arXiv:2601.12187v1 [math.GN] 17 Jan 2026

Ramsey 极限点集与 IP 极限点集

RAFA-L FILIP ´OW、Adam Kwela 和 Paolo Leonetti

Abstract. 设 X 是一个不可数波兰空间，$\mathcal{H}$ 是 Hindman 理想，即所有非 IP-集的 $S \subseteq \omega$ 所组成的族。对于取值于 X 的每个序列$x = (x_n)_{n\in\omega}$，令 Λ_x(FS) 表示 x 的 IP 极限点集。此外，令 $\Lambda_x(\mathcal{H})$ 表示 x 的 $\mathcal{H}$-极限点集，也就是满足 $S \notin \mathcal{H}$ 的子序列 $(x_n)_{n\in S}$ 的普通极限所组成的集合。在证明这两种概念一般而言并不相同之后，我们证明，非空的 Λ_x(FS) 型集合族与 $\Lambda_x(\mathcal{H})$ 型集合族，恰好都是 X 的非空解析子集类。

Ramsey 收敛也有类似的结果。在证明中，我们使用 [6]，引入的分划正则函数这一概念，为这类收敛提供了一种统一的方法。

1. Introduction

对于非负整数 ω 的任意无限子集 D，记 FS(D) 为由 D 中互不相同的元素组成的所有有限非空和的集合族。若集合 $S \subseteq \omega$ 包含某个无限 $D \subseteq \omega$ 的 FS(D)，则称其为 IP-集。众所周知，IP-集是所谓的庞加莱序列的例子，在拓扑动力系统中递归问题的研究里发挥着重要作用，参见例如 [11，第 74] 页。由欣德曼定理 [15] 可知，集合族

$$\mathcal{H} = \{S \subseteq \omega : S \text{ is not an } \mathsf{IP}\text{-set}\} \tag{1}$$

是 ω 上的一个理想，也就是说，它是一个对有限并和取子集运算封闭的子集族。下文将 $\mathcal{H}$ 称为*Hindman* 理想，参见例如 [9，第 109] 页。

给定一个取值于拓扑空间 X 的序列 $x =(x_n)_{n\in\omega}$，如果存在一个无限$D \subseteq \omega$，使得对于 η 的每个邻域 U，都存在 $k \in \omega$，满足对所有 $n \in$， $x_n \in U$ FS($D \setminus k$)；那么我们称 $\eta \in X$ 是 x 的一个 IP-极限点 （或 FS-极限点）。等价地，子序列 $(x_n)_{n\in\mathsf{FS}(D)}$ IP-收敛到 η，例如参见 [12]。这类点的集合记为

$$\Lambda_x(\mathsf{FS}) = \{\eta \in X : \eta \text{ is an IP-limit point of } x\}.$$

另一方面，对于每个无限集 $D \subseteq \omega$，令 r(D) 表示 D 中基数为 2 的子集族。由拉姆齐定理可知，该族

$$\mathcal{R} = \{S \subseteq \mathsf{r}(\omega) : S \text{ does not contain } \mathsf{r}(D) \text{ for any infinite } D \subseteq \omega\} \tag{2}$$

Date：2026年1月21日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：03E75、05 D10、40A05、54A20。次要分类：03E05、11B05、28A05、40A35。*Key words and phrases.* Ramsey 收敛；IP-收敛；解析集；理想极限点；Hindman 理想；分划正则函数。第二位作者获得了波兰国家科学中心 OPUS 项目资助，项目编号为 2024/53/B/ST1/02494。

是可数无限集 $\mathsf{r}(\omega)$ 上的一个理想。下文将 $\mathcal{R}$ 称为*Ramsey* 理想，例如参见 [16, 21]。与前文一样，若 $y=(y_{\{n,m\}})_{\{n,m\}\in\mathsf{r}(\omega)}$ 是取值于拓扑空间 X 中的序列，我们称 $\eta\in X$ 是 y 的一个 r-极限点，如果存在一个无限集 $D\subseteq\omega$，使得对于 η 的每个邻域 U，都存在$k\in\omega$，满足对所有 $\{n,m\}\in\mathsf{r}(D\setminus k)$，均有 $y_{\{n,m\}}\in U$；等价地，子序列 $(y_{\{n,m\}})_{\{n,m\}\in\mathsf{r}(D)}$ “r-收敛”到 η，例如参见 [3, 4]。这类点的集合记为

$$\Lambda_y(\mathsf{r})=\{\eta\in X:\eta \text{ is an } \mathsf{r}\text{-limit point of } y\}.$$

本文的主要目标是证明，类型为 $\Lambda_x(\mathsf{FS})$和类型为 $\Lambda_y(\mathsf{r})$的两个非空集合族，各自都与 X的非空解析子集类相同，前提是 X 为不可数波兰空间（见下文定理 4.2 和定理 4.3）。本文延续了 [1, 2, 8, 13, 14]中关于理想收敛下可达极限点集的研究。事实上，在第 2 节回顾必要定义后，我们证明，主要结果的变体也适用于 Hindman 理想$\mathcal{H}$ 和 Ramsey 理想 $\mathcal{R}$ 下的理想极限点情形；这两个理想分别在 (1) 和 (2) 中定义。此外，在第 3 节中，我们给出若干关于 P-类性质的刻画，并将其具体应用于映射 FS 和 r 的情形（见下文推论 3.4）。

在 [6], 之后，我们使用分划正则函数并研究它们的一些性质。这为考察本文所讨论的各种收敛类型下的问题提供了一种统一的方法。有关更多动机，请参阅 [6]。

2. Preliminaries

2.1. 符号说明。 所有非负整数构成的集合记为 ω，每个非负整数 $n\in\omega$ 都与集合 $\{0,1,\dots,n-1\}$ 相对应。给定一个集合 X，我们用 X^ω 和 $X^{<\omega}$ 分别表示所有无限序列 $x:\omega\to X$ 以及所有满足 $n\in\omega$ 的有限序列 $x:n\to X$ 所构成的族。对于有限序列 $s\in\omega^{<\omega}$，我们用 $|s|$ 表示其长度。无限零序列 $(0,0,\dots)\in\omega^\omega$ 记为 0^∞。给定一个集合 X，我们用 $[X]^\kappa$ 和 $[X]^{<\kappa}$ 分别表示 X 的所有基数为 κ 的子集以及基数严格小于 κ 的子集所构成的族。特别地，我们用 $\mathsf{Fin}(X)=[X]^{<\omega}$ 表示 X 的所有有限子集所构成的族。

若 X 是度量为 d的度量空间，我们分别用 $B(p,r)=\{x\in X:d(x,p)<r\}$ 和 $\overline{B}(p,r)=\{x\in X:d(x,p)\le r\}$ 表示半径为 $r>0$、中心为 $p\in X$的开球和闭球。最后，若 X 是波兰空间（即一个可分且完全可度量化的空间），则我们采用标准记号 $\Sigma^1_1(X)$ 和 $\Pi^1_1(X)$（或者在 X 已明确的情况下，简记为 Σ^1_1 和 Π^1_1 ）分别表示 X 的解析子集族和余解析子集族，参见例如 [17]。

2.2. 分划正则函数。 我们先回顾 [6, Definition 3.1]中的分划正则函数的主要定义。

定义 2.1。 设 Ω Ψ 是两个可数无限集，并选取一个非空族$\mathcal{F}\subseteq[\Omega]^\omega$，使得对于所有 $A\in\mathcal{F}$和 $K\in\mathsf{Fin}(\Omega)$，都有 $A\setminus K\in\mathcal{F}$。我们称一个函数

$$\rho:\mathcal{F}\to[\Psi]^\omega$$

是分划正则 的，当且仅当满足以下性质：

(M) $\rho(E)\subseteq\rho(F)$ for all $E,F\in\mathcal{F}$ such that $E\subseteq F$;

(R) 对于每个 $F \in \mathcal{F}$和 $A,\ B \subseteq \Psi$，使得 $\rho(F) = A \cup B$，存在 $E \in \mathcal{F}$，使得 $\rho(E) \subseteq A$ 或 $\rho(E) \subseteq B$；(S) 对于每个 $F \in \mathcal{F}$，存在一个子集 $E \subseteq F$，$E \in \mathcal{F}$，使得对于每个$a \in \rho(E)$，存在 $K \in \mathsf{Fin}(\Omega)$，使得 $a \notin \rho(E \setminus K)$。

对于定义 2.1 中的每个分划正则函数 ρ，我们关联如下族

$$\mathcal{I}_\rho = \{S \subseteq \Psi : \forall_{F\in\mathcal{F}}\ \rho(F) \not\subseteq S\}\,. \tag{3}$$

