arXiv:2601.12201v1 [math.RA] 18 Jan 2026

FACTA UNIVERSITATIS (NIŠ)
Ser. Math. Inform.

带面积约束的曲率正则化变分问题

Chandrasekhar Gokavarapu

摘要。互锁界面常用于减轻剪切作用下的相对滑动。实际上，其几何形状通常是根据制造便利性而非解析最优性来选择的。没有理由认为圆形或多边形轮廓能够在固定几何约束下使局部应力集中最小化。我们提出一个变分模型，用平面曲线 $y = f(x)$ 表示界面，并通过一个对曲率敏感的泛函来量化局部应力放大

$$J[f] = \int_{-a}^{a} \left(1 + \gamma\kappa^2\right) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

该泛函定义在 Sobolev空间 $W^{2,2}([-a, a])$ 上。该泛函的构建受弹性理论启发：在奇异界面附近，曲率会进入首阶应力场。事实上，任何具有不连续切线的轮廓都会导致积分发散，因此在 Sobolev空间$_{W^{2,2}}$ 中不具备能量可接受性。为模拟固定材料体积，施加面积约束 $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = A_0$。利用变分法的直接方法，我们证明了极小化函数的存在性，并推导出相应的欧拉–拉格朗日方程，即一个非线性四阶边值问题。

然而，需要注意的是，在所施加的约束下，恒曲率轮廓和分段线性轮廓无法满足必要的最优性条件。事实上，我们因此不得不得出结论：从解析角度看，要实现最优，局部切角必须发生更为复杂的变分

分析表明，在这类可容许界面中，通常采用的互锁几何形状并非使局部剪切应力最小化的变分最优形状。

1. 引言

没有理由认为，互锁界面中的几何简单性意味着力学最优性。事实上，普遍依赖此类几何形状

收稿2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 49J45；次要分类号 74B05、35J30

代表了以往分析直觉的失误，即未能考虑面积约束所要求的二阶变分。

砌体、架构材料和分段固体中圆形及多边形互锁几何结构占据主导地位，这在历史上是由制造和装配约束所致，而非变分分析 [7, 9, 1]。尽管已有大量实验和计算研究，但至今仍缺乏能够确定应力最小化互锁几何结构的解析框架。

其力学设定是经典的。两个弹性连续体沿非平直界面连接，并承受远程载荷。位移场在每个子域内均满足 Lam´é 方程组，界面几何仅通过边界条件 [5] 产生影响。因此，人们很容易将界面视为被动的几何特征。在互锁组件的离散模型和半连续体模型中，这种想法依然存在 [15, 16]。然而，没有理由认为这种被动性在力学上是自洽的。

互锁结构建模中一个反复出现的假设是，牵引向量沿界面近似均匀 [22, 4]。姑且假设这一假设成立。那么，根据平衡，只要法向应力非零，界面曲率就必须为零。由此可知，恒定牵引力仅与平直界面相容。由于互锁结构按定义都是非平直的，这一假设在内部存在矛盾。这种不相容性隐含于曲率相关界面理论之中，但很少被明确指出[13, 18]。

相反，曲率必然会引起应力放大。这种现象并非数值离散造成的假象，而是曲线几何中边界平衡的结构性结果，这一点在纳入高阶界面能的弹性模型中已有观察 [20, 25]。没有理由认为恒定曲率或集中在角点处的曲率能够使这种放大最小化。

因此，恰当的问题是一个变分问题。我们必须探究，在固定几何约束下，是否存在一种互锁几何，能够使局部应力的某种定量度量最小化。这个问题仅凭经典弹性理论无法解决，需要引入定义在可容许界面类上的曲率相关泛函 [3, 18]。

由此立即得出若干限制。切线不连续的界面会产生奇异的曲率测度。恒定曲率的界面则违反与高阶正则化相关的自然边界条件。因此，我们必须一开始就将多边形和圆形轮廓排除在可容许类之外。

在本文中，界面被建模为一条曲线 Γ ，在局部表示为函数 $f \in W^{2,\,2}([-a,a])$ 的图像。索博列夫正则性并非出于便利而施加，而是由曲率相关应力放大必须有限这一要求所迫。该选择与弹性和界面力学中出现的四阶变分形式一致 [19, 10]。

