arXiv:2601.12144v1 [math.RA] 17 Jan 2026

秩二自由结合代数的二面体不变量

SILVIA BOUMOVA[1], VESSELIN DRENSKY[2], S.EHMUS FINDIK[1,3]

ABSTRACT. 设 $K\langle X_d\rangle$ 表示域 K上秩为 $d \geq 2$ 的自由结合代数。根据 Lane（1976）和 Kharchenko（1978）的结果，对于任意子群 $G \leq \mathrm{GL}_d(K)$和任意域 K，不变量代数 $K\langle X_d\rangle^G$ 都是自由的。Koryukin（1984）在 $K\langle X_d\rangle$的次数为 n的齐次分量上引入了对称群 Sym(n) 的额外作用，该作用通过置换变量的位置给出。这使 $K\langle X_d\rangle$ 具有$(K\langle X_d\rangle,\circ)$-$S$-代数的结构。对于这一作用，Koryukin 证明，对于每个约化群 G，不变量代数 $K\langle X_d\rangle^G$ 都是有限生成的。

本文研究二面体群 D_{2n} 在秩为 2 的自由结合代数 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle$ 上的作用所对应的不变量代数 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$。我们计算了 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$ 的希尔伯特级数，并构造了 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$ 作为自由代数的一组显式生成元。此外，我们还描述了 S-代数 $\left(\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}},\ \circ\right)$的一个有限生成集。

1. 引言

设 K 是一个特征为零的域，并令 $K[X_d] = K[x_1, \ldots, x_d]$ 表示 K 上秩为 $d > 1$ 的自由结合交换含幺代数。对于 $\mathrm{GL}_d(K)$ 的一个子群 G，不变量代数 $K[X_d]^G$ 由所有 G-不变多项式构成。交换情形已有深入研究，其基础性成果源于希尔伯特第十四问题。该问题于 1990 年在巴黎举行的国际数学家大会上提出 [9]。1916 年，E. Noether [18] 证明，对于任意有限群 G，当 $\mathrm{char}(K) = 0$ 时，代数 $K[X_d]^G$ 是有限生成的。1926 年，她将这一结果推广到任意特征 [19]。对于特征零的约化群，有限生成性也可由 Hilbert 的工作推出。然而，1950 年 Nagata [17] 证明，对于无限群，有限生成性一般并不成立，并给出了一个反例。

现在我们转向非交换情形，用一种具有相同关键性质的代数取代 $K[X_d]$。自然的候选是自由结合代数$K\langle X_d\rangle$（即由 d 个变量构成的非交换多项式的代数），它满足相同的泛性质。值得注意的是，诺特关于有限生成的定理在 $K\langle X_d\rangle^G$ 中仅在一个严格受限的情形下有类似结论：对于一般线性群$_d(K)$的有限子群 $G \leq$，Koryukin [13], 、Dicks-Formanek [3], 和 Kharchenko [11]的研究证明，$K\langle X_d\rangle^G$ 是有限生成的，当且仅当 G 以数乘方式作用于由 $K[X_d]$ 张成的向量空间

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13A50、15A72、16S10、16W22。

Key words and phrases. 经典不变量理论，非交换不变量理论。本研究部分得到保加利亚教育与科学部科学计划“提升数学科学研究能力（PIKOM）”的资助，项目编号：DO1-67/05.05.2022年。

。后来，Koryukin [13]将这一结果推广到了无限群。

1984年，Koryukin [13] 在 $K\langle X_d\rangle$的次数为 n的齐次分量上引入了对称群 Sym(n) 的另一种作用，该作用通过置换变量的位置来定义。这赋予了 $K\langle X_d\rangle$ 一个$\big(K\langle X_d\rangle,\ \circ\big)$-$S$-代数结构。关于这一作用，Koryukin 证明，对于任意约化群 G，不变量代数 $K\langle X_d\rangle^G$ 都是有限生成的。

在交换情形和非交换情形中，一个自然的问题都是描述重要群的不变量。本文研究二面体群 D_{2n} 作用于秩为 2 的自由结合代数 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle$ 时的不变量代数 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$。我们描述了 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$的若干重要性质。我们计算了其希尔伯特级数，并构造了作为自由代数的 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$ 的一个齐次生成元集。最后，我们找到了 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$ 作为一个 S-代数的有限生成集。

关于非交换对称多项式，即不变量代数 $K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}$ 的类似问题已在 [1]中解决。关于二面体群的非交换不变量的其他近期结果，参见 [5] 和 [6]。

2. 预备知识

我们假设基域为复数域，即 $K=\mathbb{C}$，不过许多结果对任意特征为零的域 K 都成立。

2.1. 经典交换不变量理论。 一般线性群在 d维复向量空间 V_d 上自然作用，其基为 $\{v_1,\dots,v_d\}$。坐标函数 $x_i: V_d\to\mathbb{C}$ 定义如下:

$$x_i(\xi_1v_1+\cdots+\xi_dv_d)=\xi_i,\quad \xi_1,\dots,\xi_d\in\mathbb{C},\quad i=1,\dots,d.$$

这在多项式函数代数 $\mathbb{C}[X_d]$ =$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_d]$ 上诱导出一个作用，其定义如下:

$$g(f): v\to f\big(g^{-1}(v)\big),\quad g\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{C}),\ f(X_d)\in\mathbb{C}[X_d],\ v\in V_d.$$

