-进域上真刚性解析簇的$\mathbf{F}_p$-上同调群有限性的研究启发，Zavyalov 最近引入了几乎相干环的概念，该概念在几乎环理论中起着关键作用。本文从几乎平坦模和几乎绝对纯模的角度刻画几乎相干环，并将众多经典结果纳入几乎数学的框架。此外，我们证明每个几乎相干的 R-模都不几乎同构于一个相干的 R-模，从而对 [14, B. Zavyalov, *Almost coherent modules and almost coher-ent sheaves*, 欧洲数学学会回忆录 19. 柏林：欧洲数学学会（EMS）， 2025] 中提出的问题给出了否定答案。

关键词：几乎相干环；近平坦模；几乎绝对纯
pure 模；覆盖与包络。
*2020*年数学主题分类：13E99。

1. INTRODUCTION

本文中，我们固定一个“基”交换环 R，及其一个理想 $\mathfrak{m}$，使得 $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$。对于一个环 R，我们总是相对于 $\mathfrak{m}$，在 R 上进行几乎数学。

为了构建证明其关于 p-进霍奇理论的主要猜想所需的关键工具，G. Faltings 于 20 世纪 80 年代末和 90 年代开创了几乎环理论。这些结果揭示了代数簇在 p-进域上的上同调的深层结构。随着完美拟几何的兴起，几乎环理论的强大威力得到了充分印证；完美拟几何由 P. Scholze[10] 发展而来。完美拟几何基本定理，即倾斜对应，指出特征零中的完美拟代数的几何与其倾斜（即特征 p 中的完美代数）的几何“几乎等价”。

几乎相干性的思想源自 P. Scholze 关于 p-进域上真刚性解析簇的$\mathbf{F}_p$-上同调群有限性的工作。在

[11], P. Scholze 得到了一个几乎同构

$$\mathrm{H}^i\big(X,\mathbf{F}_p\big)\otimes\mathcal{O}_C/p\simeq^a\mathrm{H}^i\big(X,\mathcal{O}_{X_a}^+/p\big)$$

对于任意 X 上的适当刚解析簇，其中 p是代数闭域。该几乎同构使我们能够将研究某个 p-进适当刚解析空间 X 的 $\mathbf{H}^i(X,\mathbf{F}_p)$ 的某些性质，归结为研究上同调群 $\mathbf{H}^i\left(X,\mathcal{O}_{X_a}^+/p\right)$ 的几乎性质，或完整复形 $\mathbf{R}\Gamma(X,\mathcal{O}_{X_a}^+/p)$ 的几乎性质。特别地，Scholze 通过从 $\mathcal{O}_C/p$ 上 $\mathbf{H}^i\left(X,\mathcal{O}_{X_a}^+/p\right)$ 的几乎相干性推导出 $\mathbf{H}^i(X,\mathbf{F}_p)$ 是有限群。

相干环是诺特环的推广，在交换代数理论中非常基础且重要。众所周知，环 R 是相干的，当且仅当任意平坦 R-模的乘积（投射 R-模、R 的副本）是平坦的；当且仅当每个 R-模都有一个平坦预包络；当且仅当绝对纯 R-模的任意纯商模都是绝对纯的；当且仅当绝对纯 R-模的任意直极限都是绝对纯的；当且仅当任意 R-模都有一个绝对纯（预）覆盖；当且仅当对于任意绝对纯模 E 和内射模 I，$\mathrm{Hom}_R(E,I)$ 是平坦的；当且仅当对于任意平坦模 F 以及任意内射模 I_1 和 I_2，$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(F,I_1)\ I_2)$ 是平坦的。最近，B. Zavyalov[14] 正式引入了几乎相干环、模和层的概念，这些概念在几乎环理论中发挥着关键作用。本文的主要动机，是将上述关于相干环的经典结果推广到几乎相干环。除此之外，我们证明每个几乎相干 R-模都不与某个相干 R-模几乎同构，从而否定了 [14]提出的一个问题。

2. Preliminaries and a counterexample to a problem proposed by Zavyalov

由于我们的结果涉及几乎环，我们引用 [7, 14]中的一些基本概念。若R-模 M 满足 $\mathfrak{m}M$ 是零模，则称其为几乎为零。范畴Σ_R是 $\mathbf{Mod}_R$ 的满子范畴，由所有几乎为零的 R-模组成，并且是 $\mathbf{Mod}_R$的 Serre子范畴。因此，可以引入商范畴，称为几乎 R-模范畴，

$$\mathrm{Mod}_R^a:=\mathrm{Mod}_R/\Sigma_R.$$

我们将 $\mathbf{Mod}_R^a$ 中的元素称为几乎 R-模或 R^a-模。注意，局部化函子

$$(-)^a\colon\mathrm{Mod}_R\to\mathrm{Mod}_R^a$$

是正合的。因此，我们可以将一列 R-模称为

$$\cdots \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_n \to \cdots$$

当相应的 R^a-模序列

$$\cdots \to M_1^a \to M_2^a \to \cdots \to M_n^a \to \cdots$$

在 Mod_R^a 中正合时，称其为几乎正合列。若相应的态射 $f\colon M \to N$ 在 Mod_R^a 中的 $f^a\colon M^a \to N^a$ 是同构（分别为单射、分别为满射），则称态射 f 为几乎同构（分别为几乎单射、分别为 几乎满射）。由 [14, 引理 2.1.8] 可知，态射 f 是几乎单射（分别为几乎满射、分别为几乎同构）当且仅当 $\mathrm{Ker}(f)$（分别为 $\mathrm{Coker}(f)$、分别为 $\mathrm{Ker}(f)$ 和 $\mathrm{Coker}(f)$）是几乎零模。

引理 2.1。 [16, 引理 4。1] 设 R 为一个环，且 $s \in R$。设 $\{M_i \mid i \in \Gamma\}$ 为由 R-模组成的定向系统。则

$$s \varinjlim M_i \cong \varinjlim sM_i.$$

命题 2.2。 几乎零模、几乎单射、几乎满射和几乎同构的类在直极限下封闭。此外，几乎正合列的直极限也是几乎正合的。

证明。 设 $\{M_i \mid i \in \Gamma\}$ 是由几乎为零的 R-模组成的定向系统。令 $M = \varinjlim M_i$。那么对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，根据引理 2.1，有 $sM = s\varinjlim M_i \cong \varinjlim sM_i = 0$。设 $\{f_i\colon M_i \to N_i \mid i \in \Gamma\}$ 是由 R-模之间的几乎单射组成的定向系统。令 $f = \varinjlim f_i$。那么对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，我们有 $s\mathrm{Ker}(f) = s\mathrm{Ker}(\varinjlim f_i) \cong s\varinjlim \mathrm{Ker}(f_i) \cong \varinjlim {}^s\mathrm{Ker}(f_i) = 0$，这再次由引理 2.1 得出。因此，$f$ 是几乎单射。几乎满射和几乎同构的情形类似。“此外”部分成立，是因为直极限与核、像和余核也可交换。□

命题 2.3。 设 E 是一个内射余生成元。那么以下陈述等价。

(1) T 几乎为零。(2) $\mathrm{Hom}_R(T,$
$E)$ 几乎为零。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)：对于任意 $s \in \mathfrak{m}$ 以及任意 $f \in \mathrm{Hom}_R(T, E)$ 和任意 $t \in T$，我们有 $sf(t) = f(st) = f(0) = 0$。因此，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，$sf = 0$，也就是说，$\mathrm{Hom}_R(T, E)$ 几乎为零。

(2) $\Rightarrow$ (1)：对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，令 $f_s\colon sT \to E$ 为一个 R-同态，i 为嵌入映射。由于 E 是单射，存在一个 R-同态 $g\colon T \to E$，使得 $f_s = gi$。对于任意 $t \in T$，我们有 $f_s(st) = sg(t) = 0$，因为

$s\mathrm{Hom}_R(T,\ E)\ =0$。因此 $\mathrm{Hom}_R(sT,\ E)\ =0$。于是 $sT=0$，因为 E 是内射余生成元。由此可得 T 几乎为零。□

以下是几乎数学中的“五引理”。

命题 2.4. 设 R 是一个环。考虑下面这个行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{g_1} & B & \xrightarrow{g_2} & C & \xrightarrow{g_3} & D & \xrightarrow{g_4} & E \\ \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \downarrow{\scriptstyle f_D} & & \downarrow{\scriptstyle f_E} \\ A' & \xrightarrow{h_1} & B' & \xrightarrow{h_2} & C' & \xrightarrow{h_3} & D' & \xrightarrow{h_4} & E'. \end{array}$$