本文的目标经过有意限定。我们在面积约束下，建立曲率正则化应力泛函的可容许性、极小化子的存在性以及必要的最优性条件。随后，我们证明经典的互锁几何形状无法满足这些条件。因此，我们不得不 concllude，广泛采用的设计在数学上与局部剪切应力的极小化不相容。

2. 预备知识

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界利普希茨区域，其中充满均匀各向同性线弹性材料。假定位移场 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ 属于 $H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$。不存在体力。本构框架遵循经典线弹性理论 [5, 10]。

柯西应力张量 σ 由下式给出

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u)) I, \tag{2.1}$$

其中 $\mu, \lambda > 0$ 为 Lam´e 参数 an d

$$\varepsilon(u) = \tfrac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^{T}) \tag{2.2}$$

是线性化应变张量。力学平衡要求

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{2.3}$$

我们考虑分解 $\Omega = \Omega^{+} \cup \Omega^{-}$，其中两个子域由光滑界面 Γ分隔。在局部区域内，Γ 表示为如下图像

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in [-a, a]\}, \tag{2.4}$$

其中 $f \in W^{2,\,2}([-a,a])$。没有理由认为较低的正则性是可接受的。事实上，依赖曲率的界面能需要平方可积曲率，以确保总应力 [18, 13]有限。

令 s 表示沿 Γ的弧长。单位切向量和法向量定义为

$$\tau = \frac{(1, f')}{\sqrt{1 + f'^2}}, \qquad n = \frac{(-f', 1)}{\sqrt{1 + f'^2}}. \tag{2.5}$$

有向曲率 κ 由下式给出

$$\kappa = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}. \tag{2.6}$$

Γ上的牵引向量定义为

$$t = \sigma n. \tag{2.7}$$

在界面处施加位移连续性，

$$u^+ = u^- \quad \text{on } \Gamma, \tag{2.8}$$

以及牵引平衡，

$$\sigma^+ n = \sigma^- n. \tag{2.9}$$

此类传递条件是界面弹性中的标准条件 [5, 20]。

暂且假设牵引向量 t 沿着 Γ保持恒定。对弧长求导可得

$$\frac{dt}{ds} = (\nabla\sigma)n + \kappa\sigma\tau. \tag{2.10}$$

即使不存在体力，$\nabla \cdot \sigma = 0$ 也不意味着 $\nabla\sigma = 0$。相反，曲率会使法向和切向应力分量相互耦合。因此，除非应力场退化，否则恒定牵引力与非零曲率不相容。这一观察构成了曲率相关界面理论的基础，并否定了离散互锁模型中采用的恒定应力假设 [22, 3]。

因此，我们不得不将曲率视为应力响应中的主动变量。界面几何不能独立于应力场进行规定。

最后，我们定义可容许类 profi les:

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in W^{2,2}([-a,a]) : f(\pm a) = 0,\ f'(\pm a) = 0,\ \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = A_0 \right\}. \tag{2.11}$$

边界条件确保与平坦基底平滑连接。积分约束固定互锁体积并排除平凡的展平，这与互锁设计研究中所采用的几何约束一致 [24, 16]。

后续所有分析均限于 $\mathcal{A}$。

3. 曲率–应力耦合与弹性界面

我们将研究限制在界面 Γ 的一个邻域内。利用与 Γ 相关联的 Frenet 标架（τ，n）引入局部坐标。令 s 表示沿界面的弧长，令 η 表示法向方向上的有符号距离。假设所有场在 Γ 的管状邻域内均光滑。

平衡方程 $\nabla\cdot\sigma = 0$ 可表示为适用于 Γ 的曲线坐标形式。将应力张量写在 Frenet 标架中，

$$\sigma = \sigma_{\tau\tau}\,\tau\otimes\tau + \sigma_{nn}\,n\otimes n + \sigma_{\tau n}(\tau\otimes n + n\otimes\tau), \tag{3.1}$$

散度算子会产生曲率相关修正项。直接计算可得

$$\nabla\cdot\sigma = \left(\partial_s\sigma_{\tau\tau} + \kappa(\sigma_{\tau\tau} - \sigma_{nn})\right)\tau + \left(\partial_s\sigma_{\tau n} + \kappa\sigma_{\tau n}\right)n + \partial_\eta(\cdot), \tag{3.2}$$

