arXiv:2601.12133v1 [math.SP] 17 Jan 2026

对 $D^{(\lambda,N)}$ 对数算子的谱分析

´多米尼克·斯利维´斯基

2026年1月

摘要

本文研究了近期的 Connes-Consani-Moscovici $D^{(\lambda,N)}$ 对数算子。目前的假设认为，这些算子的谱趋近于 $\zeta\left(\frac{1}{2}+is\right)$ 黎曼ζ函数的零点 λ，$N \to \infty$。事实证明，在考虑不同的标准误差概念时，谱与黎 ζ 曼零点之间的不和谐度要么呈现出逆对数性质，要么可以证明具有这种性质，而这与素数的分布巧妙地吻合。

关键词 黎曼ζ函数、谱理论、 $D^{(\lambda,N)}$ 对数算子

1 引言

根据 Connes、Consani 和 Moscovici 最近的研究 [1]，，我们知道可以构造一族算子 $D^{(\lambda,N)}$ 对数，使其满足秩一约束 $D^{(\lambda,N)}$ 对数$(\xi) = 0$；其中 ξ 是一个偶特征值，对应于一个偶简单 Weil 二次型。这使得任意一个算子的特征值都与 $\zeta(\frac{1}{2}+is)$ 的零点对齐，其精度受该算子作用的有限维希尔伯特空间所能提供的分辨率限制。在下一节中，我们将回顾$D^{(\lambda,N)}$ 对数的思想，并定义误差的一些基本概念，例如平均绝对误差 ϵ以及与 $\mathcal{E}$ 等价的 L^∞ 范数。在后续一节中，我们将证明 ϵ的一个重要性质，即

$$\epsilon(\lambda, N) \geq \frac{1}{4\ln\lambda}$$

也就是说，平均绝对误差具有反对数性质。此外，当 λ 以某种方式缩放以涵盖有关 N 个素数的信息时，我们将看到

$$\epsilon(N) = \Omega\left(\frac{1}{\ln N}\right)$$

最后，我们将展示 $\mathcal{E}$ 具有类似反对数性质的数值证据，以及与这类算子及其与黎曼 ζ 零点关系相关的其他计算结果。

2 预备知识

2.1 $\mathcal{H}_\lambda$ 空间与 $D^{(\lambda,N)}$ 对数算子

我们定义本文中这些算子主要作用的空间。

定义 2.1。 $\mathcal{H}_\lambda$ 定义为空间

$$\mathcal{H}_\lambda := L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$$

其中， d^*u 表示乘法 *Haar* 测度。

由于我们几乎完全只处理实特征值，因此可以进行对数替换，从而得到与加法空间 $L^2([-\ln\ \lambda,\ \ln\ \lambda],\ du)$的等距同构；对某些人而言，这或许是理解某些概念的一种更简单方式。

定义 2.2。 在 $\mathcal{H}_\lambda$ 中，我们将缩放生成元定义为以下微分算子:

$$\hat{D} = -i\frac{d}{du}$$

我们还将用到以下有用的观察 [5]。

ˆ**事实 2.3.** 缩放生成元 D 众所周知满足标准对易ˆ关系 $[\hat{}u, D] = iI$，其中 $\hat{}u$ 是 d^*u 测度下的位置算子。

下面给出 $D^{(\lambda,N)}$ 对数 算子族的定义。强烈建议仔细阅读 Connes-Consani-Moscovici 的原始论文 [1] 。

定义 2.4. 算子 $D^{(\lambda,N)}$ 对数 定义为将缩放ˆ生成元 D 压缩到一个有限维子空间 $E_N \subset \mathcal{H}_\lambda$上。该子空间 E_N 是$(2N+1)$维的，并局限于总长度为$L = 2\ln\lambda$的对数窗口内。正如 *Connes-Consani-Moscovici* 的论文所证明的，这是唯一满足唯一秩一约束的算子

$$D^{(\lambda,N)}_{\log}(\xi) = 0$$

其中 $\xi \in E_N$ 是与截断韦伊二次型对应的向量，并且在狄利克雷核上与 $D^{\lambda}_{\log}$一致；后者以类似方式定义，但不局限于 E_n。

