arXiv:2601.12077v1 [math.SP] 17 Jan 2026

Steklov 特征值的边界扰动

LIHAN WANG

摘要。我们研究非零 Steklov 特征值对区域边界光滑扰动的依赖性。我们证明，在此类边界扰动下，这些特征值一般是简单的。这一结果补充了我们此前关于度量扰动的研究，从而确立了在两种基本几何变分下 Steklov 特征值的一般简单性。

1. 引言

给定一个具有光滑边界的紧致黎曼流形，Dirichlet-to-Neumann 算子 Λ 将定义在边界上的函数映射为其调和延拓至内部后的法向导数。其特征值称为 Steklov 特征值。Steklov（[22]）于 1902 年首次提出这一谱问题，其动机源于物理学：相应特征函数的调和延拓描述了区域上的稳态温度，此时穿过边界的热通量与温度成正比。

Steklov 特征值问题此后逐渐成为数学中的一个活跃研究领域。Fraser 和 Schoen 的开创性突破揭示了 Steklov 特征值最大化问题与单位欧几里得球 [6–8]中丰富的自由边界极小曲面理论之间的深刻联系。除纯几何研究外，斯捷克洛夫谱也是反问题的基础。作为狄利克雷到诺伊曼算子的谱，它为逆电导率问题和散射问题提供了关键数据，并在无损检测和成像领域有重要应用 [1, 9, 23]。一般性综述请参见 [11]，较新的进展请参见 [3] 。

我们关注边界发生扰动时 Steklov 特征值的变化。为简单起见，我们聚焦于实数集 $\mathbb{R}^n$ 中边界光滑的有界区域。边界扰动与特征值这一主题历史悠久，自 1877 年 Rayleigh [21] （初版）、1908 年 Hadamard [16] 以及 1931 年 Courant 和 Hilbert [2] 的相关研究以来，便引起了广泛关注。此后，对边界扰动的研究一直

日期：2026年1月21日。2020年数学主题分类：主要分类 53C21；次要分类 58J50。作者部分获得美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2316620 和 DMS-2524167。

是几何与分析交叉领域中的活跃课题，也为形状优化 [5] 等应用领域奠定了基础。

这一领域的一个基本问题是，谱简单性是否是关于边界扰动的一般性质。换句话说，在“几乎所有”有界区域，或者说在有界区域的一个剩余集中，特征值是否都是简单的。在她的开创性工作中 [24], , Uhlenbeck 研究了带狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子的情形，并证明相应的特征值在几乎所有区域上都是简单的。Micheletti [18]也得到了相同的一般简单性结果。后来，Henry [13–15] 证明了带罗宾或诺伊曼边界条件的拉普拉斯算子以及更一般的微分算子的特征值具有一般简单性。这里所说的一般简单性均指非零特征值。

在 Steklov 情形下，Steklov 特征值在边界扰动下的一般行为尚未得到研究。本文旨在确立 Steklov 特征值的一般简单性。我们证明，对于几乎所有具有光滑边界的有界区域，非零 Steklov 特征值都是简单的。具体而言，我们的主定理表述如下：

定理 1.1（主定理）。设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是一个具有 C^m边界的有界区域，其中 $m \geq 2$。那么存在一个 C^m 嵌入 h 的剩余集，使得将Ω 嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 后，$h(\Omega)$ 上的所有非零 *Steklov* 特征值都是简单的。

注 1.2。该定理也适用于可嵌入到 $\mathbb{R}^n$中的带边界紧流形。对于紧黎曼流形，纳什嵌入定理保证了这类嵌入的存在。

我们的定理完成了与我们先前关于度量变分的研究相平行的探讨 [25], , 该研究证明了在两种基本几何变分下 Steklov 特征值具有一般简单性。这一质性结果也补充了由 Steklov 特征值的 Hadamard 型公式（如 [4]）给出的局部定量分析。

为了证明 Steklov 特征值的一般简单性，我们遵循 Uhlenbeck 在 [24] 中的思路，采用无限维横截理论。这一方法的核心在于理解狄利克雷到诺伊曼算子 Λ如何随区域边界的扰动而变化。

狄利克雷到诺伊曼算子是一种一阶椭圆自伴伪微分算子。对于典型的微分算子，其在边界形变下的变分可以局部计算。相比之下，Λf 的变分不仅取决于边界本身的变化，还取决于f 的调和延拓如何变化。为处理这一复杂性，我们在 [25], 中采用两步变分方法，根据调和延拓相对于边界的变分推导所需公式。我们

注意到，尽管Henry [15] 获得了微分算子在边界扰动下的一般变分公式，但由于前述原因，这些结果和方法并不能直接应用于非局部狄利克雷到诺伊曼算子。

另一个挑战在于验证零是某些求值映射的正则值。我们按照 [24, 25] 中的技巧构造了这样的映射。在度量扰动的背景下，稠密性论证可确保求值映射不存在临界点。然而，对于 Steklov 特征值的边界扰动，临界点可能出现。利用变分公式，我们用一个无限维条件刻画这些临界点。尽管无法将其完全消除，但我们可以证明它们的出现是非通有的。

为此，我们引入第二个求值映射，采用 D. Henry 在 [15], 中建立的框架，并运用横截理论。由于临界点条件具有无限维性质，这个新的求值映射具有负无穷 Fredholm 指标。因此，标准横截定理并不足以解决问题，我们必须采用 D. Henry ([15]) 证明的一个广义版本。结合对这两个求值映射的分析，我们得出结论：Steklov 特征值一般而言是单重的。

本文组织如下。第2节回顾与边界扰动相关的基本概念和事实。第3节讨论边界扰动下调和延拓及狄利克雷到诺伊曼算子的变分；我们还重述了 Steklov 特征函数的弱唯一延拓性质。第4节回顾横截理论所需的背景知识，包括 D. Henry 的广义横截定理。随后，我们引入两个求值映射，并用它们证明主要结果。

2. 预备知识

我们固定记号，并汇集所需的预备材料。本文所述的大多数定义和结果均引自 [15]。

全文中，Ω 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 属于C^m 类，且维数为 ≥ 2。这里，C^m 边界是指存在一个C^m函数 $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，其至少属于 C^1 连续可微$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$，使得 $\Omega = \{$点 $\in \mathbb{R}^n | \phi(x) > 0\}$ 且 $\phi(x) = 0$ 蕴含 $|\nabla\phi| \geq 1$。

我们考虑 Ω 到 $\mathbb{R}^n$ 中的C^m 嵌入集合：

(2.1)
$$\text{嵌入}^{\text{m}}(\Omega) = \{h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n) | h \text{ 是单射，且 } \left| \frac{1}{\det(\text{h}')} \right| \text{ 在 } \Omega\}\text{中有界}$$

它是$C^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$的一个开子集。Ω 到 $\mathbb{R}^n$ 的包含映射记为i_Ω。

对于 $h \in$ 嵌入$^{\mathrm{m}}(\Omega)$，我们将其像记为 $\Omega_h = h(\Omega)$，即“扰动”区域。扰动边界满足 $\partial\Omega_h = h(\partial\Omega)$。我们定义如下拉回映射

$$\begin{aligned} h^* : C^m(\Omega_h) &\to C^m(\Omega) \\ u &\to u \circ h \end{aligned} \tag{2.2}$$

其逆映射为$h^{*-1} = (h^{-1})^*$。并采用以下记号：$u_h = h^* u = u \circ h$表示u的拉回。

$\dot{h}$ 的变分记为$h \in C^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$。我们可以将边界附近的变分写成

$$\dot{h}(x) = \sigma(x)\vec{n} + \tau(x), x \in \partial\Omega$$

其中函数为 $\sigma \in C^m(\partial\Omega)$，切向量场为 $\tau \perp \vec{n}$。为了计算关于h的变分，我们总是考虑某个开区间 (a, b) 上的光滑曲线$t \to h(,t) \in$ 嵌入$^{\mathrm{m}}(\Omega)$，并对t求导。事实上，

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = \dot{h}(x)$$

其中$x \in \Omega$保持不变。然而，在某些计算中，我们对t 求导时保持$y = h(x,t)$不变。为区分这两种情况，我们会在求导时明确指出保持不变的变量（例如$x = const.$、$y =$ const</style.）。

令 $\vec{n}$ 表示沿着 $\partial\Omega$的单位外法向量。根据 [15], 中的推论 1.6，当 $m \geq 2$时，存在函数 $\phi \in C^m(\mathbb{R}^n,R)$，使得在 $\partial\Omega$的一个邻域内，$\Omega = \{x|\phi(x) > 0\}$ 且 $|\nabla\phi(x)| = 1$ 。此外，这样的ϕ 在 $\partial\Omega$的一个邻域内是唯一的。在这种情况下，我们可以将 $\vec{n} = \nabla\phi$ 延拓到 $\partial\Omega$的一个邻域内，直接计算可得以下性质。

命题 2.1. 对于具有 C^m 边界 $\partial\Omega$ 的区域$\Omega \in \mathbb{R}^n$，且 $m \geq 2$，其单位外法向量 $\vec{n}$ 满足：

(1) 矩阵 $\left[\partial_n \partial^i x_j\right]_{i,j=1}^n$ 在Ω上是对称的；

(2) $\partial_{\vec{n}} \partial_{\vec{n}} = 0$在 $\partial\Omega$上。

令 Δ 和 $\Delta_{\partial\Omega}$ 分别表示 Ω 上的拉普拉斯算子和 $\partial\Omega$。命题 2.1 中的第二个性质蕴含了它们之间的以下关系。

