arXiv:2601.12388v1 [math.AC] 18 Jan 2026

交换环中的强空性

AMARTYA GOSWAMI 和 JOSEPH ISRAEL ZELEZNIAK

摘要。本文研究不带有限性假设的交换环中的强空洞理想和完全强空洞理想。我们确立了若干基本结构性质，包括极大性现象，以及在商环和满同态下的保持性。我们从避开给定理想的极值理想的角度，获得了完全强空洞理想的若干刻画，并证明不包含于雅各布森根中的强空洞理想必定是完全强空洞的。作为应用，我们在整环中导出强限制，并得到关于主理想整环的推论，其中包括一个离散赋值环判据。我们进一步探讨完全空洞性与完全不可约性之间的联系，并建立完全强空洞理想与完全强不可约理想之间的对应关系。最后，我们提出一个与最大公因数相关的条件，并证明在温和的有限性条件下，该条件等价于强空洞性。

1. 引言

设 R 是一个含幺交换环。按照 Rostami [2],I 是 R 的一个理想，称其为强空洞的，若对 R 的任意理想 A,B ，

$$I \subseteq A+B \quad \Longrightarrow \quad I \subseteq A \text{ or } I \subseteq B,$$

若对 R 的每个理想族 $\{J_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ ，则称其为完全强空洞的，

$$I \subseteq \sum_{\omega\in\Omega} J_\omega \quad \Longrightarrow \quad I \subseteq J_{\omega_0}, \text{ for some } \omega_0 \in \Omega.$$

这些“空洞性”条件刻画了关于和中包含关系的一种刚性现象，并以目前的形式首次发表于 [2]。后续研究进一步发展了各种变体及其应用，包括与拓扑构造的联系以及额外的有限性假设；例如参见 [1] 及其中的参考文献。

空洞性研究中反复出现的一个主题是：不包含 I 的理想族的行为，控制着 I 的结构性质和局部化理论性质。因此，对于理想 I ，我们考虑理想

$$\Gamma_I := \sum_{I\not\subseteq J} J,$$

并在方便时考虑相应的商理想

$$L_I := \Gamma_I : I.$$

对于强空洞理想，这些对象衡量了 I 距离被迫包含于给定理想还有多远：它们还为强不可约理想和完全不可约理想的理论提供了桥梁（参见 [4, 5]）。

第2 节的第一部分阐述强空洞理想的一般存在性性质。我们证明，在任意给定的理想 I 中，要么根本不存在强空洞理想，要么存在一个包含极大的强空洞理想（定理2.1）。随后，我们研究空洞性在标准构造下的表现：相对于非零因子的理想商（命题2.3）、商环上的映射（包括 Γ 和 L

2020数学主题分类。13A15, 13C13, 13F99。关键词和短语。强空洞理想，雅各布森根，离散赋值环。

并给出改进先前刻画的显式公式；以及满同态下的像与原像，其中“小核”假设可确保源中的空洞性。

第2节余下部分的核心目标之一，是在不施加有限性假设的情况下，阐明强空洞理想与完全强空洞理想之间的关系。这使我们能够将 [2], 中提出的许多概念扩展到此前仅针对有限生成理想讨论的情形。我们给出完全强空洞理想的两种互补刻画：（i）将其刻画为（按包含关系）不包含于某个适当理想中的最小理想（定理2.8）；（ii）刻画为存在一个避开I的最大理想（定理2.9）。这些刻画深化并推广了 [2]关于环的结果，并与算术假设相契合。我们还提炼出一个特别有效的雅各布森根判据：若强空洞理想不包含于$J(R)$中，则它自动是完全强空洞理想，并且能够确定一个唯一极大理想（定理2.15）。

第 2 节的结尾表明，在经典情形下，强空性会施加严格限制。对于整环，我们证明每个真强空洞理想都包含于 $J(R)$ (定理 2.21)，由此特别可知，半本原整环只有在其为域时才存在强空洞理想（推论 2.22）。在主理想整环的情形下，这最终导出一个明确的离散赋值环判据：主理想整环存在真强空洞理想，当且仅当它是离散赋值环（命题 2.26）。

