无限对称群中的 Bruhat 区间是 Cohen-Macaulay 的

NATHANIEL GALLUP 和 LEO GRAY

Abstract. 我们证明，无限对称群上的布鲁哈特序中某些区间的序复形所对应的（非诺特）Stanley-Reisner 环，在理想意义下是 Cohen-Macaulay 的，并且是弱布尔巴基无混合的。这里的无限对称群 S_∞ 由 $\mathbb{N}$ 的所有自双射构成。这给出了 Edelman、Bj¨orner 以及 Kind 和 Kleinschmidt 关于有限对称群 S_n的结果的无限维版本。

arXiv:2601.12195v1 [math.CO] 17 Jan 2026

1. Introduction

在交换代数中，人们一直对发展 Cohen-Macaulay 条件的组合刻画颇感兴趣，尤其是对单纯复形 Δ 的 Stanley-Reisner 环 $k[\Delta]$。例如，在 1979 年的论文 [KK79], 中，Kind 和 Kleinschmidt 证明，若有限纯单纯复形 Δ 可剥壳，则 $k[\Delta]$ 是 Cohen-Macaulay 的；而 Hochster 在 1972 年的研究 [Hoc72], 中指出，若这样的 Δ 是可构造的，则 $k[\Delta]$ 同样是 Cohen-Macaulay 的。有限纯单纯复形中一个尤为优美的类别是分级偏序集的序复形，因此人们或许会期待，壳化判据在这一背景下也能以简洁的形式出现。事实上，Bj¨o80], Bj¨orner 在 1980 年的论文[中定义了字典序可壳化偏序集的概念，并证明其序复形是可剥壳的。1981 年，Edelman 利用这一结果，在 [Ede81] 中证明， S_n 上的布鲁哈特序（任意区间上）是字典序可壳化的，从而产生了更多 Cohen-Macaulay 环的组合实例。

近来，Cohen-Macaulay 概念已扩展到非诺特环（参见 [Gla94],[Gla95], [HM07], 和 [AT09], ，后者提供了很好的综述）。在诺特情形下，Cohen-Macaulay 环有许多等价定义，但事实证明，这些定义在非诺特环中未必仍然等价。这便产生了许多不同的非诺特情形下的 Cohen-Macaulay 性概念，其中最强的当属理想意义下的 *Cohen-Macaulay*和弱布尔巴基无混合 （关于各种定义之间联系的说明，参见 [AT09] ）。Asgharzadeh、Dorreh 和 Tousi 提出了一种构造非诺特 Cohen-Macaulay 环的方法，他们在 [ADT14, Corollary 3.8] 中证明，诺特 Cohen-Macaulay 环的任意平坦直极限，既是理想意义下的 Cohen-Macaulay 环，也是弱布尔巴基无混合的。我们将此类环称为平坦直接极限意义下的 *Cohen-Macaulay* 环。

在 [CGM26], Chlopecki、Meintjes 和第一作者证明了：如果 k 是代数闭域，Δ 是一个（可能为无限维的）单纯复形，并且 $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots \subseteq \Delta$ 是一列递增的有限满 Cohen-Macaulay 子复形，其并集为 Δ，那么 $k[\Delta]$ 是 Stanley-Reisner 环 $k[\Delta_n]$的平坦直极限，因此在平坦直极限的意义下是 Cohen-Macaulay。

在本文中，我们在无限偏序集的背景下，仿照 Bj¨orner、Kind 和 Kleinschmidt 提出的“字典序可剥分蕴含可剥壳，进而蕴含 Cohen-Macaulay”路径。我们为无限偏序集引入字典序嵌套可剥壳性 的概念，并为无限单纯复形引入嵌套可剥壳性 的概念；我们证明，与有限情形一样，前者蕴含后者，而后者通过 [CGM26，定理 A] 蕴含在平坦直极限意义下的 Cohen-Macaulay 性。以下定理对此作了总结。（在本文余下部分中，我们固定 k 为一个代数闭域。）

定理 A. 如果 Δ 是一个嵌套壳化单纯复形，那么它的 Stanley-Reisner 环 $k[\Delta]$ 在平坦有向极限的意义下是 Cohen-Macaulay。

Date: 2026年1月21日。

定理 B. 如果 P 是一个字典序嵌套壳可剥偏序集，那么序复形 $\Delta(P)$ 是嵌套壳化的。

随后，我们运用这些结果，为无限对称群 S_∞（由所有双射 $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$构成）给出埃德尔曼定理（[Ede81]）的一个类似版本。更具体地说，在 [Gal21] 中，第一作者为 S_∞引入了 Bruhat 序的一个版本。在此，我们证明以下定理：某些区间 $[\sigma,\omega]^f\subseteq S_\infty$ 由 Bruhat 序中介于 σ 与 ω 之间、且在 σ 之上具有有限长度的置换组成，它们是字典序嵌套壳可剥的，由此产生了新的环实例；这些环就理想而言是 Cohen-Macaulay，且是弱布尔巴基无混合的。

定理 C。 若 $\sigma,\ \omega\in S_\infty$ 且 $\sigma<_{\text{Bruhat}}\omega$，则偏序集 $([\sigma,\omega]^f,\ <_{\text{Bruhat}})$ 是字典序嵌套壳可剥的，因此其序复形 $\Delta([\sigma,\omega]^f)$ 的 Stanley-Reisner 环 $k[\Delta([\sigma,\omega]^f)]$ 在平坦直极限的意义下是 Cohen-Macaulay。

本文的结构如下。第 2 节定义嵌套壳化单纯复形，并证明它们在平坦直极限的意义下是 Cohen-Macaulay 的。第 3 节将分次的概念推广到无限偏序集，利用这种“$\mathbb{N}$-分次”定义字典序嵌套壳可剥偏序集，并证明后一个定义蕴含嵌套壳化。本文余下部分将这些结果应用于 S_∞ 中的区间 $[\sigma,\omega]^f$。尽管 S_∞ 中关于 S_n 上 Bruhat 序的组合性质有相当多仍然成立，但证明方法往往不同，因为在无限情形下，我们尚无法使用 Coxeter 群的许多工具。因此，我们在此过程中从头发展了其中许多组合理论。具体而言，第 4 节回顾无限 Bruhat 序的定义，并给出它的两种等价刻画。事实证明，与 S_n 中一样，S_∞ 中的所有覆盖关系都由复合对换给出；第 5 节则准确描述了在无限 Bruhat 序中，$\sigma\circ(p,\ q)$ 何时覆盖 σ。我们还类似地准确描述了在满足 $\sigma<_{\text{Bruhat}}\omega$ 的相对情形下，$\sigma<_{\text{Bruhat}}\sigma\circ(p,\ q)$ 何时 $\leq_{\text{Bruhat}}\omega$。第 6 节利用这一覆盖关系的相对描述，证明对任意 $\sigma<_{\text{Bruhat}}\omega$，都存在一条离散饱和链（其覆盖关系由特别良好的形式的对换给出），从 σ 出发，并最终停在 ω 或在自然拓扑下收敛到 ω。由此，我们得到 S_∞ 中覆盖关系的完整刻画。第 7 节证明 $[\sigma,\omega]^f$ 是 $\mathbb{N}$-分次的，其秩函数是考克斯特长度的一个相对版本。最后，第 8 节证明区间 $[\sigma,\omega]^f$ 是字典序嵌套壳可剥的，从而得到定理 C 的证明。

2. Nested-Shellable Simplicial Complexes

在本节中，我们简要回顾（不一定有限的）单纯复形的概念，定义嵌套可剥壳单纯复形，并说明按照平坦直极限的意义，它们是 Cohen-Macaulay 的。

定义在可数集合 V（称为顶点集）上的单纯复形，是由 Δ 个**有限**子集组成的集合 V（称为面），并满足如下性质：若 $A\in\Delta$ 且 $B\subseteq A$，则 $B\in\Delta$。若 Δ 是有限集，则称其为有限维单纯复形。若面 F 属于 Δ，且它在所有面中按包含关系极大，则称其为极大面。若有限维单纯复形 Δ 的所有极大面大小相同，则称其为纯。注意，若 V 是有限的，则每个面都包含在某个极大面中；但若 Δ 是无限的，这一结论便不再成立。事实上，Δ 可能没有极大面。

给定一个有限子集 $A\subseteq V$，定义 $\mathbf{x}^A=\prod_{v\in A}x_v\in k[x_v\mid v\in V]$。注意，这是一个平方自由单项式。若 Δ 是一个顶点集为 V 的单纯复形，定义 $I_{\Delta,V}$ 为由平方自由单项式集合 $\{\mathbf{x}^A\mid A\subseteq V, A$（其中 $A\notin\Delta\}$ 有限）生成的理想。当 V 有限时，Reisner 证明映射 $\Delta\mapsto I_{\Delta,V}$ 是从以 V 为顶点集的单纯复形集合到 $k[x_v\mid v\in V]$ 中平方自由单项式理想集合的双射（见 [Rei76]）。事实上，由于我们要求无限单纯复形的面都是有限的，即使 V 无限，这个映射仍然是双射（见 [CGM26，命题 2] 以及 [CGM26，注记 1]）。关于（不一定有限的）单纯复形和正分次 Cohen-Macaulay k-代数的更多背景，请参见 [CGM26]。

回顾（见 [BH98, 5.1.11]），有限纯单纯复形 Δ 称为可剥壳，如果其极大面 Δ可以按线性顺序排列为 $F_1,\dots,F_m$，使得对所有 $2\leq i\leq m$，$\langle F_i\rangle\cap\langle F_1,\dots,F_{i-1}\rangle$ 均由 $\langle F_i\rangle$ 的非空极大真面集生成。Kind 和 Kleinschmidt 证明了

有限纯壳化单纯复形 Δ 的 Stanley-Reisner 环 $k[\Delta]$是 Cohen-Macaulay（[KK79]）。在下述定义中，我们给出无限单纯复形的一种壳化性类比，并将证明它蕴含平坦直极限意义下的 Cohen-Macaulay 性（定理 A）。

定义 1. 如果存在一个递增序列$\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \dots$，由 Δ 的有限全子复形组成，并且满足 (NS1) 每个 Δ_i 都是可剥壳的，且满足 (NS2)$\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$，则称单纯复形 Δ 为嵌套壳化的。

定理 *A* 的证明。 根据 Kind 和 Kleinschmidt 的结果（[KK79]），每个面环 $k[\Delta_n]$ 都是 Cohen-Macaulay 的，因此由 [CGM26，定理 A]即可得到所需结果。■

3. Lexicographically Nested-Shellable Posets

本节首先回顾偏序集和有限偏序集的分次所需的一些背景知识。然后，我们将分次的概念推广到无限偏序集，定义字典序嵌套壳化条件，并证明它蕴含上一节中的嵌套壳化条件。

给定元素 $p,q \in P$，从 p 到 q 的区间定义为集合 $[p,q]_P = \{p' \in P \mid p \le p' \le q\}$。若上下文清楚，我们将省略下标“$P$”。对于 $p,q \in P$，回顾一下：如果 $p<q$，且不存在满足 $p<p'<q$ 的 $p' \in P$，那么称 q 覆盖 p；也就是说，若 $[p,q]$ 恰好包含两个元素。我们用 $C(P) = \{(p,q) \mid p \lessdot q\}$ 表示 P 的覆盖关系集合。偏序集 P 中的链是一个全序子集$C \subseteq P$；如果一条链不真包含于另一条链中，则称它为极大链。此外，若链 C 位于 P 中，且满足以下性质：每当 $p,q \in C$ 且 $p' \in P$ 满足 $p<p'<q$ 时，也有 $p' \in C$，则称该链为饱和链。 P 中有限或无限的链，若为饱和链且具有形式 $p_0<p_1<\dots$，即有限或与 $\mathbb{N}$ 序同构，则称为离散饱和链。注意，这种形式的链是离散饱和链，当且仅当对所有 n 都有 $p_n \lessdot p_{n+1}$。此时我们写作 $C\colon p_0 \lessdot p_1 \lessdot \dots$，表示 C 是由元素 p_i 组成的离散饱和链。

注 1。 在有限偏序集中，极大链总是饱和链，但反之显然不成立。然而，在有限偏序集中，饱和链是极大链，当且仅当它包含一个极小元和一个极大元。对于无限偏序集，情况更加复杂。例如， $\mathbb{Q}$ 作为自身的子集并取通常序，既是极大链也是饱和链，但它既不包含极小元，也不包含极大元；由于其序型不正确，它也不是离散饱和的。在本文中，我们只关注离散饱和链，并在引理 8 中讨论关于它们的一些部分结果。