命题 2.2。 设Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有 C^m 边界 $\partial\Omega$的有界区域，且 $m \geq 2$。则在 $\partial\Omega$ 上，有

$$\Delta u = \Delta_{\partial\Omega} u + Hu_n + u_{nn}.$$

这里，$H = \nabla \cdot \vec{n}$ 是边界的平均曲率，$u_n = \nabla_{\vec{n}} u$。

该命题是 [15] 中定理 1.13 的推论，或者也可参见 [17]中第 4 章的论证。

对于 $h \in \mathrm{Emb}^m(\Omega)$，我们可以在 $\partial\Omega_h$ 的某个邻域上定义 $\vec{n}_h$，使得

$$\vec{n}_{h(\Omega)}(y) = \vec{n}_{h(\Omega)}(h(x)) = \frac{(h_x^{-1})^T \vec{n}(x)}{\|(h_x^{-1})^T \vec{n}(x)\|}$$

它是 $\partial\Omega_h$ 上的单位外法向量。这里，$(h_x^{-1})^T$ 是雅可比矩阵 $h_x = [\frac{\partial h^i}{\partial x_j}]_{i,j=1}^n$ 的逆转置，$\|\cdot\|$是欧几里得范数。

对于靠近 $\partial\Omega$ 的 x，像 $y = h(x,t)$ 靠近 $\partial\Omega(t)$。因此，我们可以计算导数 $\frac{\partial \vec{n}_h}{\partial t}|_{y=const.}$。事实上，根据 [15] 中的引理 2.3，我们有以下关于 $\vec{n}_h$ 的变分公式。

引理 2.3。 设Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，具有 C^m 边界，且 $m \geq 2$。假设 $h(\cdot,t) \in$ 嵌入$^m(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} h(\cdot,0) = i_\Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} h(\cdot,,0) = \dot{h}. \end{cases}$$

这里 $\dot{h} \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$。令 $y = h(x,t)$，其中 $x \in \partial\Omega$。则在 $\partial\Omega$上

$$\frac{\partial \vec{n}_h}{\partial t}|_{y=const.,t=0} = -\nabla_{\partial\Omega}\sigma \tag{2.3}$$

且沿 $\partial\Omega$，$\sigma = \dot{h} \cdot \vec{n}$。

注 2.4。 在这个变分引理以及后面的变分引理中，我们只需处理特殊情形 $h(\cdot,0) = i_\Omega$，因为这一情形足以证明主要结果。

在一般情形下，令 $h_0 = h(\cdot,0)$ 并定义

$$\tilde{h}(x_0) = h(h_0^{-1}(x_0), t),\ x_0 = h_0(x) \in h_0(\Omega).$$

Then

$$\tilde{h}(\cdot,0) = i_{h_0(\Omega)}, \vec{n}_{h(t)}(x) = \vec{n}_{\tilde{h}(t)}(x_0), \frac{\partial \vec{n}_h}{\partial t}|_{y=const,t=0}(x) = \frac{\partial \vec{n}_{\tilde{h}}}{\partial t}|_{y=const.,t=0}(x_0)$$

对于 $x_0 = h_0(x)$，因此我们可以将上述引理应用于 h 在 $h_0(\Omega)$ 上的情形，从而推导出 h 的变分公式。

3. 变分公式与弱唯一连续性原理

给定 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，狄利克雷-诺伊曼算子定义为

$$\begin{aligned} \Lambda : & W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \to W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \\ & f \to u_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中整数 $m - 1 \geq k \geq 1, p \geq 2$。这里，$u$ 是 f 在 Ω 上的调和延拓。也就是说，u 是下列边值问题的解:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega \\ u = f, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

并且 u_n 表示沿 $\partial\Omega$ 的外法向导数。众所周知，Λ是椭圆、自伴的，且具有离散谱。

事实上，根据迹定理（ [20]中的第2章）和椭圆理论（ [12]中的第9章），对于任意 $f \in W_{k-1_p,p}(\partial\Omega)$，当 $\bar{\Omega}$ 具有 $C^{k,1}$ 边界时，都存在唯一的 f 的调和延拓 $u \in W^{k,p}(\Omega)$。其法向导数 u_n 属于 $W_{k-1-1_p,p}(\partial\Omega)$。

对于 $h \in$ 嵌入$^{m}(\Omega)$，令 $f_h = h^{*-1}(f)$ 为 f 在 $\partial\Omega_h$ 上的拉回。我们在 $\partial\Omega$ 上引入如下拉回算子:

$$\begin{aligned} L_h = h^* \Lambda h^{*-1} : & W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \to W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega), \\ & f \to h^*(\Lambda f_h). \end{aligned} \tag{3.3}$$

此处 Λ 作用于参考区域 $\partial\Omega_h$。令 u^h 表示 f_h 在 Ω_h 上的调和延拓:

$$\begin{cases} \Delta u^h = 0, & \Omega_h \\ u^h = f_h, & \partial\Omega_h. \end{cases} \tag{3.4}$$

于是，在 Ω 上，$L_h(f) = h^*(\Lambda f_h) = = h^*(u^h_{n_h})$，其中 $u^h_{n_h}$ 是 u^h 沿 $\partial\Omega_h$ 的外法向导数。

我们首先在 $y \in \Omega_h$ 固定时，计算 u^h 关于 h 的变分。

引理 3.1 （u^h的变分）。设 $h(\cdot,t) \in$ 嵌入$^{m}(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} h(\cdot,0) = i_\Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} h(\cdot,,0) = \dot{h}, \end{cases}$$

其中 $h \in$ 属于 $C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$。

对于 $f \in W_{k-1_p,p}(\partial\Omega)$ 及其拉回 $f_h = (h^{-1})^* f$，分别令 u 和 u^h 表示相应的调和延拓。固定 $y = h(x,t)$

在 Ω_h中。则 $\frac{\partial u^h}{\partial t}|_{y=const.}$ 在 $t = 0$时满足

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \Delta(\dfrac{\partial u^h}{\partial t}|_{y=const.,t=0}) = 0, & \Omega \\ \dfrac{\partial u^h}{\partial t}|_{y=const.,t=0} = -\nabla u \cdot \dot{h}, & \partial\Omega \end{cases}$$

证明。 由 (3.4)，存在 $\Delta u^h(y) = 0$ 使得 $y \in \Omega_h$。固定 Ω_h 中的$y = h(x,t)$，在等式两边取 $\frac{\partial}{\partial t}$。于是

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{y=const.}\left(\Delta u^h(y)\right) = 0,$$
$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{\partial u^h}{\partial t}|_{y=const.}\right) = 0.$$

(3.5) 中的第一个等式由此得出。

将 (3.4) 中u^h 的边界条件改写为

$$u^h(y) = u^h(h(x,t)) = f(x),\ y = h(x,t) \in \partial\Omega_h.$$

固定 Ω 中的$x\ \partial$，在等式两边对t 求导可得

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{x=cont.}u^h(y) = 0,$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}|_{y=const.}u^h(y) + (\nabla_y u^h)\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}|_{y=const.}u^h(y) = -\nabla u\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

第二个等式由链式法则得出。根据假设，当$t = 0$时，存在$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} = \dot{h}$。因此可得

$$\frac{\partial u^h}{\partial t}|_{y=const.,t=0} = -\nabla u\cdot\dot{h}.$$

(3.5) 中的第二个等式成立。

□

现在我们可以在固定 $x \in \partial\Omega$ 的情况下，计算 $L_h = h^*\Lambda(h^{-1})^*$ 关于 h 的变分。

引理 3.2 (关于 L_h 的变分)。 在引理 *3.1* 的假设下，L_h 的变分满足:

$$(3.6)\qquad \frac{\partial L_h(f)}{\partial t}|_{x=const.,t=0} = \nabla_{\partial\Omega}(\Lambda f)\cdot\dot{h} - \sigma(\Delta_{\partial\Omega}f + H(\Lambda f)) - (\nabla_{\partial\Omega}\sigma)\cdot(\nabla_{\partial\Omega}f) - \Lambda(\nabla u\cdot\dot{h}).$$

其中，$= \nabla\cdot\vec{n}$ 是沿着 $\partial\Omega$ 的平均曲率，且 $\sigma = \dot{h}\cdot\vec{n}$。

此外，当 $\dot{h}$ 沿切向消失时，即在 $\partial\Omega$ 上 $\dot{h} = \sigma\vec{n}$ 时，有

(3.7)
$$\frac{\partial L_h(f)}{\partial t}|_{x=const.,t=0} = -\sigma\left(\Delta_{\partial\Omega} f + H(\Lambda f)\right) - (\nabla_{\partial\Omega}\sigma)\cdot(\nabla_{\partial\Omega} f) - \Lambda\left(\sigma(\Lambda f)\right).$$

证明。 在 Ω 固定时，对 (3.3) 两边关于 $\frac{\partial}{\partial t}$ 求导，并令 $x \in \partial$。由链式法则可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_h(f)(x)}{\partial t}|_{x=const.} &= \frac{\partial}{\partial t}|_{x=const.}\left(h^*(\Lambda f_h)(x)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}|_{x=const.}\left(\Lambda f_h(y)\right),\ y = h(x,t)\\ &= \nabla_y(\Lambda f_h)\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial(\Lambda f_h)(y)}{\partial t}|_{y=const.}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

对于项 $\nabla_y(\Lambda f_h)$，根据 Λ 的定义，有

$$\begin{aligned}\nabla_y(\Lambda f_h)|_{t=0} &= \nabla_y(\vec{n}_h\cdot\nabla_y u^h)|_{t=0} = \nabla(\vec{n}\cdot\nabla u)\\ &= \nabla u_n = \nabla_{\partial\Omega} u_n + u_{nn}\vec{n}.\end{aligned}$$

这里，∇ 和 ∇_y 分别表示 Ω 和 Ω_h 上的梯度。同时，命题 2.2 表明

$$\begin{aligned}u_{nn} &= \Delta u - \Delta_{\partial\Omega} u - Hu_n,\\ &= -\Delta_{\partial\Omega} u - Hu_n.\end{aligned}$$

Thus

$$\nabla_y(\Lambda f_h)|_{t=0} = \nabla_{\partial\Omega} u_n - (\Delta_{\partial\Omega} u + Hu_n)\vec{n}. \tag{3.9}$$