接下来，我们将强空性与极大理想的深度联系起来。若 $I \subseteq J(R)$ 是强空洞的，那么对于每个满足 M且 $\dim_{R/M}(M/M^2) \geq 2$的极大理想，都有 $I \subseteq M^2$(定理 2.36)；更一般地，至多存在一个极大理想，使得 I未包含于某个幂 M^n (命题 2.38)。

在第 3 节中，我们将明确说明完全空洞性与完全不可约性之间的对偶关系。在局部情形下，完全强空洞理想与满足 J 且$J \neq (J : M)$ 的强不可约理想一一对应（定理 3.3），并进一步将其推广为任意环中完全强空洞理想与完全强不可约理想之间的内在双射（定理 3.4），这与 [4, 5]的思路一致。在诺特和阿廷情形下，我们还推导出进一步的推论和等价表述（包括 P-准素强不可约理想以及有限交现象）。第 4 节引入一种 GCD 环条件（$\star$），它在温和假设下保证强空洞性。

2. 一般结果

定理 2.1。 设R 为一个环，I 为R的一个理想。以下情形恰有一种成立：

(a) I中不存在强空洞理想。(b) 存在一个（关于包含关系）极大强空洞理想H，满足$H \subseteq I$。

证明。设

$$S := \{K \text{ an ideal of } R \mid K \subseteq I \text{ and } K \text{ is strongly hollow}\}.$$

~若$S = \varnothing$，则属于情形 (a)，无需证明。假设$S \neq \varnothing$。为应用佐恩引理，设$S \subseteq S$是一个非空链（关于包含关系），并令

$$H := \bigcup_{K \in \widetilde{S}} K.$$

~由于 S 是一条链，H 是一个理想，并且显然 H ⊆I。我们声称 H 是强空洞的。假设对于 R 的理想 A、B，有 H ⊆A+B。反设 H ⊈A 且 H ⊈B。取 x ∈H \ A 和 y ∈H \ B，因此~ ~x ∈K$_x$且 y ∈K$_y$，其中 K$_x$、K$_y$ ∈S。由于 S 是一条链，K$_x$ ⊆K$_y$或 K$_y$ ⊆K$_x$。不失一般性，设 K$_x$ ⊆K$_y$。于是 x、y ∈K$_y$且 K$_y$ ⊆A + B。由于 K$_y$是强空洞的，K$_y$ ⊆A 或 K$_y$ ⊆B。若 K$_y$ ⊆A，则 x ∈A，矛盾；若 K$_y$ ⊆B，则 y ∈B，也矛盾。因此，H ⊆A 或 H ⊆B 必有一个成立，从而证明 H 是强空洞的。因此，H ∈S 且 H 是一个

~链 S 的上界。根据佐恩引理，S 有一个极大元 $H_{\max}$，且 $H_{\max} \subseteq I$。这就得到了情形 (b)。□

命题 2.2。 设 I 是环 R 的完全强空洞理想。则 $I \cap \Gamma_I$ 是严格包含于 I 的最大理想，并且 $I + \Gamma_I$ 是严格包含 Γ_I 的最小理想。

证明。 设 J 是 R 的一个理想。若 $J \subset I$，则 $I \not\subseteq J$，从而 $J \subseteq \Gamma_I$，这说明 $J \subseteq I \cap \Gamma_I$。其余断言同理可得。□

命题 2.3。 设 I 是 R 的一个理想，且 $a \in R$，其中 a 是非零因子。若 $Ra \cap I$ 是强空洞（完全强空洞）的，则 $I : Ra$ 是强空洞的（完全强空洞的）。