沿用 [Bj¨o80], , 偏序集 P 的边标记（取值于偏序集 Q ）是一个函数 $\lambda\colon C(P) \to Q$。有限或无限离散饱和链 C 在 P中关于 λ 的 Jordan-Hölder 序列，是一个有序列表 $J_\lambda(C) = (\lambda(p_0, p_1)\ \lambda(p_1, p_2)\ \text{.....})$，其元素属于 Q。离散饱和链 $p_0 \lessdot p_1 \lessdot \dots$ 称为 λ-递增的，如果 $\lambda(p_0, p_1) < \lambda(p_1, p_2) < \dots$ 是 Q中的递增链。

若一个分级偏序集 是有限、有界的（具有唯一的最小元和最大元），且为纯的（每条极大链的大小都相同，因此该偏序集存在秩函数），则称其为分级偏序集。分级偏序集具有 Jordan-Dedekind 性质：对于任意一对元素 $p \le p'$，所有从 p 出发并以 p' 结束的饱和链长度都相同。

若 λ 是分级偏序集 P 的边标记，则当其满足以下条件时，称其为 L-标记： (L1) 对所有 $p<q$，都存在唯一一条 λ-递增极大链 C，且该链属于 $[p,q]$; (L2) C 的 Jordan-H¨older 序列在字典序下先于 $[p,q]$ 中任意其他极大链的相应序列。（注意，要按字典序比较两个 Jordan-H¨older 序列，它们必须长度相同；分级条件保证了这一点。）若分级偏序集具有一个 L-标记，则称其为字典序可剥壳 的。

偏序集 P 的序复形是单纯复形 $\Delta(P)$，其顶点集为 P，面是 P中的有限链。注意，在 Stanley-Reisner 双射下，与$\Delta(P)$对应的平方自由单项式理想 $I_{\Delta(P),P} \subseteq k[x_p \mid p \in P]$ 由以下形式的单项式生成： $x_p x_q$，其中 p 和q 在 P中不相关。

Bj¨orner 证明了字典序可壳化偏序集的序复形是可剥壳的（[Bj¨o80]），我们将证明关于无限偏序集的类似结论，但首先需要这些定义在无限情形下的对应概念

我们首先为无限偏序集定义一种分次概念，以确保所有有限区间都满足 Jordan-Dedekind 性质。

De定义 2. 若偏序集 P 满足以下条件，则称其为 $\mathbb{N}$-分秩的： d.

(G1) P 有唯一的极小元（记为 $\hat{0}$）。（G2）对于每个 $p \in P$，都存在一条从 $\hat{0}$ 开始并以 p结束的有限饱和链。（G3）对于每个 $p \in P$，$[\hat{0}, p]$ 中的每条极大链长度都相同（根据（G2），该长度必为有限值）。

我们将该长度记为 $\rho(p)$，并称 $\rho: P \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为 P的秩函数。

备注 2. 在定义 2 中，我们没有要求 P 具有极大元，因为我们所关注的主要偏序集 $[\sigma, \omega]^f$ 没有极大元，正如我们在推论 6 中所证明的。事实上，整个偏序集 S_∞ 也没有极大元（推论1）。

注 3. 如果 P 是有限的，并且按照定义 2 的意义是 $\mathbb{N}$-分级的，那么 P 未必是 Bj¨orner 意义下传统的分级偏序集，因为它可能没有极大元；即使添加这样的元素，它仍可能不是分级偏序集，因为 P 的极大元可能具有不同的秩。不过，它总是有限个分级偏序集的并集，且这些偏序集的长度函数在与 ρ共同定义的部分上一致。

我们实际上希望无限偏序集中的所有区间都是分级的，但这一性质要求直接规定上述有限性。

定义 3. 如果对于任意 p，$p' \in P$ 满足 $p \leq p'$，区间$[p, p'] = \{q \in P \mid p \leq q \leq p'\}$ 都是有限的，那么我们称偏序集 P 是区间有限的。

如下例所示， $\mathbb{N}$-分级偏序集未必是区间有限的。

例 1. 令 $P = \{(0, 0), (0, 2), (n, 1) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ 为一个采用乘积序的偏序集（即，当且仅当 $p < p'$ 且 $q < q'$时，$(p, q) < (p', q')$）。那么 P显然是一个 $\mathbb{N}$-分级偏序集，其秩函数为$\rho(p, q) = q$，但它不是区间有限的，因为 $P = [(0, 0), (0, 2)]$ 是无限的。

然而，确实有这样的性质：若一个 $\mathbb{N}$-分级偏序集是区间有限的，则任意区间都是分级的。

引理 1. 若 P 是一个区间有限的 $\mathbb{N}$-分级偏序集，则对任意满足 $p < q$ 的 p，$q \in P$，都有 $[p, q]$ 是分级偏序集。

证明。 根据区间有限这一假设， $[p, q]$ 是一个有限偏序集，显然有唯一的极小元p 和唯一的极大元 q。由 (G2)，存在一条从 $\hat{0}$ 出发并以 p结束的有限饱和链 C。将 $[p, q]$ 中任意两条极大链 D 和 D' 与 C 连接起来，可得 $[\hat{0}, q]$ 中的两条极大链；根据 (G3)，它们的长度必相同。因此 D 和 D' 的长度也必相同，所以$[p, q]$ 是纯的。■

现在，我们可以给出无限偏序集的字典序可剥壳条件的对应概念，并证明定理 B：字典序嵌套壳可剥蕴含嵌套壳化。这是 Bj¨orner 前述定理在无限情形下的对应版本。

定义 4. 若偏序集 P 是区间有限、 $\mathbb{N}$-分级的，且满足以下条件，则称其为字典序嵌套壳可剥。

(LNS1) 存在一个边标记 λ，使得对每个 $p \leq q$，λ 都是偏序集$[p, q]$ 的 L-标记（根据引理 1，该偏序集必然是分级的）。

(LNS2) 存在一条链$\hat{0} < p_1 < \ldots$，使得对所有 $p \in P$，都存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $p \leq p_n$。

定理 *B* 的证明。 首先， P是区间有限的，因此对于所有 n，$[\hat{0}, p_n]$ 都是有限的。接下来注意，若 p，$q \in P$，则 $\Delta([p, q])$ 是 $\Delta(P)$ 的全子复形。事实上，若 $q_1 < \ldots < q_n$ 是 $[p, q]$ 中的一条链，那么它显然也是 P 中的一条链；若 $q_1 < \ldots < q_n$是 P 中的一条链，且对每个 i 都有 $q_i \in [p, q]$，那么它同样也是 $[p, q]$中的一条链。

因此，我们有一列递增的有限全子复形 $\Delta([\hat{0}, p_1]) \subseteq \Delta([\hat{0}, p_2]) \subseteq \ldots$，它们都是 $\Delta(P)$ 的子复形。由引理 1，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，$[\hat{0}, p_i]$ 都是一个分级偏序集，并且根据 (LNS1) 可字典序剥壳，因此由 [Bj¨o80 定理 2.3]，$\Delta([\hat{0}, p_i])$ 是可剥壳的，所以 (NS1) 得到满足。最后，根据 (LNS2)，对于任意的 $p \in P$，都存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $p \leq p_n$，因此 $\{p\} \in \Delta([\hat{0}, p_n])$。于是，给定 $\Delta(P)$ 的一个面 F，存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 F 的所有顶点都是 $\Delta([\hat{0}, p_n])$ 中的顶点。由于 $\Delta([\hat{0}, p_n])$ 是 $\Delta(P)$ 的全子复形，因此可得 $F \in \Delta([\hat{0}, p_n])$，所以确有 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta([\hat{0}, p_n]) = \Delta(P)$，(NS2) 也得到满足。■

本文余下部分将运用这些定义和结果，研究带有 Bruhat 序的偏序集 S_∞。

4. 无限对称群上的布鲁哈特序

本节定义无限对称群上的布鲁哈特序，并给出两种等价的表述，以供后续使用。我们用 S_∞ 表示所有双射 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 组成的群（群运算为复合，单位元记为 e），用 S_∞^f 表示其中固定 $\mathbb{N}$ 中除有限多个元素以外所有元素的双射构成的子群。通过固定 $n+1$，S_n 可嵌入 S_{n+1}，由此得到一个并集为 S_∞^f 的嵌套子群链 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \ldots \subseteq S_\infty$。注意，$S_\infty$ 包含许多不属于 S_∞^f 的元素。事实上，后者是可数的，而前者不是。给定 $\omega \in S_\infty$，ω 的单行记号 是有序列表 $[\omega(1)\ \omega(2)\ \ldots]$。

例 2. 将所有奇数 n 映射到 $n+2$、将所有带有 $n \neq 2$ 的偶数 n 映射到 $n-2$，并将 2 映射到 1 的置换 $\rho \in S_\infty$ 的单行记号为 $[3, 1, 5, 2, 7, 4, 9, 6, 11, \ldots]$。注意，$\rho$ 不是 S_∞^f的元素。

S_∞ 中的一个对换 是指交换两个自然数而固定其他所有数的置换。我们通常使用循环记号 (p, q)来表示将 $p \mapsto q$ 与 $q \mapsto p$ 互换并固定其他所有数的对换。在本文中，每当我们用循环记号 (p, q)写出一个对换时，我们总是假设 $p < q$。

在 [Gal21 的第 9], 节中，第二作者描述了 S_∞ 上的一种拓扑：在该拓扑中，置换序列 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ 收敛到置换 σ，当且仅当对所有 $m \in \mathbb{N}$，存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得如果 $n \geq N$，则 $\sigma_n(m) = \sigma(m)$。换言之，该序列收敛，当且仅当对所有 $m \in \mathbb{N}$，序列 $\sigma_1(m)\ \sigma_2(m) \ldots$ 最终相等于 $\sigma(m)$。

例3. 考虑置换 θ，它将所有奇数 n 映射到 $n+1$，并将所有偶数 n 映射到 $n-1$。θ的单行记号为 $[2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \ldots]$，再次注意到 $\theta \notin S_\infty^f$。注意，排列序列 $(1, 2), (1, 2) \circ (3, 4), (1, 2) \circ (3,4) \circ (5, 6) \ldots$ 在 S_∞^f 中收敛到 θ，如下方的单行记号所示。

$$
\begin{aligned}
e &= [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots] \\
(1, 2) &= [2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots] \\
(1, 2) \circ (3, 4) &= [2, 1, 4, 3, 5, 6, 7, 8 \ldots] \\
(1, 2) \circ (3, 4) \circ (5, 6) &= [2, 1, 4, 3, 6, 5, 7, 8 \ldots] \\
&\vdots \\
&\downarrow \\
\theta &= [2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7 \ldots]
\end{aligned}
$$

布鲁哈特序是 S_n 上的一个偏序，它以组合方式描述了旗簇中舒伯特簇之间的包含关系。Ehresmann（[Ehr34]）最先在这一几何背景下对其进行研究，随后 Verma（[Ver66]）在代数组合学背景下对其进行了研究。布鲁哈特序有若干种等价刻画（详见 [BB05]，其中也介绍了相关组合学的发展）。

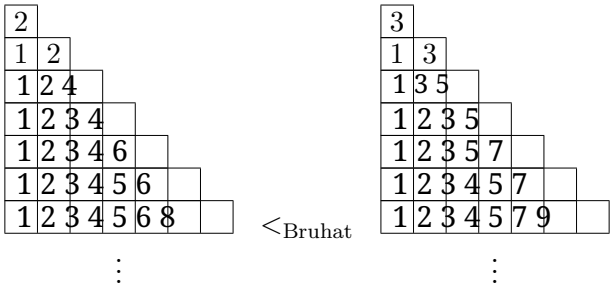
在 [Gal21], 中，第二位作者将 Bruhat 序推广到了 S_∞ 上的一个序，我们称之为无限 *Bruhat* 序，现介绍如下。假设 X 和 Y 是 $\mathbb{N}$ 的子集，且二者的基数均为 n，并且

X 中的元素记为 x_i，其中 $1 \le i \le n$ 满足 $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$， Y 也类似。于是，当且仅当对所有 i 都有 $x_i \le y_i$ 时，我们称 $X \le Y$。这就在 $\mathbb{N}$ 的所有基数为 n 的子集构成的集合上定义了一个偏序。利用这一点，我们在 S_∞ 上定义无限 ***Bruhat*** 序，记为 $\le_{\text{Bruhat}}$，规定：当且仅当对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\{\sigma(1)\ldots,\sigma(n)\} \le \{\omega(1)\ldots,\omega(n)\}$。