2.2 误差 $\epsilon(\lambda, N)$和 $\mathcal{E}(\lambda, N)$

据推测， $D^{(\lambda,N)}$ log 的谱会任意接近 $\zeta\left(\frac{1}{2} + is\right)$的零点。为了精确衡量谱实际接近上述零点的程度，将定义多种不和谐度或“误差”的概念。由于 E_N 是一个 $(2N+1)$ 维子空间，因此

算子 $D^{(\lambda,N)}{}_{\log}$ 恰有 $2N+1$ 个特征值。由缩放生成元的自伴性以及截断韦伊二次型 [4], 的对称性可知，其谱关于原点对称。将特征值集合记为:

$$\sigma\left(D_{\log}^{(\lambda,N)}\right) = \{\nu_{-N}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_N\}$$

其中，根据秩一约束， $\nu_0 = 0$。我们将正特征值按 $0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_N$的顺序排列。为了量化收敛精度，我们将这些值与非平凡黎曼零点集合 $\mathcal{Z} = \{\frac{1}{2} \pm i\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$进行比较（为避免假设黎曼猜想， ζ_k 可能是复数）。我们按照零点虚部的绝对值排序。

定义 2.5。平均绝对误差记为 $\epsilon(\lambda, N)$，定义为该算子的 N 个正特征值与黎曼零点的前 N 个虚部之间距离的平均值。

$$\epsilon(\lambda, N) := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |\nu_k - \zeta_k|$$

定义 2.6。一致误差（或 L^∞ 误差）记为 $\mathcal{E}(\lambda, N)$，定义为对应的特征值与 ζ 个零点之间的最大偏差。

$$\mathcal{E}(\lambda, N) := \max_{k\in\{1,\ldots,N\}} |\nu_k - \zeta_k|$$

3 ϵ的逆对数下界

我们来考虑以下定理，它严格地刻画了 $D^{(\lambda,N)}{}_{\log}$ 谱与黎曼 ζ 零点之间不和谐度的反对数性质。

定理 3.1. 误差 $\epsilon(\lambda, N)$ 满足弱下界不等式

$$\epsilon(\lambda, N) \geq \frac{1}{4\ln\lambda}$$

证明. 设 $\hat{u}$ 为 d^*u 测度下的位置算子，$\hat{D} = -i\frac{d}{du}\hat{}$ 为缩放生成元。根据事实 2.3, $[\hat{u}, D] = iI$。因此，由于对易子非零，对于子空间 $E_N \subset L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ 中的任意向量 ψ，海森堡-泡利-外尔 [5, 6]不等式给出

$$\sigma_u\sigma_\zeta \geq \frac{1}{2}$$

其中 $\sigma_u^2 = \langle\psi, \hat{u}^2\psi\rangle - \langle\psi, \hat{u}\psi\rangle^2$， σ_ζ^2是算子 $D^{(\lambda,N)}{}_{\log}$ 的方差，因为它是将 $\hat{D}$ 压缩到 E_N上的结果。根据性质 $D_{log}^{(\lambda,N)}(\xi) = 0$，它具有

与 ζ_k 对齐的特征值，其精度至多达到希尔伯特空间 E_N的分辨率，其中 ξ 对截断的韦伊分布进行编码。位置方差的最大值受空间大小的限制。 $\mathcal{H}_\lambda$是 E_N 的超空间，处于 d^*u之下，因此其大小为 $\ln\ \lambda - (-\ln\ \lambda)\ =\ 2\ln\ \lambda$（可以回想一下同构的加法空间 $L^2([-\ln\lambda,\ \ln\ \lambda],\ du)$）。由此得到不等式

$$\sigma_u \le 2\ln\lambda$$

将其与海森堡-泡利-外尔不等式结合，可得谱偏差不等式

$$\sigma_\zeta \ge \frac{1}{4\ln\lambda}$$

由于 $\epsilon(\lambda,\ N)$ 显然有下界，即截断算子的谱不确定性 σ_ζ，因此我们有

$$\epsilon(\lambda, N) \ge \frac{1}{4\ln\lambda}$$

□

推论 3.2. 此外，当 λ 经过缩放，以便按如下方式包含有关N素数的信息： $N\ln\ \lambda \sim p_N$时，下式成立

$$\epsilon(N) = \Omega\left(\frac{1}{\ln N}\right)$$

证明。若 $N\ln\ \lambda \sim p_N$，则由素数定理 [7]， $N\ln\ \lambda \sim N\ln\ N$，因此 $\ln\lambda \sim \ln\ N$。结合定理 3.1，即得上述结果。