对于 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ 的子群 G， G-不变量代数由所有在此作用下保持不变的多项式组成:

$$\mathbb{C}[X_d]^G=\big\{f\in\mathbb{C}[X_d]\mid g(f)=f\ \text{for all}\ g\in G\big\}.$$

对我们的目的而言，假设一般线性群$_d(\mathbb{C})$以典范方式作用于以 X_d 为基的向量空间 KX_d，并将其作用对角延拓至 $\mathbb{C}[X_d]$，即

$$g\big(f(x_1,\dots,x_d)\big)=f\big(g(x_1),\dots,g(x_d)\big),\quad g\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{C}),f\in\mathbb{C}[X_d].$$

其对立群一般线性群$_d^{\mathrm{op}}$ $(\mathbb{C})$的对角作用由一般线性群$_d^{\mathrm{op}}$ $(\mathbb{C})$在向量空间 KX_d 上的典范作用诱导，并且与一般线性群$_d(\mathbb{C})$在多项式函数 $\mathbb{C}[X_d]$上的作用相同。映射 $g\to g^{-1}$ 定义了一般线性群$_d(\mathbb{C})$与一般线性群$_d^{\mathrm{op}}$ $(\mathbb{C})$之间的同构，且这两种作用给出了相同的不变量代数。

2.2. 基础定理。 以下经典定理构成了交换不变量理论的基石。

定理 1（埃米·诺特的有限性定理 [18]）。对于域 K（特征为零）上的有限子群 G一般线性群$_d(K)$，不变量代数 $K[X_d]^G$ 是有限生成的。此外，它存在一组齐次生成元，其次数不超过 G 的阶。

定理 2 (切瓦利–谢泼德–托德，[2, 20])。对于域 K 上特征为零的有限群 G，不变量代数 $K[X_d]^G$ 同构于多项式代数（即存在一组代数无关生成元），当且仅当 $G <$ 一般线性群$_d(K)$ 由伪反射生成（有限阶矩阵经共轭后为如下形式的对角矩阵：$\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\xi)$，其中 $\xi \neq 1$ 是单位根）。

代数 $K[X_d]^G$ 自然地分次，分解为齐次分量：

$$K[X_d]^G = K \oplus \left(K[X_d]^G\right)^{(1)} \oplus \left(K[X_d]^G\right)^{(2)} \oplus \cdots .$$

其希尔伯特（或庞加莱）级数为

$$H\big(K[X_d]^G, t\big) = \sum_{n\geq 0} \dim \left(K[X_d]^G\right)^{(n)} t^n$$

根据希尔伯特–塞尔定理，该级数是有理函数：

$$H\big(K[X_d]^G, t\big) = p(t) \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-t^{a_i}}, \quad p(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

由莫利恩 [16], 给出的第三个基本结果提供了希尔伯特级数的显式公式：

定理 3. 对于一个有限群且 特征（K） $= 0$,

$$H\big(K[X_d]^G, t\big) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \frac{1}{\det\big(1-gt\big)}.$$

2.3. **非交换不变量理论**。在非交换不变量理论的主要分支之一中，我们用一个具有相同关键性质的代数替代交换多项式代数$\mathbb{C}[X_d]$。关于这一主题的全面综述，推荐参阅 Formanek [7] 以及本文第二作者的著作 [4]。

我们的主要研究对象是自由结合代数 $K\langle X_d\rangle$。在含幺结合代数中，$K\langle X_d\rangle$ 与 $K[X_d]$ 在交换情形下具有相同的泛性质：任意从 $X_d \to R$ 到代数 R 的映射，都能唯一延拓为一个同态 $K\langle X_d\rangle \to R$。一般线性群 $\mathrm{GL}_d(K)$ =GL(KX_d)自然地作用于以 X_d为基的向量空间 KX_d，且该作用通过代数同态延拓至 $K\langle X_d\rangle$:

$$g(f(x_1,\cdots,x_d)) = f(g(x_1),\cdots,g(x_d)),\, g \in GL_d, f(x_1,\cdots,x_d) \in K\langle X_d\rangle.$$

对于任意子群 $G \leq$一般线性群$_d(K)$, G-不变量代数 $K\langle X_d\rangle^G$ 由所有在此作用下保持不变的多项式组成。

2.4. **有限生成的基本结果**。 以下结果展示了交换与非交换不变量代数在有限生成方面的鲜明反差。这些结果由 Dicks-Formanek [3] 和 Kharchenko [11] 分别针对有限群证明，并由 Koryukin [13]推广至任意群。

定理4. 设 $G \leq$ 一般线性群$_d(K)$ 定义在任意域 K上，并设 KY_m 是 KX_d 的最小子空间，且满足 $K\langle X_d\rangle^G \subseteq K\langle Y_m\rangle$。那么，代数 $K\langle X_d\rangle^G$ 有限生成，当且仅当 G 在 KY_d 上的作用为数乘。

推论5 ([3, 11])。 对于有限的 $G \leq$ 一般线性群$_d(K)$，不变量代数 $K\langle X_d\rangle^G$有限生成，当且仅当 G 是循环群且由数量矩阵组成。

推论6 ([13])。 若 G 在 KX_d上不可约地作用，则 $K\langle X_d\rangle^G$ 要么是平凡的，要么不是有限生成的。

已有研究表明，切瓦利–谢泼德–托德定理在自由结合代数 $K\langle X_d\rangle$中的对应结论看起来也有所不同。

定理7。 **(i)**（Lane [14], Kharchenko [10]）对于任意 $G \leq$一般线性群$_d(K)$ 以及任意域K，代数 $K\langle X_d\rangle^G$ 是自由的。