注 4。 如果将无限 Bruhat 序限制在 S_n （我们将其视为 S_∞ 中固定所有 $m > n$ 的子群），就得到经典 Bruhat 序。

无限 Bruhat 序可以用杨表等价地表述。对于一个置换 $\sigma \in S_\infty$，我们关联一个形状为 (1，2，3，...。) 的无限杨表，其中第 n 行按递增顺序写有条目 $\sigma(1)$ $\sigma(2)$.....， $\sigma(n)$。于是，对于另一个置换 ω，有：$\sigma \le_{\text{Bruhat}} \omega$当且仅当，与 σ 相关联的杨表中每个方格的条目都小于或等于与 ω 相关联的杨表中对应方格的条目。

例 4。 考虑例2和例3中定义的置换 $\theta = [2,1,4,3,6,5,8,7,\ldots]$ 和 $\rho = [3,1,5,2,7,4,9,6,11,\ldots]$。利用杨表判据，不难证明 $\theta <_{\text{Bruhat}} \rho$，如下图所示。



无限 Bruhat 序还可以用置换矩阵来作第三种描述。对于任意置换 $\sigma \in S_\infty$，我们可以指定一个置换矩阵 $[\sigma_{m,n}]_{m,\ n\in\mathbb{N}}$ 其中 $\sigma_{m,\ n}$ 当且仅当 $m = \sigma(n)$ 时为 1，否则为 0。对于任意一对子集 X， $Y \subseteq \mathbb{N}$ 我们用 $r_{X,\ Y}(\sigma)$ 表示子矩阵 $[\sigma_{m,n}]_{m\in X,\ n\in Y}$ 中的 1 的个数（也就是它的秩）。注意，等价地，我们也可以写成：

$$r_{X,Y}(\sigma) = \#\{p \in Y \mid \sigma(p) \in X\}.$$

我们采用如下记号简写：对于任意 a， $b \in \mathbb{N}$ 定义 $r_{a,\ b}(\sigma) = r_{[1,a],\ [1,b]}(\sigma)$，以及$r_{<a,\ b}(\sigma) = r_{[1,a),\ [1,b]}(\sigma)$（以及这些记号的其他合理组合）。因此，$r_{a,\ b}(\sigma)$ 表示 σ 的置换矩阵左上子矩阵中的 1 的个数，该子矩阵的右下角位于第 a行、第 b列。我们可以用 $r_{a,\ b}(\sigma)$ 来刻画 S_∞上的 Bruhat 序。

命题 1. 给定 $\sigma, \omega \in S_\infty$，以下条件等价。

(1) $\sigma \le_{\text{Bruhat}} \omega$(2) 对所有 $a, b \in \mathbb{N}$，$b(\sigma)$
$\ge r_{a,b}(\omega)$(3) 对所有 $a, b \in \mathbb{N}$，$r_{\ge a,b}(\sigma)$
$\le r_{\ge a,b}(\omega)$

证明. (1)与(2)的等价性已在 [Gal21 的命题 27], 中证明，而(2)与(3)等价，因为 $r_{\ge a+1,b}(\sigma) = b - r_{a,b}(\sigma)$。■

注 5. 命题 1 以及布鲁哈特序实际上是 S_∞ 上的偏序这一事实，意味着若对所有 $a, b \in \mathbb{N}$，$r_{a,b}(\sigma) = r_{a,b}(\omega)$，则 $\sigma = \omega$。

5. Cover Relations in the Bruhat Order

本节先给出一个判据，说明何时 $\sigma \circ (p,\ q)$ 覆盖 σ in S_∞，前面先介绍一些技术性定义和引理。随后，我们在 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$ 时的相对情形下，给出一个类似的判据，说明何时 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p,\ q) \le_{\text{Bruhat}} \omega$。当然，对于 S_n，这些判据早已广为人知（例如参见 [BB05, 引理 2.1.4]），但我们的证明方法不同于通常用于 S_n 的方法，因为目前我们还没有 S_∞ 中的约化词、逆序数和长度这些工具，因此为求严谨，我们将进行精确的推导。

首先注意，若将 $\omega \in S_\infty$ 写成单行记号 $\omega = [a_1, a_2, a_3, \ldots a_p, \ldots, a_q, \ldots]$，那么$\omega \circ (p,\ q) = [a_1, a_2, a_3, \ldots a_q, \ldots, a_p, \ldots]$；也就是说，在右侧与对换 $(p,\ q)$ 复合，会交换单行记号中的元素 a_p 和 a_q，同时保持其他所有元素不变。现在我们证明一个引理，该引理描述了对于某些 p 和 q，σ 与 $\sigma \circ (p,\ q)$ 的置换矩阵之间的差异。

引理 2。设 $\sigma \in S_\infty$ 和 $p,\ q \in \mathbb{N}$ 满足 $p < q$ 和 $\sigma(p) < \sigma(q)$。则有以下公式。

$$r_{a,b}(\sigma) = \begin{cases} r_{a,b}(\sigma \circ (p,q)) & \text{if} \quad b < p, b \geq q, a < \sigma(p), \text{ or } a \geq \sigma(q) \\ r_{a,b}(\sigma \circ (p,q)) + 1 & \text{if} \quad \sigma(p) \leq a < \sigma(q) \text{ and } p \leq b < q \end{cases}$$

证明。由于 $\sigma \circ (p,\ q)$ 的矩阵是通过交换 σ 的列 p 和 q 得到的，注意到，如果 $b < p$、$b \geq q$、$a < \sigma(p)$ 或 $a \geq \sigma(q)$，那么子矩阵 $[(\sigma \circ (p,\ q))_{m,\ n}]_{1 \leq m \leq a,\ 1 \leq n \leq b}$ 要么与子矩阵 $[\sigma_{m,n}]_{1 \leq m \leq a,\ 1 \leq n \leq b}$ 相同，要么是通过重新排列其中的 1 得到的，因此 $r_{a,\ b}(\sigma \circ (p,\ q)) = r_{a,\ b}(\sigma)$。

另一方面，如果 $\sigma(p) \leq a < \sigma(q)$ 且 $p \leq b < q$，那么子矩阵 $[\sigma_{m,n}]_{1 \leq m \leq a,\ 1 \leq n \leq b}$ 是由 $[(\sigma \circ (p,\ q))_{m,\ n}]_{1 \leq m \leq a,\ 1 \leq n \leq b}$ 在 $(\sigma(p)\ p)$ 位置添加一个 1 得到的，因此有 $r_{a,\ b}(\sigma) = r_{a,\ b}(\sigma \circ (p,\ q)) + 1$。■

接下来，我们根据以下定义进一步比较 σ 和 $\sigma \circ (p,\ q)$。

定义 5. 对于任意满足 $\sigma \neq \omega$ 的 $\sigma,\ \omega \in S_\infty$，我们用 $d(\sigma,\ \omega)$ 表示第一个满足 $\sigma(n) \neq \omega(n)$ 的 $n \in \mathbb{N}$。

我们记录以下引理，该引理已在 [Gal21 的引理 25] 中得到证明。

引理3. 若 $\sigma,\ \omega \in S_\infty$ 满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$，则 $\sigma(d(\sigma,\ \omega)) < \omega(d(\sigma,\ \omega))$。

因此，若 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$，那么由于对所有 $\ell < d(\sigma,\omega)$，都有 $\sigma(\ell) = \omega(\ell)$，必有 $d(\sigma,\omega) < f(\sigma,\omega)$，且 $\sigma(d(\sigma,\omega)) < \sigma(f(\sigma,\omega))$。其中我们定义 $f(\sigma,\omega) := \sigma^{-1}(\omega(d(\sigma,\omega)))$。因此，存在一个最小的 m，使得 $d(\sigma,\omega) < m \leq f(\sigma,\omega)$，且 $\sigma(d(\sigma,\omega)) < \sigma(m) \leq \sigma(f(\sigma,\omega))$。我们将这个最小的 m 记为 $m(\sigma,\omega)$。这里的最小性是指，若 $d(\sigma,\omega) < \ell < m(\sigma,\omega)$，则或者 $\sigma(\ell) < \sigma(d(\sigma,\omega))$，或者 $\sigma(\ell) > \sigma(f(\sigma,\omega))$。

例5。考虑例2和3中定义的置换 $\theta = [2,1,4,3,6,5,8,7,10,\ldots]$ 和 $\rho = [3,1,5,2,7,4,9,6,11,\ldots]$，并回忆 $\theta <_{\text{Bruhat}} \rho$。于是我们有 $d(\theta,\ \rho) = 1$ 以及 $m(\theta,\ \rho) = f(\theta,\ \rho) = 4$。

现在我们可以证明我们的 判据：右乘 $(p,\ q)$ 何时会使 Bruhat 序上升 r.

命题 2。对于任意 $\sigma \in S_\infty$ 以及任意 $p < q$，有 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p,\ q)$，当且仅当满足以下条件。

(C1) $\sigma(p) < \sigma(q)$

证明。首先假设 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p,q)$。那么 $p = d(\sigma, \sigma \circ (p,q))$，因此由引理3可得 $\sigma(p) < [\sigma \circ (p,q)](p) = \sigma(q)$，如所需。现在假设 $\sigma(p) < \sigma(q)$。根据引理 2，对于任意 $a,b \in \mathbb{N}$，我们有 $r_{a,b}(\sigma \circ (p,q)) \leq r_{a,b}(\sigma)$，由此根据命题 1可推出 $\sigma \leq_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p,q)$。由于 $\sigma \neq \sigma \circ (p,q)$，结论成立。■

由此命题可得如下推论。该推论在直观上显而易见，但为完整起见，我们仍将其列出。

推论1。偏序集 $(S_\infty, <_{\text{Bruhat}})$ 没有极大元。

证明。若 $\sigma \in S_\infty$，则对于任意给定的 $p \in \mathbb{N}$，必然存在某个 $q > p$ 使得 $\sigma(p) < \sigma(q)$。由命题 2可知，$\sigma <_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p,q)$，因此 σ 不可能是极大元。■

到目前为止，我们已经确定了 $\sigma \circ (p,q)$ 何时大于无限 Bruhat 序中的 σ，但现在我们将准确刻画这何时构成覆盖关系；在此之前，先给出证明所需的另一个技术引理。

引理 4. 给定 $a,b \in \mathbb{N}$ 和 $\sigma,\omega \in S_\infty$，若满足以下条件，则有 $\sigma_{a,b} = \omega_{a,b}$。

(1) $r_{<a,b}(\sigma) = r_{<a,b}(\omega)$

(2) $r_{a,\ <b}(\sigma) = r_{a,\ <b}(\omega)$ (

3) $r_{<a,\ <b}(\sigma) = r_{<a,\ <b}(\omega)$

(4) $r_{a,\ b}(\sigma) = r_{a,\ b}(\omega)$

证明。假设 $\sigma_{a,b} = 1$。那么对所有 $i < a$，都有 $\sigma_{i,b} = 0$，因此 $r_{<a,<b}(\sigma) = r_{<a,b}(\sigma)$。但根据假设，我们有 $r_{<a,<b}(\sigma) = r_{<a,<b}(\omega)$，并且还有 $r_{<a,b}(\omega) = r_{<a,b}(\sigma)$，这意味着同样有 $r_{<a,<b}(\omega) = r_{<a,b}(\omega)$，因此对所有 $i < a$，也都有 $\omega_{i,b} = 0$，这尤其意味着 $r_{<a,[b,b]}(\omega) = 0$。然而，$r_{a,<b}(\omega) + r_{a,[b,b]}(\omega) = r_{a,b}(\omega) = r_{a,b}(\sigma) = r_{a,<b}(\sigma) + r_{a,[b,b]}(\sigma)$。根据假设，$r_{a,<b}(\omega) = r_{a,<b}(\sigma)$，相减可得 $r_{a,[b,b]}(\omega) = r_{a,[b,b]}(\sigma) = 1$。由于 $r_{<a,[b,b]}(\omega) = 0$，且 $r_{a,[b,b]}(\omega) = r_{<a,[b,b]}(\omega) + \omega_{a,b}$，再次相减可得 $\omega_{a,b} = 1$。

由于关于 σ 和 τ的情形完全对称，因此 $\sigma_{a,b} = 1$ 当且仅当 $\omega_{a,b} = 1$；又由于 $\sigma_{a,b}$ 和$\omega_{a,b}$ 的可能取值只有 0 或 1，结论即得。■

命题 3。设 $\sigma \in S_\infty$ 和 $p, q \in \mathbb{N}$ 满足 $p < q$。那么，$\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, q)$ 当且仅当以下条件成立。

(C1) $\sigma(p) < \sigma(q)$ (C2) 对所有 $p < \ell < q$，要么有 $\sigma(\ell) < \sigma(p)$，要么有 $\sigma(\ell) > \sigma(q)$。