(1) 如果 f_B 和 f_D 是几乎单态射，且 f_A 是几乎满射，那么 f_C 是几乎单态射。(2) 如果 f_B 和 f_D 是几乎满射，且 f_E 是几乎单射，那么 f_C 是几乎满射。(3)如果 f_A 是几乎满射，f_E 是几乎单射，且 f_B 和 f_D 是几乎同构，那么 f_C 是几乎同构。(4)如果 f_A、f_B、f_D 和 f_E 都是几乎同构，那么 f_C 是几乎同构。

证明。 证明与经典情形类似，因此略去。 □

回顾 [14, 定义 2.5.1]，称一个 R模 M 几乎有限生成，如果对任意 $s\in\mathfrak{m}$，都存在一个整数 n_s 和一个 R同态

$$R^{n_s}\xrightarrow{f}M$$

使得 $\mathrm{Coker}(f)$ 被 $s.$ 消去。并且回顾 [14, 定义 2.5.2]，称一个 R模M 几乎有限表示，如果对任意 $s,\ t\in\mathfrak{m}$，都存在整数$n_{s,\ t}$，$m_{s,\ t}$以及一个复形

$$R^{m_{s,t}}\xrightarrow{g}R^{n_{s,t}}\xrightarrow{f}M$$

使得 $\mathrm{Coker}(f)$ 被 s 消去，并且 $t\mathrm{Ker}(f)\subseteq\mathrm{Im}(g)$。

定义 2.5。 [14, 定义 2.6.1，定义 2.6.12]设 R 是一个环，且 M 是一个R模。

(1) 如果一个 R-模 M 几乎有限生成，且其每个几乎有限生成子模 $N^a\subseteq M^a$ 都几乎有限表示，则称它是几乎相干的。(2) 如果环 R 作为 R- 模是几乎相干的，则称其为几乎相干环 R。

命题 2.6。 环 R 几乎相干，当且仅当其每个有限生成理想 R 都几乎有限表示。因此，每个几乎相干环都是相干环。

证明。 我们只需证明充分性。设 I 是 R的一个几乎有限生成理想。那么存在 I 的一个有限生成子理想 J，使得 I/J 几乎为零。记 i: $J \hookrightarrow I$ 为嵌入映射。由于 J 是有限生成的，根据假设，它也是几乎有限表示的。因此，对于任意 $s,t \in \mathfrak{m}$, 存在整数$n_{s,t}$,$m_{s,t}$ 以及一个复形

$$R^{m_{s,t}} \xrightarrow{g} R^{n_{s,t}} \xrightarrow{f} J$$

使得 Coker(f) 被 s 消去，并且 tKer(f) $\subseteq$Im(g)。 容易验证,

$$R^{m_{s,t}} \xrightarrow{g} R^{n_{s,t}} \xrightarrow{i\circ f} I$$

是 I所需的复形，也就是说， I 是几乎有限表示的。因此，R 是一个几乎相干环。 □

显然，每个相干环都是几乎相干的。然而，反过来一般并不成立。

例 2.7。 设 R_1 是一个相干环， R_2 是一个非相干环。令$R = R_1 \times R_2$ 且 $\mathfrak{m} = R_1 \times 0$. 那么容易验证， R 是一个几乎相干环，但不是相干环。

B. Zavyalov [14] 通过以下引理证明，每个几乎同构于相干R-模的 R-模都是几乎相干的。

引理 2.8。 [14, 引理 2.6。5] 设 M 是一个 R-模。若对于任意有限生成理想 $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{m}$，存在一个相干 R-模 N 以及一个态射 f： $N \to M$，使得 $\mathfrak{m}_0$(核 f) $= 0$ 且 $\mathfrak{m}_0$(余核 f) $= 0$，则 M是一个几乎相干模

随后，他提出了以下问题:

问题 2.9。 [14,问题 2.6。6] 上述引理的逆命题是否成立?

简而言之，他询问每个几乎相干的 R-模是否几乎同构于一个相干R-模。现在，我们通过以下反例对这个问题给出了否定回答。

例 2.10。 令 $D = \mathbb{R}[x^{\frac{1}{n}} \mid n \geq 1]$，其中 $\mathbb{R}$ 是全体实数域。则 Q : $= \langle x^{\frac{1}{n}} \mid n \geq 1 \rangle$ 是 D 的一个极大理想。设 $V = D_Q$。则 V 是一个赋值整环，其极大理想为 $M := Q_Q$，赋值群为 $\mathbb{Q}$，即全体有理数构成的全序群。设 $R = \mathbb{Q} + M$ 是 V 的一个子环。由此可得

由 [4, 命题 4.9] 可知， R 是一个伪赋值整环。注意， R 的克鲁尔维数为 1，是一个非相干局部整环，其极大理想 M 并非有限生成（参见 [12, 推论 8.37，定理 8.5.17]）。设 $\mathfrak{m} := M$，则 $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$。由 [3, 定理 2.3] 可知， $\mathfrak{m}$ 是一个平坦的 R-模，$\mathfrak{m} \otimes_R \mathfrak{m}$. 也是

首先，我们断言 R 是一个几乎诺特环，因此也是几乎相干的。事实上， R 的唯一非零素理想是 M。于是，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，我们有$sM \subseteq \langle s \rangle \subseteq M$，因此 M 是几乎有限生成的。由 [15, 推论 3.3] 可知， R 是一个几乎诺特环，进而由 [14,推论 2.7.7]可知，它也是一个几乎相干环。

接下来，我们将证明 R 本身不可能几乎同构于任何相干的 R-模。反之，假设 R 几乎同构于一个相干的 R-模P。那么存在一个 R-模的正合列

$$0 \to T_1 \to P \xrightarrow{f} R \to T_2 \to 0,$$

使得 $sT_1 = sT_2 = 0$ 对任意 $s \in \mathfrak{m}$. 成立。于是，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，有 s(像(f)) $= sT_2 = 0$，因此 $\mathfrak{m} \subseteq$像(f)。由于 $\mathfrak{m}$是极大的，我们有像(f) $= \mathfrak{m}$或像(f) $= R$。由于P是有限生成的，像(f)也有限生成，因此像(f) $= R$，即 $T_2 = 0$。由于R 是投射的，短正合列 $0 \to T_1 \to P \to R \to 0$ 分裂。由于P 是一个相干的 R-模， R 本身也是相干的，这意味着 R 是一个相干环，矛盾。

3. Almost pure exact sequences

定义 3.1. 设 R 是一个环。若短正合列 $\Phi: 0 \to A \to B \to C \to 0$满足几乎纯，即 $\Phi^a: 0 \to A^a \to B^a \to C^a \to 0$是 Mod_R^a 中的纯正合列；等价地，对任意 R-模 M，诱导序列

$$M \otimes_R \Phi : 0 \to M \otimes_R A \to M \otimes_R B \to M \otimes_R C \to 0$$

是几乎正合的。

显然，任何纯正合列都是几乎纯的。文献 [13, 34.5] 中有许多关于纯正合列的刻画。下面的结果将其中一些刻画推广到几乎纯正合列。

定理 3.2. 设 $\Phi: 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} C \to 0$是一个$R$-模的短正合列。则以下陈述等价。

(1) Φ 是几乎纯的。(2) 对于任意有限表示的 R-模 M，诱导序列

$$M \otimes_R \Phi : 0 \to M \otimes_R A \to M \otimes_R B \to M \otimes_R C \to 0$$

是几乎正合的。

(3) 如果方程组 $f(a_i) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}x_j (i = 1, \ldots, n)$ 包含 $r_{ij} \in R$ 个未知数和 $x_1, \ldots, x_m$，且在 B 中有解，那么方程组 $sa_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}x_j (i = 1, \ldots, n)$ 对任意 $s \in \mathfrak{m}$ 都可在 A 中求解。

(4)对于任意给定的交换图，其中 F 是有限生成自由模，且 K 是 F 的有限生成子模，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，都存在一个 R-同态 $\eta_s : F \to A$，使得 $s\alpha = \eta_s i$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & F \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & \swarrow{\scriptstyle \eta_s} & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ & & A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array} ;$$

(5) 对于任意有限表示的 R-模 N，诱导序列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(N, A) \to \mathrm{Hom}_R(N, B) \to \mathrm{Hom}_R(N, C) \to 0$ 几乎正合。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：显然。