(ii)（Kharchenko [10]）对于有限群 G，在包含 $K\langle X_d\rangle^G$ 的 $K\langle X_d\rangle$ 的自由子代数与 G的子群之间存在伽罗瓦对应：子代数 F满足 $K\langle X_d\rangle^G \subseteq F$，当且仅当存在某个 $H \leq G$使得 $F = K\langle X_d\rangle^H$。

不变量的希尔伯特级数的莫利恩公式类比形式如下，十分优雅：

定理8（Dicks和Formanek [3]）。 对于有限群 $G \leq \mathrm{GL}_d(K)$ 满足$\mathrm{char}(K) = 0$,

$$H\big(K\langle X_d\rangle^G, t\big) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{1-\mathrm{tr}(g)t}.$$

3. 代数 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$

二面体群的典范作用

$$D_{2n} = \langle \rho, \tau \mid \rho^n = \tau^2 = (\tau\rho)^2 = 1\rangle$$

在二维向量空间上，该作用表现为正n边形的对称群。在 $\mathbb{C}$ 上工作时，我们可以改变基，参见 Klein [12]（德语原版中的第二章或英语译本中的第二章），并可假设它通过以下方式作用于以 $\{u, v\}$ 为基的向量空间

$$\rho:\ \begin{matrix} u \to \xi u \\ v \to \bar{\xi} v \end{matrix} \qquad \tau:\ \begin{matrix} u \to v \\ v \to u \end{matrix}$$

其中，$\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是一个本原的 n次单位根，且 $\bar{\xi} = \xi^{-1}$。下文中我们将考察 D_{2n} 在 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle$上的这一作用。

考察多项式 $p(u,\ v) \in \mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$，其中 $p(0,\ 0) = 0$（省略常数项，因为它们自然是不变量），我们注意到：

(1) **对称条件：**

$$p(u, v) = \tau \cdot p(u, v) = p(v, u).$$

因此，所有不变量都关于 u 和 v对称。

¯(2) **分次条件**。 ρ-不变性 $p(u,\ v)\ =\ \rho\cdot p(u,\ v)\ =\ p(\xi u,\ \xi v)$ 对于关于 u 和 v 的齐次分量意味着

$$w(u,v)+w(v,u)=\xi^{\deg_u w-\deg_v w}w(u,v)+\xi^{\deg_v w-\deg_u w}w(v,u).$$

因此

$$\deg_u w-\deg_v w\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n).$$

注 9. 设 F 是自由代数 $\mathbb{C}\langle X_d\rangle$ 的一个自由子代数，它由齐次多项式集合 Y 自由生成；设 g_n 表示 Y中次数为 n 的多项式的个数。众所周知， F 的希尔伯特级数可表示为序列 $g_1,\ g_2,$ .....的生成函数，即

$$H(F,t)=\frac{1}{1-G(F,t)},\ \text{where } G(F,t)=\sum_{n\geq 1}g_n t^n.$$

由 [14, 10] 可知， $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$ 是一个自由代数。此外，由 [3], 可知，代数 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$ 的希尔伯特级数为

$$H_{2n}(t)=H(\mathbb{C}\langle u,v\rangle^{D_{2n}},t)=\frac{1}{2n}\sum_{g\in D_{2n}}\frac{1}{1-\mathrm{tr}(g)t}$$

利用 D_{2n}-不变量的对称性和分次条件，结合注 9，我们将计算不变量代数 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$的希尔伯特级数，并给出其齐次自由生成集。

定理10。 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$ 的希尔伯特级数 $H_{2n}(t)$ 由下式给出

(i) 当 $n=2m+1$ 为奇数时， $m\geq 1$

$$H_{2n}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n(1-2t)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1-2\cos(\frac{2k\pi}{n})t},$$

(ii) 当 $n=2m+2$ 为偶数时， $m\geq 1$

$$H_{2n}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n(1-2t)}+\frac{1}{2n(1+2t)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1-2\cos(\frac{2k\pi}{n})t}.$$

证明。 考虑二面体群的典范矩阵表示。旋转 r_k 和反射 s_k 由以下矩阵表示

$$r_k=\begin{pmatrix}\cos(\frac{2k\pi}{n}) & -\sin(\frac{2k\pi}{n})\\ \sin(\frac{2k\pi}{n}) & \cos(\frac{2k\pi}{n})\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad s_k=\begin{pmatrix}\cos(\frac{2k\pi}{n}) & \sin(\frac{2k\pi}{n})\\ \sin(\frac{2k\pi}{n}) & -\cos(\frac{2k\pi}{n})\end{pmatrix}.$$

它们的迹为:

$$\mathrm{tr}(r_k)=2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\ \ \mathrm{tr}(s_k)=0,\ \text{for } k=0,\ldots,n-1.$$

因此，该代数 $\mathbb{C}\langle u,v\rangle^{D_{2n}}$ 的希尔伯特级数为

$$\begin{aligned}H_{2n}(t)=&\frac{1}{2n}\sum_{g\in D_{2n}}\frac{1}{1-\mathrm{tr}(g)t}=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-\mathrm{tr}(s_k)t}+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-\mathrm{tr}(r_k)t}\\ =&\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}1+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)t}\\ =&\frac{1}{2}+\frac{1}{2n(1-2t)}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)t}\end{aligned}$$