对于项 $\frac{\partial}{\partial t}|_{y=const.}(\Lambda f_h)(y)$，根据 Λ 的定义，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\Lambda f_h)(y)}{\partial t}|_{y=const.} &= \frac{\partial}{\partial t}|_{y=const.}(\vec{n}_h\cdot\nabla_y u^h),\\ &= \frac{\partial\vec{n}_h}{\partial t}|_{y=const.}\cdot\nabla_y u^h + \vec{n}_h\cdot\frac{\partial}{\partial t}|_{y=const.}(\nabla_y u^h),\\ &= \frac{\partial\vec{n}_h}{\partial t}|_{y=const.}\cdot(\nabla_y u^h) + \vec{n}_h\cdot\nabla_y(\frac{\partial u^h}{\partial t}|_{y=const.}).\end{aligned}$$

由 (2.3)，我们有 $\frac{\partial\vec{n}}{\partial t}^h|_{t=0} = -\nabla_{\partial\Omega}\sigma$。将其代入上述公式可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\Lambda f_h)(y)}{\partial t}|_{y=const.,t=0} &= -\nabla_{\partial\Omega}\sigma\cdot\nabla u + \vec{n}\cdot\nabla(\frac{\partial u^h}{\partial t}|_{y=const.,t=0}),\\ &= -\nabla_{\partial\Omega}\sigma\cdot\nabla_{\partial\Omega} f + \nabla_n(\frac{\partial u^h}{\partial t}|_{y=const.,t=0}).\end{aligned} \tag{3.10}$$

第二个等号由 $\nabla u = \nabla_{\partial\Omega} u + (\nabla_n u)\vec{n} = \nabla_{\partial\Omega} f + (\nabla_n u)\vec{n}$ 在$\partial\Omega$ 上推出。

将 (3.9) 和 (3.10) 代入 (3.8)，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_h(f)}{\partial t}|_{x=const.,t=0} &= \nabla_{\partial\Omega} u_n \cdot \dot{h} - \sigma(\Delta_{\partial\Omega} f + H u_n) - (\nabla_{\partial\Omega}\sigma)\cdot(\nabla_{\partial\Omega} f) \\ &\quad + \nabla_n(\frac{\partial u^h}{\partial t}|_{y=const.,t=0}).\end{aligned} \tag{3.11}$$

这里我们利用了 $\partial_{y\,\partial t}|_{t=0} = \partial_{h\,\partial t}|_{t=0} = \dot{h}$ 这一事实。同时，引理 3.1 蕴含

$$\nabla_n(\frac{\partial u^h}{\partial t}|_{y=const.,t=0}) = -\Lambda(\nabla u \cdot \dot{h}).$$

将此公式和 $u_n = \Lambda f$ 代入 (3.11)，即可得到 (3.6)。

When $\dot{h} = \sigma\vec{n}$，有

$$\Lambda(\nabla u \cdot \dot{h}) = \Lambda(\sigma u_n) = \Lambda(\sigma(\Lambda f)).$$

将此等式代入 (3.6)，即可得到 (3.7)。

□

最后，我们介绍 Steklov 特征函数的弱唯一延拓原理，这是证明主定理的重要工具。下述定理是 [25]，在黎曼流形上建立的一般版本的推论，但它在较弱的正则性假设下仍然成立。为求完整，我们给出一个简短的证明。

定理 3.3（弱唯一延拓原理）。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，其边界为 C^m，其中 $m \geq 2$。考虑一个非常数函数 $f \in W^{k-1/p,\,p}(\partial M^n)$，其中 $m - 1 \geq k \geq 1$ 且 $p \geq 2$。假设 $\Lambda f = \lambda f$。若 $f = 0$ 在 $\partial\Omega$的某个开子集上成立，则 f 在 $\partial\Omega$上恒为零。

证明。设 u 是f的调和延拓。于是

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & \Omega \\ u = f, & \partial\Omega \\ u_n = \lambda f, & \partial\Omega.\end{cases}$$

设 Γ 是 $\partial\Omega$的一个开子集，其中$f = 0$。任取一点$x \in \Gamma$。选取一个小球$B(x, r)$，使得$B(x,r) \cap \partial\Omega \subset \Gamma$。我们可以将$u$ 延拓至$B(x,r)$，使得

$$\begin{cases}\tilde{u} = u, & B(x,r) \cap \Omega \\ \tilde{u} = 0, & B(x,r) \setminus \Omega\end{cases}$$

使得 $\tilde{u} \in W^{2,p}(B)$。于是我们有

$$\Delta\tilde{u} = 0,$$

$\tilde{}$在$B(x, r)$上，且 $\tilde{u} = 0$ 在开集$B(x,r) \setminus \Omega$上。根据二阶椭圆算子的弱唯一延拓原理，$\tilde{u}$必在$B(x,r)$中恒为零。作为Ω上的调和函数，u 在开集$B(x,r)\cap\Omega$中恒为零，这意味着u 在Ω中处处为零。

□

注 3.4. 关于二阶椭圆算子的弱唯一延拓原理，参见 [10] 中的定理 *1.1*。

4. 主要结果

本节将利用横截定理，证明 Steklov 特征值在边界扰动下具有一般简单性。

首先回顾一些基本定义。

定义 4.1. 考虑两个流形之间的一个 C^1 映射 $F : X \to Y$。若 $x \in X$ 是 F 的正则点，则 $D_xF : T_x(X) \to T_{F(x)}(Y)$ 是满射。若 $y \in Y$ 是正则值，则每个满足 $x \in F^{-1}(y)$ 的点 x 都是正则点。

定义 4.2. 若拓扑空间的一个子集是开稠密集的可数交集，则称其为剩余集。若拓扑空间的一个子集的补集是剩余集，则称其为贫乏集。

定义 4.3. 考虑两个巴拿赫空间之间的连续线性映射 T。若 T 的像是闭的，且其核和余核都是有限维的，则称 T 为 *Fredholm* 映射。若 T 的像是闭的，且其核是有限维的，则称 T 为左弗雷德霍姆映射。指标定义为 $\mathrm{ind}T$ =dim 核 T − dim 余核 T。

我们将采用以下横截性定理，该定理为适用于我们的情形而根据 [15] 改编。

定理 4.4. 设有正整数 k, q；C^k 类巴拿赫流形 X, Y, Z，且 X, Y 可分；开集 $A \subset X \times Y$；C^k 映射 $f : A \to Z$；以及点 $\zeta \in Z$。

假设对于每个 $(x, y) \in f^{-1}(\zeta)$ 均有

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} : T_xX \to T_\zeta Z$ *is left Fredhlom and has index* $< k$;
(2) *Either*
   (a) $Df_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) : T_xX \times T_yY \to T_\zeta Z$ *is surjective;*
   (b) *or* $\dim\left\{\mathrm{Im}\, Df_{(x,y)} \setminus \mathrm{Im}\, \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x,y)}\right\} \geq q + \dim \ker \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}|_{(\mathrm{x},\mathrm{y})}$.

令 $A_y = \{x|(x, y) \in A\}$，并且

$$\dot{Y}_{crit} = \{y|\zeta \text{ is a critical value of } f(\cdot, y) : A_y \to Z.$$

˙那么，Y_{crit} 在 Y 中是贫乏集且闭的。

此外，如果 $\partial_{f\partial x} \leq -q < 0$在 $f^{-1}(\zeta)$上的指标，那么

$$\dot{Y}_{crit} = \{y | f(x,y) = \zeta \, for \, some \, x \in A_y\}.$$

注 4.5. 定理 *4.4* 是 [15] 中定理 *5.4* 的直接推论。假设 X、Y 可分，意味着投影 $(x,y) \to y : f^{-1}(\zeta) \to Y$ 是真映射（因而 σ–真），满足相应的假设。此外，条件 *(1)* 等价于原定理中指标为 $< k$ 的半 *Fredholm* 条件。

4.1. **第一评价映射**。考虑 $f \in W_{k-1/p,\,p}(\partial\Omega)$，其中 $u \in W^{k,\,p}(\Omega)$ 是其调和延拓。若 f 是对应于非零 Steklov 特征值 λ 的特征函数，则根据 (3.1) 和 (3.2)，f 不是常数。此外，由 Green 公式可得

$$\int_{\partial\Omega} f dA = \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} u_n \cdot 1 dA = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \Delta u \, dV = 0.$$

因此，我们引入以下空间以应用定理 4.4：

$$S^p_k(\partial\Omega) = \left\{ f \in W^{k-\frac{1}{p},\,p}(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} f dA = 0 \right\}.$$

并定义求值映射如下：

$$\begin{aligned} \phi : S^p_k(\partial\Omega) \times R \times \mathrm{Emb^m}(\Omega) &\to W^{k-1-\frac{1}{p},\,p}(\partial\Omega) \\ (f, \lambda, h) &\to (L_h - \lambda) f = h^* \left((\Lambda - \lambda)(h^{-1})^* f \right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

相应的切空间可表征为

$$S^p_k(\partial\Omega) \times \mathbb{R} \times C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)|_{(f,\lambda,h)} = \left\{ (\dot{f}, \dot{\lambda}, \dot{h}) : \dot{f} \in W^{k-\frac{1}{p},\,p}(\partial\Omega), \int_{\partial\Omega} \dot{f} dA = 0, \right.$$

$$\left. \dot{\lambda} \in \mathbb{R}, \dot{h} \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\}.$$

而 ϕ 的微分如下：

$$D\phi_{(f,\lambda,h)}(\dot{f}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = L_h \dot{f} - \dot{\lambda} f + D_h(L_h f)(\dot{h}). \tag{4.2}$$