(2) $\Rightarrow$ (1)：设 M 是一个 R-模。那么 $M = \varinjlim M_i$，其中 $\{M_i \mid i \in \Gamma\}$是由有限表示的 R-模组成的定向系统。那么对每个 $i \in \Gamma$, $0 \to M_i \otimes_R A \xrightarrow{M_i \otimes_R f} M_i \otimes_R B \xrightarrow{M_i \otimes_R f'} M_i \otimes_R C \to 0$ 都是几乎正合的。因此, $\mathrm{Ker}(M_i \otimes_R f)$ 几乎为零。于是，由引理 2.1（或直接参见命题 2.2），$\mathrm{Ker}(M \otimes_R f) \cong \mathrm{Ker}(\varinjlim M_i \otimes_R f) \cong \varinjlim \mathrm{Ker}(M_i \otimes_R f)$ 几乎为零。

(2) $\Rightarrow$ (3)：设 M 是一个有限表示的 R-模。则存在一个正合列 $0 \to K \to F \to M \to 0$，其中 F 是有限生成自由 R-模，K 是 F的一个有限生成子模。根据(2)，$0 \to M \otimes_R A \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_R B \to M \otimes_R C \to 0$几乎正合。因此 $\mathrm{Ker}(1_M \otimes f) = 0$，从而 $\mathrm{Ker}(1_{F/K} \otimes f)$ 几乎为零。现在假设存在 $b_j \in B$，使得对于任意 $j = 1$，.....，m，都有 $f(a_i) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}b_j$。假设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 F的基，并设 K 由 m 个元素$\{\sum_{i=1}^{n} r_{ij}e_i \mid j = 1, \ldots, m\}$生成。那么，$M = F/K$ 由 $\{e_1 + K, \ldots, e_n + K\}$生成。注意，在 F/K中，$\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(e_i + K) = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}e_i + K = 0 + K$。因此，我们有

$$\sum_{i=1}^{n} ((e_i + K) \otimes f(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} ((e_i + K) \otimes (\sum_{j=1}^{m} r_{ij}b_j)) = \sum_{j=1}^{m} ((\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(e_i + K)) \otimes b_j) = 0$$

在 $F/K \otimes B$ 中。因此 $\sum_{i=1}^{n} ((e_i + K) \otimes a_i) \in$核$(1_{F/K} \otimes f)$。因此，$s\sum_{i=1}^{n} ((e_i + K) \otimes a_i) = \sum_{i=1}^{n} ((e_i + K) \otimes sa_i) = 0$ 在 $F/K \otimes_R A$ 中，对任意 $s \in \mathfrak{m}$。根据 [6, 第一章，引理 6.1],

t n存在 $d_j^s \in A$ 和 $l_{ij}^s \in R$，使得 $sa_i = \sum l_{ik}^s d_k^s$ 且 $\sum l_{ik}^s(e_i + K) = 0$，并且 $k=1$ $i=1$ n m n，因此 $\sum_{i=1}^{n} l_{ik}^s e_i \in K$。于是存在 $t_{jk}^s \in R$，使得 $\sum_{i=1}^{n} l_{ik}^s e_i = \sum_{j=1}^{m} t_{jk}^s(\sum_{i=1}^{n} r_{ij}e_i) =$ $_m\sum_{i=1}(\sum_{j=1}(t_{jk}^s r_{ij})e_i)$。由于 F是自由的，我们有 $l_{ik}^s = \sum_{j=1} r_{ij}t_{jk}^s$。因此

$$sa_i = \sum_{k=1}^{t} l_{ik}^s d_k^s = \sum_{k=1}^{t}(\sum_{j=1}^{m} r_{ij}t_{jk}^s)d_k^s = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}(\sum_{k=1}^{t} t_{jk}^s d_k^s)$$

t $_m$与 $\sum_{k=1} t_{jk}^s d_k^s \in A$。也就是说，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，$sa_i = \sum_{j=1} r_{ij}x_j$在 A中有解。

(3) $\Rightarrow$ (2): 设 M 是一个有限表示的 R-模。那么我们有一个正合列 $M \otimes_R A \xrightarrow{1\otimes f} M \otimes_R B \to M \otimes_R C \to 0$。我们将证明 $\mathrm{Ker}(1 \otimes f)$ 几乎为零。设 $\{\sum_{i=1}^{n_\lambda} u_i^\lambda \otimes a_i^\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 $\mathrm{Ker}(1 \otimes f)$ 的生成元。则 $\sum_{i=1}^{n_\lambda} u_i^\lambda \otimes f(a_i^\lambda) = 0$ 属于 $M \otimes_R B$，对每个 $\lambda \in \Lambda$均成立。根据第一章引理 6.1], , 存在 $r_{ij}^\lambda \in R$和 $b_j^\lambda \in B$，使得 $f(a_i^\lambda) = \sum_{j=1}^{m_\lambda} r_{ij}^\lambda b_j^\lambda$，且对每个$\lambda \in \Lambda$均有 $\sum_{i=1}^{n_\lambda} u_i^\lambda r_{ij}^\lambda = 0$。因此，$sa_i^\lambda = \sum_{j=1}^{m_\lambda} r_{ij}^\lambda x_j^\lambda$有一个解，记为 $a^{s,\ \lambda}_{\ \cdot\ j}$；根据 (2)，对任意 $s \in \mathfrak{m}$，该解属于 A。然后

$$s(\sum_{i=1}^{n_\lambda} u_i^\lambda \otimes a_i^{s,\lambda}) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} u_i^\lambda \otimes sa_i^{s,\lambda} = \sum_{i=1}^{n_\lambda} u_i^\lambda \otimes (\sum_{j=1}^{m_\lambda} r_{ij}^\lambda a_j^{s,\lambda}) = \sum_{j=1}^{m_\lambda}((\sum_{i=1}^{n_\lambda} r_{ij}^\lambda u_i^\lambda) \otimes a_j^{s,\lambda}) = 0$$

对于每个 $\lambda \in \Lambda$和任意 $s \in \mathfrak{m}$。因此，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，$s\mathrm{Ker}(1 \otimes f) = 0$。由此，$0 \to M \otimes_R A \to M \otimes_R B \to M \otimes_R C \to 0$ 几乎正合。

(3) $\Rightarrow$(4): 设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 为有限生成自由 R-模 $_mF$ 的基。假设 K 由 $\{y_i = \sum r_{ij}e_j \mid i = 1, \ldots, m\}$ 生成。对每个 i 和 j，令 $\beta(e_j) = b_j$，且 $_{j=1}$ m $_m\alpha(y_i) = a_i$。于是 $f(a_i) = \sum r_{ij}b_j$。由 (2)，存在某个 $d_j^s \in A$，使得 $sa_i = \sum r_{ij}d_j^s{}_{j=1}$ $_{j=1}$。令 η_s：$F \to A$ 为满足 $\eta_s(e_j) = d_j^s$的 R-同态。$_m$ $_m$ $_m$于是 $\eta_s i(y_i)$ $= \eta i(\sum r_{ij}e_j) = \sum r_{ij}\eta(e_j) = \sum r_{ij}d_j^s = sa_i = s\alpha(y_i)$，因此有 $j=1$ $j=1$ $j=1 s\alpha = \eta_s i$。

(4) $\Rightarrow$ (5): 设 $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(N, C)$。则存在 R-同态 $\delta : N \to B$ 和 $\alpha : K \to A$，使得下图交换且各行正合:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & F & \xrightarrow{\pi} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow[f]{} & B & \xrightarrow[f']{} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

对于任意 $s \in \mathfrak{m}$。于是有如下交换图，且各行正合:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & F & \xrightarrow{\pi} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle s\alpha} & \swarrow{\scriptstyle \eta_s} & \downarrow{\scriptstyle s\beta} & \swarrow{\scriptstyle \delta_s} & \downarrow{\scriptstyle s\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow[f]{} & B & \xrightarrow[f']{} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由 (4)，存在一个同态 $\eta_s : F \to A$，使得 $s\alpha = \eta_s i_K$。由 $[12, \text{Exercise 1.}60]$, 可知，存在一个 R-同态 $\delta_s : N \to B$，使得 $s\gamma = f'\delta_s$。因此，可以验证序列 R-sequence $0 \to \mathrm{Hom}_R(N, A) \to \mathrm{Hom}_R(N, B) \to \mathrm{Hom}_R(N, C) \to 0$ 几乎正合。