(i) 现在令 $n=2m+1$，其中 $m\geq 1$ 为某个整数。由于对于 $k=1,\ldots,m$

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{2m+1}\right)=\cos\left(-\frac{2k\pi}{2m+1}+2\pi\right)=\cos\left(\frac{2(2m+1-k)\pi}{2m+1}\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}H_{2n}(t)=&\frac{1}{2}+\frac{1}{2n(1-2t)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1-2\cos(\frac{2k\pi}{n})t}\\ =&\frac{1}{2}+\frac{1}{2n(1-2t)}-\frac{1}{n(1-2t)}+\frac{1}{n(1-2t)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1-2\cos(\frac{2k\pi}{n})t}\\ =&\frac{1}{2}-\frac{1}{2n(1-2t)}+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{1-2\cos(\frac{2k\pi}{n})t}\end{aligned}$$

(ii) 证明过程与 (i) 的证明类似。 □

3.1. **希尔伯特级数**。设 $n=2m+1$。在希尔伯特级数中

$$H_{2n}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n(1-2t)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)t}.$$

我们分析涉及余弦的和

$$A(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{1-2\cos(\frac{2k\pi}{n})t}$$

并将其表示为有理函数。通过求公分母，我们得到

$$A(t)=\frac{B(t)}{C(t)},\quad \text{where } C(t)=\prod_{k=0}^{m}\left(1-2\cos(\frac{2k\pi}{n})t\right)$$

分母 $C(t)$ 与 $2\cos(2\pi/n)$ 的最小多项式有关。令

$$\Psi_n(t)=\prod_{k=0}^{m}\left(t-2\cos(\frac{2k\pi}{n})\right)=\prod_{d|n}\psi_d(t),$$

其中 $\psi_d(t)$ 是 $2\cos(2\pi/d)$ 的最小多项式。由此可得

$$C(t)=t^{m+1}\Psi_n(\frac{1}{t}).$$

最小多项式 $\psi_n(t)$ 的根为

$$2\cos(2\pi k/n)\mid 1\leq k<n/2,\gcd(k,n)=1,$$

也就是说，它们是本原 n 次单位根的实部的两倍，并且对于 $n \geq 3$，次数 $\varphi(n)/2$（其中 φ 是欧拉函数）。

$\psi_n(x)$与分圆多项式 Φ_n 之间的关系可由 Lehmer [15], 证明的下列恒等式表示，该恒等式对任意非零复数 z均成立：

$$\psi_n\left(z+z^{-1}\right)=z^{-\frac{\varphi(n)}{2}}\Phi_n(z).$$

1993年，Watkins 和 Zeitlin [21] 发现了 $\psi_n(t)$与第一类切比雪夫多项式之间的下列关系。

定理 11 ([21])。 对于第一类切比雪夫多项式 $T_k(t)$ ：

(1) 若 $n=2m+1$ 为奇数，则 $\prod_{d|n}\psi_d(2t)=2(T_{m+1}(t)-T_m(t))$;

(2) 若 $n=2m$ 为偶数，则 $\prod_{d|n}\psi_d(2t)=2(T_{m+1}(t)-T_{m-1}(t))$;

(3) 若 n 是 *2* 的幂，即 $n=2^k$，则有 $\psi_{2^{k+1}}(2t)=2T_{2^{k-1}}(t)$。

由前述定理，我们得到因式分解

$$\chi_n(t)=\prod_{k=0}^{m}\left(t-2\cos(\frac{2k\pi}{n})\right)=\prod_{d|n}\Psi_d(t)$$

$A(t)$ 的分子 $B(t)$ 可用初等对称多项式显式展开

$$B(t)=\sum_{s=0}^{m}\prod_{\substack{k=0,\\k\neq s}}^{m}\left(1-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)t\right).$$

这可以系统地展开为：

$$\begin{aligned}B(t)=1&-t\left(\sum_{s=0}^{m}\sum_{\substack{k=0\\k\neq s}}^{m}2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\\&+t^2\left(\sum_{\substack{\text{subsets }(\beta_1,\ldots\beta_m)\text{ of }m\\\text{among }(m+1)\text{ variables }\{2\cos(\frac{0\pi}{n}),\cdots,2\cos(\frac{2m\pi}{n})\}}}\sigma_2^m\left(\beta_1,\ldots\beta_m\right)\right)\\&-\cdots\\&+(-1)^m t^m\sigma_m\left(2\cos\left(\frac{0\pi}{n}\right),\ldots,2\cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

其中，σ_k 表示所有 $(m+1)$ 个变量中的第 k 个初等对称多项式，即 $\{2\cos(\frac{0\pi}{n})\cdots,2\cos(\frac{2m\pi}{n})\}$; σ_k^m 表示从所有变量中选取 m 个变量组成的子集上的对称多项式。系数遵循以下模式

$$B(t)=(m+1)-m\sigma_1 t+(m-1)\sigma_2 t^2-\cdots+(-1)^{m-1}2\sigma_{m-1}t^{m-1}+(-1)^m\sigma_m t^m.$$

对于偶数情形 $n=2m$，希尔伯特级数的形式为：

$$\begin{aligned}H_{4m+4}(t)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4m+4}\left(\frac{1}{1-2t}+\frac{1}{1+2t}\right)+\frac{1}{2m+2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)t}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4m+4}\left(\frac{1}{1-2t}+\frac{1}{1+2t}\right)+\frac{1}{2m+2}A(t),\end{aligned}$$

其中 $A(t) = {}^{B_{(t)}}{}_{C(t)}$ 与之前相同。分子保持相同的对称结构

$$B(t) = (m+1) - m\sigma_1 t + \cdots + (-1)^{m-1} 2\sigma_{m-1} t^{m-1} + (-1)^m \sigma_m t^m,$$