其中 κ 表示 Γ的有向曲率。

我们关注平衡条件在界面 $\eta = 0$ 上的约束。忽略高阶法向导数；当界面厚度趋于零时，这些导数也随之消失，切向平衡条件可化简为

$$\partial_s(\sigma n) + \kappa\sigma_{\tau\tau} n = 0 \quad \text{on } \Gamma. \tag{3.3}$$

这一恒等式纯属几何性质，除线弹性外不依赖任何本构假设。曲率相关界面理论中也隐含着类似的界面平衡关系 [13, 18]。

令 $t = \sigma n$ 表示牵引向量。前述方程可写为

$$\frac{dt}{ds} = -\kappa\sigma_{\tau\tau} n. \tag{3.4}$$

没有理由认为在远场剪切作用下 $\sigma_{\tau\tau}$ 会消失。因此，曲率必然会导致牵引力沿界面发生空间变化。所以，除退化应力状态外，非零曲率与恒定牵引力并不相容。这一结论以形式化方式阐明了离散互锁模型中提出的启发式质疑 [22, 4]。

现在我们来量化由此产生的应力放大。考虑一个承受均匀远场剪切 σ_0 的平坦参考界面 Γ_0 。引入一个小的法向扰动 $f(x)$，其曲率为 κ。围绕平坦构型对 Lam´e 系统进行线性化，得到

$$\sigma_{\tau\tau} = \sigma_0 + C_1\kappa + \mathcal{O}(\kappa^2), \tag{3.5}$$

其中， C_1 取决于 Lam´e 参数。在对称扰动下，线性项的积分为零。因此，应力平方的首个非零贡献按 κ^2 标度变化。这种标度与曲率正则化弹性模型和高阶界面能相一致 [18, 25]。

相反，曲率集中于点上的几何形状会产生奇异的应力度量。多边形界面会引入狄拉克型曲率项，从而导致任何二次应力度量发散。这一观察表明，无需借助数值证据，此类几何形状便不属于可容许类 [3]。

因此，我们不得不将沿 Γ 的局部应力放大 $\mathcal{S}$ 建模为曲率平方的函数。除一个乘法常数外，与线弹性及有限能量相容的最简形式为

$$\mathcal{S}(\kappa) = 1 + \gamma\kappa^2, \tag{3.6}$$

其中， $\gamma > 0$ 取决于材料参数和载荷强度。与线性化 Lam´e 系统的渐近一致性不相容，因此应排除更高次的曲率幂。

此处推导出的曲率–应力定律并非假设所得，而是与平衡、正则性和有限应力能相一致的最弱形式。因此，任何可容许的变分表述都必须在 $L^2(\Gamma)$ 中对曲率施加惩罚。

4. 变分泛函与约束集

前述分析迫使我们采用一种特定的变分结构。沿界面的局部应力放大由曲率的平方控制。没有理由认为任何更弱的惩罚都能产生有限应力，也没有理由认为任何更强的惩罚与线弹性相容。

令 Γ 表示为函数 $f \in W^{2,\,2}([-a,a])$ 的图像。弧长元为

$$ds = \sqrt{1+f'^2}\,dx, \tag{4.1}$$

曲率表示为

$$\kappa = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}. \tag{4.2}$$

上一节推导的曲率–应力耦合表明，局部应力放大密度与 $1+\gamma\kappa^2$ 成正比，其中 $\gamma > 0$ 取决于弹性模量和载荷强度。因此，沿界面的总局部应力度量为

$$J[f] = \int_{-a}^{a} \left(1+\gamma\kappa^2\right)\sqrt{1+f'^2}\,dx. \tag{4.3}$$

这一泛函的选取并非出于便利。它是在 $W^{2,\,2}$ 上有限且与平坦界面扰动下的 Lam´e 系统一致的最小曲率正则化量。缺乏曲率惩罚的泛函无法控制应力集中，而更高次的曲率项也不符合前文推导的线性化弹性力学标度关系 [18, 13]。