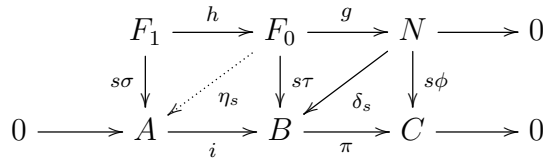
(5) $\Rightarrow$ (3): 设 $f(a_i) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} b_j (i = 1, \ldots, n)$，其中 $a_i \in A$, $b_j \in B$ 且 $r_{ij} \in R$。设 F_0 为以 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ 为基的自由模，F_1 为以 $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ 为基的自由模。于是存在 R-同态 $\tau : F_0 \to B$ 和 $\sigma : F_1 \to \mathrm{Im}(f)$，满足 $\tau(e_j) = b_j$ 且对每个 i, j 都有 $\sigma(e'_i) = f(a_i)$。定义一个 R-同态 $h : F_1 \to F_0$，使得对每个 i 都有 $h(e'_i) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} e_j$。于是 $\tau h(e'_i) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} \tau(e_j) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} b_j = f(a_i) = \sigma(e'_i)$。令 $N = \mathrm{Coker}(h)$。则 N 是有限生成表示的。因此存在一个同态 $\phi : N \to \mathrm{Coker}(f)$，使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & F_1 & \xrightarrow{h} & F_0 & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \vdots{\scriptstyle \phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow[i]{} & B & \xrightarrow[\pi]{} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

注意，诱导序列

$$\mathrm{Hom}_R(N, B) \to \mathrm{Hom}_R(N, C) \to 0$$

由（5）可知几乎正合。因此，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，都存在一个同态 $\delta_s : N \to C$，使得 $s\phi = \pi\delta_s$。考虑以下交换图：



我们断言，存在一个同态 $\eta_s : F_0 \to A$，使得 $\eta_s f = s\sigma$。事实上，由于 $\pi\delta_s g = s\phi g = \pi s\tau$，我们有 $\mathrm{Im}(s\tau - \delta_s g) \subseteq$核$(\pi) =$像$(f)$。定义 $\eta_s : F_0 \to$像(f)为满足 $\eta_s(e_i) = s\tau(e_i) - \delta_s g(e_i)$的同态，其中每个 i均如此。因此，对于每个 $e_i' \in F_1$，我们有 $\eta_s f(e_i') = s\tau f(e_i') - \delta_s g f(e_i') = s\tau f(e_i')$。于是 $i(s\sigma) = si\sigma = {}_m s\tau f = i\eta_s f$。因此，$\eta_s f = s\sigma$。从而 $sf(a_i) = s\sigma(e_i') = \eta_s f(e_i') = \eta(\sum_{j=1}^{m} r_{ij} e_j) = {}_m\sum r_{ij}\eta_s(e_j)$，其中 $\eta_s(e_j) \in$像(f)。所以我们有 $sa_i = st_1' f(a_i) = \sum_{j=1} r_{ij} t_1' \eta_s(e_j)$，且对于每个 i都有 $\sum_{j=1} {}_j t_1' \eta_s(e_j) \in A$。□

4. Characterizing almost coherent rings in terms of almost flat modules

本节将研究几乎平坦模的概念，并用几乎平坦模刻画几乎相干环。

定义4.1. [14,定义2.2.5]设 R 是一个环，且 M 是一个 R-模。

(1) 若函子

$$M^a \otimes_{R^a} - : \mathrm{Mod}_R^a \to \mathrm{Mod}_R^a$$

是正合的。

(2) 一个 R-模 M 几乎平坦，当且仅当 R^a-模 M^a 作为 R^a-模是平坦的。

命题 4.2。设 R 是一个环，M 是一个 R-模。则以下陈述等价。

(1) M 几乎平坦。(2) $\mathrm{Tor}_1^R(N, M)$ 对每个有限表示的 R-模 N 都几乎为零。(3) $\mathrm{Tor}_1^R(N, M)$ 对每个 R-模 N 都几乎为零。(4) $\mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ 对每个 R- 模 N 以及每个 $n \geq 1$. 都几乎为零

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：假设 M 是几乎平坦的 R-模。考虑正合列 $0 \to K \to F \to M \to 0$，其中 F 是平坦的 R-模。于是对于任意有限表示的R-模 N，都有长正合列 $0 \to \mathrm{Tor}_1^R(N, M) \to N \otimes_R K \to$

$N \otimes_R F \to N \otimes_R M \to 0$。由于 M^a是平坦的，$\mathrm{Tor}_1^R(N, M)$ 几乎为零。也就是说$s\mathrm{Tor}_1^R(N, M) = 0$ 对每个 $s \in \mathfrak{m}$ 以及每个有限表示的 R-模 N都成立。

(4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$(2)：平凡。

(2) $\Rightarrow$(1)：设 M 是一个 R-模。对于每个 R-模的几乎正合列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M \to 0$ ，设 N 是一个有限表示的 R-模。那么，根据假设，$0 \to N \otimes_R K \to N \otimes_R F \to N \otimes_R M \to 0$ 是几乎正合的，也就是说，函子 $M^a \otimes_{R^a} - : \mathrm{Mod}_R^a \to \mathrm{Mod}_R^a$ 是正合的。

(2) $\Rightarrow$ (3)：设 N 是一个 R-模。那么 $N = \varinjlim N_i$，其中 $\{N_i \mid i \in \Gamma\}$ 是由有限表示的 R-模组成的定向系统。根据假设，$\mathrm{Tor}_1^R(N_i, M)$ 几乎为零，因此，根据引理 2.2，$\mathrm{Tor}_1^R(N, M)$ 也几乎为零。

(3) $\Rightarrow$(4)：设 N是一个 R-模，且 $P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{f_0} N \to 0$是 N的一个投射分解。那么，对于每个每个 $n \geq 1$，$\mathrm{Tor}_n^R(N, M) \cong \mathrm{Tor}_1^R(\text{像}(f_{n-1}) M)$，后者根据假设几乎为零。□

推论 4.3. 设 R 是一个环。则以下陈述成立。

(1) 几乎平坦模的类在几乎同构下封闭。(2)几乎平坦模的类在直和项、直和、直极限和扩张下封闭。

证明。 这些陈述的证明是直接的，因此我们略去。 □

引理 4.4. 几乎平坦模的任何几乎纯子模和几乎纯商模都是几乎平坦的。

证明。 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个几乎纯正合列，其中 B 几乎平坦。令 M 为任意一个 R-模。由诱导的正合列可得结论

$$\mathrm{Tor}_2^R(M, C) \to \mathrm{Tor}_1^R(M, A) \to \mathrm{Tor}_1^R(M, B) \to \mathrm{Tor}_1^R(M, C) \to M \otimes_R A \to M \otimes_R B \to M \otimes_R C \to 0.$$ □

命题 4.5. R-模 F 几乎平坦，当且仅当任意正合列$0 \to A \to B \to F \to 0$ 几乎纯。

证明. 设 M 是有限表示的 R-模。假设 F 几乎平坦。则 $\mathrm{Tor}_1^R(M, F)$ 几乎为零。由诱导的正合列可得

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, F) \to M \otimes_R A \to M \otimes_R B \to M \otimes_R F \to 0.$$

另一方面，设 $0 \to A \to P \to F \to 0$ 是一个正合列，其中 P 是一个投射 R-模。则由下面的正合列可得该结论：

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R(M, F) \to M \otimes_R A \to M \otimes_R P \to M \otimes_R F \to 0.$$

□

设 M 是一个 R-模， $\mathscr{P}$ 是由 R-模构成的一个类。回顾 [9] 中的定义，若一个R-同态 $f : M \to P$ 满足 $P \in \mathscr{P}$ ，则称其为一个 $\mathscr{P}$-预包络，条件是对于任意 $P' \in \mathscr{P}$，自然同态 $\mathrm{Hom}_R(P, P') \to \mathrm{Hom}_R(M, P')$ 是满同态。

众所周知，环 R 是相干环，当且仅当任意平坦 R模的乘积都是平坦的；这又当且仅当任意 R模都有平坦预包络（见 [1, 定理 3.2.24，命题 6.5.1]）。现在，我们用几乎平坦模刻画几乎相干环。

The定理 4.6. 设 R 是一个环。则以下断言等价：

(1) R 是一个几乎相干环。(2) 任意几乎平坦 R模的乘积都是几乎平坦的。(3) 任意平坦 R模的乘积都是几乎平坦的。(4) 任意投射 R模的乘积都是几乎平坦的。(5) R 的任意多个副本的乘积都是几乎平坦的。(6) 任意 R模都有几乎平坦预包络。