不难看出，$\mathcal{I}_\rho$ 是 Ψ 上的一个理想，也就是说，它是 $\mathcal{P}(\Psi)$ 的真子集，包含 $\mathsf{Fin}(\Psi)$，并且对有限并集和子集运算封闭；反过来，对于 Ψ 上的每个理想 $\mathcal{I}$，由分划正则函数 $\rho_\mathcal{I}$： $\mathcal{I}^+ \to [\Psi]^\omega$ 定义的 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\rho_\mathcal{I}}$ 满足 $\rho_\mathcal{I}(F) = F$，其中 $\mathcal{I}^+ = \mathcal{P}(\Psi) \setminus \mathcal{I}$；详情见命题 3.3] [6, 。

正如第 1 节所预示的，本文主要关注两个分划正则函数 r： $[\omega]^\omega \to [[\omega]^2]^\omega$ 和 FS: $[\omega]^\omega \to [\omega]^\omega$，它们定义为

$$\mathsf{r}(D) = [D]^2 \quad \text{and} \quad \mathsf{FS}(D) = \left\{\sum\nolimits_{n\in\alpha} n : \alpha \in [D]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\right\}$$

对所有 $D \in [\omega]^\omega$ 均成立，分别参见定理 3.4 和定理 3.6] [6, 。沿用 (3) 中的记号，相关理想为

$$\mathcal{R} = \mathcal{I}_\mathsf{r} \quad \text{and} \quad \mathcal{H} = \mathcal{I}_\mathsf{FS}$$

分别称为*Ramsey* 理想和*Hindman* 理想；参见 [9, 16, 21]。

2.3. **聚点与极限点集合族**。现在我们给出 ρ-聚点和 ρ-极限点的主要定义。下文中，给定一个序列 x: $\Psi \to X$，我们通常对每个 $s \in \Psi$将 $x_s = x(s)$ 记作。

定义 2.2。设 $x : \Psi \to X$ 是拓扑空间 X 中的一个序列，并取一个分划正则函数 ρ: $\mathcal{F} \to [\Psi]^\omega$。用 $\Gamma_x(\rho)$ 表示 x的 ***ρ*-聚点**集合，即所有满足以下条件的 $\eta \in X$ 所组成的集合：对于 η的任意邻域 U，

$$\exists_{F\in\mathcal{F}}\quad \rho(F) \subseteq \{s \in \Psi : x_s \in U\}\,.$$

我们也用 $\mathscr{C}_X(\rho)$ 表示取值于 X的序列的 ρ-聚点所构成的集合族，并将空集也包括在内，即

$$\mathscr{C}_X(\rho) = \{A \subseteq X : \exists_{x\in X^\Psi}\ A = \Gamma_x(\rho)\} \cup \{\emptyset\}.$$

如果拓扑空间 X 是明确的，我们就简单地写作 $\mathscr{C}(\rho)$。

等价地，η 是 ρ- x 的聚点，当且仅当 $\{s \in \Psi :$ 对于 η的所有邻域 U， $x_s \in U\} \notin \mathcal{I}_\rho$，其中 $\mathcal{I}_\rho$ 是由 ρ 生成的理想，如式（3）所示。特别地，ρ-聚点的定义只取决于由 ρ生成的理想，因此记作 $\Gamma_x(\mathcal{I}_\rho)$是有意义的。事实上，如果 $\mathcal{I}$ 是 Ψ上的一个理想，那么 $\Gamma_x(\mathcal{I}) = \Gamma_x(\rho_\mathcal{I})$中的元素通常称为 $\mathcal{I}$-聚点，参见例如 [2, 20]。值得注意的是，ρ-聚点集合为空的情况并不十分有趣：事实上，已知如果X 是度量空间，且 $\mathcal{I}$ 是 ω上的一个理想，那么存在一个序列 x: $\omega \to X$，使得 $\Gamma_x(\mathcal{I}) = \emptyset$ 当且仅当 X 不紧致，参见 [8, 命题5.1]。

对于下一个定义，设 X 是一个拓扑空间，ρ: $\mathcal{F} \to [\Psi]^\omega$ 是一个分划正则函数，并取一个序列 $x : \Psi \to X$。若存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $y = (x_s)_{s\in\rho(F)}$，则称子序列 y of x 是 ρ- 子序列 of x。非正式地说，ρ- 子序列是 x 的一个子序列，其指标集相对于 ρ 而言 “ 并不小 ”。相应地，若一个 ρ- 子序列 $y = x \restriction \rho(F)$ 满足 ρ- 收敛

到 $\eta \in X$，简记为 $\rho\text{-}\lim y = \eta$，如果对于 η 的每个邻域 U，都存在$K \in \mathrm{Fin}(\Omega)$，使得对于每个 $s \in \rho(F \setminus K)$ 都有 $y_s \in U$。请注意，这种收敛取决于 F 的选择。事实上，对于某些$F, G \in \mathcal{F}$，可能出现 $\rho(F) = \rho(G)$，但 $(y_s)_{s\in\rho(F)}$ 是 ρ-收敛的，而 $(y_s)_{s\in\rho(G)}$ 则不是，见 [6]。

定义 2.3. 设 $x : \Psi \to X$ 是拓扑空间 X 中的一个序列，并取一个分划正则函数 $\rho : \mathcal{F} \to [\Psi]^\omega$。用 $\Lambda_x(\rho)$ 表示 x 的 **ρ-极限点** 集合，即所有满足以下条件的 $\eta \in X$ 的集合

$$\rho\text{-}\lim y = \eta$$

存在 x 的一个 ρ-子序列 y。我们还用 $\mathscr{L}_X(\rho)$ 表示取值于 X 的序列的 ρ-极限点所成的集合族，并包括空集，即

$$\mathscr{L}_X(\rho) = \{A \subseteq X : \exists_{x\in X^\Psi}\, A = \Lambda_x(\rho)\} \cup \{\emptyset\}. \tag{4}$$

若拓扑空间 X 已知，则简记为 $\mathscr{L}(\rho)$。

当 $\rho = \rho_\mathcal{I}$ 对某个定义在 ω 上的理想 $\mathcal{I}$ 成立时，我们定义

$$\Lambda_x(\mathcal{I}) = \Lambda_x(\rho_\mathcal{I}) \quad \text{and} \quad \mathscr{L}_X(\mathcal{I}) = \mathscr{L}_X(\rho_\mathcal{I}).$$

$\Lambda_x(\mathcal{I})$ 的元素称为 x 的 $\mathcal{I}$-极限点 。

更明确地说， η 是 x 的一个 ρ-极限点，如果存在 $F \in \mathcal{F}$ ，使得对于 η的每个邻域 U ，都存在一个有限集 $K \in$Fin(Ω)，使得对于所有$s \in \rho（F \setminus K）$均有 $x_s \in U$ 。在 $\rho = \rho_\mathcal{I}$ 对于某个理想 $\mathcal{I}$的情况下，不难看出， η 是一个$\mathcal{I}$-极限点，当且仅当存在 $E \in \mathcal{I}^+$ 使得子序列 $y = x \restriction E$收敛于 η；因此，这与例如 [1, 2, 8, 19] 中研究的 $\mathcal{I}$-极限点的经典概念相一致。不同于 ρ-聚点的情形，将（4）中的空集实现为形如 $\Lambda_x（\rho）$ 的集合要困难得多。事实上，如果$\mathcal{I}$ 是 ω上的一个理想，那么关于是否存在序列 x使得$\Lambda_x（\mathcal{I}）= \emptyset$ 的若干蕴含关系可见于 [8, 命题 5.3和图 3]。最近， [5]在这一主题上取得了重大进展。值得注意的是，任意理想 $\mathcal{I}$ 下的 $\mathcal{I}$-极限点族和 $\mathcal{I}$-聚点族是在 [18], 中引入的；然而，在 [10] 中，它们已经针对由所有渐近密度为零的集合构成的理想进行了研究。

命题 2.4. 设 $x : \Psi \to X$ 是拓扑空间 X 中的一个序列，并取一个分划正则函数 ρ: $\mathcal{F} \to [\Psi]^\omega$。则

$$\Lambda_x(\mathcal{I}_\rho) \subseteq \Lambda_x(\rho) \subseteq \Gamma_x(\rho).$$

证明。 首先，假设 $\eta \in \Lambda_x(\mathcal{I}_\rho)$，即存在 $S \in \mathcal{I}_\rho^+$使得 $\lim x \restriction S = \eta$。那么存在 $F \in \mathcal{F}$使得 $\rho(F) \subseteq S$，从而有 $\lim x \restriction \rho(F) = \eta$。由于 ρ 是分划正则的，因此存在 $E \in \mathcal{F}$ 使得 $E \subseteq F$ (这意味着$\rho(E) \subseteq \rho(F)$)，并且对所有 $a \in \rho(E)$，存在有限的 $K \subseteq \Omega$，使得 $a \notin \rho(E \setminus K)$。容易验证， ρ-子序列 $x \restriction \rho(E)$ 收敛于 η，且收敛方式为 ρ。因此，$\eta \in \Lambda_x(\rho)$。这意味着 $\Lambda_x(\mathcal{I}_\rho) \subseteq \Lambda_x(\rho)$。