可容许类必须排除界面的平凡展平。这通过固定互锁面积的几何约束来实现。我们施加

$$G[f] := \int_{-a}^{a} f(x)\,dx - A_0 = 0, \tag{4.4}$$

其中 $A_0 > 0$ 为给定值。没有理由认为仅靠边界值就能防止展平。因此，积分约束至关重要。

可容许集为

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in W^{2,2}([-a,a]) : f(\pm a) = 0,\ f'(\pm a) = 0,\ G[f] = 0 \right\}. \tag{4.5}$$

边界条件确保与平坦基底平滑连接。它们是高阶弹性模型中的自然相容条件，并且与四阶界面能 [19, 3] 相一致。

该变分问题现在是适定的：

$$\text{Minimize } J[f] \quad \text{over } f \in \mathcal{A}. \tag{4.6}$$

由此可立即得出几点结论。泛函 J 在 $\mathcal{A}$上关于 $W^{2,2}$范数是强制的。事实上，曲率项控制二阶导数，而弧长项控制一阶导数。根据 κ^2 关于 f'' 的凸性以及索伯列夫空间 [10]中的标准紧性结果，可得下半连续性。

恰恰相反，带角点或恒定曲率的轮廓不满足可容许性。多边形轮廓不属于 $W^{2,2}$，而圆弧则不满足边界条件 $f'(\pm a) = 0$。因此，这些几何形状不可能是该泛函的驻点，更不可能是极小化子。这种排除是结构性的，并不依赖数值证据。

引入面积约束后，得到一个带有非零拉格朗日乘子的约束变分问题。由此得到的欧拉–拉格朗日方程是四阶且完全非线性的。其推导留待下一节进行。

5. 极小化子的存在性

我们考虑以下约束极小化问题

$$\inf_{f \in \mathcal{A}} J[f], \tag{5.1}$$

其中， J 和 $\mathcal{A}$在上一节中定义。我们使用变分法的直接方法证明极小化函数的存在性。

命题 5.1. 可容许集 $\mathcal{A}$ 非空，且在 $W^{2,2}([-a,a])$中弱闭。

证明. 通过构造可知其非空。令 $f_0(x) = c(a^2 - x^2)^2$，其中 c的选取满足 $\int_{-a}^{a} f_0(x)\,dx = A_0$。于是 $f_0 \in W^{2,2}([-a,a])$，并满足 $f_0(\pm a) = f_0'(\pm a) = 0$。

设 $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$在 $W^{2,2}([-a,a])$中弱收敛到 f。由紧嵌入，$f_n \to f$ 在 $C^1([-a,a])$中强收敛。因此，边界条件和面积约束在极限下均得到保持。故 $f \in \mathcal{A}$。 □

命题 5.2. 泛函 J 在 $\mathcal{A}$上是强制的。

证明. 记作

$$J[f] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + f'^2}\,dx + \gamma \int_{-a}^{a} \frac{(f'')^2}{(1+f'^2)^{5/2}}\,dx. \tag{5.2}$$

由于根据索伯列夫嵌入有 $f' \in L^\infty([-a,a])$，曲率项中的分母被正的常数从上、下两侧界定。因此

$$J[f] \geq C_1 \|f'\|_{L^2}^2 + C_2 \|f''\|_{L^2}^2 - C_3, \tag{5.3}$$

对于适当的常数 $C_i > 0$。边界条件消除了刚体模态。因此，只要 $\|f\|_{W^{2,\,2}} \to \infty$，就有 $J[f] \to \infty$ □

命题 5.3。泛函 J 在 $\mathcal{A}$上是序列弱下半连续的。

证明。设 $f_n \rightharpoonup f$在 W^2中弱收敛，$_2([-a,a])$。由紧嵌入，$f_n' \to f'$在 $L^2($$[-a,a])$中强收敛。因此，弧长项在弱收敛下是连续的。

曲率项关于 f'' 呈二次依赖，其系数关于 f'连续。由于 $f_n' \to f'$一致地成立，被积函数关于 f''是凸的，并满足标准增长条件。根据变分法中的经典结果 [10]，可得弱下半连续性。