证明。 **(1) ⇒ (2)**: 设 $\{F_i\}$ 是一族几乎平坦 R模。设 M 是一个有限表示 R模。考虑正合列

$$0 \to N \to P \to M \to 0$$

其中 P 有限生成投射，由 [14,引理 2.5.15]可知， N 几乎有限生成。由于 R 几乎相干，容易看出 P 是一个几乎相干的R-模。因此， N 几乎有限表示。于是存在一个 R-模的正合列

$$0 \to K \to Q \to N \to 0,$$

其中 K 有限生成，且由 [14,引理 2.5.15] 再次可知， Q有限生成投射。因此，存在一个 R-模的正合列

$$0 \to K' \to K \to T \to 0,$$

其中 K' 有限生成，且 T 几乎为零。

考虑以下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(M, \prod F_i) & \longrightarrow & N \otimes_R \prod F_i & \longrightarrow & P \otimes_R \prod F_i \\ & & \downarrow{\scriptstyle \theta_M^1} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_N} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ 0 & \longrightarrow & \prod \mathrm{Tor}_1^R(M, F_i) & \longrightarrow & \prod(N \otimes_R F_i) & \longrightarrow & \prod(P \otimes_R F_i) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} K\otimes_R\prod F_i & \longrightarrow & Q\otimes_R\prod F_i & \longrightarrow & N\otimes_R\prod F_i & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle\theta_K} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_N} & & \\ \prod(K\otimes_R F_i) & \longrightarrow & \prod(Q\otimes_R F_i) & \longrightarrow & \prod(N\otimes_R F_i) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{Tor}_1^R(T,\prod F_i) & \longrightarrow & K'\otimes_R\prod F_i & \longrightarrow & K\otimes_R\prod F_i & \longrightarrow & T\otimes_R\prod F_i & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle\theta_T^1} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_{K'}} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_K} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_T} & & \\ \prod\mathrm{Tor}_1^R(T,F_i) & \longrightarrow & \prod(K'\otimes_R F_i) & \longrightarrow & \prod(K\otimes_R F_i) & \longrightarrow & \prod(T\otimes_R F_i) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由于每个 F_i 都几乎平坦， $s\mathrm{Tor}_1^R(M,F_i)=0$，因此对于任意 $s\in\mathfrak{m}$，都有 $s\prod\mathrm{Tor}_1^R(M,F_i)=0$，也就是说， $\prod\mathrm{Tor}_1^R(M,F_i)$ 几乎为零。由于 K' 是有限生成的，$\theta_{K'}$ 是满同态。由于 T 几乎为零， $T\otimes_R\prod F_i$、 $\prod(T\otimes_R F_i)$、$\mathrm{Tor}_1^R(T,\prod F_i)$ 和 $\prod\mathrm{Tor}_1^R(T,F_i)$ 也几乎为零。因此， θ_K 是几乎满射。于是， θ_N 是几乎同构。所以， θ_M^1 也是几乎同构。因此，$\mathrm{Tor}_1^R(M,\prod F_i)$ 几乎为零。由此，根据命题 4.2，$\prod F_i$ 几乎平坦。

(2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒(5)：显然。(5) ⇒(1)：设 J 是 R的一个有限生成理想，$0\to J\to R\to R/J\to 0$ 是一个正合列。考虑如下交换图，

$$\begin{array}{ccccccc} J\otimes_R\prod_{i\in I}R & \xrightarrow{f} & R\otimes_R\prod_{i\in I}R & \longrightarrow & R/J\otimes_R\prod_{i\in I}R & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle\phi_{J,\mathcal{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_{R,\mathcal{R}}}\cong & & \downarrow{\scriptstyle\phi_{R/J,\mathcal{R}}}\cong & & \\ 0\longrightarrow\prod_{i\in I}(J\otimes_R R) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}(R\otimes_R R) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}(R/J\otimes_R R) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

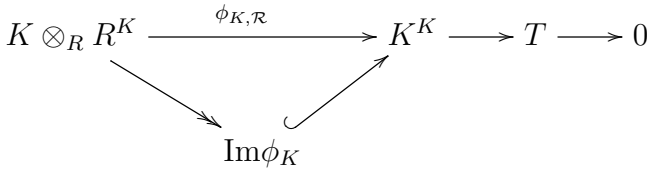
由于 $\prod_{i\in I}R$ 是一个几乎平坦模，因此 f 是一个几乎单射。因此，$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(\phi_{J,\mathcal{R}})$ 几乎为零，进而 $\phi_{J,\mathcal{R}}$ 是一个几乎单射。

考虑正合列 $0\to K\to F\to J\to 0$，其中 F 是一个有限生成自由模，则存在一个正合列的交换图，

$$\begin{array}{ccccccc} K\otimes_R\prod_{i\in I}R & \longrightarrow & F\otimes_R\prod_{i\in I}R & \longrightarrow & J\otimes_R\prod_{i\in I}R & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle\phi_{K,\mathcal{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_{F,\mathcal{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_{J,\mathcal{R}}} & & \\ 0\longrightarrow\prod_{i\in I}(K\otimes_R R) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}(F\otimes_R R) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}(J\otimes_R R) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

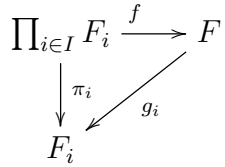
注意，$\phi_{J,\ \mathcal{R}}$ 是一个几乎单态射，而 $\phi_{F,\ \mathcal{R}}$ 是一个同构，因此根据引理 2.4，$\phi_{K,\ \mathcal{R}}$是一个几乎满射。

我们考虑正合列



几乎为零。令 $x = (k)_{k\in K} \in K^K$。那么 $sx \in$ 像$\phi_{K,\mathcal{R}}$ 对所有 $s \in \mathfrak{m}$ 均成立。随后，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$ 和任意 $i \in K$，存在 $k_j^s \in K, r_{j,i}^s \in R$，使得 $sx = \phi_{K,\mathcal{R}}(\sum_{j=1}^n k_j^s \otimes (r_{j,i}^s)_{i\in K}) = (\sum_{j=1}^n k_j^s r_{j,i}^s)_{i\in K}$。设 $L_s = \langle \{k_j^s | j = 1, ..., n\}\rangle$ 是 K 的有限生成子模。现在，对于任意 $k \in K$, $sk = \sum_{j=1}^n k_j^s r_{j,k}^s \in L_s$，因此 $sK \subseteq L_s \subseteq K$ 对任意 $s \in \mathfrak{m}$ 均成立，从而 K 几乎有限生成。因此，根据 [14, 引理 2.5.15], J 几乎有限表示。由此，根据命题 2.6， R 是一个几乎相干环。

(6) $\Rightarrow$ (2)：设 $\{F_i \mid i \in \Lambda\}$ 是一族几乎平坦模。根据假设， $\prod_{i\in I} F_i$ 有一个几乎平坦预包络 $f : \prod_{i\in I} F_i \to F$，其中 F 几乎平坦。因此我们有以下交换图:



因此，$\mathrm{Id}_{\prod_{i\in I} F_i} = (\prod_{i\in I} g_i) \circ f$。所以 $\prod_{i\in I} F_i$是 F的一个直和项。由推论 4.3 可知， $\prod_{i\in I} F_i$ 几乎平坦。

(2) $\Rightarrow$(6)：由 [1, 推论 6.2.2、引理 5.3.12] 可得。 □

5. ALMOST ABSOLUTELY PURE MODULES

回顾一下，若对任意有限表示的 R-模 N，都有 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M) = 0$，则称 R-模 M 是绝对纯的。现在，我们引入几乎绝对纯模的概念。

定义 5.1。 设 R 为一个环。若对于任意有限表示的 R-模N，$\mathrm{Ext}_R^1(N, M)$几乎为零，则称 R-模 M 为几乎绝对纯模。

接下来，我们将给出几乎绝对纯模的若干刻画。

定理 5.2。 设 R 为一个环，且 E 为一个 R-模。则以下陈述彼此等价。

(1) E 是几乎绝对纯的。

(2) 任何以 E 开头的短正合列 $0 \to E \to B \to C \to 0$ 都是几乎纯的。(3) E 是每个包含 E的内射模中的几乎纯子模。(4) E 是其内射包中的几乎纯子模。(5) 如果 P 是有限生成投射模， K 是P 的有限生成子模，且 $f: K \to E$ 是一个 R-同态，那么存在某个 $s \in \mathfrak{m}$ ，使得有一个R-同态 $g_s: P \to E$ ，满足 $sf = g_s i$ ，其中 $i: K \to P$ 是自然嵌入映射。