证明。首先，假设 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, q)$。根据命题 2，我们有 $\sigma(p) < \sigma(q)$，因此 (C1) 成立。为证明 (C2)，假设 $p < \ell < q$ 且 $\sigma(p) < \sigma(\ell) < \sigma(q)$。我们断言 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, \ell) <_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, q)$。第一个不等式由命题 2 得出。另一方面，我们有$\sigma \circ (p, q) = \sigma \circ (p, \ell) \circ (\ell, q) \circ (p, \ell)$。注意到 $[\sigma \circ (p, \ell)](\ell) = \sigma(p) < \sigma(q) = [\sigma \circ (p, \ell)](q)$，因此由命题 2 可得 $\sigma \circ (p, \ell) <_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, \ell) \circ (\ell, q)$。类似地，我们有 $[\sigma \circ (p, \ell) \circ (\ell, q)](p) = \sigma(\ell) < \sigma(q) = [\sigma \circ (p, \ell) \circ (\ell, q)](\ell)$，所以再次由命题 2 可得 $\sigma \circ (p, \ell) \circ (\ell, q) <_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, \ell) \circ (\ell, q) \circ (p, \ell) = \sigma \circ (p, q)$。因此，我们确有 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, \ell) <_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, q)$，这与 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, q)$ 矛盾。因此 (C2) 也成立。

现在假设 (p, q) 满足 (C1) 和 (C2)。由命题 2 可得 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, q)$。假设对某个 $\tau \in S_\infty$，有 $\sigma \leq_{\text{Bruhat}} \tau \leq_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, q)$。由命题 1，对所有 $a, b \in \mathbb{N}$，有$r_{a,b}(\sigma) \geq r_{a,b}(\tau) \geq r_{a,b}(\sigma \circ (p, q))$。然而，由引理 2，若 $(*)$ $b < p$, $b \geq q$, $a < \sigma(p)$，或 $a \geq \sigma(q)$，则$r_{a,b}(\sigma) = r_{a,b}(\sigma \circ (p, q))$，这意味着 $r_{a,b}(\sigma) = r_{a,b}(\tau) = r_{a,b}(\sigma \circ (p, q))$；并且若 $(**)$ $\sigma(p) \leq a < \sigma(q)$ 且$p \leq b < q$，则 $r_{a,b}(\sigma) = r_{a,b}(\sigma \circ (p, q)) + 1$，因此，要么 $r_{a,b}(\tau) = r_{a,b}(\sigma)$，要么 $r_{a,b}(\tau) = r_{a,b}(\sigma \circ (p, q))$。

首先，我们声称 $(***)$ $\sigma_{i,\ j} = \tau_{i,\ j}$ 位于以下（并非互不相交的）区域之一：(A) $i \in \mathbb{N}$ 和 $j < p$, (B)$i < \sigma(p)$ 和 $j \in \mathbb{N}$, (C) $\sigma(q) < i$ 和 $j \in \mathbb{N}$, (D) $i \in \mathbb{N}$ 和 $q < j$。在任何一种情况下，由于 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 在乘积序下是良基的，因此相关区域中存在一个极小的 $(i,\ j)$，使得 $\sigma_{i,\ j} \neq \tau_{i,\ j}$。然而，$(*)$ 表明，当 $a = i$ 和 $b = j$ 时，引理 4 的假设得到满足，因此实际上 $\sigma_{i,\ j} = \tau_{i,\ j}$，这与矛盾。

现在我们声称 $\sigma(p) \leq \tau(p) \leq \sigma(q)$。事实上，计算如下：

$$r_{<\sigma(p),<p}(\tau) \overset{(1)}{=} r_{<\sigma(p),<p}(\sigma) \overset{(2)}{=} r_{<\sigma(p),p}(\sigma) \overset{(3)}{=} r_{<\sigma(p),p}(\tau)$$

这里，(1) 和 (3) 由 $(*)$ 得出，而 (2) 成立是因为对所有 $1 \leq i < \sigma(p)$，都有 $\sigma_{i,\ p} = 0$。这意味着，对所有 $1 \leq i < \sigma(p)$，都有 $\tau_{i,\ p} = 0$，即 $\sigma(p) \leq \tau(p)$。类似地，我们计算如下：

$$r_{\sigma(q),<p}(\tau) + 1 \overset{(1)}{=} r_{\sigma(q),<p}(\sigma) + 1 \overset{(2)}{=} r_{\sigma(q),p}(\sigma) \overset{(3)}{=} r_{\sigma(q),p}(\tau)$$

这里，(1) 和 (3) 再次由 $(*)$ 得出，而 (2) 成立是因为根据 (C1)，$\sigma(p) < \sigma(q)$，并且 $\sigma_{i,p} = 0$ 除非$i = \sigma(p)$，在这种情况下 $\sigma_{i,p} = 1$。因此，对于某个 $1 \leq i \leq \sigma(q)$，有 $\tau_{i,p} = 1$，也就是说，$\tau(p) \leq \sigma(q)$。将这两个不等式结合起来即可得到所需的结论。

接下来我们断言，事实上 $\tau(p) \in \{\sigma(p)\ \sigma(q)\}$。反设 $\sigma(p) < \tau(p) < \sigma(q)$，并令 $j = \sigma^{-1}(\tau(p))$，即 $\sigma_{\tau(p),j} = 1$。那么不可能有 $j < p$，因为根据 $(***)$ 区域 (A)，对于所有 $i \in \mathbb{N}$ 和 $j < p$，都有 $\sigma_{i,j} = \tau_{i,j}$。我们也不可能有 $j = p$，因为根据假设，$\sigma(p) < \tau(p)$。此外，(C2) 连同 $\sigma(p) < \tau(p) < \sigma(q)$ 这一事实，意味着我们也不可能有 $p < j < q$。最后，我们不可能有 $j = q$，因为 $\sigma(q) > \tau(p)$。因此必有 $j > q$。但根据 $(***)$ 区域 (D)，我们有 $\tau_{\tau(p),j} = \sigma_{\tau(p),j} = 1$，即 $\tau(j) = \tau(p)$，这与 τ 是一个双射相矛盾，因此该断言成立。

最后，我们断言 $r_{[\sigma(p),\sigma(q)],[p,q)}(\tau) = 1$。我们先将区域 $[1,\sigma(q)] \times [1,q)$ 分成三个互不相交的区域：$[\sigma(p)\ \sigma(q)] \times [1,p)$、$[1,\sigma(p))\ \times [1,q)$ 和 $[\sigma(p)\ \sigma(q)] \times [p,q)$，由此得到如下结果。

$$\begin{aligned} r_{[\sigma(p),\sigma(q)],[1,p)}(\tau) + r_{[1,\sigma(p)),[1,q)}(\tau) + r_{[\sigma(p),\sigma(q)],[p,q)}(\tau) &= r_{[1,\sigma(q)],[1,q)}(\tau) \\ &\overset{(1)}{=} r_{[1,\sigma(q)],[1,q)}(\sigma) \\ &= r_{[\sigma(p),\sigma(q)],[1,p)}(\sigma) + r_{[1,\sigma(p)),[1,q)}(\sigma) + r_{[\sigma(p),\sigma(q)],[p,q)}(\sigma) \end{aligned}$$

这里，(1)由(∗)得出。由于对于所有 $j < p$，$\sigma(j) = \tau(j)$，我们有$r_{[\sigma(p),\sigma(q)],[1,p)}(\sigma) = r_{[\sigma(p),\sigma(q)],[1,p)}(\tau)$。同样，根据(∗)，我们有$r_{[1,\sigma(p)),[1,q)}(\sigma) = r_{[1,\sigma(p)),[1,q)}(\tau)$。因此，相减可得$r_{[\sigma(p),\sigma(q)],[p,q)}(\tau) = r_{[\sigma(p),\sigma(q)],[p,q)}(\sigma)$。由(C2)可知$r_{[\sigma(p),\sigma(q)],[p,q)}(\sigma) = 1$，故命题得证。

由于 $\tau(p) \in \{\sigma(p)\ \sigma(q)\}$，前一个断言意味着，对于所有 $p \le j < q$，$\tau_{i,j} = 0$，且 $\sigma(p) \le i \le \sigma(q)$，除非 $j = p$，并且 $i = \sigma(p)$或 $i = \sigma(q)$成立。

根据（∗∗∗），我们还可知 $\tau_{i、\ j} = \sigma_{i、\ j}$ 分别位于区域 (A)、(B)、(C) 和 (D) 中，因此，唯一可能使 $\tau_{i、\ j}$ 与 $\sigma_{i、\ j}$ 不同的（$i、\ j$）是（$i、\ j$）$\in \{$（σ（p）$\ \ p$）、（σ（q）$\ \ p$）、（$a、\ q$）$\mid \sigma$（p）$\le a \le \sigma$（q）$\}$，且 $\tau_{\sigma(p)、\ p}$ 与 $\tau_{\sigma(q)、\ p}$ 中恰有一个必须为 1。因此，对于所有 $j \ne p、\ q$，都有 τ（j）$= \sigma$（j），所以由于 τ 是一个双射，前一种情况下必有 τ（q）$= \sigma$（q），而后一种情况下必有 τ（q）$= \sigma$（p）。于是，前一种情况下为 $\tau = \sigma$，后一种情况下为 $\tau = \sigma \circ$（$p、\ q$），如所要求。■

在本节的其余部分中，我们给出命题 3 的一个相对于给定置换 ω 的版本。具体而言，给定 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$，我们刻画对于哪些对换（$p,\ q$），有 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma \circ$（$p,\ q$）$\le_{\text{Bruhat}} \omega$。我们将在下文为这样的对换命名。

定义 6。设 $\sigma, \omega \in S_\infty$，并假设 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$。我们称对换（$p, q$）是数对 σ, ω 的相对候选，如果

$$\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p,q) \le_{\text{Bruhat}} \omega.$$

命题 4。设 $\sigma, \omega \in S_\infty$，并假设 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$。那么（$p, q$）是 σ, ω的相对候选，当且仅当满足以下条件。

(C1) $\sigma(p) < \sigma(q)$ (C2) 对所有 $p < \ell < q$，要么 $\sigma(\ell) < \sigma(p)$，要么 $\sigma(\ell) > \sigma(q)$。(C3) 对所有 $a,\ b \in \mathbb{N}$，都有 $r_{a,b}(\sigma) \ge r_{a,b}(\omega)$；若 $p \le b < q$ 且 $\sigma(p) \le a < \sigma(q)$，则不等式为严格不等式。

证明。首先，假设（p, q）是 σ, ω的相对候选。根据定义，我们有 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, q)$，因此命题 3 蕴含 (C1) 和 (C2) 均成立。

为证明 (C3)，我们首先注意到，由于 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$，根据命题 1，对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$，都有 $r_{a,b}(\sigma) \ge r_{a,b}(\omega)$。然而，如果 $p \le b < q$ 且 $\sigma(p) \le a < \sigma(q)$，那么根据引理 2，有 $r_{a,b}(\sigma) = r_{a,b}(\sigma \circ (p, q)) + 1$，并且由于 $\sigma \circ (p, q) \le_{\text{Bruhat}} \omega$，可知 $r_{a,b}(\sigma \circ (p, q)) \ge r_{a,b}(\omega)$，因此 $r_{a,b}(\sigma) > r_{a,b}(\omega)$，如所需。

现在假设 (p, q) 满足 (C1)、(C2) 和 (C3)。同样，命题 3 蕴含 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma \circ (p, q)$。此外，引理 2 蕴含：若 $b < p,\ b \ge q,\ a < \sigma(p)$，或 $a \ge \sigma(q)$，则 $r_{a,b}(\sigma \circ (p, q)) = r_{a,b}(\sigma)$；而 (C3) 蕴含 $r_{a,b}(\sigma) \ge r_{a,b}(\omega)$，因此 $r_{a,b}(\sigma \circ (p, q)) \ge r_{a,b}(\omega)$。另一方面，若 $p \le b < q$ 且 $\sigma(p) \le a < \sigma(q)$，则引理 2 再次蕴含 $r_{a,b}(\sigma) = r_{a,b}(\sigma \circ (p, q)) + 1$，但由 (C3) 可知 $r_{a,b}(\sigma) > r_{a,b}(\omega)$，因此 $r_{a,b}(\sigma \circ (p, q)) \ge r_{a,b}(\omega)$。所以这两种情况下都有 $r_{a,b}(\sigma \circ (p, q)) \ge r_{a,b}(\omega)$，故命题 1 蕴含 $\sigma \circ (p, q) \le_{\text{Bruhat}} \omega$，从而 (p, q) 是 σ, ω 的相对候选。■