□

定理 5.1。泛函 J至少存在一个极小化函数 $f^* \in \mathcal{A}$ 。

证明。设 $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ 为一个极小化序列。强制性意味着其在$W^{2,\,2}([-a,a])$中有界。因此，取一个子序列后，$f_n \rightharpoonup f^*$在 $W^{2,\,2}([-a,a])$中弱收敛。由 $\mathcal{A}$的弱闭性，$f^* \in \mathcal{A}$。下半连续性给出

$$J[f^*] \le \liminf_{n\to\infty} J[f_n] = \inf_{\mathcal{A}} J. \tag{5.4}$$

因此，f^* 是极小化函数。□

由此立即得到若干结论。该极小化函数具有平方可积曲率和连续斜率。带有角点或曲率奇异性的界面被排除在外。存在性结果不依赖于对称性或小斜率假设。该结果适用于完全非线性泛函。

6. 欧拉–拉格朗日方程与自然边界条件

我们推导约束变分问题的极小化子的必要最优性条件

$$\min_{f\in\mathcal{A}} J[f] \quad \text{subject to} \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = A_0. \tag{6.1}$$

设 $f^* \in \mathcal{A}$ 为极小化函数。根据巴拿赫空间中的标准拉格朗日乘子理论，存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得 f^* 是增广泛函的驻点

$$\mathcal{J}[f] = \int_{-a}^{a} \left(\sqrt{1+f'^2} + \gamma \frac{(f'')^2}{(1+f'^2)^{5/2}} + \lambda f \right) dx. \tag{6.2}$$

设 $\varphi \in W^{2,2}([-a,a])$ 是满足以下条件的可容许变分

$$\varphi(\pm a) = 0, \qquad \varphi'(\pm a) = 0, \qquad \int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 0. \tag{6.3}$$

$\mathcal{J}$ 在 f^* 沿方向 φ 的一阶变分必须为零：

$$\delta\mathcal{J}[f^*](\varphi) = 0. \tag{6.4}$$

直接计算可得

$$\delta\mathcal{J} = \int_{-a}^{a} \left(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\varphi' + 2\gamma \frac{f''}{(1+f'^2)^{5/2}}\varphi'' - \frac{5\gamma (f'')^2 f'}{(1+f'^2)^{7/2}}\varphi' + \lambda\varphi \right) dx. \tag{6.5}$$

分部积分两次，并利用 φ的可容许性，所有边界项均消失。我们得到

$$\int_{-a}^{a} \left(-\frac{d}{dx}\left[\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{5\gamma (f'')^2 f'}{(1+f'^2)^{7/2}} \right] + \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{2\gamma f''}{(1+f'^2)^{5/2}} \right] + \lambda \right) \varphi\, dx = 0. \tag{6.6}$$

由于 φ 在满足积分约束的条件下是任意的，因此 f^* 满足欧拉–拉格朗日方程

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{2\gamma f''}{(1+f'^2)^{5/2}} \right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} - \frac{5\gamma (f'')^2 f'}{(1+f'^2)^{7/2}} \right) + \lambda = 0 \quad \text{in } (-a,a). \tag{6.7}$$

该方程是四阶且完全非线性的。若不违背应力定律所施加的曲率正则化，就无法将其约化为二阶系统。

现在考察自然边界条件。允许 φ with$\varphi(\pm a) = 0$，但令 $\varphi''(\pm a)$自由变分，可得条件

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f''} \right|_{x=\pm a} = \left. \frac{2\gamma f''}{(1+f'^2)^{5/2}} \right|_{x=\pm a} = 0. \tag{6.8}$$

由于根据可容许性，$f'(\pm a) = 0$，因此可简化为

$$f''(\pm a) = 0. \tag{6.9}$$

这一条件具有明确的力学解释。附着点处的曲率必须为零。任何以非零曲率进入基底的界面都会产生奇异应力响应，因此不可能处于驻定状态。

由此可立即得出若干结论。常曲率轮廓违反边界条件，因此不予考虑。多边形轮廓不属于欧拉–拉格朗日算子的定义域。最优互锁几何形状

必须呈现平滑的曲率变化，曲率在端点处为零，并在内部达到极值。

因此，我们不得不认定，最优界面几何满足一个带齐次自然边界条件的四阶非线性椭圆方程。无论参数如何选择，经典圆形和多边形设计都无法满足这一方程组。

7. 经典互锁轮廓的非最优性

现在我们证明，经典互锁几何形状——具体而言，圆弧和多边形轮廓——无法使第4节中引入的曲率–应力泛函达到最小值，同时满足物理上可容许的约束。这个结论并非凭直觉得出，而是源于正则性、边界条件与欧拉–拉格朗日结构之间的不相容。