证明。 (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4)：显然。

(4) $\Rightarrow$(1)：令 I 为 E的内射包。由 (4) 得到几乎纯正合列 $0 \to E \to I \to L \to 0$ 。因此，根据定理 3.2，对于任意有限表示的 R-模 N， $0 \to \mathrm{Hom}_R(N, E) \to \mathrm{Hom}_R(N, I) \to \mathrm{Hom}_R(N, L) \to 0$ 几乎正合。由于 $0 \to \mathrm{Hom}_R(N, E) \to \mathrm{Hom}_R(N, I) \to \mathrm{Hom}_R(N, L) \to \mathrm{Ext}^1_R(N, E) \to 0$ 是正合的。因此，对于任意有限表示的R-模 N，$\mathrm{Ext}^1_R(N, E)$ 几乎为零，也就是说， E 是几乎绝对纯的。

(1) $\Rightarrow$ (2)：令 N 为有限表示的 R-模，且 $0 \to E \to B \to C \to 0$ 为一个正合列。那么，对于任意有限表示的 R-模N，存在一个正合列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(N, E) \to \mathrm{Hom}_R(N, B) \to \mathrm{Hom}_R(N, C) \to \mathrm{Ext}^1_R(N, E)$。由 (1) 可知，对于任意有限表示的 R-模 N， $0 \to \mathrm{Hom}_R(N, E) \to \mathrm{Hom}_R(N, B) \to \mathrm{Hom}_R(N, C) \to 0$ 几乎正合。因此，根据定理 3.2， $0 \to E \to B \to C \to 0$ 是几乎纯的。

(1) $\Rightarrow$ (5)：考虑正合列 $0 \to K \xrightarrow{i} P \to P/K \to 0$，可得如下正合列 $\mathrm{Hom}_R(P, E) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(K, E) \to \mathrm{Ext}^1_R(P/K, E) \to 0$。由于 P/K 是有限表示的，根据 (1)，$\mathrm{Ext}^1_R(P/K, E)$ 几乎为零。因此， i_* 是几乎满射，所以对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，都有 $s\mathrm{Hom}_R(K, E) \subseteq$ 像(i_*)。令 $f: K \to E$为一个 R-同态。于是存在一个 R-同态 $g_s: P \to E$ ，使得$sf = g_s i$。

(5) $\Rightarrow$ (1)：设 N 是一个有限表示的 R-模。则有正合列 $0 \to K \xrightarrow{i} P \to N \to 0$ ，其中 P 是有限生成投射模，且K 是有限生成的。考虑如下正合列 $\mathrm{Hom}_R(P, E) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(K, E) \to \mathrm{Ext}^1_R(N, E) \to 0$。根据 (5)，有 $s\mathrm{Hom}_R(K, E) \subseteq$ 像(i_*)。因此，对于任意有限表示的 R-模 N，$\mathrm{Ext}^1_R(N, E)$ 几乎为零，也就是说， E是几乎绝对纯的。□

命题 5.3。 设 R 为一个环， F 为一个 R-模。那么以下陈述等价。

(1) F 几乎平坦。

(2) $\mathrm{Hom}_R(F, E)$ 对于任意内射模 E，都是几乎绝对纯的。(3) 如果 E 是内射余生成元，那么 $\mathrm{Hom}_R(F, E)$ 是几乎绝对纯的。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)：设 M 是有限表示的 R-模， E 是内射的 R-模。由于 F 几乎平坦，$\mathrm{Tor}_1^R(M, F)$ 为零。因此，$\mathrm{Ext}_R^1(M, \mathrm{Hom}_R(F, E)) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_1^R(M, F), E)$ 也几乎为零。因此，$\mathrm{Hom}_R(F, E)$ 几乎绝对纯。

(2) $\Rightarrow$ (3)：显然。

(3) $\Rightarrow$ (1)：设 E 是一个内射余生成元。由于 $\mathrm{Hom}_R(F, E)$ 几乎绝对纯，对于任意有限表示的 R-模 M 以及任意 $s \in \mathfrak{m}$，我们有

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_1^R(M, F), E) \cong \mathrm{Ext}_R^1(M, \mathrm{Hom}_R(F, E))$$

几乎为零。由于 E 是一个内射余生成元，根据引理 2.3，$\mathrm{Tor}_1^R(M, F)$ 几乎为零。□

命题 5.4。 任意多个几乎绝对纯模的直积和直和仍是几乎绝对纯的。

证明。 设 $\{M_i \mid i \in \Gamma\}$ 是一族几乎绝对纯模。那么对于任意 $s \in \mathfrak{m}$ 以及任意有限表示的 R-模 N，我们有

$$s\mathrm{Ext}_R^1(N, \bigoplus_{i\in\Gamma} M_i) \cong s\bigoplus_{i\in\Gamma} \mathrm{Ext}_R^1(N, M_i) \cong \bigoplus_{i\in\Gamma} s\mathrm{Ext}_R^1(N, M_i) = 0,$$

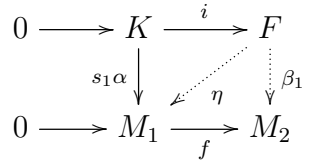
and

$$s\mathrm{Ext}_R^1(N, \prod_{i\in\Gamma} M_i) \cong s\prod_{i\in\Gamma} \mathrm{Ext}_R^1(N, M_i) \cong \prod_{i\in\Gamma} s\mathrm{Ext}_R^1(N, M_i) = 0.$$

□

命题 5.5。 几乎绝对纯模的任意几乎纯子模都是几乎绝对纯的。

证明。设 M_2 是一个几乎绝对纯模， M_1 是 M_2. 的一个几乎纯子模。设 K 是自由模 F 的一个有限生成子模。设 $\alpha: K \to M_1$ 是一个 R-同态。考虑如下交换图



由于 M_2 是几乎绝对纯的，根据定理 5.2，对于任意 $s_1 \in \mathfrak{m}$ ，都存在一个 R-同态β_1 ： $F \to M_2$ ，使得 $s_1 f\alpha = \beta_1 i$ 。由于 f 是几乎纯的，对于任意 $s_2 \in \mathfrak{m}$ ，都存在一个 R-同态 η_2 ： $F \to M_1$ ，使得 $s_1 s_2 \alpha = \eta_2 i$ ，根据

定理 3.2。由于 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$，容易验证，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，都存在一个R-同态 η_s：$F \to M_1$，使得 $s\alpha = \eta_s i$。因此，根据定理 5.2，M_1 是几乎绝对纯的。□

6. Characterzing almost coherent rings in terms of almost absolutely pure modules

设 M 为一个 R-模，$\mathscr{E}$ 为一类 R-模。由 [9] 可知，若一个R-同态 f：$E \to M$ 满足 $E \in \mathscr{E}$，则称其为 $\mathscr{E}$-预覆盖；如果对任意 $E' \in \mathscr{E}$，自然同态 $\mathrm{Hom}_R(E', E) \to \mathrm{Hom}_R(E', M)$ 是满同态。此外，任意满足 $f = f \circ h$ 的 R-同态 h：$E \to E$ 都是一个自同构。

引理 6.1。设 R 为一个环，$s \in R$ 且 ξ：$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 为 R-模的一个短正合列。那么，存在一个 R-同态 f'：$B \to A$ 满足$f' \circ f = s\mathrm{Id}_A$，当且仅当存在一个 R-同态 g'：$C \to B$ 满足$g \circ g' = s\mathrm{Id}_C$。

证明。假设存在一个 R-同态 f': $B \to A$，使得 $f' \circ f = s\mathrm{Id}_A$。定义映射 g'：$C \to B$ 如下。对于任意 $z \in C$，取 $y \in B$，使得 $g(y) = z$，并定义 $g'(z) = sy - f(f'(y))$。当 $g(y) = g(y') = z$时，取 $x \in A$使得$f(x) = y - y'$，因此 $(sy - f(f'(y))) - (sy' - f(f'(y'))) = s(y - y') - f(f'(y - y')) = sf(x) - f(f'(f(x))) = sf(x) - sf(x) = 0$，故 g' 是良定义的。还可以验证 g' 是线性的。最后，若 $g(y) = z$，则有 $g(g'(z)) = g(sy - f(f'(y))) = sz$，因为 $g \circ f = 0$。于是有 $g \circ g' = s\mathrm{Id}_C$。必要性可以类似地证明。□

众所周知，环 R 相干，当且仅当绝对纯 R-模的任意纯商模都是绝对纯的；当且仅当绝对纯 R-模的任意直极限都是绝对纯的；当且仅当任意 R-模都有绝对纯（预）覆盖。现在，我们给出几乎数学中的类似结果。

The定理 6.2. 设 R 是一个环。则以下陈述等价。

(1) R 是几乎相干的。(2) 几乎绝对纯 R-模的任意几乎纯商模都是几乎绝对纯的。(3) 几乎绝对纯 R-模的任意纯商模都是几乎绝对纯的。(4) 绝对纯 R-模的任意纯商模都是几乎绝对纯的。(5) 绝对纯 R-模的任意直极限都是几乎绝对纯的。