6. Saturated Chains in the Bruhat Order

本节的目标是证明，对于满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$ 的任意一对排列 $\sigma,\ \omega \in S_\infty$，在布鲁哈特序 $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \cdots \le_{\text{Bruhat}} \omega$ 中存在一条离散饱和链 $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \cdots \le_{\text{Bruhat}} \omega$，它要么最终相等于 ω，要么在前述 S_∞ 上的拓扑中收敛到 ω。事实上，我们证明该序列可以通过反复与形如 $(d,\ m)$ 的对换复合得到（见定义 5 及下文讨论），这对我们之后的工作很重要。[Gal21]，中证明了一个类似的结果，但其中不等式的方向相反，因此为求完整起见，我们在此按对我们有用的方向给出证明。我们先给出一个关键引理，它表明对于任意一对 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$，总至少存在一个相对候选。

引理 5. 设 σ，$\omega \in S_\infty$ 满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$。那么 $(d(\sigma,\ \omega)\ m(\sigma,\ \omega))$ 是 σ，ω 的一个相对候选。

证明。设 $d = d(\sigma,\omega)$、$m = m(\sigma,\omega)$ 和 $f = f(\sigma,\omega)$。首先，根据 d 和 m的定义，(C1) 和 (C2) 显然成立。由假设 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$，因此根据命题 1，我们有 $r_{a,b}(\sigma) \geq r_{a,b}(\omega)$，对所有 $a,b \in \mathbb{N}$均成立。现在假设 $d \leq b < m$ 且 $\sigma(d) \leq a < \sigma(m)$。我们将矩阵区域$[1,\omega(d)] \times [1,b]$ 划分为三个互不相交的区域: $[1,a] \times [1,b]$、$(a,\omega(d)] \times [1,d)$ 和 $(a,\omega(d)] \times [d,b]$，并作如下计算。

$$r_{a,b}(\sigma)+r_{(a,\omega(d)],[1,d)}(\sigma)+r_{(a,\omega(d)],[d,b]}(\sigma) = r_{\omega(d),b}(\sigma) \overset{(1)}{\geq} r_{\omega(d),b}(\omega) = r_{a,b}(\omega)+r_{(a,\omega(d)],[1,d)}(\omega)+r_{(a,\omega(d)],[d,b]}(\omega)$$

这里，(1) 成立是因为 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$。然而，根据 m的定义，子矩阵$[\sigma_{i,j}]_{\sigma(d)\leq i\leq \omega(d),d\leq j<m}$在第 $\sigma(d)$ 行和第 d 列恰好有一个 1，其余位置均为 0，因此 $r_{(a,\omega(d)],[d,b]}(\sigma) = 0$。此外，置换矩阵 $[\omega_{i,j}]$在第 $\omega(d)$ 行和第 d 列有一个 1，因此$r_{(a,\omega(d)],[d,b]}(\omega) > 0$。最后，由于对所有 $p < d$，$\sigma(p) = \omega(p)$，我们有 $r_{(a,\omega(d)],[1,d]}(\sigma) = r_{(a,\omega(d)],[1,d]}(\omega)$。因此，作差得 $r_{a,b}(\sigma) \geq r_{a,b}(\omega) + r_{(a,\omega(d)],[d,b]}(\omega) > r_{a,b}(\omega)$，故 (C3) 得证。■

现在我们用这个引理证明，存在所述的离散饱和链 S_∞，其覆盖关系由形如 (d,m) 的对换给出。

命题 5. 设 $\sigma,\omega \in S_\infty$ 满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$。设 $\sigma_0 = \sigma$，并对 $i \geq 1$ 归纳地定义 $\sigma_i = \sigma_{i-1} \circ (d(\sigma_{i-1},\omega)\ m(\sigma_{i-1},\omega))$，只要 $\sigma_{i-1} \neq \omega$。若对某个 n 有 $\sigma_n = \omega$，则 $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \cdots \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_{n-1} \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_n = \omega$ 是一条有限饱和链。若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\sigma_n \neq \omega$，则 $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \cdots \leq_{\text{Bruhat}} \omega$ 是一条收敛到 ω 的离散饱和链。

证明。首先，根据引理 5，对于所有 i，我们有 $(d(\sigma_{i-1},\omega)\ m(\sigma_{i-1},\omega))$ 是 σ_{i-1},ω 的一个相对候选，因此根据定义，我们有 $\sigma_{i-1} \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_{i-1} \circ (d(\sigma_{i-1},\omega)\ m(\sigma_{i-1},\omega)) = \sigma_i \leq_{\text{Bruhat}} \omega$。因此，无论哪种情况，得到的链都是离散饱和的；若对某个 n 有 $\sigma_n = \omega$，则命题得证。

现在假设对所有 n 都有 $\sigma_n \neq \omega$。我们现在证明序列 $\sigma = \sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\ldots$ 收敛到 ω。事实上，我们断言 $d(\sigma_0,\omega)$，$d(\sigma_1,\omega)$，$d(\sigma_2,\omega)\ldots$ 是一个弱递增且不最终恒定的序列。为说明它弱递增，注意对于任意 i，对所有 $\ell < d(\sigma_i,\omega)$，我们都有 $\sigma_{i+1}(\ell) = \sigma_i(\ell) = \omega(\ell)$，因此 $d(\sigma_i,\omega) \leq d(\sigma_{i+1},\omega)$。反设该序列最终恒定。首先注意，若 $d(\sigma_{n+1},\omega) = d(\sigma_n,\omega)$，则 $f(\sigma_{n+1},\omega) = f(\sigma_n,\omega)$。根据假设，对所有 $\ell \geq n$ 都有$d(\sigma_\ell,\omega) = d(\sigma_n,\omega)$，因此对所有 $\ell \geq n$ 都有 $f(\sigma_\ell,\omega) = f(\sigma_n,\omega)$。然而，根据 d, m 和 f 的性质，对所有 $\ell \geq n$，我们有 $d(\sigma_\ell,\omega) < m(\sigma_\ell,\omega) \leq f(\sigma_\ell,\omega)$，因此对所有 $\ell \geq n$，都有 $d(\sigma_n,\omega) < m(\sigma_\ell,\omega) \leq f(\sigma_n,\omega)$。然而，满足 $d(\sigma_n,\omega) < m \leq f(\sigma_n,\omega)$ 的整数 m 只有有限多个，因此存在某个 $n' \geq n$，使得对所有 $\ell \geq n'$ 都有 $m(\sigma_\ell,\omega) = m(\sigma_{n'},\omega)$。特别地，我们有$d(\sigma_{n'},\omega) = d(\sigma_{n'+1},\omega)$，且 $m(\sigma_{n'},\omega) = m(\sigma_{n'+1},\omega)$。然而，由于 $\sigma_{n'}(d(\sigma_{n'},\omega)) < \sigma_{n'}(m(\sigma_{n'},\omega))$ 且$\sigma_{n'+1} = \sigma_{n'} \circ (d(\sigma_{n'},\omega)\ m(\sigma_{n'},\omega))$，我们得到如下结论。

$$\sigma_{n'+1}(d(\sigma_{n'+1},\omega)) = \sigma_{n'}(m(\sigma_{n'},\omega)) > \sigma_{n'}(d(\sigma_{n'},\omega)) = \sigma_{n'+1}(m(\sigma_{n'+1},\omega))$$

这与 $m(\sigma_{n'+1},\ \omega)$ 的定义矛盾。因此，对于任意 $i \in \mathbb{N}$，存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$，都有 $d(\sigma_n,\ \omega) > i$，这意味着对于 $n \geq N$，$\sigma_n(i) = \omega(i)$。因此，$\sigma = \sigma_0$，σ_1，.....确实如所需收敛到 ω。■

由此，我们得到了 S_∞ 中覆盖关系的完整刻画。

推论 2。给定 σ，$\omega \in S_\infty$，当且仅当存在一个满足 (C1)、(C2) 和 $\omega = \sigma \circ (p,\ q)$ 的对换 $(p,\ q)$ 时，$\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \omega$ 成立。在这种情况下，对换 $(p,\ q)$ 是唯一的。

证明。若 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \omega$，命题 5 尤其表明，存在一条离散饱和链$\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \cdots \leq_{\text{Bruhat}} \omega$，其中每个覆盖关系都由一个对换给出（根据命题 3，该对换必须满足 (C1) 和 (C2)）。由于 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \omega$ 已经是一个覆盖关系，因此必有 $\sigma_1 = \omega$，故断言得证。命题 3 立即给出逆向蕴含。为证明唯一性，注意到 $(p,\ q) = \sigma^{-1} \circ \omega$。■

7. An $\mathbb{N}$-Grading of Intervals in S_∞

本节旨在定义 S_∞ 的子集 $[\sigma,\omega]^f$，并证明它们是 $\mathbb{N}$-分次的。回顾一下，置换 $\sigma\in S_\infty^f$ 的长度 是其逆序对的数量，即 σ的逆序对数 $\ell(\sigma)$，也就是集合 $\{(i,\ j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid i<j$ 和 $\sigma(i)>\sigma(j)\}$的大小。采用 Bruhat 序的偏序集 S_n 是分次的，其秩等于长度（例如参见 [BB05]）。

给定 $\sigma,\ \nu\in S_\infty$ 我们称 σ 和 ν 是最终相等 的，如果仅对有限多个 $n\in\mathbb{N},\ \sigma(n)\neq\nu(n)$，在此情况下记作 $\sigma\approx\nu$。注意，“$\approx$”是 S_∞上的一个等价关系。

定义 7。给定任意 $\sigma<_{\text{Bruhat}}\omega$，我们定义

$$[\sigma,\omega]^f=\{\nu\in S_\infty\mid\sigma\leq_{\text{Bruhat}}\nu\leq_{\text{Bruhat}}\omega\text{ and }\nu\approx\sigma\}.$$

我们希望证明 $[\sigma,\omega]^f$ 是 $\mathbb{N}$-分次的，但需要一个适用于这种相对情形的置换长度概念，以便定义秩函数。当然，如果 $\sigma\in S_\infty\setminus S_\infty^f$，那么 σ 将包含无穷多个逆序对，因此 S_∞ 中大多数元素的经典长度是无穷的。然而，下面的长度类比概念对所有置换都有意义。

定义 8。 $\sigma\in S_\infty$的伪长度 是向量 $\ell_\bullet(\sigma)=(\ell_1(\sigma)\ \ell_2(\sigma)\ldots)\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}_{\geq0}}$，其定义为令 $\ell_i(\sigma)=\sum_{n=1}^i|D_n(\sigma)|$，其中我们定义 $D_i(\sigma)$ 为 $\{j\in\mathbb{N}\mid i<j,\sigma(i)>\sigma(j)\}$ i阶逆序对 σ的集合。换言之，$\ell_i(\sigma)$ 是 $n\leq i$的 n阶逆序对的数量。

请注意，对于任意 $i\in\mathbb{N},\ \ell_i(\sigma)$ 总是有限的，因为小于 $\sigma(i)$ 的 $\mathbb{N}$ 只有有限个。

例6. 考虑例2和例3中的置换 $\theta=[2,1,4,3,6,5,\ldots]$ 和 $\rho=[3,1,5,2,7,4,9,6,\ldots]$。我们有，当 i 为奇数时，$|D_i(\theta)|=1$；当 i 为偶数时则为 0，因此 $\ell_\bullet(\theta)=(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ \ldots\ldots)$。类似地，当 i 为奇数时，$|D_i(\rho)|=2$；当 i 为偶数时则为 0，因此 $\ell_\bullet(\rho)=(2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ \ldots\ldots)$。

还需注意，若 $\sigma\in S_\infty^f$，则对于除有限多个 i之外的所有情况，$|D_i(\sigma)|=0$，因此对于除有限多个 i之外的所有情况，$\ell_i(\sigma)=\ell(\sigma)$。事实上，这个蕴含关系也可以反向成立。

命题 6. 给定 $\sigma\in S_\infty$，我们有 $\sigma\in S_\infty^f$ 当且仅当存在 $n\in\mathbb{N}$，使得对于除有限多个 i之外的所有情况，$\ell_i(\sigma)=n$。在这种情况下，$\ell(\sigma)=n$。

证明。 如前所述，正向蕴含显而易见。对于反向蕴含，根据假设，存在某个 i_0，使得对所有 $i\geq i_0$，$\ell_i(\sigma)=n$。这意味着对所有 $i\geq i_0,\ D_i(\sigma)=\emptyset$；根据定义，这表示对所有 $i>i_0,\ \sigma(i)>\sigma(i_0)$。但这意味着，如果 $\sigma(j)<\sigma(i_0)$，那么 $j<i_0$，因此有 $\sigma(i_0)-1$ 个数必须出现在 i_0 的左侧，即在 σ 的单行记号中，所以 $i_0\geq\sigma(i_0)$。