证明。 设 $(I : Ra) \subseteq \sum_{\omega\in\Omega} J_\omega$，其中 $\{J_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是某个理想族。于是

$$Rb \cap Ra = (I : Ra)a \subseteq \sum_{\omega\in\Omega} J_\omega a,$$

其中，第一个等式已在 [5, 引理 2.5] 中对主理想证明，但对所有理想 I 均成立。根据假设，存在 $\omega \in \Omega$ 使得 I ∩Ra ⊆ J_αa。再次对两边取关于 Ra 的商理想，得到 (I ∩Ra : Ra) ⊆ (J_ωa : Ra)。这等价于 (I : Ra) ⊆ (J_ωa : a) = J_ω + (0 : a) = J_ω。□

命题 2.4。 设 I、J 是 R 的理想，满足 $I \not\subseteq J$。那么，若 I 是 R 中的强空洞理想，则 $(I + J)/J$ 是 R/J 中的强空洞理想。在这种情况下，

$$\Gamma_{(I+J)/J} = \Gamma_I/J \quad and \quad L_{(I+J)/J} = L_I/J.$$

证明。设 S、T 是 R 的两个理想，满足 S、T ⊇J，且 (I + J)/J ⊆((S/J) + (T /J)). 那么，我们有 (I + J)/J ⊆(S + T)/J，因此 I ⊆I + J ⊆S + T。由于 I 是 R 的强空洞理想，我们有 I ⊆S 或 I ⊆T。由此可得 I + J ⊆S + J = S 或 I + J ⊆T + J = T。由此可知，(I + J)/J ⊆S/J 或 (I + J)/J ⊆T /J。

现在假设 I ⊈S。为导出矛盾，假设 I + J ⊂S + J。由于 I ⊆I + J ⊆S + J 且 I 是强空洞理想，我们必有 I ⊆ J 或 I ⊆S，这就产生了矛盾。因此，I + J ⊈S + J 且 (I + J)/J ⊈(S + J)/J。于是 (S + J)/J ⊆ $\Gamma_{(I+J)/J}$，由于 S 是任意一个不包含 I 的理想，我们有

$$\sum_{I\not\subseteq S} (S + J)/J = \left(\sum_{I\not\subseteq S} S + J\right)/J = (\Gamma_I + J)/J.$$

但是由于 I ⊈J，我们有 J ⊆Γ_I。因此 Γ_I/J ⊆$\Gamma_{(I+J)/J}$。现在设 S/J 是 R/J 中的一个理想，使得 (I + J)/J ⊈S/J。于是我们有 I + J ⊈S，从而 I ⊈S。根据定义，我们有 S ⊆Γ_I，因此 S/J ⊆Γ_I/J。由于 S/J 是满足 S/J ⊉(I + J)/J 的任意理想，我们有 $\Gamma_{(I+J)/J} \subseteq \Gamma_I$/J。我们得出 $\Gamma_{(I+J)/J} = \Gamma_I$/J。对于商理想，我们可以直接计算。

$$L_{(I+J)/J} = (\Gamma_{(I+J)/J}) : ((I + J)/J) = (\Gamma_I/J) : ((I + J)/J) = (\Gamma_I : I + J)/J.$$

最后，我们有

$$\Gamma_I : (I + J = (\Gamma_I : I) \cap (\Gamma_I : J) = \Gamma_I : I = L_I.$$

我们得出 $L_{(I+J)/J} = L_I/J$。 □

这将 [1, 命题。3。21] 和 [2, 命题。1。19] 的结果从完全强空洞理想（分别为主生成强空心理想）推广到了任意强空洞理想。此外，该结果还消除了商理想中一个不必要的因子。与主生成强空洞理想相比，对任意强空洞理想的研究明显尚不充分。

事实上，我们可以证明一个更一般且更强的结果：满射环同态保持强空洞理想。

命题 2.5。 设 φ： $R \to R'$ 是一个满环同态，且 I 是 R 的强空洞理想，满足 $I \not\subseteq \ker\varphi$。则 φ（I）在 R' 中是强空洞的。将强空洞替换为完全强空洞时，同样的结果也成立。