这里，$D_h(L_h f)(\dot{h})$表示$L_h f = h^* \left((\Lambda - \lambda)(h^{-1})^* f \right)$关于$h$ 沿h方向的变分，即，

$$D_h(L_h f)(\dot{h}) = \frac{\partial L_h(f)}{\partial t}|_{x=const.,t=0}$$

在引理 3.2 中。

为方便起见，我们将 ϕ 沿$S_{pk}(\partial\Omega) \times \mathbb{R}$方向的微分记为$D_1$，将沿 $\mathrm{Emb^m}(\Omega)$ 方向的微分记为D_h。该

is,

$$D\phi = (D_1\phi, D_h\phi) \text{ at } (f, \lambda, h) \tag{4.3}$$

$$\text{with} \begin{cases} D_1\phi(\dot{f}, \dot{\lambda}) = D\phi(\dot{f}, \dot{\lambda}, 0) = (L_h - \lambda)\dot{f} - s\dot{\lambda} \\ D_h\phi(\dot{h}) = D\phi(0, 0, \dot{h}) = (D_h L_h)(\dot{h})f. \end{cases} \tag{4.4}$$

根据 ϕ(4.1) 的定义，我们注意到 $(f, \lambda, g) \in \phi^{-1}(0)$ 等价于 $h^*\left((\Lambda - \lambda)(h^{-1})^* f\right) = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。也就是说，$(\Lambda - \lambda)(h^{-1})^* f = 0$ 在 $\partial\Omega_h$ 上。因此，以下引理显然成立。

引理 4.6. $(f, \lambda, g) \in \phi^{-1}(0)$ 当且仅当 $f_h = (h^{-1})^* f$ 是对应于 *Steklov* 特征值 $\lambda \neq 0$的特征函数，定义在 Ω_h 上。

引理 4.7. 对于 $h \in$ 嵌入$^m(\Omega)$，0 是 $\phi(\cdot, h)$ 的正则值，当且仅当 Ω_h 上所有非零 *Steklov* 特征值都是单的。

证明。 固定某个 $h_0 \in$ 嵌入$^m(\Omega)$。令 $\Omega_0 = h_0(\Omega)$。要证明 0 是 $\phi_0 = \phi(\cdot, h_0)$ 的正则值，只需证明 $D\phi_0$ 在每个 $(f, \lambda) \in \phi_0^{-1}(0)$ 处都是满射。

由于 $\phi_0(f, \lambda) = (L_{h_0} - \lambda) f$，因此存在

$$D\phi_0(\dot{f}, \dot{\lambda}) = (L_{h_0} - \lambda)\dot{f} - \dot{\lambda} f, \ (\dot{f}, \dot{\lambda}) \in S^p_k(\partial\Omega) \times \mathbb{R}|_{(f,\lambda)}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} D\phi_0|_{(f,\lambda)} &= \operatorname{Im}(L_{h_0} - \lambda) \oplus \operatorname{span}(\mathrm{f}) \\ &= h_0^* \left\{ \operatorname{Im}(\Lambda - \lambda)|_{\Omega_0} \oplus \operatorname{span}((\mathrm{h}_0^{-1})^* \mathrm{f}) \right\}. \end{aligned}$$

因此，当且仅当$D\phi_0$在（f, λ）$\in \phi_0^{-1}(0)$处是满射

$$\operatorname{Im}(\Lambda - \lambda)|_{\Omega_0} \oplus \operatorname{span}((\mathrm{h}_0^{-1})^* \mathrm{f} = W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega_0).$$

另一方面， $\Lambda - \lambda$ 是Ω_0上的自伴椭圆算子。于是有

$$W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega_0) = \operatorname{Im}(\Lambda - \lambda)|_{\Omega_0} \oplus \ker(\Lambda - \lambda)|_{\Omega_0}.$$

因此，当且仅当$D\phi_0$在（f, λ）$\in \phi_0^{-1}(0)$处是满射

$$\operatorname{span}((\mathrm{h}_0^{-1})^* \mathrm{f}) = \ker(\Lambda - \lambda)|_{\Omega_0},$$

也就是说， λ 是 Λ 在Ω_0上的单特征值。结论得证。

□

根据引理 4.7，只要证明存在一个剩余集，使得对于其中的 $h \in \mathrm{Emb}^m(\Omega)$，$\phi(\cdot, h)$ 以 0 为正则值，主定理便可得出。为此，我们旨在将定理 4.4 应用于求值映射 ϕ。

设 $X = S^k_p \times \mathbb{R}$、$Y = C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 为可分巴拿赫流形。设$A = S^k_p \times \mathbb{R} \times \mathrm{Emb}^m(\Omega)$ 是$X \times Y$ 中的一个开集，并且 $\zeta = 0$。那么

$$\dot{Y}_{crit} = \{h \in \mathrm{Emb}^m(\Omega) \mid 0 \text{ is a critical value of } \phi(\cdot, h)\}.$$

其补集为 $\{h \in$ 嵌入$^m(\Omega) \mid 0$ 是 $\phi(\cdot, h)\}$ 的正则值。

我们首先验证 ϕ 的 Fredholm条件。

引理 4.8。 在 $(f, \lambda, h) \in \phi^{-1}(0)$ 处，映射 $D_1\phi : S^k_p|_{(f,\lambda)} \times \mathbb{R} \to T$ 是 *Fredholm*，指标为 *0*。

证明。 在 $(f, \lambda, h) \in \phi^{-1}(0)$ 处，有

$$\begin{aligned} D_1\phi|_{(f,\lambda,h)}(\dot{f}, \dot{\lambda}, \dot{h}) &= (L_h - \lambda)\dot{f} - \dot{\lambda} f, \\ &= h^* \left((\Lambda - \lambda)\dot{f}_h - \dot{\lambda} f_h \right) \end{aligned}$$

其中 $\dot{f}_h = h^{*-1}(\dot{f})$。于是

$$\begin{aligned} \ker D_1\phi|_{(f,\lambda,h)} &= h^* (\ker(\Lambda - \lambda)) \oplus \{0\}, \\ \mathrm{Im}\, D_1\phi|_{(f,\lambda,h)} &= h^* (\mathrm{Im}(\Lambda - \lambda)) \oplus \mathrm{span(f)} \end{aligned}$$

其中 $(\Lambda - \lambda)$ 作用于 $\partial\Omega_h$。我们利用这一事实：$f_h \perp \mathrm{Im}(\Lambda - \lambda)$，得到第二个等式，因为 $f_h \in \ker(\Lambda - \lambda)$。

同时，对于固定的 λ，算子 $(\Lambda - \lambda)|_{\partial\Omega_h} : W^{k-\frac{1}{p}}(\partial\Omega_h) \to W^{k-1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega_h)$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子。在 $S^k_p(\partial\Omega_h)$ 上的限制使指标降低 1。因此，$\dim \ker D_1\phi|_{(f,\lambda,h)} = \dim \ker(\Lambda - \lambda)$ 是有限维的。并且 $\mathrm{Im} D_1\phi$ 是闭的，因为 $\mathrm{Im}(\Lambda - \lambda)$ 和 span(f) 都是闭的。此外，$\dim \mathrm{Coker}\, D_1\phi|_{(f,\lambda,h)} = \dim \mathrm{Coker}\, (\Lambda - \lambda) - 1$。因此 $D_1\phi$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子。□

我们尝试验证定理 4.4 中的条件 2(a)，即 0 是 ϕ 的正则值，但未能成功。相反，我们得到了 ϕ 的临界点的一个特殊性质。

命题 4.9。 如果(f, λ, h) 是 ϕ的临界点，那么存在非平凡的 $\psi \in W^{k-\frac{1}{p}, p}(\partial\Omega)$，使得其拉回 $\psi_h = h^{*-1}(\psi)$ 是对应于 λ的*Steklov*特征函数，该函数在 $\partial\Omega_h$ 上与f_h 正交，并且满足：

$$\nabla_{\partial\Omega} f_h \cdot \nabla_{\partial\Omega} \psi_h - (H + \lambda)\lambda f_h \psi_h = 0, \ \partial\Omega_h. \tag{4.5}$$

这里，$H = \nabla \cdot \vec{n}$ 是 $\partial\Omega_h$上的平均曲率。

证明。设 (f, λ, h_0) 是 ϕ 的一个临界点。令 $\Omega_0 = h_0(\Omega)$。我们可以通过定义相应的求值映射 $\tilde{\phi}(g, \lambda, h) = h^* \left((\Lambda - \lambda) h^{*-1}(g) \right)$，将原点从 Ω 移至 Ω_0；其中 $h \in$嵌入$^m(\Omega_0)$，且 $g \in S^k_p(\partial\Omega_0)$。于是 $\tilde{\phi}(g, \lambda, h) = \phi(h_0^{*-1}(g), \lambda, h \circ h_0)$。此外，$(f, \lambda, h_0)$ 是 ϕ 的一个临界点，当且仅当 $(h_0^{*-1}(f), \lambda, i_{\Omega_0})$ 是 $\tilde{\phi}$ 的一个临界点。

因此，不失一般性，我们假设 (f, λ, i_Ω) 是 ϕ 的一个临界点。在后续证明中，我们将不再特别说明这类原点变换。

首先，我们注意到$D\phi|_{(f,\lambda,i_\Omega)}$ 具有闭像。事实上，由（4.3）和（4.4），我们有

$$D\phi|_{(f,\lambda,i_\Omega)}(\dot{f}, 0, 0) = (\Lambda - \lambda)\dot{f}.$$

也就是说，$\mathrm{Im}(\Lambda - \lambda) \subset \mathrm{Im}\, D\phi|_{(f,\lambda,i_\Omega)}$。由于 $\mathrm{Im}(\Lambda - \lambda)$ 是闭的且具有有限余维，$\mathrm{Im}\, D\phi|_{(f,\lambda,i_\Omega)}$ 也是闭的。

因此，$D\phi|_{(f,\lambda,i_\Omega)}$ 不是满射，当且仅当 $\mathrm{Im}\, D\phi_{(f,\lambda,i_\Omega)}$ 的正交补非平凡。也就是说，存在一个非平凡的 $\psi \in (\mathrm{ImD}\phi|_{(\mathrm{f},\lambda,\mathrm{i}_\Omega)})^{\perp}$。由（4.2），对于任意 $(\dot{f}, \dot{\lambda}, \dot{h}) \in TS_{kp} \times \mathbb{R} \times C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$，满足条件的 ψ

$$0 = \int_{\partial\Omega} \psi \left((\Lambda - \lambda)\dot{f} - \dot{\lambda} f + (D_h L_h)(\dot{h}) f \right). \tag{4.6}$$