对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $\sigma(i_0)<\ldots<\sigma(i_0+(n-1))<\sigma(i_0+n)$；若 $\sigma(i_0+n)>\sigma(i_0+(n-1))+1$，那么由于 $\sigma(i_0+(n-1))+1>\sigma(i_0+(n-1))>\ldots>\sigma(i_0),\ \sigma(i_0+(n-1))+1$ 必定出现在 σ 的单行记号中 i_0 位置之前。由于在 i_0 之前只有有限个这样的位置，因此必定存在某个 $i_1\geq i_0$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $\sigma(i_1+n)=\sigma(i_1)+n$；也就是说，$\sigma$ 的单行记号中，$\sigma(i_1)$ 之后的数字是连续的。我们实际上断言 $\sigma(i_1)=i_1$。确实，由于单行记号中 $\sigma(i_1)$ 之后的数字是连续的，数字 $1,\ldots,\sigma(i_1)-1$ 必定出现在 $\sigma(i_1)$ 之前，而这些也是唯一可能出现在 $\sigma(i_1)$ 之前的数字，因此断言成立。由于对于所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $\sigma(i_1+n)=\sigma(i_1)+n$，因此也可推出，对于所有 $i\geq i_1$，都有 $\sigma(i)=i$，故 $\sigma\in S_\infty^f$。■

现在我们使用伪长度来定义相对于给定置换的 S_∞ 中的长度概念。注意，对于任意最终相等的 $\sigma,\ \nu\in S_\infty$，都存在某个 $i_0\in\mathbb{N}$，使得对所有$i\geq i_0$都有 $D_i(\sigma)=D_i(\nu)$。因此，差值 $\ell_i(\nu)-\ell_i(\sigma)$会随着 $i\to\infty$的变化而稳定，即存在某个 $n\in\mathbb{Z}_{\geq0}$，使得对所有 $i\geq i_0$都有 $\ell_i(\nu)-\ell_i(\sigma)=n$。

定义 9. 若 $\sigma,\nu\in S_\infty$ 满足 $\sigma<_{\text{Bruhat}}\nu$ 和 $\sigma\approx\nu$，则 ν 相对于 σ 的长度定义为 $\ell_\sigma(\nu)=\lim_{i\to\infty}\ell_i(\nu)-\ell_i(\sigma)$。

注意，若 $\sigma, \nu \in S_\infty^f$，则存在某个 $i_0 \in \mathbb{N}$，使得若 $i \geq i_0$，则 $\ell_i(\sigma) = \ell(\sigma)$ 且 $\ell_i(\nu) = \ell(\nu)$，因此 $\ell_i(\nu) - \ell_i(\sigma) = \ell(\nu) - \ell(\sigma)$，所以 S_∞^f 中的相对长度正如预期，只需由 $\ell_\sigma(\nu) = \ell(\nu) - \ell(\sigma)$ 给出。

注 6。注意，两个元素 σ，$\nu \in S_\infty$ 最终相等，当且仅当 $\sigma^{-1} \circ \nu \in S_\infty^f$。事实上，我们有 $\sigma \approx \nu$ 当且仅当存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得若 $n \geq N$，$\sigma(n) = \nu(n)$，这当且仅当对所有 $n \geq N$ 都有 $(\sigma^{-1} \circ \nu)(n) = n$，而这又当且仅当$\sigma^{-1} \circ \nu \in S_\infty^f$。由于置换的通常长度对 S_∞^f 的所有元素都有定义，因此人们可能会尝试定义 $\ell_\sigma(\omega) = \ell(\sigma^{-1} \circ \omega)$，然而这甚至对 S_n 中的排列也不成立。例如，$[1,3,2] \lessdot_{\text{Bruhat}} [2,3,1]$ 在 S_3 中，因此相对长度为 $\ell_{[1,3,2]}([2,3,1]) = \ell([2,3,1]) - \ell([1,3,2]) = 1$，但我们有 $[1,3,2] \circ (1,\ 3) = [2,3,1]$，所以 $\ell([1,3,2]^{-1} \circ [2,3,1]) = \ell((1,\ 3)) = 3$。

现在证明相对长度具有可加性。

引理 6。如果 σ，μ，$\nu \in S_\infty$ 都最终相等，并且满足 $\sigma \leq_{\text{Bruhat}} \mu \leq_{\text{Bruhat}} \nu$，那么 $\ell_\sigma(\nu) = \ell_\sigma(\mu) + \ell_\mu(\nu)$。

证明。根据假设，存在某个 $i_0 \in \mathbb{N}$，使得如果 $i \geq i_0$，那么 $\sigma(i) = \mu(i) = \nu(i)$。因此我们有 $\ell_\sigma(\mu) = \ell_{i_0}(\mu) - \ell_{i_0}(\sigma)$、$\ell_\mu(\nu) = \ell_{i_0}(\nu) - \ell_{i_0}(\mu)$，以及 $\ell_\sigma(\nu) = \ell_{i_0}(\nu) - \ell_{i_0}(\sigma)$。将前两个方程相加，得到 $\ell_\sigma(\nu) = \ell_\sigma(\mu) + \ell_\mu(\nu)$。■

我们可以利用这一点证明，与 S_n 中一样，S_∞ 上布鲁哈特序中的覆盖关系使相对长度增加 1。

引理 7。给定 σ，$\nu \in S_\infty$，如果 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \nu$，那么 $\ell_\sigma(\nu) = 1$。

证明。由推论 2，存在某个对换 $(p,\ q)$ 满足 (C1) 和 (C2)，使得 $\nu = \sigma \circ (p,\ q)$。令 $i_0 = q + 1$，并注意到对于所有 $i \geq i_0$，$\nu(i) = \sigma(i)$，因此 $\ell_\sigma(\nu) = \ell_{i_0}(\nu) - \ell_{i_0}(\sigma)$。

假设 $i < j$，且 $i \leq i_0$。我们分几种情况讨论。（情形 1）。若 $i,\ j \notin \{p, q\}$，那么显然，(i, j) 是 ν 的逆序对，当且仅当它是 σ 的逆序对。（情形 2）。若 $i < p$ 且 $j \in \{p, q\}$，那么 (i, p) 是 σ 的逆序对，当且仅当 (i, q) 是 ν 的逆序对；而 (i, p) 是 ν 的逆序对，当且仅当 (i, q) 是 σ 的逆序对。（情形 3）。假设 $i = p$ 且 $j < q$。若 (p, j) 是 σ 的逆序对，那么由于 $\sigma(p) < \sigma(q)$，(p, j) 是 ν 的逆序对。反过来，若 (p, j) 是 ν 的逆序对，那么 $\sigma(q) > \sigma(j)$，因此由 (C2) 可知，我们还必须有 $\sigma(p) > \sigma(j)$，从而 (p, j) 也是 σ 的逆序对。（情形 4）。若 $i = p$ 且 $q < j$，那么 (p, j) 是 σ 的逆序对，当且仅当 (q, j) 是 ν 的逆序对。（情形 5）。假设 $p < i$ 且 $j = q$。若 (i, q) 是 σ 的逆序对，那么 $\sigma(i) < \sigma(q)$，所以由 (C2)，$\sigma(i) < \sigma(p)$，从而 (i, q) 也是 ν 的逆序对。反过来，若 (i, q) 是 ν 的逆序对，那么 $\sigma(i) < \sigma(p) < \sigma(q)$，所以 (i, q) 是 σ 的逆序对。（情形 6）。最后，若 $i = q$，那么 (q, j) 是 σ 的逆序对，当且仅当 (p, j) 是 ν 的逆序对。于是，由于 (p, q) 是 ν 的逆序对，但不是 σ 的逆序对，结论得证。■

现在我们描述 $[\sigma, \omega]^f$ 当 $\sigma \approx \omega$时的区间。

命题 7。给定任意 σ，$\omega \in S_\infty$，其中 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$ 且 $\sigma \approx \omega$，有 $[\sigma, \omega]^f = [\sigma, \omega\ \ \ \ \ \ \ ]$.

证明。根据定义，包含关系“$\subseteq$”成立。反过来，设 $\nu \in [\sigma, \omega]$。根据假设，σ与 ω 最终相等，因此存在某个 $i_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $i \geq i_0$，$\sigma(i) = \omega(i)$。这意味着集合 $\{\sigma(1) \ldots, \sigma(i_0 - 1)\}$ 与 $\{\omega(1) \ldots, \omega(i_0 - 1)\}$ 必须相等。由于 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \nu <_{\text{Bruhat}} \omega$，根据定义，$\{\sigma(1) \ldots, \sigma(i_0 - 1)\} \leq \{\nu(1) \ldots, \nu(i_0 - 1)\} \leq \{\omega(1) \ldots, \omega(i_0 - 1)\}$。但由于第一个集合与最后一个集合相等，中间的集合也必然与第一个（和最后一个）集合相等。显然，将 i_0 替换为任意 $n \in \mathbb{N}$ 对应的 $i_0 + n$，同样的结论也成立。因此，对 n 归纳可知，对所有 $n \in \mathbb{N}$，必有 $\sigma(i_0 + n) = \nu(i_0 + n) = \omega(i_0 + n)$。但这意味着，对所有 $i \geq i_0$，$\sigma(i) = \nu(i) = \omega(i)$。因此 $\nu \approx \sigma$，故 $\nu \in [\sigma, \omega]^f$。■

我们立即得到，对于任意 μ，$\nu \in [\sigma, \omega]^f$，偏序集 $[\sigma, \omega]^f$ 中位于它们之间的元素所构成的区间 $[\mu, \nu]_{[\sigma,\omega]^f}$，实际上等于偏序集 S_∞ 中它们之间的完整区间 $[\mu, \nu] = [\mu, \nu]_{S_\infty}$。为求清晰，在整个推论中我们保留“$[\mu, \nu]_{S_\infty}$”的下标。

推论 3. 给定任意满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$ 的 σ，$\omega \in S_\infty$，以及任意满足 $\mu <_{\text{Bruhat}} \nu$ 的 μ，$\nu \in [\sigma,\omega]^f$，我们有 $[\mu,\nu]_{S_\infty} = [\mu,\nu]_{[\sigma,\omega]^f}$。

证明。包含关系“$\supseteq$”显然成立。反过来，设 $\tau \in [\mu,\nu]_{S_\infty}$。根据定义，$\mu$和 ν 都与 σ最终相等，因此它们彼此最终相等。因此，由命题 7，$[\mu,\nu]_{S_\infty} = [\mu,\nu]^f$，所以 $\tau \in [\mu,\nu]^f$，这意味着 τ与 μ最终相等，因而也与 ω最终相等。由于$\sigma \leq_{\text{Bruhat}} \mu \leq_{\text{Bruhat}} \tau \leq_{\text{Bruhat}} \nu \leq_{\text{Bruhat}} \omega$，可得 $\tau \in [\mu,\nu]_{[\sigma,\omega]^f}$。■

利用前面的命题和推论，我们现在可以证明 $[\sigma,\omega]^f$ 是区间有限的，这将有助于我们证明它是 $\mathbb{N}$-分级的。

推论 4。给定任意 $\sigma,\omega \in S_\infty$，满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$，偏序集（$[\sigma,\omega]^f, <_{\text{Bruhat}}$）是区间有限的。

证明。假设 μ、$\nu \in [\sigma,\omega]^f$ 满足 $\mu <_{\text{Bruhat}} \nu$。根据推论 3，我们有 $[\mu,\nu]_{S_\infty} = [\mu,\nu]_{[\sigma,\omega]^f}$，因此只需证明前者是有限的。令 $\tau \in [\mu,\nu]_{S_\infty}$。由于 μ 和 ν 都最终等于 σ，它们也最终彼此相等。因此存在某个 $i_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $i \geq i_0$，$\mu(i) = \nu(i)$。这意味着集合 $\{\mu(1)\ldots,\mu(i_0-1)\}$ 和 $\{\nu(1)\ldots,\nu(i_0-1)\}$ 必须相等。由于 $\mu <_{\text{Bruhat}} \tau <_{\text{Bruhat}} \nu$，根据布鲁哈特序的定义，必有 $\{\mu(1)\ldots,\mu(i_0-1)\} \leq \{\tau(1)\ldots,\tau(i_0-1)\} \leq \{\nu(1)\ldots,\nu(i_0-1)\}$。但由于第一个集合与最后一个集合相等，中间的集合也必须与第一个（以及最后一个）集合相等。如果将 i_0 替换为任意 $n \in \mathbb{N}$ 对应的 i_0+n，显然也有同样的结论。因此对 n 作归纳可知，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，必有 $\tau(i_0+n) = \mu(i_0+n) = \nu(i_0+n)$。但这意味着对于所有 $i \geq i_0$，$\tau(i) = \mu(i) = \nu(i)$。由于 $\tau \in [\mu,\nu]_{S_\infty}$ 是任意的，$[\mu,\nu]_{S_\infty}$ 中至多有 $(i_0-1)!$ 个元素。■