证明。 设 $\varphi(I) \subseteq J' + K'$ 是 J'、K' 在 R' 中的理想。取原像可得

$$I \subseteq \varphi^{-1}(J' + K') = \varphi^{-1}(J') + \varphi^{-1}(K').$$

由于 I 是强空洞的，因此 $I \subseteq \varphi^{-1}(J')$ 或 $I \subseteq \varphi^{-1}(K')$。因此 $\varphi(I) \subseteq J'$ 或 $\varphi(I) \subseteq K'$。由于有限生成理想的满射像仍是有限生成的，因此完全强空洞理想也有相同的结果。 □

以下结果可视为如下事实的对偶：满环同态保持包含核的素理想。它表明，在满环同态下，强空洞理想的原像在包含核的理想子格中仍是强空洞的。

命题 2.6。 设 $\varphi : R \to R'$ 是满射，且 J' 是 R' 的强空洞理想。那么，对 R 的任意理想 A、B，

$$\varphi^{-1}(J') \subseteq A + B \;\Rightarrow\; \varphi^{-1}(J') \subseteq A + \ker\varphi \;\; or \;\; \varphi^{-1}(J') \subseteq B + \ker\varphi.$$

证明。由 $\varphi^{-1}(J') \subseteq A + B$ 及满射性可得 $J' \subseteq \varphi(A) + \varphi(B)$。由于 J' 是强空洞的，因此 $J' \subseteq \varphi(A)$ 或 $J' \subseteq \varphi(B)$。取原像得到 $H \subseteq A + \ker\varphi$ 或 $H \subseteq B + \ker\varphi$。□

定义 2.1。 模 M 的子模 N 称为小的（记作 $N \ll M$），如果对于每个子模 $L \subseteq M$，$N + L = M$ 蕴含 $L = M$。

定理 2.7。 设 φ： $R \to R'$ 为满射，J' 在 R' 中是强空洞的，且 $H := \varphi^{-1}(J')$。若 $\ker\varphi \ll H$，则 H 在 R 中是强空洞的。将强空洞替换为完全强空洞时，同样的结论也成立。

证明。 假设 $H \subseteq A + B$。根据命题 2.6，$H \subseteq A + \ker\varphi$ 或 $H \subseteq B + \ker\varphi$。不妨设 $H \subseteq A + \ker\varphi$。与 H 求交，并使用模分配律（因为 $\ker\varphi \subseteq H$）：

$$H = (A + \ker\varphi) \cap H = (A \cap H) + \ker\varphi.$$

由于 $\ker\varphi \ll H$，我们必有 $A \cap H = H$。因此，$H \subseteq A$。另一种情形是对称的。 □

定理 2.8. 设 R 是一个环，I 是 R 的一个理想。那么，I 是完全强空洞理想，当且仅当存在一个理想 K，使得 I 是关于不包含于 K 这一条件下按包含关系最小的理想。

证明。假设 I 是完全强空洞的。设 J 是 R 的一个理想，满足 $J \not\subseteq \Gamma_I$。根据 Γ_I 的定义，我们有 $I \subseteq J$。因此，I 是关于不包含于 Γ_I 这一条件下最小的理想。反过来，假设存在 K，使得 I 是关于不包含于 K 这一条件下最小的理想。设 S 、 T 是两个理想，满足 $I \subseteq S + T$。若 $I \not\subseteq S$ 且 $I \not\subseteq T$，则 $S + T \subseteq K$，矛盾。因此 I 是强空洞的。设 $x \in I$，若 $x \notin K$，则 $I = (x)$，因为它是未包含于 K 的最小理想。若对所有 $x \in I$ 都有 $x \in K$，则 $I \subseteq K$。因此，存在 $x \in R$，使得 $I = Rx$。由此可得 I 是完全强空洞的。□