当 $\lambda = 0$ 时，$h = 0$ 在 (4.6) 中，由于 Λ 是自伴的，可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \psi \left((\Lambda - \lambda)\dot{f} \right) \\ &= \int_{\partial\Omega} ((\Lambda - \lambda)\psi)\dot{f} \end{aligned}$$

对于任意$f \in C^m(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$。因此，$(\Lambda - \lambda)\psi = 0$，即 ψ 是对应于 λ的 Steklov 特征函数。

在 (4.6) 中令$f = 0, h = 0$，可得

$$0 = \int_{\partial\Omega} \psi \left(\dot{\lambda} f \right) = \dot{\lambda} \int_{\partial\Omega} \psi f$$

对于任意 $\dot{\lambda} \in \mathbb{R}$。因此 $\int_{\partial\Omega} \psi f = 0$，即 ψ 与 f正交。

在 (4.6) 中令$f = 0, \lambda = 0$，可得

$$0 = \int_{\Omega} \psi \left(D_h(L_h)(\dot{h}) f \right) = \int_{\Omega} \psi \left(\frac{\partial L_h(f)}{\partial t}|_{x=const.,t=0} \right) \tag{4.7}$$

对任意 $h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$。为刻画条件 4.7，我们选取 $h(\cdot,t) \in$嵌入$^{\mathrm{m}}(\Omega)$，使得

$$\begin{cases} h(\cdot, 0) = i_\Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} h(\cdot, 0) = \dot{h}. \end{cases}$$

并且 $\dot{h}|_{\partial\Omega} = \sigma \vec{n}$ 对某个 $\sigma \in C^m(\partial\Omega)$。根据 (3.7)，存在

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_h(f)}{\partial t}|_{x=const.,t=0} &= -\sigma\left(\Delta_{\partial\Omega} f + H(\Lambda f)\right) - (\nabla_{\partial\Omega}\sigma)\cdot(\nabla_{\partial\Omega} f) - \Lambda\left(\sigma(\Lambda f)\right),\\ &= -\sigma\left(\Delta_{\partial\Omega} f + H\lambda f\right) - (\nabla_{\partial\Omega}\sigma)\cdot(\nabla_{\partial\Omega} f) - \Lambda\left(\sigma\lambda f\right).\end{aligned}$$

将此公式代入 4.7，得

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\partial\Omega} \psi\left(\frac{\partial L_h(f)}{\partial t}|_{x=const.,t=0}\right),\\ &= \int_{\partial\Omega} \psi\left(-\sigma\left(\Delta_{\partial\Omega} f + H\lambda f\right) - (\nabla_{\partial\Omega}\sigma)\cdot(\nabla_{\partial\Omega} f) - \Lambda\left(\sigma\lambda f\right)\right),\\ &= \int_{\partial\Omega} (-\Delta_{\partial\Omega} f)(\psi\sigma) - \lambda\psi H f\sigma - \psi(\nabla_{\partial\Omega}\sigma)\cdot(\nabla_{\partial\Omega} f) - \lambda\psi\Lambda(f\sigma),\\ &= \int_{\partial\Omega} (\nabla_{\partial\Omega} f)\cdot(\nabla_{\partial\Omega}\psi)\sigma - \lambda\psi H f\sigma - \lambda\psi\Lambda(f\sigma)\\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\nabla_{\partial\Omega} f\cdot\nabla_{\partial\Omega}\psi - \lambda f(H\psi + (\Lambda\psi))\right)\sigma.\end{aligned}$$

倒数第二个等式由 Green 公式得出。最后一个等式利用了 Λ 是自伴的这一事实。由于 σ 是任意的，且 $(\Lambda - \lambda)\psi = 0$，因此可得

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial\Omega} f\cdot\nabla_{\partial\Omega}\psi - (H\psi + \Lambda\psi)\lambda f = 0\\ \Rightarrow \nabla_{\partial\Omega} f\cdot\nabla_{\partial\Omega}\psi - (H+\lambda)\lambda f\psi = 0.\end{aligned}$$

通过原点变换即可得到 (4.5)。 □

备注 4.10. 定理 *4.4* 中的条件 *2(b)* 对 ϕ 不成立，因为 $D_1\phi$ 在$(f, \lambda, h) \in \phi^{-1}(0)$处具有非负指标。事实上，由于

$$\dim \mathrm{Coker}\, D_1\phi \geq \dim\left\{\frac{\mathrm{Im}(D\phi)}{\mathrm{Im}(D_1\phi)}\right\}$$

在(f, λ, h)处，存在

$$\dim\left\{\frac{\mathrm{Im}(D\phi)}{\mathrm{Im}(D_1\phi)}\right\} \leq \dim \mathrm{Coker}\, D_1\phi = \dim\ker D_1\phi - \mathrm{ind}\, D_1\phi \leq \dim\ker D_1\phi$$

在(f, λ, h)处。因此，对于任何正整数 q，条件 *2(b)* 都不成立。

4.2. **第二个求值映射**。在本小节中，我们证明条件 4.5 是非通有的。具体而言，存在一个开稠密子集 $E_1 \subset$嵌入$^m(\Omega)$，使得 ϕ 在 E_1 上的限制以 0 为正则值。为证明这一点，我们先引入另一个求值映射：

(4.8)

Φ:S p k ($\partial\Omega$) $\times$S p k ($\partial\Omega$) $\times$实数集 $\times$嵌入^{m}(Ω) $\to$W$^{k-1-\frac{1}{p}, p}$($\partial\Omega$) $\times$W$^{k-1-\frac{1}{p}, p}$($\partial\Omega$) $\times$W$_{k-1-\frac{1}{p}, p}$($\partial\Omega$) (f, ϕ, λ, h) $\to$(ϕ(f, λ, h), $\phi(\psi, \lambda$, h), Ψ(f , ψ, λ, h))

with

$$\begin{cases} \phi(f, \lambda, h) = h^*(\Lambda - \lambda)(h^{-1})^* f; \\ \phi(\psi, \lambda, h) = h^*(\Lambda - \lambda)(h^{-1})^* \psi; \\ \Psi(f, \psi, \lambda, h) = h^* \left(\nabla u^h \cdot \nabla w^h - (\nabla \cdot \vec{n}_h + 2\lambda)\lambda u^h w^h\right)|_{\partial\Omega}. \end{cases}$$

这里u^h、w^h 分别表示f_h的调和延拓。 ψ_h

算子 Ψ来源于 (4.5)。事实上，当 $\phi(f, \lambda, h) = \phi(\psi, \lambda, h) = 0$ 时，可得

(4.9)

$$\begin{aligned} (h^{-1})^* \Psi(f, \psi, \lambda, h) &= \left(\nabla u^h \cdot \nabla w^h - (\nabla \cdot \vec{n}_h + 2\lambda)\lambda u^h w^h\right)|_{\partial\Omega_h} \\ &= \left((\nabla_{\partial\Omega_h} u^h + u^h_{n_h} \vec{n}_h) \cdot (\nabla_{\partial\Omega_h} w^h + w^h_{n_h} \vec{n}_h) - (\nabla \cdot \vec{n}_h + 2\lambda)\lambda u^h w^h\right)|_{\partial\Omega_h} \\ &= (\nabla_{\partial\Omega_h} u^h) \cdot (\nabla_{\partial\Omega_h} w^h)|_{\partial\Omega_h} + u^h_{n_h} w^h_{n_h} |\partial\Omega_h - (\nabla \cdot \vec{n}_h + 2\lambda)\lambda u^h w^h|_{\partial\Omega_h} \\ &= (\nabla_{\partial\Omega_h} f_h) \cdot (\nabla_{\partial\Omega_h} \psi_h) + \lambda^2 f_h \psi_h - (\nabla \cdot \vec{n}_h + 2\lambda)\lambda f_h \psi_h, \\ &= (\nabla_{\partial\Omega_h} f_h) \cdot (\nabla_{\partial\Omega_h} \psi_h) - (\nabla \cdot \vec{n}_h + \lambda)\lambda f_h \psi_h. \end{aligned}$$

由 (4.9) 和引理4.1，我们得到 Φ的零点的如下刻画:

引理 4.11。 $\Phi(f, \psi, \lambda, h) = 0$ 当且仅当

(1) *both of f_h, ψ_h are eigenfunction of Λ on Ω_h corresponding to $\lambda \neq 0$.*
(2) $(\nabla_{\partial\Omega_h} f_h) \cdot (\nabla_{\partial\Omega_h} \psi_h) - (\nabla \cdot \vec{n}_h + \lambda)\lambda f_h \psi_h = 0$.