在命题 5 中，我们证明了给定 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$，存在一条从 σ 开始的离散饱和链，该链要么最终等于 ω，要么收敛于 ω。由于 $[\sigma,\omega]^f$ 是区间有限的，我们现在可以描述这两种情况分别何时发生。

命题 8。令 σ，$\omega \in S_\infty$ 满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$。那么，当且仅当存在一条有限饱和链 $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \cdots \sigma_{n-1} \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_n = \omega$ 时，$\sigma \approx \omega$。

证明。如果存在这样一条离散饱和链，根据推论 2，每个覆盖关系都由与一个对换复合给出，因此 ω 可以通过与有限多个对换复合从 σ 得到，所以显然 $\sigma \approx \omega$。反之，假设 $\sigma \approx \omega$ 且不存在这样的有限链。那么根据命题 5，存在一条收敛于 ω 的无限离散饱和链 $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \cdots \leq_{\text{Bruhat}} \omega$。然而，由于 σ 和 ω 最终相等，根据命题 7，我们有 $[\sigma,\omega]^f = [\sigma,\omega]$。根据推论 4，该区间是有限的，但它还包含对所有 $n \in \mathbb{N}$ 的 σ_n，而这些元素两两不同，矛盾。■

现在我们可以证明，带有 Bruhat 序的 S_∞^f, $[\sigma,\omega]^f$ 是 $\mathbb{N}$-分次的，其秩函数由相对于 σ 的长度给出。

命题 9. 假设 $\sigma,\omega \in S_\infty$ 满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$。偏序集 $([\sigma,\omega]^f, <_{\text{Bruhat}})$ 是 $\mathbb{N}$-分次的，相应的秩函数是相对长度函数 ℓ_σ。

证明. 显然，σ 是 $[\sigma,\omega]^f$ 的唯一极小元，因此满足 (G1)。给定任意 $\nu \in [\sigma,\omega]^f$，由命题 5 和命题 8 可知，存在一条从 σ 开始、在 S_∞ 中以 ν 结束的有限饱和链。根据推论 3，这条链也位于 $[\sigma,\omega]^f$ 中，因此 (G2) 也得到满足。根据推论 4，$[\sigma,\omega]^f$ 是区间有限的，所以 $[\sigma,\nu]$ 的所有极大链都必为有限链，即具有 $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \cdots \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_m = \nu$ 的形式。由引理 6 和引理 7，我们有 $m = \ell_\sigma(\nu)$。因此，所有这类极大链的长度都相同，故 (G3) 也得到满足。■

我们以讨论 S_∞ 的各种子集中的极大链和离散饱和链来结束本节。这部分内容并非主要结果所必需，但或许值得一提。如上所述，在任何偏序集中，极大链必然是饱和链，但反过来一般并不成立。然而，在（有限）分级偏序集中，包含极小元和极大元的饱和链就是极大链。如下引理所示，这一观察的某种类似结论也适用于 $\mathbb{N}$-分级偏序集。

引理 8. 如果 $(P, <)$ 是一个 $\mathbb{N}$-分级偏序集，那么每条包含极小元 0 的离散饱和链 C 都是极大链。

ˆ证明。 将链记为 C： $0 = p_0 \lessdot p_1 \lessdot \dots$，因此如果 C 不是极大链，那么存在某个 $p \in P \setminus C$，使得 $\{p, p_i \mid 0 \le i < \infty\}$ 是一条链。我们必有 $p_0 < p$，因为根据 (G1)， Pˆ0 的唯一极小元是 $p_0 =$。设对于某个 $i \in \mathbb{N}$，有 $p < p_i$。我们可以假设 i 在此性质下是极小的，因此 $p \not< p_{i-1}$。由于 C 是一条链，必有 $p > p_{i-1}$，这意味着 $p_{i-1} < p < p_i$，与 $p_{i-1} \lessdot p_i$ 是覆盖关系矛盾。因此，对所有 i，必有 $p_i < p$，所以 [ˆ0， p] 中存在一条含有无限多个元素的极大链，这与 (G3) 矛盾。■

推论5. $(S_\infty, <_{\text{Bruhat}})$ 不是一个 $\mathbb{N}$-分级偏序集。

证明。 设 $\sigma, \omega \in S_\infty$ 满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$ 和 $\sigma \not\approx \omega$。由命题 5 和命题 8，存在 S_∞ 中一条无限的离散饱和链 $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \dots \le_{\text{Bruhat}} \omega$，收敛于 ω。然而，由推论1，存在某个对换 (p, q)，使得 $\omega \lessdot_{\text{Bruhat}} \omega \circ (p, q)$，因此特别地，我们的链不是极大链。于是，由引理 8 可得所需结论。■

注7. 尽管偏序集 $[\sigma, \omega]^f$ 比 S_∞ 更好一些，因为它是 $\mathbb{N}$-分级的，但它仍然没有极大元，如下述推论所示。

推论 6. 给定满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$ 和 $\sigma \not\approx \omega$ 的 $\sigma, \omega \in S_\infty$，偏序集 $([\sigma, \omega]^f, <_{\text{Bruhat}})$ 没有极大元。

证明。 给定任意 $\nu \in [\sigma, \omega]^f$，注意到不可能有 $\nu \approx \omega$，因为我们知道 $\nu \approx \sigma$ 且 $\sigma \not\approx \omega$，并且“≈”是一个等价关系。因此，根据命题 5 和命题 8，在 $[\nu, \omega]^f \subseteq [\sigma, \omega]^f$ 中存在一条无限离散饱和链 $\nu = \nu_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \nu_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \dots$，特别地， ν不是极大的。■

8. Lexicographically Nested-Shellable Intervals of S_∞

本节旨在证明定理 C，该定理指出 $[\sigma, \omega]^f$ 是一个字典序嵌套可剥壳偏序集。我们先给出一个引理，它将推出 (LNS2)。

引理 9。 给定 $\sigma, \omega \in S_\infty$，其中 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$ 且 $\sigma \not\approx \omega$，以及 $[\sigma, \omega]^f$ 中一条收敛到 ω 的离散饱和链 C： $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \dots \le_{\text{Bruhat}} \omega$，若 $\nu \in [\sigma, \omega]^f$，则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\nu \le_{\text{Bruhat}} \sigma_n$。

证明。若 $\nu \in [\sigma, \omega]^f$，由于 $\nu \approx \sigma$，存在某个 $i_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $i \ge i_0$，都有 $(*)$ $\sigma(i) = \nu(i)$。此外，由于 $\sigma_0, \sigma_1, \dots$ 收敛到 ω，存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得若 $n \ge N$，则对于所有 $i \le i_0$，都有 $(**)\sigma_n(i) = \omega(i)$。我们将运用布鲁哈特序的杨表判据来证明$\nu \le_{\text{Bruhat}} \sigma_n$。事实上，若 $j \le i_0$，则 $\{\sigma_n(1), \dots, \sigma_n(j)\} = \{\omega(1), \dots, \omega(j)\} \ge \{\nu(1), \dots, \nu(j)\}$，其中等式由 $(**)$ 得出，不等式则因为 $\nu \le_{\text{Bruhat}} \omega$ 成立。另一方面，若 $j \ge i_0$，则$\{\nu(1), \dots, \nu(j)\} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(j)\} \le \{\sigma_n(1), \dots, \sigma_n(j)\}$，其中不等式因为 $\sigma \le_{\text{Bruhat}} \sigma_n$ 成立，而等式则因为根据 $(*)$， ν 与 σ 在 i_0 之后一致。所以，杨表判据确实表明$\nu \le_{\text{Bruhat}} \sigma_n$。■

现在我们引入 $(S_\infty, <_{\text{Bruhat}})$ 的相关边标记。令 T_∞ 表示 S_∞ 中对换的集合，并回忆一下，每个这样的对换都可以唯一地写成循环记号 (p, q)，其中 $p < q$。与 Edelman 在 [Ede81] 中的做法一样，我们考虑 T_∞ 上的字典序，并将其记为 $<_{\text{lex}}$。具体而言，若 (p, q) 和 (p', q') 是两个对换（其中 $p < q$ 且 $p' < q'$），那么 $(p, q) <_{\text{lex}} (p', q')$ 当且仅当 $p < p'$，或者 $p = p'$ 且 $q < q'$。注意， $<_{\text{lex}}$ 是一个全序（其序型为序数 ω^2）。定义边标记 $t_{\text{lex}}\colon C(S_\infty, <_{\text{Bruhat}}) \to (T_\infty, <_{\text{lex}})$ 如下。若 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \nu$，则根据推论 2，存在唯一的对换 $(p, q) \in T_\infty$，使得 $\sigma \circ (p, q) = \nu$。我们定义 $t_{\text{lex}}(\sigma, \nu) = (p, q)$。

注记 8。 如 S_n 中所述，对于 S_∞ 中的任意覆盖关系 $\sigma \lessdot_{\text{Bruhat}} \nu$，同样存在唯一的对换（$p'$， q'），使得（p'， q'） $\circ \sigma = \nu$，因此我们也可以像 Edelman 那样采用这一约定来定义边标记。不过，我们选择了对 t_{lex} 的定义，因为在这种情形下，我们在无限情形中的证明要稍微容易一些。

注记 9。 其余证明在思想上与 Edelman 在 [Ede81] 中用于证明 S_n 是字典序可剖分的证明非常相似。我们在此重复这些证明，以强调它们在 S_∞ 中仍然适用，并且可以使用我们所构建的组合工具。

为了证明 t_{lex} 是一个 L-标记，我们先给出一个引理，说明反复应用形如 (d, m) 的对换相对于对换上的字典序的行为。

引理 10。 设 $\sigma, \omega \in s_\infty$ 满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$。定义 $\sigma_1 := \sigma \circ (d(\sigma,\omega)\ m(\sigma,\omega))$。则 $(d(\sigma,\omega)\ m(\sigma,\omega)) <_{\text{lex}} (d(\sigma_1,\omega)\ m(\sigma_1,\omega))$

证明。首先，对于所有 $n < d(\sigma,\omega)$，有 $\sigma_1(n) = \sigma(n) = \omega(n)$，因此 $d(\sigma,\omega) \le d(\sigma_1,\omega)$。如果 $d(\sigma,\omega) < d(\sigma_1,\omega)$，那么显然有 $(d(\sigma,\omega)\ m(\sigma,\omega)) <_{\text{lex}} (d(\sigma_1,\omega)\ m(\sigma_1,\omega))$，所以设 $d(\sigma,\omega) = d(\sigma_1,\omega)$，并反设 $m(\sigma,\omega) \ge m(\sigma_1,\omega)$。首先，如果有 $m(\sigma,\omega) = m(\sigma_1,\omega)$，则计算得：

$$\sigma_1(d(\sigma_1,\omega)) \overset{(1)}{=} \sigma_1(d(\sigma,\omega)) \overset{(2)}{=} \sigma(m(\sigma,\omega)) \overset{(3)}{>} \sigma(d(\sigma,\omega)) \overset{(4)}{=} \sigma_1(m(\sigma,\omega)) \overset{(5)}{=} \sigma_1(m(\sigma_1,\omega))$$

这里，(1) 根据假设成立，(2) 和 (4) 根据σ_1的定义成立，(3) 根据 d 和 m的定义成立，而 (5) 因为 $m(\sigma_1, \omega) = m(\sigma, \omega)$而成立。然而，这与 $\sigma_1(d(\sigma_1, \omega)) < \sigma_1(m(\sigma_1, \omega))$矛盾；后者同样由 d和 m的定义得出。

现在假设 $m(\sigma_1, \omega) < m(\sigma, \omega)$。我们计算：

$$\sigma(d(\sigma,\omega)) \overset{(1)}{<} \sigma(m(\sigma,\omega)) \overset{(2)}{=} \sigma_1(d(\sigma,\omega)) \overset{(3)}{=} \sigma_1(d(\sigma_1,\omega)) \overset{(4)}{<} \sigma_1(m(\sigma_1,\omega)) \overset{(5)}{<} \sigma_1(f(\sigma_1,\omega)) \overset{(6)}{=} \sigma(f(\sigma_1,\omega)) \overset{(7)}{=} \sigma(f(\sigma,\omega))$$