□

4 更强结论的数值证据

基于对 Weil 二次型的显式计算，并采用一种用于计算矩阵表示的自伴算子特征值的并行算法，我们在图形处理器上进行了数值计算。数值精度较低，约为 7 位十进制精度；但我们的目标并非获得精确计算结果，而是观察谱的一般渐近性质。引入了单个参数 κ ，使得 $\kappa = N = \lambda$；这样做纯粹是出于经验，因为这似乎能得到良好的数值结果。测试从 $\kappa = 50$ 开始，至 $\kappa = 7500$ 结束，步长为 50。在该范围内每个 50 的倍数附近，都会扫描周围的点，以找到一对相近的点，使得其中一个达到宽松意义上、基于数值观察的“局部最大值”，另一个则是 $\mathcal{E}(\kappa)$的“局部最小值”；这里的意思是，根据数值计算，该点附近的 $\mathcal{E}(\kappa)$ 在这两个点分别取得较大值和较小值。结果发现，这两个点彼此相当接近。测试针对黎曼的前 1000 个零点进行。看来 $\mathcal{E}(\kappa)$也具有反对数性质。

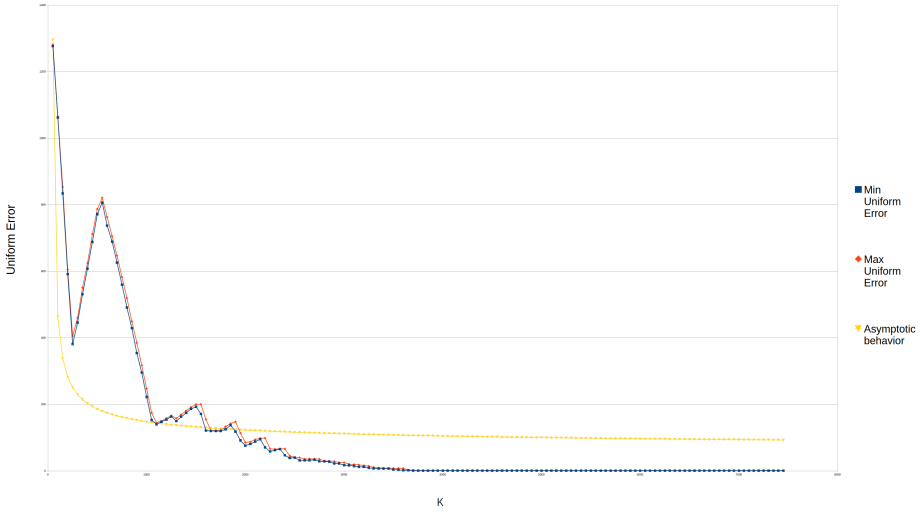


图1：从50到7500之间由50的倍数组成的各点附近 $\mathcal{E}(\kappa)$的最小值和最大值，以及一个展示误差一般性质的示例对数函数。

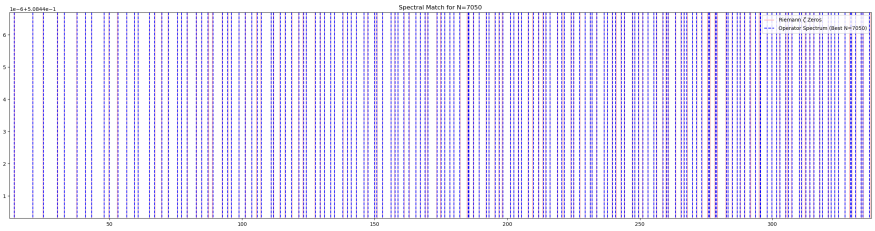


图2： $\zeta\left(\frac{1}{2}+is\right)$ 的前几个零点与 $D^{(7050,7050)}{}_{\log}$ 的特征值高度匹配行为的可视化表示。红线表示黎曼 ζ 零点的虚部，蓝色点线表示特征值。