我们将定理 4.4 应用于 Φ，以证明以下定理。

定理 4.12。 设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是具有 C^m 边界的有界区域，且 $m \geq 2$。则存在一个开稠密集 $E_1 \subset$ 嵌入^{m}(Ω)，使得

(4.10)
$$\begin{aligned} \phi : S^k_p(\partial\Omega) \times \mathbb{R} \times E_1 &\to W^{k-1-\frac{1}{p}, p}(\partial\Omega) \\ (f, \lambda, h) &\to h^*(\Lambda - \lambda)(h^{-1})^* f \end{aligned}$$

以零为正则值。

证明。为将定理 4.4 应用于 Φ，令 X = S p k ($\partial\Omega$) $\times$S p k ($\partial\Omega$) $\times \mathbb{R}$，Y = C^m(Ω, $\mathbb{R}^n$)，二者均为可分空间；并令 A = S p k ($\partial\Omega$) $\times$S p k ($\partial\Omega$) $\times\mathbb{R}\times$嵌入^{m}(Ω)。令 D$_1$ 表示沿 S p k ($\partial\Omega$) $\times$S p k ($\partial\Omega$) $\times \mathbb{R}$方向的微分。我们也用 D$_1$ 表示 ϕ 沿 S p k ($\partial\Omega$) $\times\mathbb{R}$方向的微分；其含义将由上下文明确。

固定 $(f, \psi, \lambda, h_0) \in \Phi^{-1}(0)$。不失一般性，我们可以假设 $(f, \psi, \lambda, i_\Omega) \in \Phi^{-1}(0)$，因为我们总可以将原点从 Ω 平移到 $h_0(\Omega)$。

我们首先证明，对于每个 $(D_1\Phi, f, \psi, \lambda, i_\Omega) \in \Phi^{-1}(0)$，$D_1\Phi$ 都是左弗雷德雷姆的。对于核，有

$$\ker D_1\Phi|_{(f,\psi,\lambda,i_\Omega)} = \{(\dot{f}, \dot{\psi}, \dot{\lambda}) | D_1\phi(\dot{f}, \dot{\lambda}) = 0, D_1\phi(\dot{\psi}, \dot{\lambda}) = 0, D_1\Psi(\dot{f}, \dot{\psi}, \dot{\lambda}) = 0\}.$$

引理 4.8 表明 $\dim \ker D_1\phi$ 是有限的，记为l。那么上述等式表明，$\dim\ker D_1\Phi \le l^2$。

对于像，有

$$\operatorname{Im} D_1\Phi|_{(f,\psi,\lambda,i_\Omega)} = \operatorname{Im} D_1\phi|_{(f,\lambda,i_\Omega)} \oplus \operatorname{Im} D_1|_{(\psi,\lambda,i_\Omega)}\phi \oplus \operatorname{Im} D_1\Psi|_{(f,\psi,\lambda,i_\Omega)}.$$

由于根据引理 4.8，$\operatorname{Im} D_1\phi$ 是闭的，因此只需证明 $\operatorname{Im} D_1\Psi$ 是闭的，即可得出 $\operatorname{Im} D_1\Phi$ 是闭的。

直接计算可得

$$\begin{aligned} D_1\Psi(\dot{f}, \dot{\psi}, \dot{\lambda})|_{(f,\psi,\lambda,i_\Omega)} &= [\nabla w \cdot \nabla - (\nabla \cdot \vec{n} + 2\lambda)\lambda w]\, \dot{f}^h|_{\partial\Omega} \\ &\quad + [\nabla u \cdot \nabla - (\nabla \cdot \vec{n} + 2\lambda)\lambda u]\, \dot{\psi}^h|_{\partial\Omega} - 4\lambda\dot{\lambda} f\psi \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中u、w、$\dot{f}^h$、$\dot{\psi}^h$分别是f、ψ、$\dot{f}$、$\dot{\psi}$的调和延拓。因此，$D_1\Psi$ 是两类映射的线性组合。第一类映射为

$$\dot{\lambda} \to -4\lambda\dot{\lambda} f\psi,$$

它是闭的，因为它只是将 λ 乘以固定函数$-4\lambda f\psi$。

第二类是映射

$$\dot{f} \to [\nabla w \cdot \nabla - (\nabla \cdot \vec{n} + 2\lambda)\lambda w]\, \dot{f}^h\big|_{\partial\Omega},$$

它是由三个运算复合而成的：调和延拓$f \mapsto \dot{f}^h$、梯度运算，以及乘以固定函数。梯度算子和乘法算子都是闭的，而调和延拓作为 Banach 空间之间的连续映射也是闭的。

因此，$\operatorname{Im} D_1\Psi$ 是闭的。并且 $D_1\Phi$ 在 $(f, \psi, \lambda, i_\Omega) \in \Phi^{-1}(0)$ 处是左 Fredholm 的。

为验证指标条件和定理 4.4 中的条件 (2)，我们提出以下断言：在 $(f, \psi, \lambda, i_\Omega) \in \Phi^{-1}(0)$ 处，存在

$$\dim\left(\frac{\operatorname{Im}(D\Phi)}{\operatorname{Im}(D_1\Phi)}\right) = \infty.$$

于是条件 2(b) 成立。该断言将作为命题 4.14 加以证明。

因此

$$\dim\operatorname{coker} D_1\Phi \ge \dim\left(\frac{\operatorname{Im}(D\Phi)}{\operatorname{Im}(D_1\Phi)}\right),$$

$D_1\Phi$ 的指标为f、 ψ、 λ、i_Ω在 $\in \Phi^{-1}(0)$处。

因此，根据定理 4.4，子集

$$\{h \in \mathrm{Emb}^{\mathrm{m}}(\Omega) |\ \Phi(\cdot, h) \text{ has 0 as a critical value}\}$$

是贫乏集且是闭的。此外，它等于子集

$\{h \in$嵌入$^{\mathrm{m}}(\Omega)|\ \Phi(f, \psi, \lambda, h) = 0$对于某个 $(f, \psi, \lambda) \in S_{pk}(\partial\Omega) \times S_{pk}(\partial\Omega) \times \mathbb{R}\}$

其补集记为 E_{1}。因此， E_1 是嵌入$^{\mathrm{m}}(\Omega)$中的剩余开集。

我们声称，将 ϕ限制在E_1 上时， 0 是一个正则值:

$$\begin{aligned} \phi : S^k_p(\partial\Omega) \times \mathbb{R} \times E_1 &\longrightarrow W^{k-1-\frac{1}{p}, p}(\partial\Omega), \\ (f, \lambda, h) &\longmapsto h^*(\Lambda - \lambda)(h^{-1})^* f. \end{aligned}$$

反设不然，设 $(f, \lambda, h) \in \phi^{-1}(0)$ 是 ϕ的一个临界点，且 $h \in E_{1}$。那么，根据命题 4.9 和引理 4.11，存在 $\psi \in S^k_p(\partial\Omega)$，使得 $(f, \psi, \lambda, h) \in \Phi^{-1}(0)$。这与 $h \in E_1$这一事实矛盾。

□

注 4.13. 我们回顾一下，调和延拓是连续的。事实上，若 u 表示 f 的调和延拓，则它是下列狄利克雷问题的解:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(s) \nabla_{\vec{n}} G(x, s) ds,\ x \in \Omega.$$

其中 $G(x, s)$ 是满足狄利克雷边界条件的格林函数。

命题 4.14. 假设 $(f, \psi, \lambda, i_\Omega) \in \Phi^{-1}(0)$。则

$$\dim \left\{ \frac{\mathrm{Im}(D\Phi)}{\mathrm{Im}(D_1\Phi)} \right\} = \infty \tag{4.12}$$

在 $(f, \psi, \lambda, i_\Omega) \in \Phi^{-1}(0)$。

为证明命题 4.14 做准备，我们先推导 Ψ 关于h的变分公式。

引理 4.15。 假设 $(f, \psi, \lambda, i_\Omega) \in \Psi^{-1}(0)$。对于任意 $\dot{h} \in C^m(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$,在 $(f, \psi, \lambda, i_\Omega)$处， Ψ关于 h 沿 h 方向的变分满足:

$$\begin{aligned} D_h\Psi(\dot{h}) = &\left[\nabla w \cdot \nabla_x - (\nabla \cdot \vec{n} + 2\lambda)\lambda w\right](-\dot{h} \cdot \nabla u) \\ &+ \left[\nabla u \cdot \nabla_x - (\nabla \cdot \vec{n} + 2\lambda)\lambda u\right](-\dot{h} \cdot \nabla w) \\ &+ \lambda u w \Delta_{\partial\Omega}\sigma + \nabla\Psi \cdot \dot{h} \end{aligned}$$

在 $\partial\Omega$ 上。这里 u， w 分别表示 f， ψ 的调和延拓。

证明。为方便起见，对于固定的 λ，我们引入算子 $\eta(f,\psi)=\Psi(f,\psi,\lambda,i_\Omega)$:

$$\begin{aligned}\eta :&W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)\times W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)\to W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)\\&(f,\psi)\to(\nabla u\cdot\nabla w-(\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda uw)\,|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

其中，u、w 分别是f的调和延拓，ψ。我们注意到，η 在 $\mathbb{R}^n$中的任意区域上都有定义。

我们将其拉回算子定义如下:

$$\begin{aligned}\eta_h=h^*\eta(h^{-1})^*:&W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)\times W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)\to W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)\\&(f,\psi)\to h^*\left(\nabla u^h\cdot\nabla w^h-(\nabla\cdot\vec{n}_h+2\lambda)\lambda u^hw^h\right)|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

其中，u^h、w^h 分别是$f_h=(h^{-1})^*f$、$\psi_h=(h^{-1})^*\psi$ 在 Ω_h 上的调和延拓。

对于 $\dot{h}\in C^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$，取$h(\cdot,t)\in$嵌入$^{\mathrm{m}}(\Omega)$，使得

$$\begin{cases}h(\cdot,0)=i_\Omega,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}h(\cdot,0)=\dot{h}.\end{cases}$$

于是 $D_h\Psi(\dot{h})=\frac{\partial\eta_h(f,\psi)}{\partial t}|_{x=const,t=0}$。根据链式法则，我们有

$$\begin{aligned}D_h\Psi(\dot{h})(x)&=\frac{\partial\eta_h(f,\psi)}{\partial t}|_{x=const,t=0}(x),\ x\in\partial\Omega\\&=\frac{\partial\eta(f^h,\psi^h)}{\partial t}(h(x))|_{x=const,t=0},\\&\overset{t=0}{=}\frac{\partial\eta(f^h,\psi^h)}{\partial t}|_{y=const.}(y)+\nabla_y\eta(f^h,\psi^h)\cdot\frac{\partial y}{\partial t},\ y=h(x,t)\\&\overset{t=0}{=}\frac{\partial\eta(f^h,\psi^h)}{\partial t}|_{y=const.}(y)+\nabla_x\eta(f,\psi)\cdot\dot{h}(x),\\&\overset{t=0}{=}\frac{\partial\eta(f^h,\psi^h)}{\partial t}|_{y=const.}(y)+\nabla_x\Psi\cdot\dot{h}(x).\end{aligned}\tag{4.13}$$