其中 σ_k 是所有 $m+1$ 个变量 $\{2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \mid k = 0, \ldots, m\}$ 的第 k 个初等对称多项式。 —

3.2. 线性递推关系与有理生成函数。 组合学和数论中的一个基本结果确立了线性递推序列与有理生成函数之间的对应关系。考虑一个复数序列 $(R_n)_{n=0}^{\infty}$，它满足一个 k 阶线性递推关系：

$$R_n = \sum_{j=1}^{k} A_j R_{n-j} \text{ for } n \geq k,$$

其中 $A_k \neq 0$，初始值 $R_0, \ldots, R_{k-1}$ 是给定的复数（不全为零）。相应的特征多项式为

$$c(x) = x^k - \sum_{j=1}^{k} A_j x^{k-j}.$$

该序列的生成函数定义为形式幂级数

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n.$$

以下定理确立了这些概念之间的基本联系

定理 12 ([8])。 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是满足特征多项式为 $x^k - \sum j = 1^k A_j x^{k-j}$ 的线性递推关系的数列。那么，它的生成函数是有理函数，且形式为

$$a(x) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i}{1 - \sum_{j=1}^{k} A_j x^j},$$

其中，系数 b_i 由下式确定：

$$b_i = a_i - \sum_{j=1}^{i} A_j a_{i-j} \quad for \quad 0 \leq i \leq k-1).$$

反过来，任意有理函数

$$\frac{\sum_{i=0}^{s} b_i x^i}{\sum_{j=0}^{k} d_j x^j} \quad (s \geq 0, k \geq 1, b_s \neq 0, d_0 \neq 0, d_k \neq 0),$$

若其分母不整除分子，则会生成一个满足特征多项式为

$$x^k + \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j}{d_0} x^{k-j}$$

对于所有 $n \geq \max(k, s+1)$。当 $s < k$、 $d_0 = 1$ 且所有系数都是有理整数时，数列项 a_n 也是有理整数。

利用定理 12，我们在表格中总结了小 n 时希尔伯特级数 $H_{2n}(t)$ 的结果：

n	$H_{2n}(t)$	**递推关系**
3	$\frac{t^2+t-1}{2t^2+t-1}$	$a_{m+2}=a_{m+1}+2a_m$
4	$\frac{1-3t^2}{1-4t^2}$	$a_{m+2}=4a_m$
5	$\frac{t^3-2t^2-t+1}{2t^3-3t^2-t+1}$	$a_{m+3}=3a_{m+2}-3a_{m+1}+2a_m$
6	$\frac{2t^4-4t^2+1}{4t^4-5t^2+1}$	$a_{m+4}=5a_{m+2}-4a_m$
7	$\frac{t^4+2t^3-3t^2-t+1}{2t^4+3t^3-4t^2-t+1}$	$a_{m+4}=a_{m+3}+4a_{m+2}-3a_{m+1}-2a_m$
8	$\frac{5t^4-5t^2+1}{8t^4-6t^2+1}$	$a_{m+4}=6a_{m+2}-8a_m$
9	$\frac{t^5-3t^4-3t^3+4t^2+t-1}{2t^5-5t^4-4t^3+5t^2+t-1}$	$a_{m+5}=a_{m+4}+5a_{m+3}-4a_{m+2}-5a_{m+1}+2a_m$
10	$\frac{2t^6-9t^4+6t^2-1}{4t^6-13t^4+7t^2-1}$	$a_{m+6}=7a_{m+4}-13a_{m+2}+4a_m$

TABLE 1. 小 n的希尔伯特级数与递推关系

利用注 9，已知希尔伯特级数 $H_{2n}(t)$，即可求出代数 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_{2n}}$ 的自由生成元生成函数 $G_{2n}(t)$。小 n 的结果见表：

n	$G_{2n}(t)$	**递推关系**
3	$\frac{-t^2}{t^2+t-1}$	$a_{m+2}=a_{m+1}+a_m$
4	$\frac{t^2}{1-3t^2}$	$a_{m+2}=3a_m$
5	$\frac{-t^3+t^2}{t^3-2t^2-t+1}$	$a_{m+3}=a_{m+2}+2a_{m+1}-a_m$
6	$\frac{-2t^4+t^2}{2t^4-4t^2+1}$	$a_{m+4}=4a_{m+2}-2a_m$
7	$\frac{-t^4-t^3+t^2}{t^4+2t^3-3t^2-t+1}$	$a_{m+4}=a_{m+3}+3a_{m+2}-2a_{m+1}-a_m$
8	$\frac{-3t^4+t^2}{5t^4-5t^2+1}$	$a_{m+4}=5a_{m+2}-5a_m$
9	$\frac{-t^5+2t^4+t^3-t^2}{t^5-3t^4-3t^3+4t^2+t-1}$	$a_{m+5}=a_{m+4}+4a_{m+3}-3a_{m+2}-3a_{m+1}+a_m$
10	$\frac{-2t^6+4t^4-t^2}{2t^6-9t^4+6t^2-1}$	$a_{m+6}=6a_{m+4}-9a_{m+2}+2a_m$