其次，假设 $\eta \in \Lambda_x(\rho)$，即存在 $F \in \mathcal{F}$ ，使得 ρ-子序列 $x \restriction \rho(F)$ ρ-收敛于 η。那么，对于 η 的每个邻域 U，我们都可以找到一个有限的 $K \subseteq \Omega$，使得对于所有 $s \in \rho(F \setminus K)$，均有 $x_s \in U$。由于 $\rho(F \setminus K) \in \mathcal{I}_\rho^+$，我们得出 $\eta \in \Gamma_x(\rho)$。因此 $\Lambda_x(\rho) \subseteq \Gamma_x(\rho)$。□

下一个例子表明，一般而言， $\Lambda_x(\mathcal{I}_\rho)$ 与 $\Lambda_x(\rho)$ 并不相同。

例 2.5. 对每个非零的 $n \in \omega$，令 $\nu_2(n)$ 为 n 的 2 进赋值，也就是说，满足 2^k 整除 n 的最大 $k \in \omega$，并定义 $S_m = \{n \in \omega \setminus \{0\} : \nu_2(n) = m\}$，对每个 $m \in \omega$ 均如此。令 $\rho = \mathsf{FS}$ 且 $X = [0,1]$，使得 $\mathcal{F} = [\omega]^\omega$ 且 $\mathcal{H} = \mathcal{I}_\rho$。我们断言，存在一个序列 $x \in X^\omega$，它没有 $\mathcal{I}_\rho$-极限点；另一方面，它有一个 ρ-子序列，该子序列是 ρ-收敛的。特别地，这将意味着

$$\Lambda_x(\mathcal{H}) = \emptyset \quad \text{and} \quad \Lambda_x(\mathsf{FS}) \neq \emptyset.$$

我们将证明，由 $x_0 = 1/3$ 和 $x_n = 2^{-\nu_2(n)}$ 对每个非零 $n \in \omega$ 定义的序列 $x = (x_n)_{n\in\omega}$ 满足我们的断言。

为此，我们首先证明 x 没有 $\mathcal{H}$-极限点。事实上，假设为导出矛盾，存在一个无限的 $E \subseteq \omega$，使得 $x \restriction \mathsf{FS}(E)$ 收敛（按通常意义）。由于 x 的像等于 $\{1/3\} \cup \{2^{-n} : n \in \omega\}$，因此只有以下两种可能性。

(i) 序列 $(x_n)_{n\in\mathsf{FS}(E)}$ 最终为常数。换言之，存在 k、$m \in \omega$，使得 $\mathsf{FS}(E) \setminus k \subseteq S_m$。特别地，由于 $E \subseteq \mathsf{FS}(E)$，我们有 $E \setminus k \subseteq S_m$。现在，选取互不相同的 a、$b \in E \setminus k$，使得 $\nu_2(a) = \nu_2(b) = m$。于是 $a + b \in \mathsf{FS}(E) \setminus k \subseteq S_m$，另一方面，$\nu_2(a+b) \geq m+1$，这与 $a + b \in S_m$ 矛盾。(ii) 序列 $(x_n)_{n\in\mathsf{FS}(E)}$ 收敛到零。任取 $a \in E \setminus \{0\}$，并选取 $k \in \omega$ 使得 $a \in S_k$。由于 $(x_n)_{n\in\mathsf{FS}(E)}$ 收敛到零，对于每个 $m \in \omega$，$\mathsf{FS}(E) \cap S_m$ 必须是有限的。特别地，由于 $E \subseteq \mathsf{FS}(E)$，我们得到对于每个 $m \in \omega$，$E \cap S_m$ 是有限的。于是 $E \setminus \bigcup_{m\leq k} S_m$ 是无限的，并且对于每个 $b \in E \setminus \bigcup_{m\leq k} S_m$，我们有 $a+b \in \mathsf{FS}(E) \cap S_k$，这与 $\mathsf{FS}(E) \cap S_k$ 为有限集的事实矛盾。

最后，我们证明，如果 $F = \{2^n : n \in \omega\}$（因此 $\mathsf{FS}(F) = \omega \setminus \{0\}$），那么 FS 子序列 $y = x \restriction \mathsf{FS}(F)$ 有限和收敛于 0。事实上，对每个 $k \in \omega$ 和每个 $n \in \mathsf{FS}(F \setminus 2^k)$，都有 $\nu_2(n) \geq k$，因此 $y_n \leq 2^{-k}$。所以 $\mathsf{FS}\text{-}\lim y = 0$。

本文的主要目标是证明，对于不可数波兰空间 X 的每个非空解析集 C，都存在取值于 X 的序列 x 和 y，满足

$$C = \Lambda_x(\mathsf{FS}) = \Lambda_x(\mathcal{H}) \quad \text{and} \quad C = \Lambda_y(\mathsf{r}) = \Lambda_y(\mathcal{R}).$$

作为应用，我们得到

$$\mathscr{L}(\mathsf{FS}) = \mathscr{L}(\mathcal{H}) = \mathscr{L}(\mathsf{r}) = \mathscr{L}(\mathcal{R}) = \Sigma^1_1,$$

见下文的定理 4.2 和定理 4.3。

3. 类 P 性质

以下定义将会用到，参见 [6, 第 6] 节。对于分划正则函数 $\rho : \mathcal{F} \to [\Psi]^\omega$，若存在有限集 $K \subseteq \Omega$，使得 $\rho(F \setminus K) \subseteq B$，则记作 $\rho(F) \subseteq^\rho B$。我们指出，“$\rho(F) \subseteq^\rho B$”是 F 与 B 之间的关系，而非 $\rho(F)$ 与 B 之间的关系（事实上，可能有 $\rho(F) = \rho(G)$ 且 $\rho(F) \subseteq^\rho B$，但 $\rho(G) \not\subseteq^\rho B$；参见 [6, 定义 6.3] 后的注释）。

分划正则函数 $\rho : \mathcal{F} \to [\Psi]^\omega$ is

(i) P^+ 若对于每个 $\subseteq$递减序列 $(A_n)_{n\in\omega} \in (\mathcal{I}^+_\rho)^\omega$，都存在 $F \in \mathcal{F}$使得 $\rho(F) \subseteq^\rho A_n$ 对每个 $n \in \omega$都成立；

(ii) P^- 若对于每个 $\subseteq$递减序列 $(A_n)_{n\in\omega}\in(\mathcal{I}_\rho^+)^\omega$，且 $A_n\setminus A_{n+1}\in\mathcal{I}_\rho$ 对每个 $n\in\omega$ 都成立，则存在 $F\in\mathcal{F}$ 使得 $\rho(F)\subseteq^\rho A_n$ 对每个 $n\in\omega$都成立；(iii) $P^|$ 若对于每个 $\subseteq$递减序列 $(A_n)_{n\in\omega}\in(\mathcal{I}_\rho^+)^\omega$，且 $A_n\setminus A_{n+1}\in\mathcal{I}_\rho^+$对每个 $n\in\omega$ 都成立，则存在 $F\in\mathcal{F}$ 使得 $\rho(F)\subseteq^\rho A_n$ 对每个 $n\in\omega$都成立。

命题 3.1. 设 $\rho\colon\mathcal{F}\to[\Psi]^\omega$ 是一个分划正则函数。那么 ρ 是 P^+当且仅当它既是 $P^|$ 又是 P^-。

证明。 Only If part. 显然。

If part. 假设 ρ 是 $P^|$ 且 P^-。固定一个 $\subseteq$-递减序列 $(A_n)_{n\in\omega}\in(\mathcal{I}_\rho^+)^\omega$。定义

$$T=\{0\}\cup\{n\in\omega:A_n\setminus A_{n+1}\in\mathcal{I}_\rho^+\}.$$

若 T 是有限的，定义 $k=\max T$，并对所有 $n\in\omega$定义 $B_n=A_{k+1+n}$。那么 $(B_n)_{n\in\omega}$是一个 $\subseteq$-递减序列，且对每个 $n\in\omega$都有 $B_n\setminus B_{n+1}\in\mathcal{I}_\rho$。由于 ρ 是 P^-，存在 $F\in\mathcal{F}$使得对每个 $n\in\omega$都有 $\rho(F)\subseteq^\rho B_n$，因此对每个 $n\in\omega$都有 $\rho(F)\subseteq^\rho A_n$。

如果 T 是无限的，令 $(t_n)_{n\in\omega}$ 为 T 的递增枚举，并对所有 $n\in\omega$定义 $C_n=A_{t_n}$。于是，$(C_n)_{n\in\omega}$ 是一个 $\subseteq$-递减序列，且对每个 $n\in\omega$都有 $C_n\setminus C_{n+1}\supseteq A_{t_n}\setminus A_{t_n+1}\in\mathcal{I}_\rho^+$。应用 ρ 是 $P^|$这一事实，存在 $E\in\mathcal{F}$，使得对每个 $n\in\omega$都有 $\rho(E)\subseteq^\rho C_n$。此外，在此情形下，对每个 $n\in\omega$也有 $\rho(E)\subseteq^\rho A_n$。因此，$\rho$ 是 P^+。□