索引	ζ 零	$D^{(7050,7050)}$ 对数特征值	$\mathcal{E}$
976	1391。853 200 443 3	1391.4514	4.02×10^{-1}
977	1392。644 027 788 6	1392.8618	2.18×10^{-1}
978	1393。433 401 740 8	1393.3467	8.67×10^{-2}
979	1394.884 184 675 7	1394.7680	1.16×10^{-1}
980	1396。544 163 123 7	1396.3391	2.05×10^{-1}
981	1397。834 623 321 4	1397.9900	1.55×10^{-1}
982	1398。837 675 201 4	1399.0261	1.88×10^{-1}
983	1399。839 472 941 2	1399.7780	6.15×10^{-2}
984	1400。426 946 297 4	1400.5144	8.75×10^{-2}
985	1402。564 347 250 1	1402.5598	4.53×10^{-3}
986	1402.973 747 640 9	1402.5598	4.14×10^{-1}
987	1404.006 292 170 5	1403.8400	1.66×10^{-1}
988	1405。666 975 059 3	1405.5550	1.12×10^{-1}
989	1407.085 142 776 4	1406.9932	9.20×10^{-2}
990	1408.136 307 496 2	1408.4056	2.69×10^{-1}
991	1409。320 681 079 8	1409.1783	1.42×10^{-1}
992	1410.024 810 725 8	1409.8967	1.28×10^{-1}
993	1411.257 056 815 7	1411.2466	1.05×10^{-2}
994	1411。965 653 461 8	1411.6276	3.38×10^{-1}
995	1413。843 148 788 6	1413.9023	5.92×10^{-2}
996	1415。585 784 795 5	1415.7133	1.27×10^{-1}
997	1415。781 581 303 3	1415.7133	6.83×10^{-2}
998	1417.102 822 933 8	1417.0852	1.76×10^{-2}
999	1418。696 963 852 5	1418.3616	3.35×10^{-1}
1000	1419。422 480 946 0	1419.7621	3.40×10^{-1}

图3：最后计算出的 1000 个 $\zeta\left(\frac{1}{2}+is\right)$零点中的 25 个与 $D^{(7050,7050)}$ $_{\log}$ 的特征值比较。

根据图1中直观呈现的数值证据，以及定理 3.1 中证明的 $\epsilon(\lambda, N)$ 的性质，可以合理推测 $\mathcal{E}(\kappa)$ 也具有反对数性质。

猜想4.1。该极限

$$\lim_{\kappa\to\infty} \mathcal{E}(\kappa)\ln\kappa$$

存在。

甚至可以假设该极限等于一个非零常数，因为 $\mathcal{E}(\kappa)$趋于0的速度与1 $_{\ln\kappa}$ 相近，并不会快得多或慢得多。甚至这个常数可能是1,—也就是说，它们渐近等价。不过，重要的是要注意，即使仅有猜想4.1，也能推出

黎曼猜想。这是因为它意味着一致误差趋于零，在这种情况下，特征值将逐点趋近于 ζ 零点。值得注意的是，平均绝对误差 $\epsilon(\kappa)$并非如此；它可能趋于零，但特征值仍有可能不逐点收敛。

参考文献

[1] Connes A., Consani C., Moscovici H. (2025), ζ谱三元组。arXiv 预印本 arXiv:2511.22755[2] Connes, A. (1999), 非交换几何中的迹公式与黎曼ζ函数零点。Sel. math., New ser. 5, 29.[3] 黎曼，B. (1859)。关于给定区间内素数的数量¨。柏林科学院月报。[4] Weil, A. (1852). 关于素数理论的´"显式公式"。Comm. S´em. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]。[5] Folland, G. B., and Sitaram, A. (1997). 不确定性原理：数学综述。《傅里叶分析与应用杂志》, 3(3), 207-238.[6] 外尔，H. (1950). 群论与量子力学。多佛出版社。[7] Titchmarsh, E. C. (1986). 黎曼ζ函数论。牛津大学出版社。[8] Odlyzko, A. M. (1987).ζ函数零点之间的间距分布。《计算数学》, 48(177), 273-308.[9] Golub, G. H., and Van Loan, C. F. (2013). 矩阵计算。约翰·霍普金斯大学出版社。[10]D. Slepian and H. Pollack (1961), 长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性。Bell Syst. Tech. J.