TABLE 2. 小型 n的生成函数和递推关系

3.3. 的生成元集 $v\rangle^{D_6}$。 我们考虑 $n=3$ 的情形。我们用 w_k 表示齐次元素 $w\in\mathbb{C}\langle u,v\rangle^{D_6}$ 的首项，其次数为 k。生成函数

$$G_6(t)=G(\mathbb{C}\langle u,v\rangle^{D_6},t)=\sum_{k\geq 2}g_kt^k$$

$\mathbb{C}\langle u, v\rangle^{D_6}$ 的齐次自由生成元集的生成函数为

$$G_6(t) = \frac{-t^2}{t^2+t-1} = t^2+t^3+2t^4+3t^5+5t^6+8t^7+13t^8+21t^9+34t^{10}+55t^{11}+\dots$$

相应的关系为

$$a_{m+2} = a_{m+1} + a_m = 2a_m + a_{m-1}, \quad \text{with } a_0 = a_1 = 0.$$

换言之，次数为 $k+2$ 的自由生成元个数等于第 k 个斐波那契数，即 $k = 0$, 1，2，.....。应用递推公式，我们得出次数为 k 的多项式个数为 $a_{k+2} = 2a_k + a_{k-1}$。生成集的首项构造如下：

$$\{\ (uv)w_k,\ w_k(uv),\ (u^3)w_{k-1}\ \}.$$

由此可知，这类项的个数等于 w_k 的两倍加上 w_{k-1} 的个数。

d	no	次数为 d 的生成元的首项集
1	0	-
2	1	$\{\ uv\ \}$
3	1	$\{\ u^3\ \}$
4	2	$\{\ u^2v^2,\ uv^2u\ \}$
5	3	$\{\ u^4v, u^2vu^2, uv^4\ \}$
6	5	$\{(uv)w_4,\ \ w_4(uv),\ \ (u^3)w_3\ \}$
		$\dots$
k		$\{(uv)w_k,\ \ w_k(uv),\ \ (u^3)w_{k-1}\ \}$

TABLE 3. 次数为 d 的生成元首项集合

$\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_6}$ 的希尔伯特级数为

$$H_6(t) = \frac{t^2+t-1}{2t^2+t-1} = 1+t^2+t^3+3t^4+5t^5+11t^6+21t^7+43t^8+85t^9+\dots$$

且其系数满足递推关系 ion

$$a_{m+2} = a_{m+1} + 2a_m = a_m + 2a_{m-1} + 2a_m = 3a_m + 2a_{m-1}, \quad \text{with } a_0 = 1, a_1 = 0.$$

代数 $\mathbb{C}\langle u,\ v\rangle^{D_6}$ 的向量空间基由其自由生成元的单项式构成。次数为 2 的基元素是 $uv+vu$，其首项为 uv。次数为 3 的基元素 u^3+v^3 对应的首项为 u^3。次数为 4 时，首项为 $\{u^2v^2, uvuv, uv^2u\}$。应用递推公式，我们确定次数为 $k+2$ 的多项式数量为 $a_{k+2} = 3a_k + 2a_{k-1}$。基元素的首项构造如下：

$$\{\ (uv)w_k, w_k(uv), w_k(vu), (u^3)w_{k-1}, w_{k-1}(v^3)\ \}.$$

由此构造可知，这类项的数量等于 w_k 的数量的三倍与 w_{k-1} 的数量的两倍之和。

次数 d	数量	次数为 d 的基元素的首项集
0	0	-
1	0	-
2	1	$\{\ uv\ \}$
3	1	$\{\ u^3\ \}$
4	3	$\{\ u^2v^2,\ uvuv,\ uv^2u\ \ \}$
5	5	$\{\ u^4v, u^3vu, u^2vu^2, uvu^3, uv^4\ \}$
6	11	$\{(uv)w_4,\ w_4(uv)\ \ w_4(vu),\ (u^3)w_3,\ w_3(v^3)\ \}$
		$\cdots$
$k+2$		$\{(uv)w_k,\ w_k(uv)\ \ w_k(vu),\ (u^3)w_{k-1},\ w_{k-1}(v^3)\ \}$

TABLE 4. 基中次数为 d 的元素的首项集合

4. S-**代数**$(\mathbb{C}\langle u,v\rangle^{D_{2n}},\circ)$

令 $\mathbb{C}\langle X_d\rangle^{(k)}$ 表示自由结合代数 $\mathbb{C}\langle X_d\rangle$ 中总次数为 k 的齐次子空间。对称群 Sym(d) 通过指标置换作用于 $\mathbb{C}\langle X_d\rangle^{(k)}$ 中的单项式

$$\pi(x_{i_1}\cdots x_{i_k}) = x_{\pi(i_1)}\cdots x_{\pi(i_k)}\ ,\quad \pi\in \mathrm{Sym}(d).$$

Koryukin [13] 引入了一种不同的 Sym(k)-作用，该作用会置换变量位置

$$(x_{i_1}\cdots x_{i_k})\circ\pi = x_{i_{\pi^{-1}(1)}}\cdots x_{i_{\pi^{-1}(k)}}.$$

这种作用与标准作用有根本区别，因为它重新排列的是位置，而非交换生成元。例如:

$$(x_1x_3x_6)\circ(13) = x_6x_3x_1,$$
$$(13)(x_1x_3x_6) = x_3x_1x_6.$$

代数 $(\mathbb{C}\langle X_d\rangle,\circ)$ 的每个齐次分量都配备了这种额外的 Sym(k)-作用。若分次子代数 F 满足 $F^{(k)}\circ\mathrm{Sym}(k) = F_{(k)}$，则称其为 S-代数，记作 $(F,\circ)$，其中该条件对所有 k 均成立。