命题 3.2。设 X 为一个具有聚点的度量空间，并令$\rho\colon\mathcal{F}\to[\Psi]^\omega$ 为一个分划正则函数。则以下结论成立。

(i) ρ 是 P^+ 当且仅当对于每个序列 $x\in X^\Psi$，$\Lambda_x(\rho)=\Gamma_x(\rho)$。(ii) ρ 是 $P^|$ 当且仅当对于每个序列 $x\in X^\Psi$，$\Lambda_x(\rho)$ 是闭集。(iii) 假设 X 是局部紧的。则 ρ 是 P^- 当且仅当对于每个序列 $x\in X^\Psi$，$\Gamma_x(\rho)$ 中的每个孤立点都属于 $\Lambda_x(\rho)$。

证明。在以下证明中，令 d 为 X 上的度量。

(i) Only If part. 取 X 中的一个序列 $x=(x_s)_{s\in\Psi}$。由命题 2.4 可知 $\Lambda_x(\rho)\subseteq\Gamma_x(\rho)$，因此我们只需证明 $\Gamma_x(\rho)\subseteq\Lambda_x(\rho)$。若 $\Gamma_x(\rho)=\emptyset$，则结论显然成立。否则，固定 $p\in\Gamma_x(\rho)$。那么对每个 $n\in\omega$，都有$A_n=\{s\in\Psi:\ d(x_s,p)<2^{-n}\}\in\mathcal{I}_\rho^+$。此外，$(A_n)_{n\in\omega}$ 是 $\subseteq$-递减的。由于ρ 是 P^+，存在 $F\in\mathcal{F}$，使得对所有 $n\in\omega$，都有 $\rho(F)\subseteq^\rho A_n$。现在，只需证明 $(x_s)_{s\in\rho(F)}$ 是 ρ-收敛于 p。为此，取 U 为p 的一个邻域，并选取 $n\in\omega$，使得 $B(p,2^{-n})\subseteq U$。于是存在一个有限集 $K\subseteq\Omega$，使得 $\rho(F\setminus K)\subseteq A_n$。因此，对所有 $s\in\rho(F\setminus K)$，都有 $x_s\in B(p,2^{-n})\subseteq U$，从而 $(x_s)_{s\in\rho(F)}$ 是 ρ-收敛于 p。

If part. 假设 ρ 不是 P^+，并且令 $(A_n)_{n\in\omega}\in(\mathcal{I}_\rho^+)^\omega$ 为一个 $\subseteq$-递减序列，使得对每个 $F\in\mathcal{F}$，都有 $\rho(F)\not\subseteq^\rho A_n$，其中某个 $n\in\omega$满足条件。再设 p 是 X 的一个聚点，并选取一个单射序列 $(y_n)_{n\in\omega}$，使得由 $\delta_n=d(y_n,\ p)$ 给出的序列 $(\delta_n)_{n\in\omega}$ 递减且趋于零。定义序列 $x=(x_s)_{s\in\Psi}$ 如下

$$x_s=\begin{cases}y_0 & \text{if } s\in\Psi\setminus A_0,\\ p & \text{if } s\in\bigcap_{n\in\omega}A_n,\\ y_n & \text{if } s\in A_n\setminus A_{n+1}.\end{cases}$$

我们将证明 $p\in\Gamma_x(\rho)$，并证明 $p\notin\Lambda_x(\rho)$。

事实上，令 U 为 p 的一个邻域，并找出 $n \in \omega$，使得闭球$B(p, \delta_n)$ 包含于 U。于是，对所有 $s \in A_n$，都有 $x_s \in B(p, \delta_n) \subseteq U$。由于 $A_n \in \mathcal{I}_\rho^+$，我们得到 $p \in \Gamma_x(\rho)$。

最后，为了证明 $p \notin \Lambda_x(\rho)$，固定 $F \in \mathcal{F}$。我们将证明子序列 $(x_s)_{s\in\rho(F)}$ 不 ρ-收敛于 p。根据 $(A_n)_{n\in\omega}$ 的选取，存在 $n \in \omega$，使得对于所有有限 $K \subseteq \Omega$，都有 $\rho(F \setminus K) \not\subseteq A_n$。定义 $U = B(p, \delta_n)$。于是U 是 p 的一个邻域。固定一个有限集 $K \subseteq \Omega$。存在 $s \in \rho(F \setminus K) \setminus A_n$。于是$s \in \rho(F \setminus K)$且 $x_s \in \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$，因此 $x_s \notin U$。由 K 的任意性，我们得出 $(x_s)_{s\in\rho(F)}$ 不 ρ-收敛于 p。

(ii) Only If part. 固定一个序列 $x = (x_s)_{s\in\Psi}$ 于 X 中，并令 $(y_n)_{n\in\omega}$ 为 $\Lambda_x(\rho)$ 中收敛于某个 $p \in X$ 的序列。那么对于每个 $n \in \omega$，存在 $F_n \in \mathcal{F}$，使得该 ρ-子序列 $(x_s)_{s\in\rho(F_n)}$ ρ-收敛于 y_n。我们需要证明 $p \in \Lambda_x(\rho)$。如果对于某个 $n \in \omega$有 $p = y_n$，则这显然成立，因此我们可以假设对于所有 $n \in \omega$都有$p \neq y_n$。于是，可以找到一个正实数的递减序列 $(\delta_n)_{n\in\omega}$，使得 $\lim_n \delta_n = 0$，并且对于每个 $n \in \omega$，存在 $k \in \omega$，使得$d(y_k, p) \in (\delta_{n+1}, \delta_n)$。定义 $A_n = \{s \in \Psi\colon \text{对所有 } n \in \omega,\ \ d(x_s, p) < \delta_n\}$。那么 $(A_n)_{n\in\omega}$ 是 $\subseteq$-递减的。此外，对于每个 $n \in \omega$，我们都有 $A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}_\rho^+$。事实上，如果 $n \in \omega$，则存在 $k \in \omega$，使得 $\delta_{n+1} < d(y_k, p) < \delta_n$，因此 $U = B(p, \delta_n) \setminus B(p, \delta_{n+1}) = \{x \in X\colon \ \delta_{n+1} < d(x, p) < \delta_n\}$ 是 y_k 的一个邻域，并且我们可以找到一个有限的 $K \subseteq \Omega$，使得对于所有 $s \in \rho(F_k \setminus K)$ 都有 $x_s \in U$。因此，$\rho(F_k \setminus K) \subseteq A_n \setminus A_{n+1}$，从而 $A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}_\rho^+$（特别地，$A_n \in \mathcal{I}_\rho^+$）。

由于 ρ 是 $P^|$，存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得对所有 $n \in \omega$，$\rho(F) \subseteq^\rho A_n$。我们将证明 $(x_s)_{s\in\rho(F)}$ 收敛到 p。取 U 为 p 的一个邻域，并找出 $n \in \omega$，使得球 $B(p, \delta_n)$ 包含于 U。于是存在一个有限集 $K \subseteq \Omega$，使得 $\rho(F \setminus K) \subseteq A_n$。由此可知，对所有 $s \in \rho(F \setminus K)$，$x_s \in B(p, \delta_n) \subseteq U$，因此 $(x_s)_{s\in\rho(F)}$ 收敛到 p。所以 $p \in \Lambda_x(\rho)$。

If part. 假设 ρ 不是 $P^|$。因此可以固定一个 $\subseteq$-递减的集合序列 $(A_n)_{n\in\omega} \in (\mathcal{I}_\rho^+)^\omega$，使得

- $A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}_\rho^+$对所有 $n \in \omega$,
- 对每个 $F \in \mathcal{F}$，都存在 $n \in \omega$，使得 $\rho(F) \not\subseteq^\rho A_n$。

再设 p 是 X 的一个聚点，并选取一个单射序列 $(y_n)_{n\in\omega}$，使得由 $\delta_n = d(y_n, p)$ 定义的序列 $(\delta_n)_{n\in\omega}$ 严格递减且极限为零。此时，定义序列 $x =(x_s)_{s\in\Psi}$ 如下：

$$x_s = \begin{cases} y_0 & \text{if } s \in \Psi \setminus A_0, \\ p & \text{if } s \in \bigcap_{n\in\omega} A_n, \\ y_n & \text{if } s \in A_n \setminus A_{n+1}. \end{cases}$$

为完成证明，只需证明

$$\{y_n\colon\ n \in \omega\} \subseteq \Lambda_x(\rho) \quad \text{and} \quad p \notin \Lambda_x(\rho). \tag{5}$$

为此，固定 $n \in \omega$。那么，$A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}_\rho^+$，因此存在 $F \in \mathcal{F}$，使得$\rho(F) \subseteq A_n \setminus A_{n+1}$。由于对所有 $s \in \rho(F)$ 都有 $x_s = y_n$，ρ-子序列 $(x_s)_{s\in\rho(F)}$ 收敛到 y_n。这就证明了 (5) 的第一部分。证明 (5) 的第二部分的方法与第 (i) 项中 If 部分的证明类似。