7.1. 可容许界面类

Let

$$\mathcal{A} := \Big\{ f \in W^{2,2}([-a,a]) \,:\, f(\pm a) = 0, \quad f'(\pm a) = 0, \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = A_0 \Big\},$$

其中 $A_0 > 0$ 是给定的。边界条件体现了与平坦基底介质的力学相容性，确保端点处的弯矩和剪切牵引力均为零。

回顾一下，可容许极小化子满足四阶欧拉–拉格朗日方程

$$\frac{d^2}{dx^2}\Big(\Phi(\kappa)\Big) + \lambda = 0, \tag{7.1}$$

其中，$\Phi(\kappa)$ 是第 ?? 节推导出的曲率非线性函数，而 $\lambda \neq 0$ 是与面积约束相关的拉格朗日乘子。

7.2. 圆形轮廓

考虑一段半径为 R 的圆弧 f_c，其定义（相差一个平移）为

$$\kappa(x) \equiv \frac{1}{R}.$$

此类轮廓满足 $\kappa' \equiv 0$，因此在经典意义下满足 $\kappa'' \equiv 0$。

引理 7.1. 对于任何 $\lambda \neq 0$，圆弧都不可能满足欧拉–拉格朗日方程 (7.1)。

证明。 由于 κ 是常数， $\Phi(\kappa)$ 也为常数，因此

$$\frac{d^2}{dx^2}\big(\Phi(\kappa)\big) = 0.$$

代入 (7.1) 得到 $\lambda = 0$，这与面积约束所要求的乘子非零这一必要条件相矛盾。因此， J over $\mathcal{A}$ 的临界集中不包含任何圆弧。
□

7.3. 多边形轮廓与分段线性轮廓

多边形交错结构对应于曲率集中在有限个点上的函数 f_p：

$$\kappa = \sum_j \alpha_j \delta(x - x_j)$$

以分布的意义而言。

命题 7.1. 多边形轮廓不是 $\mathcal{A}$ 中的可 *admissible* 竞争函数，也不能使 J 取得最小值。

证明。 泛函 J 涉及沿界面积分的曲率平方 κ^2 。对于多边形轮廓， κ 是一个测度，而不是一个 L^2 函数，因此κ^2 没有定义。因此，

$$J[f_p] = +\infty.$$

此外，多边形函数不属于 $W^{2,2}([-a,a])$，不符合弹性应力传递所要求的最低正则性。因此，多边形互锁结构不在 $\mathcal{A}$ 之内，因而不可能是极小化子。
□

7.4. 主要非最优性定理

我们将上述结果总结为以下定理。

定理 7.1。 经典互锁结构的非最优性 无论是圆形界面几何还是多边形界面几何，都不是曲率–应力泛函的极小化函数

$$J[f] = \int_{-a}^{a} (1 + \gamma\kappa^2)\sqrt{1 + f'^2}\, dx$$

在可容许类 $\mathcal{A}$中。特别地，任何极小化函数都必须具有非恒定曲率，并且严格属于 $W^{2,2}([-a,a])$。

证明。 证明分三个阶段进行：证明多边形轮廓的能量非有限性，检验圆弧的欧拉–拉格朗日条件，以及运用直接法证明存在性。

1. 排除多边形轮廓。 考虑一个分段线性（多边形）轮廓 $f_{poly} \in \mathcal{A}$。这种轮廓由在线段交汇处形成顶点$x_i \in (-a,\ a)$的线段组成。在这些顶点处，一阶导数 $f'(x)$不连续，这意味着分布意义下的二阶导数 $f''(x)$包含狄拉克δ测度，即$f''(x) = \sum \Delta f_i' \delta(x - x_i)$。泛函 $J[f]$涉及曲率κ的平方。由于在小斜率近似 $\kappa = f''(1 + f'^2)^{-3/2}$或完整的非线性形式下，我们有：

$$J[f_{poly}] \propto \int_{-a}^{a} (f''(x))^2 dx.$$

狄拉克δ函数的平方积分在分布意义下没有定义，并且在 L^2 范数的情形下发散至 $+\infty$。因此， $J[f_{poly}] = \infty$。由于存在满足 $J[f] < \infty$的 $W^{2,2}([-a, a])$函数（例如光滑样条），多边形轮廓不可能是极小化函数。