若存在有限个齐次多项式组成的集合 U，使其在 S-代数运算下生成 F，则称 S-代数 $(F,\circ)$ 为有限生成的。Koryukin 的结果 [13] 证明了 $(\mathbb{C}\langle X_d\rangle^{D_{2n}},\circ)$ 是有限生成的。

我们定义以下重要的不变元

$$s_a = u^av^a + v^au^a,\quad a = 1\ldots n,$$
$$p_{kn} = u^{kn} + v^{kn},\quad k\in\mathbb{N},$$
$$p_{(a,b)} = u^av^b + v^bu^a.$$

定理 13. S代数 $\mathbb{C}\langle u,v\rangle^{D_{2n}}$ 由 $uv+vu$和 u^n+v^n生成（作为一个 S代数）。

证明。 **步骤 1：** S**代数（**$\mathbb{C}\langle u,v\rangle^{D_{2n}}$**,**$\circ$**）的结构**。 S代数 $\mathbb{C}\langle u,v\rangle^{D_{2n}}$由以下元素张成

$$s_a^\sigma = (u^a v^a + v^a u^a)^\sigma, \quad a = 1, 2, \ldots, \sigma \in \mathrm{Sym}(a+b),$$

$$p_{(b,c)}^\tau = (u^b v^c + v^b u^c)^\tau, \quad b - c \equiv 0 \pmod{n}, \tau \in \mathrm{Sym}(b+c),$$

也就是说，它作为一个 S-代数由以下元素生成

$$s_a = u^a v^a + v^a u^a, \quad a = 1, 2, \ldots,$$

$$p_{(b,c)} = u^b v^c + v^b u^c, \quad b - c \equiv 0 \pmod{n}.$$

步骤 2：归约到特殊情形。 考虑由以下元素生成的$\mathbb{C}\langle u$的 S-子代数 A ， $v\rangle^{D_{2n}}$

$$s_a, p_{(b,c)}, \quad a, b, c \equiv 0 \pmod{n}.$$

引入新变量 $U = u^n$、 $V = v^n$ ，并考虑关于 U、 V的对称多项式的 $\mathbb{C}\langle U$的 S-子代数 $B =\mathbb{C}\langle U$、 $V\rangle^{\mathrm{Sym}(2)}$、 $V\rangle$。根据 [1] 的主要结果， S-代数 B 由 $U + V$和 $UV + VU$生成。将 $\mathbb{C}\langle U$、 $V\rangle$ 视为 $\mathbb{C}\langle u$、 $v\rangle$的子代数，可得 B 是A的子代数。它具有这样的性质： B 的所有元素都是单项式的线性组合，其中 u 和 v 依次出现 n 的倍数次。对相应的齐次分量$k = 1$、2、.....应用对称群 Sym(nk) 的作用，可得 $\mathbb{C}\langle u$、 $v\rangle$ 的 S-子代数 B 由 s_n 和$p_n = p_{(n,0)}$生成。

步骤 3：归纳法。我们将采用针对 $K\langle x_1, x_2\rangle^{\mathrm{Sym}(2)}$在 [1, 注 4.6]中给出的第一个证明思路。令 D 为由 s_1和 p_n生成的 $\mathbb{C}\langle u,v\rangle^{D_{2n}}$ 的 S-子代数。若证明对于所有满足 $b \equiv c$ （模 n）的 b, c ，均有 $p_{(b,c)} \in D$ ，则定理的证明即告完成。因此我们可以表示为

$$p_{(b,c)} = p_{(a+kn, a+ln)}$$

对于 $a, k, l \geq 0$。我们将对 $a \geq 0$应用归纳法。首先注意以下内容。

观察：设 $W(u,v) = u^{b-1}v^c$。则

$$\begin{aligned} s_1 p_{(b,c)} &= (uv + vu)(u^b v^c + v^b u^c) = (uvu^b v^c + vuv^b u^c) + (vu^{b+1}v^c + uv^{b+1}u^c) \\ &= (uvuW(u,v) + vuvW(v,u)) + (vuuW(u,v) + uvvW(v,u)) \in D, \end{aligned}$$

$(s_1 p_{(b,c)}) \circ (13) = (uvuW(u,v) + vuvW(v,u)) + (uuvW(u,v) + vvuW(v,u)) \in D$, $(s_1 p_{(b,c)}) \circ (23) = (uuvW(u,v) + vvuW(v,u)) + (vuuW(u,v) + uvvW(v,u)) \in D$。这三个等式意味着

$$uvuW(u,v) + vuvW(v,u) = uvu^b v^c + vuv^b u^c \in D,$$

$$(uvu^b v^c + vuv^b u^c) \circ (2, b+2) = p_{(b+1,c+1)} \in D.$$

因此，我们依次得到 $s_1 s_i = s_1 p_{(i,i)} \in D$蕴含 $s_{i+1} \in D$，其中 $i = 1,\ldots, n-1$; 由此可得 $s_n \in D$。因此，在证明的第二步中，我们已证明 $p_{(k_0 n, l_0 n)} \in D$。所以，只需证明 $p_{(b,c)} = p_{(a+kn, a+ln)} \in D$蕴含 $p_{(b+1,c+1)} = p_{(a+1+kn, a+1+ln)} \in D$，这直接由上述观察得出。

□

例 14. 考虑元素 $u^4v + v^4u \in \mathbb{C}\langle u, v\rangle^{D_6}$。于是有如下结论。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big((u^3+v^3)(uv+vu)\big)\circ(14) &= \frac{1}{2}(u^4v + v^4u + v^3uv + u^3vu)\circ(14)\\ &= \frac{1}{2}(u^4v + v^4u + uv^3v + vu^3u)\\ &= u^4v + v^4u.\end{aligned}$$