(iii) Only If part. 固定一个序列 $x = (x_s)_{s\in\Psi}$ 属于 X，并设 p 是 $\Gamma_x(\rho)$中的一个孤立点。考虑到 X 是局部紧的，可以固定一个整数 $n_0 \in \omega$，使得 $B(p, 2^{-n_0})$ 是紧致的，且 $B(p, 2^{-n_0}) \cap \Gamma_x(\rho) = \{p\}$。

由于 $p \in \Gamma_x(\rho)$，对每个 $n \in \omega$，我们都有

$$A_n = \{s \in \Psi : x_s \in \overline{B}(p, 2^{-(n_0+n)})\} \in \mathcal{I}_\rho^+.$$

此外，$(A_n)_{n\in\omega}$ 是 $\subseteq$-递减的。我们将证明，对所有 $n \in \omega$，都有 $A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}_\rho$。事实上，假设为了导出矛盾，存在 $n \in \omega$ 使得 $A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}_\rho^+$。那么 $Z = B(p, 2^{-(n_0+n)}) \setminus B(p, 2^{-(n_0+n+1)})$ 是紧致的，并且对所有 $s \in A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}^+$，都有 $x_s \in Z$。根据 [20, 引理 3.1(vi)], ，可以固定一个点 $p' \in \Gamma_x(\rho) \cap Z$。于是 $p' \neq p$，且 $p' \in Z \subseteq B(p, 2^{-(n_0+n)}) \subseteq B(p, 2^{-n_0})$。这与 n_0的选取矛盾。

由于 ρ是 P^-，存在 $F \in \mathcal{F}$使得对所有 $n \in \omega$， $\rho(F) \subseteq^\rho A_n$。现在，我们将证明 $(x_s)_{s\in\rho(F)}$ 收敛于 p（按 ρ意义）。为此，取 p 的一个邻域 U，并找到 $n \in \omega$，使得闭球 $B(p, 2^{-(n_0+n)})$包含于 U中。存在一个有限集 $K \subseteq \Omega$，使得 $\rho(F \setminus K) \subseteq A_n$。那么，对所有 $s \in \rho(F \setminus K)$，$x_s \in B(p, 2^{-(n_0+n)}) \subseteq U$，因此$(x_s)_{s\in\rho(F)}$ 收敛于 p（按 ρ意义）。

If part. 假设 ρ 不是 P^-，并令$(A_n)_{n\in\omega} \in (\mathcal{I}_\rho^+)^\omega$ 为一个 $\subseteq$-递减序列，满足：

- $A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}_\rho$ 对所有 $n \in \omega$,
- 对每个 $F \in \mathcal{F}$，都存在 $n \in \omega$，使得 $\rho(F) \not\subseteq^\rho A_n$。

再设 p 是 X 的一个聚点，并选取一个单射序列 $(y_n)_{n\in\omega}$，使得由 $\delta_n = d(y_n, p)$ 给出的序列 $(\delta_n)_{n\in\omega}$ 递减且趋于零。定义 $x =(x_s)_{s\in\Psi}$ 为

$$x_s = \begin{cases} y_0 & \text{if } s \in \Psi \setminus A_0, \\ p & \text{if } s \in \bigcap_{n\in\omega} A_n, \\ y_n & \text{if } s \in A_n \setminus A_{n+1}. \end{cases}$$

注意， $\Gamma_x(\rho) \subseteq \{y_n : n \in \omega\} \cup \{p\}$。为完成证明，我们将证明：对所有 $n \geq 1$，$p \in \Gamma_x(\rho)$、 $y_n \notin \Gamma_x(\rho)$（从而 p 是 $\Gamma_x(\rho)$ 的一个孤立点），且 $p \notin \Lambda_x(\rho)$。

为此，设 U 是 p 的一个邻域，并找到 $n \in \omega$，使得球 $B(p, \delta_n)$ 包含于 U。那么，对所有 $s \in A_n$， $x_s \in B(p, \delta_n) \subseteq U$。由于 $A_n \in \mathcal{I}_\rho^+$，我们得到 $p \in \Gamma_x(\rho)$。

此外，取一个整数 $n \geq 1$，并找一个 y_n 的邻域 U，使得$p \notin U$，且对每个 $k \neq n$都有 $y_k \notin U$。于是 $\{s \in \Psi : x_s \in U\} = A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}_\rho$。因此 $y_n \notin \Gamma_x(\rho)$。

最后，证明 $p \notin \Lambda_x(\rho)$ 的方法与条目 (i) 的 If 部分类似。 □

注记 3.3. 命题 3.2(iii) 中关于局部紧性的假设不能删去。事实上，在 [8, 例 3.8] 中，证明了存在一个理想 $\mathcal{I}$、一个空间 X和一个序列 $x \in X^\omega$，使得

- X 是度量的且有一个聚点，但它不是局部紧的,
- $\mathcal{I}$是 P^-，这等价于 $\rho_\mathcal{I}$是 P^-（根据 [6, 命题 6.5(2)]），
- 存在一个 $\Gamma_x(\mathcal{I})$中的孤立点，它不属于 $\Lambda_x(\mathcal{I})$。

由于 $\Gamma_x(\rho_\mathcal{I}) = \Gamma_x(\mathcal{I}_{\rho_\mathcal{I}}) = \Gamma_x(\mathcal{I})$ 且 $\Lambda_x(\mathcal{I}) = \Lambda_x(\rho_\mathcal{I})$，我们得到一个度量空间 X，它有一个聚点，一个序列 x 属于 X，以及一个分划正则函数 $P^- \quad \rho_\mathcal{I}$，使得 $\Gamma_x(\mathcal{I}_{\rho_\mathcal{I}})$ 中存在一个不属于 $\Lambda_x(\rho_\mathcal{I})$ 的孤立点。

推论 3.4. 设 X 是一个有聚点的度量空间。则以下结论成立。

(i) $\Lambda_x(\mathsf{r}) \neq \Gamma_x(\mathsf{r})$ 对某个序列 $x \in X^{[\omega]^2}$成立。(ii) $\Lambda_x(\mathsf{r})$ 对某个序列 $x \in X^{[\omega]^2}$不是闭集。(iii) 如果 X 是局部紧的，那么 $\Gamma_x(\mathsf{r})$中的每个孤立点，对任意 $x \in X^{[\omega]^2}$都属于 $\Lambda_x(\mathsf{r})$。

类似地，以下结论成立。

(i′) $\Lambda_x(\mathsf{FS}) \neq \Gamma_x(\mathsf{FS})$ 对某个序列 $x \in X^{\omega}$成立。(ii′) $\Lambda_x(\mathsf{FS})$ 对某个序列 $x \in X^{\omega}$不是闭集。(iii′) 如果 X 是局部紧的，那么 $\Gamma_x(\mathsf{FS})$中的每个孤立点，对任意 $x \in X^{\omega}$都属于 $\Lambda_x(\mathsf{FS})$。

证明。 根据 [6, 命题 6.7], , 两个分划正则函数 $\mathbf{r}$ 和 FS 是P^-，但不是 P^+。因此，根据命题 3.1，$\mathbf{r}$ 和 FS 不是 $P^|$。最后，所有结论均由命题 3.2 得出。□

4. Main results

在本节中，我们将集合 $A \subseteq \Omega$ 与其特征函数 $\mathbf{1}_A$ 等同起来，并将 2^Ω 视为乘积空间 $\{0,1\}^\Omega$，其中 $\{0,1\}$ 赋予离散拓扑。于是 2^Ω 是一个波兰空间。集合 $[\Omega]^\omega$ 是 2^Ω 的解析子集，因此它是一个波兰空间。同样地，我们也将 2^Ψ 和 $[\Psi]^\omega$ 视为如此。

命题 4.1. 设 X 是一个波兰空间，且 $\rho\colon \mathcal{F} \to [\Psi]^\omega$ 是一个分划正则函数。若 $\mathcal{F}$ 是 $[\Omega]^\omega$ 的解析子集，且 ρ 是一个博雷尔函数，那么

$$\mathscr{L}(\rho) \subseteq \Sigma^1_1.$$

证明。 设 X 上有一个相容完备度量 d。固定一个序列 $x = (x_s)_{s\in\Psi} \in X^\Psi$。我们需要证明 $\Lambda_x(\rho)$ 是 X 的解析子集。注意， $\Lambda_x(\rho)$ 是集合在第一坐标上的投影：

$$A = \left\{(p,F) \in X \times \mathcal{F} : \forall_{n\in\omega}\, \exists_{K\in[\Omega]^{<\omega}}\, \forall_{s\in\Psi}\, (s \in \rho(F\setminus K) \implies d(p,x_s) < 2^{-n})\right\}.$$

由于 A 是波兰空间 $X \times [\Omega]^\omega$ 的子集，只要证明 A 是 $X \times [\Omega]^\omega$ 的解析子集，证明便完成。注意到

$$A = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{K\in[\Omega]^{<\omega}} \bigcap_{s\in\Psi} (B_{n,K,s} \cup C_{n,K,s}),$$