(6)几乎绝对纯 R-模的任意直极限都是几乎绝对纯的。(7) 任意 R-模都有一个几乎绝对纯预覆盖。(8) 任意 R-模都有一个几乎绝对纯覆盖。

证明.(1) $\Rightarrow$ (2): 设 R 是一个几乎相干环。设 B 是一个几乎绝对纯的 R-模。设 C 是 B 的几乎纯商模，且 A 是 B 的几乎纯子模。设 P 是一个有限生成投射 R-模，且 K 是 P 的有限生成子模。设 $i: K \to P$ 是自然嵌入映射，且 $f_C: K \to C$ 是一个 R-同态。我们断言，对任意 $s_1 \in \mathfrak{m}$，存在一个 R-同态 $g_{1,C}: P \to C$，使得 $s_1 f_C = g_{1,C} i$. 考虑以下正合列 $0 \to L \xrightarrow{i_L} P' \xrightarrow{\pi_{P'}} K \to 0$，其中 P' 是有限生成投射模。那么我们有以下交换图的正合列:

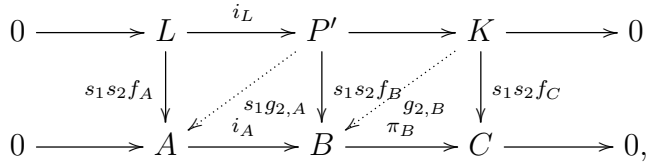
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i_L} & P' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & B & \xrightarrow{\pi_B} & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由于 R 几乎相干， L 几乎有限，因此存在正合列 $0 \to K' \xrightarrow{i_{K'}} L \xrightarrow{\pi_L} T \to 0$，其中 K' 有限生成，且 T 几乎为零。考虑以下推出:

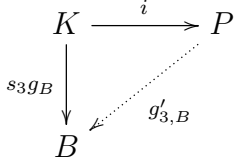
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{i_{K'}} & L & \longrightarrow & T & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle i_L} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & K & = & K & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

设 $f_A: L \to A$ 是一个 R-同态。由命题 5.5 可知， A 几乎绝对纯。因此，对于任意 $s_2 \in \mathfrak{m}$，存在一个 R-同态$g_{2,\ A}: P' \to A$，使得 $s_2 f_A i_{K'} = g_{2,\ A} i_L i_{K'}$。因此 $s_1 s_2 f_A = s_1 g_{2,\ A} i_L$。由此可知

[12,练习 1.60]我们有如下交换图：



满足 $s_1s_2f_C = \pi_B g_{2,\ B}$。由于 B 几乎绝对纯，由定理 5.2 可知，对于任意 $s_3 \in \mathfrak{m}$，存在一个 R-同态 $g'_{3,\ B}$：$P \to B$，使得下图交换：



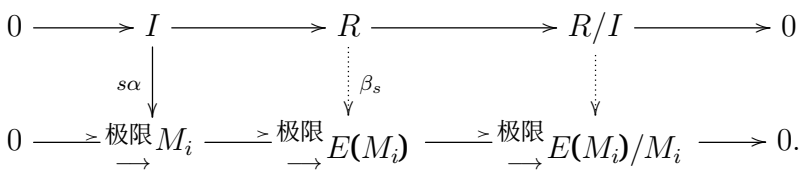
。因此，我们有 $s_1s_2s_3f_C = s_3\pi_B g_{2,\ B} = \pi_B g_{3,\ B} i = gi$，其中 $g = \pi_B g_{3,\ B}$ 对任意 s_1，s_2，$s_3 \in \mathfrak{m}$均成立。由于 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}^3$，容易验证，对任意 $s \in \mathfrak{m}$，存在 g_s：$P \to B$，使得 $sf_C = g_s i$。由定理 5.2 可知，C 是一个几乎绝对纯的 R-模。

(2) ⇒ (3) ⇒ (4)、(6) ⇒ (5) 和 (8) ⇒(7)：显然。

(3) ⇒ (6)：设 $\{M_i\}_{i\in\Gamma}$ 是由几乎绝对纯 R-模组成的一个定向系统。那么存在一个纯正合列 $0 \to K \to \bigoplus_{i\in\Gamma} M_i \to \varinjlim M_i \to 0$。注意，$\bigoplus_{i\in\Gamma} M_i$ 是几乎绝对纯的，因此根据 (3)，$\varinjlim M_i$ 也是如此。

(4) ⇒(5)：与 (3) ⇒(6) 类似。

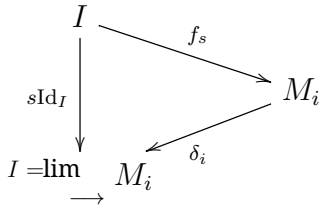
(5) ⇒(1)：设 I 是 R的有限生成理想，$\{M_i\}_{i\in\Gamma}$ 是 R-模的一个定向系统。设 $\alpha: I \to \varinjlim M_i$ 是一个同态。对于任意 $i \in \Gamma$，$E(M_i)$ 是 M_i的内射包。则 $E(M_i)$ 是绝对纯的。根据 (4)，$\mathrm{Ext}^1_R(R/I, \varinjlim M_i)$ 几乎为零。因此，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$，存在一个 R-同态 β_s：$R \to \varinjlim E(M_i)$，使得下图交换：



因此，根据 $[9,\ 引理\ 2.13],$ ，存在 $j \in \Gamma$，使得 β_s 可以经由$_R \xrightarrow{\beta_{j.}} \xrightarrow{s} E(M_j)$ 分解。考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R/I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle s\alpha_j} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{j,s}} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_j & \longrightarrow & E(M_j) & \longrightarrow & E(M_j)/M_j & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由于复合 $I \to R \to E(M_j) \to E(M_j)/M_j$ 在直极限中变为 0，我们可以假设 $I \to R \to E(M_j)$可经由某个 $I \xrightarrow{s\alpha_j} M_j$分解。因此， $s\alpha$ 可经由 M_j分解。由此，自然同态 $\varinjlim \mathrm{Hom}_R(I, M_i) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}_R(I, \varinjlim M_i)$ 是几乎满射。现在假设 $\{M_i\}_{i\in\Gamma}$ 是一个有限表示 R-模的定向系统，且 $\varinjlim M_i = I$。那么，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$ ，存在 $f_s \in \mathrm{Hom}_R(I, M_j)$，使得 $j \in \Gamma$ 成立，其中恒等映射 $s\mathrm{Id}_I = \phi(u_j(f_s))$，而 u_j 是自然同态 $\mathrm{Hom}_R(I, M_j) \to \varinjlim \mathrm{Hom}_R(I, M_i)$。也就是说，对于任意 $s \in \mathfrak{m}$ ，我们有如下交换图：



我们断言， I 是几乎有限表示的。事实上，考虑短正合列 $0 \to \mathrm{Ker}(\delta_i) \xrightarrow{i} M_i \xrightarrow{\pi} \mathrm{Im}(\delta_i) \to 0$。对任意 $s \in \mathfrak{m}$，令 $\pi'_s = f_s \circ i_I : \mathrm{Im}(\delta_i) \to M_i$，其中 $i_I : \mathrm{Im}(\delta_i) \to I$ 是嵌入映射。于是 $\pi \circ \pi'_s = \pi \circ (f_s \circ i_I) = (\pi \circ f_s) \circ i_I = \pi \circ f_s|_{\mathrm{Im}(\delta_i)} = s\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(\delta_i)}$. 由引理 6.1 可知，存在一个 R-同态 $i'_s : M_i \to \mathrm{Ker}(\delta_i)$，使得对任意 $s \in \mathfrak{m}$都有 $i'_s \circ i = s\mathrm{Id}_{\mathrm{Ker}(\delta_i)}$ 。由于 M_i是有限表示的，因此 $\mathrm{Ker}(\delta_i)$ 几乎有限生成。于是 $\mathrm{Im}(\delta_i)$ 几乎有限表示， I 也如此，由 $[14,\ 推论\ 2.5\ 可得。12]$因此，根据命题 2.6， R 是一个几乎相干环。