Here

$$\eta(f^h,\psi^h)=\left(\nabla_yu^h\cdot\nabla_yw^h-(\nabla_y\cdot\vec{n}_h+2\lambda)\lambda u^hw^h\right)|_{\partial\Omega_h}$$

其中 u^h、w^h 分别是 $f_h = (h^{-1})^* f$ 和 $\psi_h = (h^{-1})^* \psi$ 在 Ω_h上的调和延拓。因此，导数 $\partial \eta_{(f^h,\psi^h)\partial t}|_{y=const.}(y)$ 满足

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta(f^h,\psi^h)}{\partial t}|_{y=const.}(y) \overset{t=0}{=} & \left[\nabla_y w^h \cdot \nabla_y - (\nabla_y \cdot \vec{n}_h + 2\lambda)\lambda w^h\right](\nabla_x u^h \cdot \frac{\partial x}{\partial t}) \\
& + \left[\nabla_y u^h \cdot \nabla_y - (\nabla_y \cdot \vec{n}_h + 2\lambda)\lambda u^h\right](\nabla_x w^h \cdot \frac{\partial x}{\partial t}) \\
& - \nabla_y \cdot (\frac{\partial \vec{n}_h}{\partial t}|_{y=const.})\lambda u^h w^h, \\
= & \left[\nabla w \cdot \nabla_x - (\nabla \cdot \vec{n} + 2\lambda)\lambda w\right](-\dot{h} \cdot \nabla u) \\
& + \left[\nabla u \cdot \nabla_x - (\nabla \cdot \vec{n} + 2\lambda)\lambda u\right](-\dot{h} \cdot \nabla w) \\
& - \nabla \cdot (\frac{\partial \vec{n}_h}{\partial t}|_{y=const.,t=0})\lambda uw.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

第二个等式由此得出：$\partial_{x\,\partial t}|_{t=0} = {}^{\partial}{}_{h\partial}{}^{-1}{}_{t}|_{t=0} = -h_x^{-1} h_t|_{t=0} = -\dot{h}$。

由引理 2.3 可得 $\partial^{\rightarrow}{}_{n\partial}{}^{h}{}_{t}|_{y=const.,t=0} = -\nabla_{\partial\Omega}\sigma$，其中 $\sigma = \dot{h} \cdot {}^{\rightarrow}n$。于是

$$
\nabla \cdot (\frac{\partial \vec{n}_h}{\partial t}|_{y=const.,t=0}) = \nabla \cdot (-\nabla_{\partial\Omega}\sigma) = -\Delta_{\partial\Omega}\sigma.
$$

将此公式代入上文的 (4.14)，可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta(f^h,\psi^h)}{\partial t}|_{y=const.}(y) \overset{t=0}{=} & \left[\nabla w \cdot \nabla_x - (\nabla \cdot \vec{n} + 2\lambda)\lambda w\right](-\dot{h} \cdot \nabla u) \\
& + \left[\nabla u \cdot \nabla_x - (\nabla \cdot \vec{n} + 2\lambda)\lambda u\right](-\dot{h} \cdot \nabla w) \\
& + \lambda uw\Delta_{\partial\Omega}\sigma.
\end{aligned}
$$

将此公式代入 (4.13)，即可得到所需结果。

□

现在我们可以证明命题 4.14 了。

命题 4.14 的证明。假设 (4.12) 在 $(\mathrm{f}, \psi, \lambda, \mathrm{i}_\Omega) \in \Phi^{-1}(0)$ 处不成立。令 $\dim\left\{\mathrm{Im}(\mathrm{D}\Phi)\ \mathrm{Im}(\mathrm{D}_{\mathrm{T}\Theta})\right\} = \mathrm{J}$，并取其一组基 $\{\theta_1, \cdots, \theta_J\}$。对每个 j，令 $\theta_j = (\theta_j^1, \theta_j^2, \theta^3\mathrm{j})$。于是，对任意 $(\dot{\mathrm{f}}, \dot{\psi}, \dot{\lambda}, \dot{\mathrm{h}})$，存在 $(\mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{s}) \in \mathrm{S\,kp}(\partial\Omega) \times \mathrm{S\,kp}(\partial\Omega) \times \mathbb{R}$，以及 $(\mathrm{c1}, \cdots, \mathrm{c}_J) \in \mathbb{R}^J$，使得 $\mathrm{D}\Phi(\dot{\mathrm{f}}, \dot{\psi}, \dot{\lambda}, \dot{\mathrm{h}}) = \mathrm{D}\Phi(\mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{s}, 0) + \sum^J \mathrm{j}=1\, \mathrm{c\,j}\theta_j$，即

$$
D\Phi(\dot{f} - v, \dot{\psi} - w, \dot{\lambda} - s, \dot{h}) = \sum_{j=1}^{J} c_j \theta_j.
$$

重新定义 $(\dot{f}, \dot{\psi}, \dot{\lambda}) := (\dot{f} - v, \dot{\psi} - w, \dot{\lambda} - s)$。因此，对任意 $\dot{h}$，存在某个 $(\dot{f}, \dot{\psi}, \dot{\lambda})$ 以及常数 $(c_1, \cdots, c_J)$，使得

$$D\Phi(\dot{f}, \dot{\psi}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = \sum_{j=1}^{J} c_j \theta_j.$$

也就是说

$$D\phi(\dot{f}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = \sum_{j=1}^{J} c_j \theta_j^1; \tag{4.15}$$

$$D\phi(\dot{\psi}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = \sum_{j=1}^{J} c_j \theta_j^2; \tag{4.16}$$

$$\Psi(\dot{f}, \dot{\psi}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = \sum_{j=1}^{J} c_j \theta_j^3. \tag{4.17}$$

首先利用 (4.15) 和 (4.16)，将 $\dot{f}$、$\dot{\lambda}$、$\dot{\psi}$ 表示为 $\dot{h}$ 的形式。然后将这些公式代入 (4.17)，可得一个关于h 的有限秩算子。同时，对$D\Psi$的显式计算将表明，该算子不可能是有限秩的。矛盾说明假设不成立，因此 (4.12) 成立。

步骤 1：利用 (4.15) 和 (4.16)，将 $\dot{f}$、$\dot{\psi}$、$\dot{\lambda}$ 表示为 $\dot{h}$ 的形式。

由 (4.3) 和 (4.4)，可得

$$\begin{aligned} D\phi(\dot{f}, \dot{\lambda}, \dot{h}) &= D_1\phi(\dot{f}, \dot{\lambda}) + D_h\phi(\dot{h}) \\ &= (\Lambda - \lambda)\dot{f} - \dot{\lambda} f + D_h L_h(\dot{h}) f. \end{aligned}$$

将其代入 (4.15)，可得

$$\begin{aligned} &(\Lambda - \lambda)\dot{f} - \dot{\lambda} f + D_h L_h(\dot{h}) f = \sum_{j=1}^{J} c_j \theta_j^1 \\ \Rightarrow &(\Lambda - \lambda)\dot{f} = \sum_{j=1}^{J} c_j \theta_j^1 + \dot{\lambda} f - D_h L_h(\dot{h}) f. \end{aligned} \tag{4.18}$$

由于 Λ 是自伴且椭圆的，其逆算子是良定义的：

$$(\Lambda - \lambda)^{-1} : \mathrm{Im}(\Lambda - \lambda) \to (\ker(\Lambda - \lambda))^{\perp}.$$

设$\{\psi_j\}_{j=1}^l$是核$(\Lambda-\lambda)$的一组基。则(4.18)意味着存在一些常数$\{b^j\}_{j=1}^l$，使得

$$\dot{f}=\sum_{j=1}^{l} b_j\psi_j+(\Lambda-\lambda)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{J} c_j\theta_j^1+\dot{\lambda}f-D_hL_h(\dot{h})f\right) \tag{4.19}$$

$$\dot{\lambda}=\frac{\int_{\partial\Omega} f\left(\sum_{j=1}^{J} c_j\theta_j^1-D_hL_h(\dot{h})f\right)}{\int_{\partial\Omega} f^2}. \tag{4.20}$$

由（4.19）和（4.20）可知，f和λ是h的函数。

由（4.16）可得关于$\dot{\psi}$的类似公式：

$$\dot{\psi}=\sum_{j=1}^{l} d_j\psi_j+(\Lambda-\lambda)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{J} c_j\theta_j^2+\dot{\lambda}\psi-D_hL_h(\dot{h})f\right) \tag{4.21}$$

对于某些常数d_j。由（4.21）和（4.20）可知，$\dot{\psi}$是h的函数。

因此，将（4.19）、（4.20）和（4.21）代入（4.17）可知，该算子

$$\Gamma:\dot{h}\to D\Psi(\dot{f},\dot{\psi},\dot{\lambda},\dot{h}) \tag{4.22}$$

具有有限秩。

步骤 2：计算$D\Psi$。

在$(f,\psi,\lambda,i_\Omega)\in\Psi^{-1}(0)$处，有

$$D\Psi(\dot{f},\dot{\psi},\dot{\lambda},\dot{h})=D_1\Psi(\dot{f},\dot{\psi},\dot{\lambda})+D_h\Psi(\dot{h}). \tag{4.23}$$

令u、w、$\dot{f}_h$、$\dot{\psi}^h$分别为f、ψ、$\dot{f}$、$\dot{\psi}$对应的调和延拓。由(4.11)，可得

$$\begin{aligned} D_1\Psi(\dot{f},\dot{\psi},\dot{\lambda})=&\left[\nabla w\cdot\nabla-(\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda w\right]\dot{f}^h|_{\partial\Omega}\\ &+\left[\nabla u\cdot\nabla-(\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda u\right]\dot{\psi}^h|_{\partial\Omega}-4\lambda\dot{\lambda}f\psi. \end{aligned} \tag{4.24}$$