其中

$$B_{n,K,s} = \{(p,F) \in X \times \mathcal{F} : s \notin \rho(F\setminus K)\} \quad \text{and}$$
$$C_{n,K,s} = \{(p,F) \in X \times \mathcal{F} : d(p,x_s) < 2^{-n}\}.$$

只需证明集合 $B_{n,K,s}$ 和$C_{n,K,s}$ 是解析集。

首先，我们证明 $B_{n,K,s}$ 是解析集。由于 $B_{n,K,s} = X \times D_{K,s}$，其中 $D_{K,s} = \{F \in \mathcal{F} : s \notin \rho(F \setminus K)\}$，只要证明 $D_{K,s}$ 是解析集，证明便完成。注意到

$$D_{K,s} = \mathcal{F} \cap \phi_K^{-1}\left[\rho^{-1}\left[[\Psi\setminus\{s\}]^\omega\right]\right],$$

其中 $\phi_K\colon [\Omega]^\omega \to [\Omega]^\omega$ 由 $\phi_K(A) = A \setminus K$ 给出。由于 $\mathcal{F}$是解析集， ϕ_K是连续函数，ρ 是博雷尔函数，且 $[\Psi\setminus\{s\}]^\omega$ 是$[\Psi]^\omega$的开子集，因此我们得到 $D_{K,\ s}$ 是解析集。

最后，我们证明 $C_{n,\ K,\ s}$ 是解析集。注意，$C_{n,\ K,\ s} = B(x_s,\ 2^{-n}) \times \mathcal{F}$。由于 $B(x_s,\ 2^{-n})$ 是开集，且 $\mathcal{F}$ 是解析集，因此我们得到 $C_{n,\ K,\ s}$ 是解析集。□

值得注意的是，命题 4.1 的特殊情形，即对于某个定义在 ω 上的余解析理想 $\mathcal{I}$，满足 $\rho = \rho_{\mathcal{I}}$，此前已在命题 4.1]，中证明，见 [2,；另见定理 4.1] 和定理 3.3]，分别见 [14, 和 [1,。

我们现在终于可以证明主要结果了。

定理 4.2。设 X 是一个不可数波兰空间。那么

$$\mathscr{L}(\mathsf{r}) = \mathscr{L}(\mathcal{R}) = \Sigma^1_1.$$

此外，对于每个非空解析集 $C \subseteq X$，都存在一个序列 $y \in X^{[\omega]^2}$，使得 $C = \Lambda_y(\mathsf{r}) = \Lambda_y(\mathcal{R})$。

证明。包含关系 $\mathscr{L}(\mathsf{r}) \subseteq \Sigma^1_1$ 由命题 5.2(2)] 和命题 4.1 得出，见 [6, 。包含关系 $\mathscr{L}(\mathcal{R}) \subseteq \Sigma^1_1$ 由命题 4.1] 得出（或者再次应用命题 4.1 和命题 5.2(5)]），见 [2, [6, 。我们将证明“此外”部分，由此可得反向包含关系 $\Sigma^1_1 \subseteq \mathscr{L}(\mathsf{r})$ 和 $\Sigma^1_1 \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{R})$（注意，按定义，$\emptyset \in \mathscr{L}(\mathsf{r})$ 和 $\emptyset \in \mathscr{L}(\mathcal{R})$）。

为此，固定一个非空解析集 $C \subseteq X$。由 [17, 定理 25，7],存在一个苏斯林方案 $\{C_s : s \in \omega^{<\omega}\}$，其由非空闭集组成，使得

$$C = \bigcup_{x \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} C_{x\restriction n}. \tag{6}$$

此外，可以假设 $C_s \supseteq C_t$ 当 $s \subseteq t$ 对所有 $t,\ s \in \omega^{<\omega}$均成立，且对所有 $x \in \omega^\omega$都有 $\lim_n \operatorname{diam}(C_{x\restriction n}) = 0$。注意，由于 X 是完备的，对于每个$x \in \omega^\omega$，存在 $p_x \in X$ 使得 $\bigcap_n C_{x\restriction n} = \{p_x\}$。因此 $C = \{p_x :\ x \in \omega^\omega\}$。

固定任意一个双射 $f\colon\ \omega \to \omega^{<\omega}$，使得若 $s \subseteq t$，则 $f^{-1}(s) \leq f^{-1}(t)$。定义

$$A_s = \big\{\{i,j\} \in [\omega]^2 : i < j \text{ and } s \subseteq f(i) \subseteq f(j)\big\}$$

对每个 $s \in \omega^{<\omega}$。注意，$s \subseteq t$ 蕴含 $A_t \subseteq A_s$。此外，如果 $n,\ k \in \omega$ 彼此不同，则 $A_{s^\frown n} \cap A_{s^\frown k} = \emptyset$。

此时，将序列 $y = (y_{\{i,j\}})_{\{i,j\} \in [\omega]^2}$ 定义为

$$y_{\{i,j\}} = \begin{cases} p_{0^\infty} & \text{if } \{i,j\} \notin A_\emptyset, \\ p_{f(\max\{i,j\})^\frown 0^\infty} & \text{if } \{i,j\} \in A_\emptyset. \end{cases}$$

断言 1。 $C \subseteq \Lambda_y(\mathcal{R})$。

证明。取 $c \in C$。于是，对于某个 $x \in \omega^\omega$，有 $c = p_x$。对于每个 $n \in \omega$，固定满足 $f(i_n) = x \restriction n$ 的 $i_n \in \omega$，并定义 $F = \{i_n :\ n \in \omega\}$。注意到 f 的性质保证了 F 是无限的，并且序列 $(i_n)_{n\in\omega}$ 是递增的。我们断言，对于 p_x 的每个邻域 U，都存在一个有限集 $G \subseteq [\omega]^2$，使得对于所有 $\{i,j\} \in [F]^2 \setminus G$都有$y_{\{i,j\}} \in U$。

事实上，固定 p_x的一个邻域 U，并取充分大的 $n \in \omega$，使得 $C_{x\restriction n} \subseteq U$。令 $G = \{\{i_m, i_k\} \in [F]^2 \colon \max\{m,k\} \leq n\}$。于是 G是有限的。此外，如果 $\{i,j\} \in [F]^2 \setminus G$，那么对于某个满足 $k > n$的 $m < k$，有 $\{i,j\} = \{i_m, i_k\}$。注意到 $\{i,j\} \in A_\emptyset$。于是

$$y_{\{i,j\}} = p_{f(\max\{i,j\})^\frown 0^\infty} = p_{f(i_k)^\frown 0^\infty} = p_{(x\restriction k)^\frown 0^\infty} \in C_{x\restriction k} \subseteq C_{x\restriction n} \subseteq U.$$

因此 $c = p_x \in \Lambda_y(\mathcal{R})$。 □

断言 2。对于每个满足 $[F]^2 \subseteq A_s$ 的 $s \in \omega^{<\omega}$ 和 $F \in [\omega]^\omega$，都存在 $n \in \omega$ 和 $K \in [\omega]^{<\omega}$，使得 $[F \setminus K]^2 \subseteq A_{s^\frown n}$。

证明。固定 $s \in \omega^{<\omega}$和 $F \in [\omega]^\omega$，使得 $[F]^2 \subseteq A_s$。定义 $K = \{f^{-1}(s)\}$，并选取 $m \in F \setminus K$，使得 $|f(m)| = \min\{|f(i)|: i \in F \setminus K\}$。此外，令 $n \in \omega$满足 $s^\frown n \subseteq f(m)$（这是可能的，因为 $[F \setminus K]^2 \subseteq [F]^2 \subseteq A_s$蕴含 $s \subseteq f(m)$）。现在，我们将证明 $[F \setminus K]^2 \subseteq A_{s^\frown n}$。

事实上，取满足 $i < j$的 $\{i,j\} \in [F \setminus K]^2$。由于 $\{i,j\} \in [F \setminus K]^2 \subseteq [F]^2 \subseteq A_s$，我们得到 $f(i) \subseteq f(j)$。注意到 $s^\frown n \subseteq f(m) \subseteq f(i)$。确实，要么 $m = i$（这显然成立），要么对 m 的选择与 $\{m,i\} \in [F\setminus K]^2 \subseteq A_s$一起给出 $f(m) \subseteq f(i)$。因此， $s^\frown n \subseteq f(m) \subseteq f(i) \subseteq f(j)$，这意味着 $\{i,j\} \in A_{s^\frown n}$。□

断言 3。 $\Lambda_y(\mathsf{r}) \subseteq C$。

证明。 </style}若 $\Lambda_y(\mathsf{r}) = \emptyset$，则该断言显然成立。否则，固定 $z \in \Lambda_y(\mathsf{r})$，并选取 $F \in [\omega]^\omega$，使得 $(y_{\{i,j\}})_{\{i,j\}\in[F]^2}$ r-收敛于 z。