2. 排除圆形轮廓。圆形界面的特征是其曲率恒定，为 $\kappa = \kappa_0$。要成为极小化函数，f 必须满足增广泛函 $\mathcal{L} = J[f] + \lambda(\int f dx - A_0)$的欧拉–拉格朗日方程。利用曲率相关能量的变分（与 Helfrich 泛函或 Willmore泛函类似），以弧长 s 表示的必要条件为：

$$\gamma \left(2\frac{d^2\kappa}{ds^2} + \kappa^3 \right) - \kappa + \lambda \cos\theta = 0, \tag{7.2}$$

其中， θ 是切向量的角度。对于圆弧，由于 κ 为常数，故 $\frac{d^2\kappa}{ds^2} = 0$。将其代入（7.2）得：

$$\gamma \kappa_0^3 - \kappa_0 + \lambda \cos\theta = 0.$$

在这个方程中， γ, κ_0和 λ是常数。然而，$\cos\theta$沿任何非平直圆弧连续变化（因为切线会转动）。若要使恒等式对所有$s \in [0, L]$都成立，$\cos\theta$的系数必须为零（$\lambda = 0$），这就要求$\gamma\kappa_0^3 - \kappa_0 = 0$。即使在这个平凡情形下，半径固定的圆通常也无法同时满足四个边界条件 $f(\pm a) = 0, f'(\pm a) = 0$以及面积约束 A_0。因此，圆弧不是最优性系统的解。

3. 最优性结论。根据变分法的直接法，由于 f'' 中的二次项，泛函 $J[f]$ 在 $W^{2,2}([-a, a])$ 上下半连续且具有强制性。因此，极小化函数存在。由于多边形的能量为无穷大，且圆形不满足欧拉–拉格朗日必要条件，最优轮廓必定属于 $W^{2,2}$，并具有空间变化曲率 $\kappa(s)$；具体而言，其中的 $\frac{d^2\kappa}{ds^2}$ 项与拉格朗日乘子项$\lambda\cos\theta$的变分相平衡。 —

□

7.5. 力学解释

该定理表明，几何简单性并不意味着力学最优性。恒曲率设计抑制了曲率梯度，而曲率梯度对于重新分布弹性界面中的局部剪应力至关重要。相反，可容许极小化子必然形成平滑变化的曲率，以平衡弯曲正则化与界面长度。

这为经典互锁几何形状中持续出现的应力集中提供了数学解释，并促使人们寻找由变分原理而非几何直觉支配的非经典界面设计。

8. 最终推论

我们在曲率正则化弹性力学框架内，严格证明了经典互锁界面几何形状并非最优。通过将局部应力放大表述为可容许索伯列夫类上的一个变分问题，可以证明，在具有物理意义的边界条件和面积约束下，无论圆形轮廓还是多边形轮廓都不可能成为极小化函数。

圆形界面之所以被排除，是因为它们与面积约束所导出的欧拉–拉格朗日结构不相容；多边形几何形状则因正则性不足且曲率能量无穷大而被排除。这些结论源自变分表述本身，并不依赖启发式论证或数值近似。

分析表明，最优应力重分布必然要求曲率随空间变化，而本文通过四阶正则化来刻画这一点。因此，该结果本质上是否定性的：它并未确定最优几何形状，而是证明，在适当考虑依赖曲率的应力效应时，广泛采用的经典设计在数学上并不允许。

该框架简洁且稳健，仅依赖连续介质弹性理论和变分原理，因此广泛适用于弹性固体中的曲率敏感型界面问题。

参 考 文 献

1. E. Akleman等: *Topological interlocking: A new frontier for architectured materials* **142** 2020 100570 。《材料科学与工程：R：报告》（），。2. H. Alhasim 和 S. Kumar: *Fatigue behavior of PEEK fabricated by material extrusion additive manufacturing: The role of interlocking geometries* 。《国际疲劳学报》**203**（2026年），108250。3. F. Barchiesi 和 L. Placidi: *Variational Methods for Discrete Models of Granular Materials* 。载于：《连续介质力学百科全书》（H. Altenbach、A. Ochsner 编），施普林格，2024年。