Acknowledgements

第一位署名作者的这项研究部分得到了欧盟—下一代欧盟的资助，该资助通过保加利亚共和国国家复苏与韧性计划项目 No. BG-RRP-2.004-0008-C01 提供。

第三位署名作者非常感谢索非亚大学数学与信息学学院和保加利亚科学院数学与信息学研究所，在本项目开展期间他作为博士后访问学者时给予的良好学术氛围和热情款待。

References

[1] S. Boumova、V. Drensky、D. Dzhundrekov、M. Kasabov，《自由结合代数中的对称多项式》，*Turk. J. Math.*，46（2022年），第5期，SI-2，1674–1690。https://doi.org/10.55730/1300-0098.3225。[2] C. Chevalley，《由反射生成的有限群的不变量》，*Amer. J. Math.*，77（1955），78–782。https://doi.org/10.2307/2372597。[3] W. Dicks、E. Formanek，《Poincar

´

Linear and e级数与*Multilinear Algebra* **12** 1982 1, 21 30 10 1080 03081088208817467 S. Montgomery的一个问题》，，（）第–期。https://doi.org/。/。[4] V. Drensky，《交换与非交换不变量理论》，载于：*Mathematics and Education in Mathematics Proceedings of the 24-th Spring Conference of the Union of*，，，，–。*Bulgarian Mathematicians; Svishtov Bulgaria* 1995 14 50 [5] V. Drensky、S.. Fındık，《上三角矩阵簇中的二面体群不变量》，预印本，2024年。[6] V. Drensky、B. Kostadinov，《二面体群的非交换不变量》，*International Journal of Algebra and Computation* **35** 2025 03, 343 355，（），第–期。https://doi.org/10.1142/S0218196725500079。[7] E. Formanek，《非交换不变量理论》，*Contemporary Mathematics*，43（1985），87–119。[8] J. Jones、P. Kiss，《线性递归数列与幂级数》，*Publ. Math. Debrecen*，41（ 1992 3 4, 295 306），第Nos - – D. Hilbert，《数学问题》，[9] *Göttinger Nachrichten* 1900 253 297 *Archiv der*，（），–；，*Mathematik und Physik* **3** 1901 1, 44 63 58479（），第–期。http://eudml.org/doc/。译载：*Bull. Amer. Math. Soc.*，8（1902），第10期，437–479。https://doi.org/10.1090/S0002-9904- 1902-00923-3。[10] V.K. Kharchenko，《自由代数的不变量代数》，*Algebra Logika*，17（1978），第4期，478–487（俄文）。译载：*Algebra and Logic*，17（1978），第4期，316–321。https://doi.org/10.1007/BF01674783。[11] V.K. Kharchenko，《有限群的非交换不变量与诺特簇》，*Journal of Pure and Applied Algebra*，31（1984），第1–3期，83–90。https://doi.org/10.1016/0022-4049(84)90079-3。[12] F. Klein，《*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* 1884 *Lectures on the Icosahedron and the*》，莱比锡，泰布纳出版社，。英文译本：*Solution of Equations of the Fifth Degree*，纽约，多佛出版社，1956年。

[13] A.N. Koryukin, 《约化群的非交换不变量》, *Algebra Logika*, **23**（1984）, 第4期, 419-429（俄文）。译载: *Algebra and Logic*, **23**（1984）, 第4期, 290–296。https://doi.org/10.1007/BF02071789。[14] D.R. Lane, *Free Algebras of Rank Two and Their Automorphisms,* 博士论文, 贝德福德学院, 伦敦, 1976年。[15] D.H. Lehmer, 《关于三角代数数的注记》, *American Mathematical Monthly* **40** 1933 165 166 10 2307 2301023 , （）–。https://doi.org/。/。[16] T. Molien, 《关于线性代换群的不变量》, ¨（）, –。[17] M. Nagata, 《论希尔伯特第十四问题》, *Amer. J. Math.*, **81**（1959）, 766–772。https://doi.org/10.2307/2372927。[18] E. Noether, 《有限群不变量的有限性定理》, *Mathematische Annalen* **77** 1915 89 92 , （）, –。（重印于《论文集》。论文汇编。施普林格出版社, 柏林-海德堡-纽约-东京, 1983年; 181–184。）https://doi.org/10.1007/BF01456821。[19] E. Noether, 《特征 p下有限线性群不变量的有限性定理》, *Nachrichten Göttingen*（1926）, 28-35。http://eudml.org/doc/59193。[20] G.C. Shephard、J.A. Todd, 《有限酉反射群》, *Can. J. Math.*, **6**（1954）, 274–304。https://doi.org/10.4153/CJM-1954-028-3。[21] W. Watkinsand、J. Zeitlin, 《cos（$2\pi/n$ *American Mathematical*）的最小多项式》, , （）, 第-期。https://doi.org/。/。*Monthly* **100** 1993 5, 471 474 10 2307 2324301

[1]Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, Sofia, Bulgaria and Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, 1113 Sofia,Bulgaria,

Email address: boumova@fmi.uni-sofia.bg

[2]Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, 1113 Sofia, Bulgaria*E*

*mail add**ress*: drensky@math.bas.bg

[3]Department of Mathematics, Çukurova University, 01330 Balcali, Adana, Turkey,

Email address: sfindik@cu.edu.tr