(8) $\Rightarrow$ (6)：由命题 5、命题 5.5 和 $[2,\ 定理\ 3.4]$ 可得。

(6) + (7) $\Rightarrow$ (8)：由 $[1,\ 定理\ 2.3.6]$ 可得。

(3) $\Rightarrow$ (7)：设 M 是一个满足 $|M| = \lambda$ 的 R-模。那么存在一个基数 κ，使得若 $|M| \geq \kappa$ 且 $|M/L| \leq \lambda$，则 L 含有一个非零纯子模。我们断言，对于任意满足 A 几乎绝对纯的 R-同态 f： $A \to M$ ，存在一个几乎绝对纯的 R-模 B ，满足 $|B| \leq \kappa$ ，使得 f 可以经由 $B.$ 分解。事实上，设 f： $A \to M$ 是一个满足 A 几乎绝对纯的 R- 同态。若 $|A| < \kappa$，令 $B = A.$。现在假设 $|A| \geq \kappa$。考虑一个子模 $S \leq A$ ，它在满足 S 是 A 的纯子模且 $S \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ 的条件下极大。令

$B = A/S$. 那么存在一个 R-同态 $f\colon\ B \to M$, 使得 $f = f\circ\pi$, 其中$\pi\colon\ \overline{A} \twoheadrightarrow B$ 是自然满同态。由 (3) 可知, B 几乎绝对纯。接下来我们将证明 $|B| \leq \kappa$。事实上, 令 K 为 Ker(f)。那么 $|B/K| \leq |M| = \lambda$。因此, 若 $|B| \geq \kappa$, 则 B/S 中存在一个包含于 K 的非零纯子模 T/S。但这样一来, T 就是 A 的纯子模, 且包含于 Ker(f) 中, 这与 S 的选取矛盾。

现在, 令 E 为所有基数不超过 κ 的几乎绝对纯模（每个同构类取一个）的直和。由上文可知, 容易验证 E 是 M. □的一个几乎绝对纯预覆盖。

众所周知, 环 R 是相干环, 当且仅当对于任意绝对纯模 E 和内射模 I, $\mathrm{Hom}_R(E,\ I)$ 是平坦模; 这又当且仅当对于任意平坦模 F 以及任意内射模 I_1 和 I_2, $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(F,\ I_1)\ I_2)$ 是平坦模。

定理 6.3。 设 R 为一个环。则以下命题等价。

(1) R 是一个几乎相干环。*(2)* 对任意几乎绝对纯模 E 和任意内射模 I, $Hom_R(E, I)$ 是几乎平坦的。*(3)* 若 I 是一个内射余生成元, 则对于任意几乎绝对纯模 E, $Hom_R(E, I)$ 是几乎平坦的。*(4)* 对任意几乎平坦模 F 以及任意内射模 I_1 和 I_2, $Hom_R(Hom_R(F, I_1)\ I_2)$ 是几乎平坦的。*(5)* 若 I_1 和 I_2 是内射余生成元, 则对于任意几乎平坦模 F, $Hom_R(Hom_R(F, I_1)\ I_2)$ 是几乎平坦的。

证明。 (2) $\Rightarrow$ (3) 和 (4) $\Rightarrow$(5): 显然。

(2) $\Rightarrow$(4) 和 (3) $\Rightarrow$ (5): 由命题 5.3 可得。

(1) $\Rightarrow$(2): 设 R 是一个几乎相干环。设 M 是一个有限表示的R-模。于是存在一个正合列

$$0 \to Q/K \to P \to M \to 0$$

其中 P, Q 是有限生成投射 R-模。因此, 由 [14, 引理 2.6][14], 有限表示的 R-模 P 是几乎相干的。因此, P 的有限生成子模 Q/K 是几乎有限表示的。所以 K 是几乎有限的。因此存在一个 R-模正合列

$$0 \to T \to Q/K' \to Q/K \to 0,$$

其中 K' 是有限生成的, 且 T 几乎为零。

考虑以下具有正合行的交换图（((–, –) 代替 $\mathrm{Hom}_R(–, –)$）：

$$\begin{array}{ccccccc}
(E,I)\otimes_R T & \longrightarrow & (E,I)\otimes_R Q/K' & \longrightarrow & (E,I)\otimes_R Q/K & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \psi^1_{T'}} & & {\scriptstyle \psi_{Q/K'}}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \psi_{Q/K}}\downarrow & & \\
((T,E),I) & \longrightarrow & ((Q/K',E),I) & \longrightarrow & ((Q/K,E),I) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R((E,I),M) & \longrightarrow & (E,I)\otimes_R Q/K & \longrightarrow & (E,I)\otimes_R Q & \longrightarrow & (E,I)\otimes_R M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \psi^1_M} & & {\scriptstyle \psi_{Q/K}}\downarrow & & {\scriptstyle \psi_Q}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \psi_M}\downarrow{\scriptstyle \cong} \\
0 & \longrightarrow & (\mathrm{Ext}^1_R(M,E),I) & \longrightarrow & ((Q/K,E),I) & \longrightarrow & ((Q,E),I) & \longrightarrow & ((M,E),I) \longrightarrow 0
\end{array}$$

由图表追踪和命题 2.4 可知，ψ^1_M 是几乎同构。由于 E 几乎绝对纯，$\mathrm{Ext}^1_R(M,\ E)$ I)几乎为零，因此 $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^1_R(M,\ E)\ I)$也几乎为零。于是 $\mathrm{Tor}^R_1(\mathrm{Hom}_R(M,\ E)\ M)$几乎为零，因此根据命题 5.3，$\mathrm{Hom}_R(M,\ E)$几乎平坦。

(5) $\Rightarrow$ (1)：设 $\{F_i\}$ 是一族平坦的 R-模。我们将证明 $\prod F_i$ 几乎平坦。由于 $\oplus F_i$ 平坦，根据假设

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(\oplus F_i, I_1), I_2) \cong \mathrm{Hom}_R(\prod \mathrm{Hom}_R(F_i, I_1), I_2)$$

几乎平坦。注意，$\oplus\mathrm{Hom}_R(F_i,\ I_1)$是 $\prod\mathrm{Hom}_R(F_i,\ I_1)$的一个纯子模。于是自然满同态

$$\mathrm{Hom}_R(\prod \mathrm{Hom}_R(F_i, I_1), I_2) \to \mathrm{Hom}_R(\oplus \mathrm{Hom}_R(F_i, I_1), I_2) \to 0$$

分裂。因此，$\prod\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(F_i,\ I_1)\ I_2) \cong \mathrm{Hom}_R(\oplus\mathrm{Hom}_R(F_i,\ I_1)\ I_2)$也几乎平坦。由于 $\prod F_i$ 是 $\prod \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(F_i,\ I_1)\ I_2)$的一个纯子模，根据引理 4.4，$\prod F_i$ 几乎平坦。由定理 4.6 可知，R 几乎相干。□

References

[1] E. E. Enochs、O. M. G. Jenda，相对同调代数，Degruyter 数学论丛，第 30 卷，Walter de Gruyter，柏林，2000 年。[2] G. C. Dai、N. Q. Ding，相干环与绝对纯覆盖，代数通讯**46**（2018 年），第 3 期，1267–1271。[3] D. E. Dobbs，论伪赋值整环的弱整体维数，加拿大数学通报**21**（1978 年），159–164。[4] D. E. Dobbs，相干性、going-down 性质的上升及伪赋值整环，休斯顿数学杂志 **4**（1978 年），551–567。[5] G. Faltings，p-进 Hodge 理论，美国数学会杂志 **1**（1988 年），255–299。[6] L. Fuchs、L. Salce，非诺特整环上的模，普罗维登斯，美国数学会，2001 年。

[7] O. Gabber, L. Ramero，几乎环理论，Springer，2003。[8] S. Glaz。《交换相干环》，数学讲义，第 1371 卷，Springer，1989。[9] R. Gobel，J. Trlifaj，模的逼近与自同态代数，De Gruyter Exp. Math.，第**41**卷，柏林：Walter de Gruyter GmbH & Co. KG，2012。[10] P. Scholze，《完美拟代数空间》，*Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci.***116**（2012），245–313。[11] P. Scholze，刚性解析簇上的 p-进 Hodge 理论。*Forum Math. Pi* 1（2013），文章编号 e1，共 77 页。[12] F. G. Wang，H. Kim，《交换环及其模基础》，第二版，新加坡，Springer，2024。[13] R. Wisbauer，《模与环理论基础》，代数、逻辑与应用，第**3**卷，阿姆斯特丹：Gordon and Breach，1991。[14] B. Zavyalov，《几乎相干模与几乎相干层》，欧洲数学学会回忆录 19。柏林：欧洲数学学会（EMS），2025。[15] X. L. Zhang，《几乎诺特环与模》，https://arxiv.org/abs/2509.05996[16] X. L. Zhang，《一致 S-相干环》，*Rocky Mt. J. Math.* **55**（2025），第 4 期，1167–1183。