4. E. Beatini 和 A. Pizzigoni: *Interlocking features in jack arches: Computational geometry and stress redistribution* 。载于：《REstructure REmaterialize REthink REuse》，第一版，2025年。5. P. G. Ciarlet: *Mathematical Elasticity: Volume I: Three-Dimensional Elasticity*。North-Holland，阿姆斯特丹，1988年。6. L. Djumas等: *Deformation and fracture of interlocking assemblies: A study of osteomorphic blocks* **6** 2016 26706 。《科学报告》（），。7. A. V. Dyskin等: *Topological interlocking of protective layers*。《自然》410（2001年），935–938页。8. A. V. Dyskin等: *Fracture resistant structures based on self-locking elements*。《混沌、孤子与分形》19（2003年），115–126页。9. Y. Estrin等: *Topological Interlocking Materials*。载于：《自然与工程中的架构材料》，Springer Nature，2021年。10. L. C. Evans: *Partial Differential Equations*。美国数学会，普罗维登斯，2010年。11. G. Fallacara: *Digital Stereotomy: Renaissance of Geometry in Masonry*。Aracne，罗马，2006年。12. M. Glickman: *A structural assembly of interlocking elements*。《专利文献与几何基础》（Glickman-Block理论），1984年。13. Z. P. Huang 和 J. Wang: *A curvature-dependent interfacial energy-based interface stress theory: Lagrangian and Eulerian descriptions* 。ResearchGate技术报告，2024年。14. M. Mirkhalaf等: *Simultaneous improvements of strength and toughness in topologically interlocked ceramics* **115** 2018 9128 9133 。《美国国家科学院院刊》（），–。15. A. Molotnikov等: *The concept of topological interlocking: From geometry to mechanical properties* **9** 2007 893 896 。《先进工程材料》（），–。16. E. Mousavian、 K. Bacchi 和 C. Casapulla: *Geometric optimization of interlocking blocks for enhanced stability* 2022 。《结构与建筑》（）。17. J. Naumann、 J. Eisert 和 P. Schmoll: *Variational optimization of projected entangled-pair states on the triangular lattice geometry* **113** 2026 。《物理评论B辑》（），045101。18. P. Neff等: *Curvature-dependent Eulerian interfaces in elastic solids: Minimization and topology optimization* **381** 2023 20220364 。《皇家学会哲学汇刊A辑》（），。19. P. Pietranti 和 T. Sun: *Geometrical mixed finite element methods for fourth order obstacle problems in linearised elasticity* 2405 20338 3 [ ] 2025 。arXiv：。v 数值分析（）。20. D. Shahsavari、 L. Dorfmann 和 P. Saxena: *Surface stability of a layered magnetoelastic half-space* **327** 2026 113420 。《国际固体与结构杂志》（），。21. T. Siegmund等: *Mechanics of Tubes Composed of Interlocking Building Blocks*。《国际工程科学杂志》172（2022年），103631。22. M. Tavoosi Gazkoh等: *Advancing Topological Interlocking Structures: Recent Developments Applications and Challenges in Civil Engineering* ，。《国际混凝土结构与材料杂志》18（2025年），1–25页。23. G. Tella: *Structural efficiency of interlocking designs: A variational approach to interface stability* 2018 。博士论文（研究档案库），米兰理工大学，。

24. Z. Wang, P. Song 和 M. Pauly: *Design and structural optimization of topological interlocking assemblies* **38** 2019 1 13 . ACM 图形学汇刊（），–。25. D. G. Zhang: *Accurate Nonlinear Bending Analytical Solutions for Elastic Interfaces satisfying geometric constraints* 2024 . Journal of Nonlinear Science（）。

Chandrasekhar Gokavarapu 数学讲师 数学系 政府学院（自治） 拉贾蒙德里 安得拉邦 印度 邮编：533105
c
handrasekhargokavarapu@gmail.com
c
handrasekhargokavarapu@gcrjy.ac.in