首先，假设对所有 $K \in [\omega]^{<\omega}$ 都有 $[F \setminus K]^2 \setminus A_\emptyset \neq \emptyset$。那么 $z = p_{0^\infty} \in C$。事实上，否则，我们可以找到 z 的一个邻域 U，使得 $p_{0^\infty} \notin U$。于是存在一个有限的 $K \in [\omega]^{<\omega}$，使得对所有 $\{i,j\} \in [F \setminus K]^2$ 都有 $y_{\{i,j\}} \in U$。然而，根据我们的假设，存在某个 $\{i,j\} \in [F \setminus K]^2 \setminus A_\emptyset$，因此对于该 $\{i,j\}$，我们有$y_{\{i,j\}} = p_{0^\infty} \notin U$，这就导致了矛盾。

此后，假设对于某个 $K \in [\omega]^{<\omega}$，有 $[F \setminus K]^2 \subseteq A_\emptyset$。那么应用断言 2，我们可以递归地定义 $x \in \omega^\omega$，使得对于每个 $n \in \omega$，都存在 K_n，满足 $[F \setminus K_n]^2 \subseteq A_{x\restriction n}$。我们将证明 $z = p_x \in C$。事实上，反设 $z \neq p_x$。那么存在 $n \in \omega$，使得 $z \notin C_{x\restriction n}$。于是 $p_x \in C_{x\restriction n}$，并且由于 $C_{x\restriction n}$ 是闭的， $X \setminus C_{x\restriction n}$ 是 z 的一个开邻域。因此，存在 $K \in [\omega]^{<\omega}$，使得对所有 $\{i,j\} \in [F \setminus K]^2$，都有 $y_{\{i,j\}} \notin C_{x\restriction n}$。然而，$F \setminus (K \cup K_n) \in [\omega]^\omega$，并且对于每个满足 $\{i,j\} \in [F \setminus$ 的 $i < j$，若 $K \cup K_n$ $(]^2 \subseteq A_{x\restriction n}$），则有 $y_{\{i,j\}} = p_{f(j)^\frown 0^\infty} \in C_{f(j)} \subseteq C_{x\restriction n}$。这就产生了矛盾。□

综合断言 1 和断言 3，并利用 $\Lambda_y(\mathcal{R}) \subseteq \Lambda_y(\mathsf{r})$（由命题 2.4），我们得出 $C \subseteq \Lambda_y(\mathcal{R}) \subseteq \Lambda_y(\mathsf{r}) \subseteq C$。因此二者相同。□

定理 4.3. 设 X 是一个不可数波兰空间。那么

$$\mathscr{L}(\mathsf{FS}) = \mathscr{L}(\mathcal{H}) = \Sigma^1_1.$$

此外，对于每个非空解析集 $C \subseteq X$，都存在一个序列 $y \in X^\omega$，使得 $C = \Lambda_y(\mathsf{FS}) = \Lambda_y(\mathcal{H})$。

证明. 第一部分的证明与定理 4.2 的证明完全相同，只需分别用 FS 和 $\mathcal{H}$ 替换 r 和 $\mathcal{R}$。固定一个非空解析集 $C \subseteq X$，并令$\{C_s: s \in \omega^{<\omega}\}$ 为 (6) 中具有相同性质的苏斯林方案。同样，我们需要证明存在 $y \in X^\omega$，使得 $C = \Lambda_y(\mathsf{FS}) = \Lambda_y(\mathcal{H})$。

得益于 [7, 引理 22], ，可以固定一个 $D \subseteq \omega$ “非常稀疏”的无限集，即

(a) 对于每个 $a \in \mathsf{FS}(D)$，存在唯一的非空有限集 $\alpha_D(a) \in [D]^{<\omega}$使得 $a = \sum_{i\in\alpha_D(a)} i$；(b) 如果 $G, H \in [D]^{<\omega}$ 非空且 $G \cap H \neq \emptyset$，则 $\sum_{i\in G} i + \sum_{i\in H} i \notin \mathsf{FS}(D)$。

固定一个双射 $f\colon D\to\omega^{<\omega}$，使得若 $s\subseteq t$，则 $f^{-1}(s)\leq f^{-1}(t)$，并令

$$A_s=\bigcup_{m\in\omega}\left\{\sum_{i=0}^{m}k_i:k_0,\dots,k_m\in D,\,k_0<\dots<k_m \text{ and } s\subseteq f(k_0)\subseteq\dots\subseteq f(k_m)\right\}$$

对每个 $s\in\omega^{<\omega}$。注意到 $A_s\subseteq\mathsf{FS}(D)$，并且 $s\subseteq t$ 蕴含 $A_t\subseteq A_s$。此外，由于 D 非常稀疏，对于所有互不相同的 $n,\ k\in\omega$，我们有 $A_{s^\frown n}\cap A_{s^\frown k}=\emptyset$。在此 point, 定义一个序 q列 $y=(y_i)_{i\in\omega}$ by

$$y_i=\begin{cases}p_{0^\infty} & \text{if } i\notin A_\emptyset,\\ p_{f(\max\alpha_D(i))^\frown 0^\infty} & \text{if } i\in A_\emptyset.\end{cases}$$

断言 1。 $C\subseteq\Lambda_y(\mathcal{H})$。

证明。取 $c\in C$。那么 $c=p_x$，其中某个 $x\in\omega^\omega$。对于每个 $n\in\omega$，固定 $i_n\in D$，使得 $f(i_n)=x\restriction n$，并定义 $F=\{i_n:n\in\omega\}$。注意，f 的性质保证 F 是无限的，且 $(i_n)_{n\in\omega}$ 是递增的。我们声称，对于 p_x 的每个邻域 U，都存在 $G\in[\omega]^{<\omega}$，使得对于所有 $i\in\mathsf{FS}(F)\setminus G$，都有 $y_i\in U$。

事实上，固定 p_x的一个邻域 U，并取一个充分大的 $n\in\omega$，使得$C_{x\restriction n}\subseteq U$。令 $G=\{i\in\mathsf{FS}(D):\max\alpha_D(i)\leq i_n\}$。那么 G 是有限的。此外，若$i\in\mathsf{FS}(F)\setminus G\subseteq\mathsf{FS}(D)\setminus G$，则对于某个 $k\in\omega,\,k>n$，有 $i_k=\max\alpha_D(i)>i_n$，因为 $(i_j)_{j\in\omega}$ 是递增的，且 D 非常稀疏。注意，$i\in A_{\emptyset}$。因此

$$y_i=p_{f(\max\alpha_D(i))^\frown 0^\infty}=p_{f(i_k)^\frown 0^\infty}=p_{(x\restriction k)^\frown 0^\infty}\in C_{x\restriction k}\subseteq C_{x\restriction n}\subseteq U.$$

因此 $c=p_x\in\Lambda_y(\mathcal{H})$。 □

命题 2. 对于每个满足 $\mathsf{FS}(F)\subseteq A_s$ 的 $s\in\omega^{<\omega}$ 和 $F\in[\omega]^\omega$，都存在 $n\in\omega$ 和 $K\in[\omega]^{<\omega}$，使得 $\mathsf{FS}(F\setminus K)\subseteq A_{s^\frown n}$。

证明。取满足 $\mathsf{FS}(F)\subseteq A_s$ 的 $s\in\omega^{<\omega}$ 和 $F\in[\omega]^\omega$。注意到 $F\subseteq\mathsf{FS}(F)\subseteq A_s\subseteq\mathsf{FS}(D)$。此外，若 $a,b\in F$ 互不相同，则 $\alpha_D(a)\cap\alpha_D(b)=\emptyset$。事实上，否则，$a+b\in\mathsf{FS}(F)\subseteq A_s\subseteq\mathsf{FS}(D)$，这将与 D 非常稀疏这一事实矛盾。

因此，根据上述观察，$K=\{a\in F:f^{-1}(s)\in\alpha_D(a)\}$ 至多有一个元素。特别地，K是有限的。取$e\in\bigcup_{a\in F\setminus K}\alpha_D(a)$，使得 $|f(e)|=\min\{|f(i)|:i\in\bigcup_{a\in F\setminus K}\alpha_D(a)\}$。令 $c\in F\setminus K$ 满足 $e\in\alpha_D(c)$（注意这样的 c 是唯一的），并令 $n\in\omega$ 满足 $s^\frown n\subseteq f(e)$（根据 K 的定义以及观察到 $e\in\alpha_D(c)$ 蕴含 $s\subseteq f(e)$，这样的 n 存在，因为 $c\in\mathsf{FS}(F)\subseteq A_s$ 且D 非常稀疏）。因此，我们只需证明 $\mathsf{FS}(F\setminus K)\subseteq A_{s^\frown n}$。