这里，(1)、(4) 和 (5) 根据 d、 m和 f的定义成立，(2) 根据 σ_1的定义成立，(3) 因为根据假设， $d(\sigma_1, \omega) = d(\sigma, \omega)$ 而成立；(6) 和 (7) 则因为 σ 和 σ_1 仅在 $d(\sigma, \omega)$ 与 $m(\sigma, \omega)$ 上不同，并且由于我们假设 $d(\sigma, \omega) = d(\sigma_1, \omega)$，必有 $m(\sigma, \omega) \ne f(\sigma, \omega)$，因此 $f(\sigma, \omega) = f(\sigma_1, \omega)$，且 $\sigma(f(\sigma_1, \omega)) = \sigma_1(f(\sigma_1, \omega))$。综上，这表明$\sigma(d(\sigma, \omega)) < \sigma_1(m(\sigma_1, \omega)) < \sigma(f(\sigma, \omega))$；然而，同样由于 σ和 σ_1 仅在 $d(\sigma, \omega)$与 $m(\sigma, \omega)$上不同，并且根据假设， $d(\sigma, \omega) = d(\sigma_1, \omega) < m(\sigma_1, \omega) < m(\sigma, \omega)$，我们有 $\sigma(m(\sigma_1, \omega)) = \sigma_1(m(\sigma_1, \omega))$，从而得到 $\sigma(d(\sigma, \omega)) < \sigma(m(\sigma_1, \omega)) < \sigma(f(\sigma, \omega))$，这与 $m(\sigma, \omega)$的最小性矛盾。■

因此立即可得，命题 5 中通过反复应用形如 (d, m) 的对换所得到的离散饱和链按字典序递增。

推论 7. 设 $\sigma, \omega \in S_\infty$ 满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$。由命题 5 保证存在的、由 $\sigma_i = \sigma_{i-1} \circ (d(\sigma_{i-1}, \omega)\ m(\sigma_{i-1}, \omega))$ 定义的（有限或无限）离散饱和链 $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\text{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\text{Bruhat}} \cdots \le_{\text{Bruhat}} \omega$ 的 Jordan-H¨older 序列是 t_{lex}-递增的。

在讨论主要结果之前，我们先证明最后一个必要的引理，说明 σ, ω 的相对候选 (d, m) 与字典序中的其他相对候选项之间的比较关系。

引理 11. 设 $\sigma, \omega \in S_\infty$ 满足 $\sigma <_{\text{Bruhat}} \omega$。那么，$(d(\sigma,\omega)\ m(\sigma,\omega))$ 是 σ, ω 的字典序最先的相对候选项。

证明。令 $d = d(\sigma,\omega)$、 $m = m(\sigma,\omega)$ 和 $f = f(\sigma,\omega)$，并假设 (p, q) 是 σ,ω的一个相对候选，且不等于 (d, m)。反设 $p < d$。那么根据 d的定义，我们有$\sigma(p) = \omega(p)$，但由 (C1) 可知 $\sigma(p) < \sigma(q)$，因此 $\omega(p) < \sigma(q) = (\sigma \circ (p, q))(p)$。然而，对于所有 $n < p$，都有 $(\sigma \circ (p, q))(n) = \omega(n)$。因此 $d(\sigma \circ (p, q)\ \omega) = p$，但根据引理3，这与$\sigma \circ (p, q) <_{\text{Bruhat}} \omega$相矛盾。因此必有 $d \le p$。若 $d < p$，则 $(d, m) <_{\text{lex}} (p, q)$，结论成立。故假设 $d = p$，并再次反设 $q < m$。那么特别地，我们有 $d = p < q < m < f$，所以根据 d 和 f 的定义以及 m的最小性，必有 $\sigma(q) < \sigma(d) = \sigma(p)$ 或 $\sigma(q) > \sigma(f)$；然而，(p, q) 是 σ, ω的一个相对候选，因此由 (C1) 可知 $\sigma(p) < \sigma(q)$，故必有$\sigma(q) > \sigma(f)$。但这样一来，$(\sigma \circ (p, q))(p) = \sigma(q) > \sigma(f) = \omega(p)$。由于对于所有 $n < p$，都有 $(\sigma \circ (p, q))(n) = \omega(n)$，再次由引理3可知，这与 $\sigma \circ (p, q) <_{\text{Bruhat}} \omega$相矛盾。因此，若 $d = p$，则必有 $m \le q$；但若 $m = q$，则 $(d, m) = (p, q)$，所以必有 $m < q$，进而 $(d, m) <_{\text{lex}} (p, q)$，如所求。■

现在我们可以证明主要结果。

定理 C 的证明。 由推论 4，$[\sigma,\omega]^f$ 是区间有限的；由命题 9，它是 $\mathbb{N}$-分级的。由命题 5，存在一条离散饱和链 $\sigma = \sigma_0 \lessdot_{\mathrm{Bruhat}} \sigma_1 \lessdot_{\mathrm{Bruhat}} \cdots \leq_{\mathrm{Bruhat}} \omega$，它要么等于 ω，要么收敛于 ω。无论哪种情况，引理 9 都表明 (LNS2) 成立。

为证明 (LNS1)，设 μ、$\nu \in [\sigma,\omega]^f$ 满足 $\mu <_{\mathrm{Bruhat}} \nu$。我们必须证明，$t_{\mathrm{lex}}$ 是 $[\mu,\nu]$ 的一个 L-标记。首先注意，由推论 7，存在一条有限饱和链 C：$\mu = \mu_0 \lessdot_{\mathrm{Bruhat}} \mu_1 \lessdot_{\mathrm{Bruhat}} \cdots \lessdot_{\mathrm{Bruhat}} \mu_n = \nu$，其 Jordan-H¨older 序列按 t_{lex} 递增（因此满足 (L1) 的存在性要求）；此外，在每一步都有 $\mu_{i+1} = \mu_i \circ (d(\mu_i,\nu)\ m(\mu_i,\nu))$。假设$D$：$\mu_0 \lessdot_{\mathrm{Bruhat}} \mu'_1 \lessdot_{\mathrm{Bruhat}} \cdots \lessdot_{\mathrm{Bruhat}} \mu_n = \nu$是 $[\mu,\nu]$ 中的另一条离散饱和链，且不等于 C。那么存在某个最小的 i，使得 $\mu_i = \mu'_i$，但 $\mu_{i+1} \neq \mu'_{i+1}$。令 $(p,q) = t_{\mathrm{lex}}(\mu_i,\mu'_{i+1})$。那么，$(d(\mu_i,\nu)\ m(\mu_i,\nu))$ 和 (p,q) 都是 μ_i,ν 的相对候选项，而且二者不相等，因为 $\mu_{i+1} \neq \mu'_{i+1}$。因此，由引理 11 可知，$(d(\mu_i,\nu)\ m(\mu_i,\nu)) <_{\mathrm{lex}} (p,q)$，这意味着 C 的 Jordan-H¨older 序列在字典序上先于 D 的序列，因此满足 (L2)。

现在我们必须证明（L1）的唯一性部分。假设上述链 D 也是 t_{lex}-递增的。由于 $(d,m) := (d(\mu_i,\nu)\ m(\mu_i,\nu)) <_{\mathrm{lex}} (p,q)$，要么 $d < p$，要么 $d = p$ 且 $m < q$。若前一种情况成立，那么由于 D 是 t_{lex}-递增的，D 的 Jordan-H¨older 序列中出现在 (p,q) 之后的每个对换 (p',q') 都满足 $p' \geq p$，因此对所有 $i \leq j \leq n$，我们有 $\mu_j(d) = \mu_i(d) \neq \nu(d)$。特别地，取 $j = n$ 可得矛盾。现在假设后一种情况成立。我们考虑两种子情况。一方面，若 $q > f := f(\mu_i,\nu)$，那么由于 D 的 Jordan-H¨older 序列中出现在 (p,q) 之后的每个对换 (p',q') 都按字典序大于 (p,q)，于是对所有 $i \leq j \leq n$，有 $\mu_j(d) \neq \mu_i(f) = \nu(d)$，特别地，取 $j = n$ 可得矛盾。

另一方面，若 $q \leq f$，则由于 (p,q) 是 μ_i,ν 的相对候选，我们必有 $\mu_i(p) <\mu_i(q)$，且 $\mu_i(m) < \mu_i(p) = \mu_i(d)$ 或 $\mu_i(m) > \mu_i(q)$。然而我们知道 (d,m) 是 μ_i,ν 的相对候选，因此第一个不等式不可能成立，故必有 $\mu_i(m) > \mu_i(q)$。注意，由于 $\mu_n = \nu$，且 D 的 Jordan-H¨older 序列中的对换按字典序递增，为了得到满足 $\nu(d) = \mu_i(f)$ 的置换，对换 (d,f) 必须在该序列的某处出现。因此，D 的 Jordan-H¨older 序列的一部分包含对换 $(p,q) = (p_i,q_i) <_{\mathrm{lex}} (p_{i+1},q_{i+1}) <_{\mathrm{lex}} \ldots <_{\mathrm{lex}} (p_\ell,q_\ell) = (d,f)$。由于 $p = d$，对所有 j，必有 $p_j = d$，且 $m < q < q_i < \ldots < q_\ell = f$。现在我们通过对 j 归纳，证明对所有 $i \leq j \leq \ell$，$\mu_j(q_j) < \mu_j(m)$。事实上，基例已证，因此假设它对某个j成立。于是 (d,q_{j+1}) 是 μ_{j+1},ν 的相对候选，故必有 $\mu_{j+1}(d) < \mu_{j+1}(q_{j+1})$，并且 $\mu_{j+1}(m) < \mu_{j+1}(d)$ 或 $\mu_{j+1}(m) > \mu_{j+1}(q_{j+1})$。然而 $\mu_{j+1}(d) = \mu_j(q_j)$，并且根据归纳假设，$\mu_j(q_j) < \mu_j(m) = \mu_{j+1}(m)$，所以必有 $\mu_{j+1}(m) > \mu_{j+1}(q_{j+1})$，正如所需。因此特别有 $\mu_i(f) = \mu_\ell(f) = \mu_\ell(q_\ell) < \mu_\ell(m) = \mu_i(m)$，这与 m 和 f 的定义矛盾。因此，C 是 t_{lex} 在 $[\mu,\nu]$ 中唯一的递增离散饱和链，故 (L1) 也满足。■

References

[ADT14] Mohsen Asgharzadeh、Mehdi Dorreh 和 Massoud Tousi。Cohen-Macaulay 环的直极限。*Journal of Pure and Applied Algebra* 218 9 1730 1744, 2014

, (): –。[AT09] Mohsen Asgharzadeh 和 Massoud Tousi。论非诺特环的 Cohen-Macaulay 性概念。*Journal of Algebra* 322 7 2297 2320, 2009

, (): –。[BB05] Anders Bj¨orner 和 Francesco Brenti。*Combinatorics of Coxeter groups*，第 231 卷。Springer，2005 年。[BH98] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog。*Cohen-Macaulay rings*。剑桥高等数学研究丛书第 39 号。剑桥大学出版社，1998 年。[Bj¨o80] Anders Bj¨orner。可剥壳且为 Cohen-Macaulay 的偏序集。*Transactions of the american mathematical society* 260 1 159 183, 1980

, (): –。[CGM26] Anna Natalie Chlopecki、Nathaniel Gallup 和 Jason Meintjes。无限矩阵舒伯特簇的反对角初始复形是 Cohen-Macaulay 的。*arXiv preprint arXiv:2601.02612*，2026 年。[Che94] Claude Chevalley。关于 g/b 空间的胞腔分解。，，第 – 页。[Ede81] Paul H Edelman。对称群的布鲁哈特序是字典序可剥分的。*Proceedings of the American Mathematical Society* 82 3 355 358, 1981

, (): –。[Ehr34] Charles Ehresmann。关于某些齐性空间的拓扑。*Annals of Mathematics*，35(2)：396–443，1934 年。[Gal21] Nathaniel Gallup。作为点函子的良序旗空间。*arXiv preprint arXiv:2112.00327*，2021 年。

[Gla94] Sarah Glaz。交换不变环的相干性、正则性与同调维数。载于 *Commutative Algebra* 89 106 1994，第 – 页。世界科技出版公司，。[Gla95] Sarah Glaz。多项式环局部化的同调维数。载于 David F. Anderson、David E. Dobbs 和 John H. Barrett 纪念讲座（ 23 1994 rd：：田纳西大学），*Zero-dimensional commutative rings* 171, 209 222 编辑，，《纯粹与应用数学讲义》；第 – 页。Marcel Dekker，纽约，1995 年。[HM07] Tracy Dawn Hamilton 和 Thomas Marley。非诺特 Cohen-Macaulay 环。 *Journal of Algebra*，307 1 343 360，2007 ( )：–。[Hoc72] Melvin Hochster。环面不变式环、由单项式生成的 Cohen-Macaulay 环及多面体。 *Annals of Mathematics* 96 2 318 337, 1972，( )：–。[KK79] Bernd Kind 和 Peter Kleinschmidt。可剥壳的 Cohen-Macauley 复形及其参数化。，( )：–，六月。[Rei76] Gerald Allen Reisner。多项式环的 Cohen-Macaulay 商环。 *Advances in Mathematics*，21(1)：30–49，1976 年。[Ver66] Daya-Nand Verma。 *Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras*。耶鲁大学，1966 年。