由于

$$\begin{aligned} \left(\nabla w\cdot\nabla\dot{f}^h\right)|_{\partial\Omega}&=\nabla_{\partial\Omega}w\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot{f}^h+(\nabla_n w)(\nabla_n\dot{f}^h)\\ &=\nabla_{\partial\Omega}\psi\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot{f}+\lambda\psi\nabla_n\dot{f}^h\\ &=\nabla_{\partial\Omega}\psi\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot{f}+\lambda\psi\Lambda\dot{f}, \end{aligned}$$

因此可得

$$\left(\nabla w\cdot\nabla-(\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda w\right)\dot{f}^h|_{\partial\Omega}=\nabla_{\partial\Omega}\psi\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot{f}+\lambda\psi\Lambda\dot{f}-(\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda\psi\dot{f}.$$

类似地，有

$$\left(\nabla u\cdot\nabla-(\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda u\right)\dot{\psi}^h|_{\partial\Omega}=\nabla_{\partial\Omega}f\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot{\psi}+\lambda f\Lambda\dot{\psi}-(\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda f\dot{\psi}.$$

将这两个公式代入 (4.24) 可得

$$
\begin{aligned}
D_1\Psi(\dot{f},\dot{\psi},\dot{\lambda}) &= \nabla_{\partial\Omega}\psi\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot{f} + \lambda\psi\Lambda\dot{f} - (\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda\dot{f} \\
&\quad + \nabla_{\partial\Omega}f\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot{\psi} + \lambda f\Lambda\dot{\psi} - (\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda\dot{\psi} - 4\lambda\dot{\lambda}f\psi.
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

这意味着$D_1\Psi$ 依赖于 $\dot{f}$, $\dot{\psi}$ 最高至 1 阶, $\dot{\lambda}$ 最高至 0 阶。

同时, (3.6) 意味着, 对于任意 $\Lambda f = \lambda f$

$$
D_hL_h(\dot{h})f = \lambda\nabla_{\partial\Omega}f\cdot\dot{h} - \sigma(\Delta_{\partial\Omega}f + H(\lambda f)) - (\nabla_{\partial\Omega}\sigma)\cdot(\nabla_{\partial\Omega}f) - \Lambda(\nabla u\cdot\dot{h})
$$

其依赖于h 至 1 阶。结合 (4.19)、(4.20) 和 (4.21), 这一事实意味着 $\dot{f}$、$\dot{\psi}$ 和 $\dot{\lambda}$ 都是 $\dot{h}$ 的 0 阶函数。因此, (4.25) 意味着$D_1\Psi$ 是关于h 的最高 1 阶算子。

根据引理 4.15, 我们有

$$
\begin{aligned}
D_h\Psi(\dot{h}) &= [\nabla w\cdot\nabla_x - (\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda w](-\dot{h}\cdot\nabla u) \\
&\quad + [\nabla u\cdot\nabla_x - (\nabla\cdot\vec{n}+2\lambda)\lambda u](-\dot{h}\cdot\nabla w) \\
&\quad + \lambda uw\Delta_{\partial\Omega}\sigma + \nabla\Psi\cdot\dot{h}.
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

这是关于h 的最高 2 阶算子。

由 (4.25) 和 (4.26), 我们有:

$$
\Gamma : \dot{h} \to D\Psi(\dot{f},\dot{\psi},\dot{\lambda},\dot{h}) = \lambda f\psi\Delta_{\partial\Omega}\sigma + \text{lower order terms.}
$$

由于 $\sigma = \dot{h}\cdot\vec{n}$ 遍历 $C^m(\partial\Omega)$, 算子 $\Delta_{\partial\Omega}\sigma$ 不可能是有限秩的。要使 Γ 成为有限秩算子, 必须有 $f\psi = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立。然而, 根据定理 3.3 中关于 Steklov 特征函数的弱唯一延拓原理, 这是不可能的。因此, Γ不可能是有限秩的。这就产生了矛盾, 从而 (4.12) 成立。

事实上, 如果$f\psi = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立, 那么f 或 ψ 必定在 $\partial\Omega$ 的某个开子集上消失, 因此根据定理 3.3, 它们恒等于零。由于f和 ψ 都是非常数 Steklov 特征函数, 这不可能。

□

4.3. **主定理的证明**。

证明。 根据定理 4.12, 存在一个开稠密集 $E_1 \subset$ 嵌入$^m(\Omega)$, 使得

$$
\begin{aligned}
\phi : & S^k_p(\partial\Omega)\times\mathbb{R}\times E_1 \to W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \\
& (f,\lambda,h) \to h^*(\Lambda-\lambda)(h^{-1})^*f
\end{aligned}
$$

以 0 为正则值。设 $X = S^k_p(\partial\Omega)\times\mathbb{R}$、$Y = C^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$、$A = S_{kp}\times\mathbb{R}\times E_1$以及 $\zeta = 0$。在任意满足 $h \in E_1, D_1\phi$的点 $(f, \lambda, h) \in \phi^{-1}(0)$ 处, Fredholm 算子的

指标为 0（由引理 4.8 得出），且 $D\phi$ 是满射。将定理 4.4 应用于此ϕ，可得

$$\dot{Y}_{crit} = \{h \in E_1 \,|\, 0 \text{ is a critical value of } \phi(,h)\}$$

是贫乏集。因此其补集

$$E_2 = \{h \in E_1 \,|\, 0 \text{ is a regular value of } \phi(,h)\}$$

是剩余集。根据引理 4.7，这意味着 Ω_h 的所有非零 Steklov 特征值对于 $h \in E_2$都是单重的。

□

参考文献

[1] Alberto-P. Calder´on, 《关于一个反边值问题》, 《数值分析及其在连续介质物理中的应用研讨会》（里约热内卢，1980），巴西数学会，里约热内卢，1980，第65–73页。[2] R. Courant 和 D. Hilbert, 《数理物理方法》第一卷, Interscience Publishers, Inc.，纽约，1953。德文版，1931。[3] Bruno Colbois、Alexandre Girouard、Carolyn Gordon 和 David Sher, 《Steklov 特征值问题的一些最新进展》, Rev. Mat. Complut. 37（2024），第1期，1–161。[4] M. Dambrine、D. Kateb 和 J. Lamboley, 《Wentzell-Laplace 算子的一个极值特征值问题》, Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire 33（2016），第2期，409–450。[5] M. C. Delfour 和 J.-P. Zol´esio, 《形状与几何》, 《设计与控制进展》第4卷，工业与应用数学学会（SIAM），宾夕法尼亚州费城，2001。分析、微分学与优化。[6] Ailana Fraser 和 Richard Schoen, 《第一 Steklov 特征值、共形几何与极小曲面》, Adv. Math. 226（2011），第5期，4011–4030。[7] , 《球内的尖锐特征值界与极小曲面》, Invent. Math. 203 (~~2016~~)，第3期，823–890。[8] , 《高维 Steklov 问题的形状优化》, Adv. Math. 348（2019），146–162。[9] Allan Greenleaf、Yaroslav Kurylev、Matti Lassas 和 Gunther Uhlmann, 《隐身装置、电磁虫洞与变换光学》, SIAM Rev. 51（2009），第1期，3–33。[10] Nicola Garofalo 和 Fang-Hua Lin, 《椭圆算子的唯一延拓：一种几何变分方法》, Comm. Pure Appl. Math. 40（1987），第3期，347–366。[11] Alexandre Girouard 和 I osif Polterovich, 《Steklov 问题的谱几何》（综述文章），J. Spectr. Theory 7（2017），第2期，321–359。[12] David Gilbarg 和 Neil S. Trudinger, 《二阶椭圆偏微分方程》, 《数学经典》, Springer-Verlag，柏林，2001。1998年版重印。[13] Daniel B. Henry, 《偏微分方程边值问题的边界扰动》, Sem. Brasileiro Anal. ATS 22（1985）。

[14] ———，《通过边界扰动研究平衡解的一般性质》，《无限维系统动力学》（里斯本，1986），北约高级科学研究所系列 F：计算机系统科学，第37卷，施普林格，柏林，1987，第129–139页。[15] Dan Henry，《偏微分方程边值问题中的边界扰动》，《伦敦数学学会讲义系列》，剑桥大学出版社，2005。[16] 雅克·阿达马，《雅克·阿达马全集》第一、二、三、四卷，法国国家科学研究中心出版社，巴黎，1968（法文）。雅克·阿达马全集出版委员会：M. Fr´echet、P. Levy、S. Mandelbrojt、L. Schwartz。[17] Peter Li，《几何分析》，《剑桥高等数学研究》第134卷，剑桥大学出版社，剑桥，2012。[18] Anna Maria Micheletti，《拉普拉斯算子谱的扰动与区域变化的关系》，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) 26（1972），151–169（意大利文）。[19] ，《有界区域族的度量及特征值的一般性质》，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) 26（1972），683–694（意大利文）。`Jind˘rich Ne˘cas，《椭圆方程理论中的直接方法》，《施普林格数学专著》，施普林格，海德堡，2012。由 Gerard Tronel 和 Alois Kufner 从1967年法文原版译出；编辑统筹及序言由 ˘S [20] arka Ne˘casov´a 撰写，并附有 Christian G. Simader 的贡献。[21] 约翰·威廉·斯特拉特·瑞利男爵，《声学理论》，多佛出版社，纽约，1945。第二版。[22] W. Stekloff，《数学物理的基本问题（续篇及完结）》，Ann. Sci. `Ecole Norm. Sup. (3) 19（1902），455–490（法文）。´John Sylvester 和 Gunther Uhlmann，《电法勘探中一个反边值问题的唯一性定理》，Comm. Pure Appl. Math. 39（1986），第1期，91–112。´K. Uhlenbeck，《特征函数的一般性质》，Amer. J. Math. 98（1976），第4期，1059–1078。[23] Lihan Wang，《Steklov 特征函数的一般性质》，Trans. Amer. Math. Soc. 375（2022），第11期，8241–8255。电子邮箱：lihan.wang@csulb.edu

数学与统计学系，加利福尼亚州立大学长滩分校，1250 BellflowerBlvd，长滩，加利福尼亚州 90840。