固定互不相同的 $a_0,\ a_1,\ \dots\dots,\ a_m\in F\setminus(K\cup\{c\})$。为完成证明，我们需要证明 $c\in A_{s^\frown n}$、$\sum_{i\leq m}a_i\in A_{s^\frown n}$ 和 $c+\sum_{i\leq m}a_i\in A_{s^\frown n}$。令 $(d_i)_{i\leq k}\in D^{k+1}$ 为集合 $\alpha_D(c)\cup\bigcup_{i\leq m}\alpha_D(a_i)$ 的递增枚举。由于对于任意互不相同的 $\alpha_D(a)\cap\alpha_D(b)=\emptyset$，我们有

$$\sum_{i\leq k}d_i=c+\sum_{i\leq m}a_i\in\mathsf{FS}(F\setminus K)\subseteq\mathsf{FS}(F)\subseteq A_s.$$

由于 D 非常稀疏且 $d_0<\dots<d_k$ 属于 D，我们得到 $s\subseteq f(d_0)\subseteq f(d_1)\subseteq\dots\subseteq f(d_k)$。特别地，$f(d_0)\subseteq f(e)$（因为对于某个 j，有 $e=d_j$）。根据 e 的选取，我们还得到 $|f(e)|\leq|f(d_0)|$，因此 $|f(e)|=|f(d_0)|$，从而 $f(e)=f(d_0)$。由于 f 是单射，我们得到 $e=d_0$。因此还有 $s^\frown n\subseteq f(e)=f(d_0)\subseteq f(d_1)\subseteq\dots\subseteq f(d_k)$。这表明 $c+\sum_{i\leq m}a_i\in A_{s^\frown n}$。然而，由于其递增

枚举分别是 $\alpha_D(c)$ 和 $\bigcup_{i\le m}\alpha_D(a_i)$ 的递增枚举，且它们都是 $(d_i)_{i\le k}$ 的子序列，因此我们还可以得出 $c\in A_{s^\frown n}$ 和 $\sum_{i\le m}a_i\in A_{s^\frown n}$。□

断言 3。 $\Lambda_y(\text{有限和})\subseteq C$。

证明。若 $\Lambda_y(\text{有限和})=\emptyset$，则该断言显然成立。否则，固定 $z\in\Lambda_y(\text{有限和})$，并选取$F\in[\omega]^\omega$，使得 $(y_i)_{i\in\mathsf{FS}(F)}$ 有限和收敛到 z。

首先，假设对所有 $K\in[\omega]^{<\omega}$，都有 $\mathsf{FS}(F\setminus K)\setminus A_\emptyset\neq\emptyset$。那么 $z=p_{0^\infty}$。事实上，反过来，我们可以找到 z 的一个邻域 U，使得 $p_{0^\infty}\notin U$。于是存在一个有限的 $K\in[\omega]^{<\omega}$，使得对所有 $i\in\mathsf{FS}(F\setminus K)$，都有 $y_i\in U$。然而，根据我们的假设，存在某个 $i\in\mathsf{FS}(F\setminus K)\setminus A_\emptyset$，因此对于该 i，我们有 $y_i=p_{0^\infty}\notin U$，这就产生了矛盾。

因此，以下假设对某个 $K\in[\omega]^{<\omega}$，$\mathsf{FS}(F\setminus K)\subseteq A_\emptyset$。然后应用断言 2，我们可以递归地定义 $x\in\omega^\omega$，使得对每个 $n\in\omega$，都存在 K_n，满足 $\mathsf{FS}(F\setminus K_n)\subseteq A_{x\restriction n}$。我们将证明 $z=p_x\in C$。事实上，假设为了导出矛盾，$z\neq p_x$。那么存在 $n\in\omega$，使得 $z\notin C_{x\restriction n}$。于是 $p_x\in C_{x\restriction n}$，并且由于 $C_{x\restriction n}$ 是闭的，$X\setminus C_{x\restriction n}$ 是z的一个开邻域。因此，存在 $K\in[\omega]^{<\omega}$，使得对所有 $i\in$，$\mathsf{FS}(F\setminus K)$ 都有 $y_i\notin C_{x\restriction n}$。然而，$F\setminus(K\cup K_n)\in[\omega]^\omega$，且每个 $i\in\mathsf{FS}(F\setminus(K\cup K_n))\subseteq A_{x\restriction n}$ 都具有如下形式：对某个递增有限序列 $(k_j)_{j\le m}\in D^{m+1}$，$\sum_{j=0}^m k_j$，使得$x\restriction n\subseteq f(k_0)\subseteq f(k_1)\subseteq\cdots\subseteq f(k_m)$。因此，$y_i=p_{f(k_m)^\frown 0^\infty}\in C_{f(k_m)}\subseteq C_{x\restriction n}$。这就是所要得到的矛盾。□

结论由综合断言 1、断言 3 以及包含关系$\Lambda_y(\mathcal{H})\subseteq\Lambda_y(\mathrm{FS})$（根据命题 2.4）得出，正如定理 4.2 的证明中所示。□

References

1. M. Balcerzak、S. G´ Topological complexity of ideal limit points https: lab 和 P. Leonetti, , //arxiv.org/abs/2407.12160 2024 1 23 （）, –。2. M. Balcerzak 和 P. Leonetti, *On the relationship between ideal cluster points and ideal limit points* **252** 2019 178 190 3883171, Topology Appl.（）, –。MR。V. Bergelson 和 R. 3 Zelada, *Strongly mixing systems are almost strongly mixing of all orders*, Ergodic Theory Dynam. Systems **44** 2024 6, 1489 1530 4741322 （）, 第–期。MR。M. Bojanczyk、4 E´. Kopczynski 和 S. Torunczyk, *Ramsey's theorem for colors from a metric space* **85** 2012 1, 182 184 2948679, Semigroup Forum（）, 第–期。MR 5 。R. Filipow、M. Kowalczuk 和 A. Kwela, *Critical ideals for countable compact spaces* https: , （）, –。6. R. //arxiv.org/abs/2503.12571 2025 1 19 Filip´ow、K. Kowitz 和 A. Kwela, *A unified approach to Hindman, Ramsey and van derWaerden spaces*, 即将在 J. Symb. Log. (http://doi.org/10.1017/jsl.2024.8) (2024), 1–53 上发表。7. R. Filip´ow、K. Kowitz、A. Kwela 和 J. Tryba, *New Hindman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **150** 2022 2, 891 902 4356195 （）, 第–期。MR。R. Filipow、A. Kwela 和 P. Leonetti, 8 *Borel complexity of sets of ideal limit points* https: , （）, –。9. J. Flaˇ //arxiv.org/abs/2411.10866 2025 1 44 skov´a, *Ideals and sequentially compact spaces*, Topology Proc. **33** (2009), 107–121。MR 2471564 10. J.A. Fridy, *Statistical limit points*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 4, 1187–1192。MR 1181163 11. H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981, 603625 12 M. B. Porter Lectures。MR。H. Furstenberg 和 B. Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. Analyse Math. **34** 531271 13 1978 61 85（）, –。MR。Xi He、H. Zhang 和 S. Zhang, *The Borel complexity of ideal limit points*, Topology Appl.**312** (2022), Paper No. 108061, 12。MR 4393937

14., *More on ideal limit points*, Topology Appl. **322** (2022), Paper No. 108324, 9。MR 4505549
15. N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of N*, J. Combinatorial Theory Ser. A **17** 1974 1 11 349574 （）， –。MR。M. Hruˇsak 和 D. Meza-Alcantara, *Katětov order, Fubini property and Hausdorff ultrafilters*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **44** 3019575 17 2012 503 511 （）， –。MR。A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995 1321597 。MR。P. Kostyrko、T. ˇSalat 和 W. Wilczyński, *$\mathcal{I}$-convergence*, Real Anal. Exchange**26**(2000/01), no. 2, 669–685。MR 1844385 19. P. Leonetti, *Invariance of ideal limit points*, Topology Appl. **252** (2019), 169–177。MR 3883170 20. P. Leonetti 和 F. Maccheroni, *Characterizations of ideal cluster points*, Analysis (Berlin) **39** (2019 1, 19 26 3920799), 第–期。MR。D. Meza-Alcantara, *Ideals and filters on countable sets*, 博士论文, Universidad Nacional Aut´onoma de M´exico, 2009, (https://ru.dgb.unam.mx/handle/DGB_UNAM/TES01000645364)。

(Rafa - ´ Institute of Mathematics Faculty of Mathematics Physics and Informatics University of Gdańsk ul. Wita Stwosza 57 80-308 Gdańsk Poland lFilipow) , , , , , *Email address*: Rafal.Filipow@ug.edu.pl*URL*: http://mat.ug.edu.pl/~rfilipow

（AdamKwela）

Institute of Mathematics Faculty of Mathematics Physics and Infor- , , , , , matics University of Gdańsk ul. Wita Stwosza 57 80-308 Gdańsk Poland ,*Email address*: Adam.Kwela@ug.edu.pl*URL*: https://mat.ug.edu.pl/~akwela

（Paolo Leonetti） Department of Economics, Universitá degli Studi dell'Insubria, viaMonte Generoso 71, Varese 21100, Italy*Email address*: leonetti.paolo@gmail.com *URL*: https://sites.google.com/site/leonettipaolo