现在我们通过证明可以去掉 [2,定理 1.14] 中 I 有限生成这一假设，来推广该定理。

定理 2.9. 设 I 是环 R 的非零理想。那么，I 是完全强空洞的，当且仅当存在一个关于不包含 I 的环 R 的最大理想。

证明. 正向结论见 [2, 定理。1.14]。现在假设存在一个关于不包含 I 的环 R 的最大理想 J。根据定义，$I \not\subseteq J$。假设存在一个理想族 $\{K\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$，使得 $I \subseteq \sum_{\alpha\in\Omega} K\alpha$，且对所有 $\alpha \in \Omega$，都有 $I \not\subseteq K\alpha$。那么，对所有 $\alpha \in \Omega$，都有 $K_\alpha \subseteq J$。因此 $\sum_{\alpha\in\Omega} K_\alpha \subseteq J$，这就产生了矛盾。因此，对某个 $\alpha \in \Omega$，有 $I \subseteq K\alpha$。此外，在这种情况下，关于不包含 I 的最大理想为 Γ_I。□

注 2.10。 以下陈述优雅地刻画了完全强空洞理想：环 R 的理想 I 是完全强空洞的，当且仅当 $I \not\subseteq \Gamma_I$。在考虑算术环时，第一种刻画中的“最小”可以改为“极小”。

命题 2.11。 设 R 是一个算术环，I 是 R 的一个理想。那么，I 是完全强空洞理想，当且仅当存在一个理想 K，使得 I 是关于不包含于 K 这一性质的极小（按包含关系）理想。

证明。正向论证保持不变。设存在一个理想 K，使得 I 是关于不包含于 K 这一性质的极小理想。设 S、T 是 R 的两个理想，满足 $I \subseteq S + T$。假设 $I \not\subseteq S$ 且 $I \not\subseteq T$。由 I 的极小性可得 $I \cap S \subseteq K$ 且 $I \cap T \subseteq K$。因此，$I \cap (S + T) \subseteq K$，从而 $I \subseteq K$，矛盾。因此，I 是强空洞的。利用与定理 2.8 相同的论证，可以容易地看出 I 是一个主理想。由此得出，I 是完全强空洞的。□

我们可以替 换要求R为算术环的条件，对相关理想施加更严格的限制 .

推论 2.12. 设K是环R的一个强不可约理想。若存在一个理想I，它在不被包含于K的理想中是极小的，则I是完全强空洞的。

证明。 设I是在不包含于K的理想中极小的理想。那么，按照上面的证明，我们得到$I \cap S \subseteq K$，从而有$S \subseteq K$。于是必有$T \not\subseteq K$，因此$I \cap T = I$。所以$I \subseteq T$。□

前两个结果也导出了强不可约理想的对偶结果。我们在下面陈述这些对偶结果；其证明只需在理想的对偶格中重复前面的证明，是一道直接的练习。

推论 2.13. 设R是一个算术环，且K是R的一个理想。那么，K是强不可约理想，当且仅当存在一个理想I，使得K是（按包含关系）在不包含I的理想中极大的理想。

推论 2.14。 设I是环R的一个强空洞理想。若存在一个关于不包含I而言极大的理想K，则K是强不可约的。

以下结果给出了强空洞理想必然是完全强空洞理想的条件。也可以将定理 2.15 视为对 [2, 定理。1。27] 其中一部分的扩展，因为它表明这些结果对任意强空洞理想均成立。

定理 2.15。 设I是环R的一个强空洞理想。那么，当$I \not\subseteq J(R)$时，I是一个完全强空洞理想。在这种情况下，$\Gamma_I = M$，其中M是环R中不包含I的唯一极大理想。

证明。设 $I \not\subseteq J(R)$。根据 [1, 命题 3.8], , 存在 R 的唯一极大理想 M，使得 $I \not\subseteq M$。因此 $M \subseteq \Gamma_I$，从而 $\Gamma_I = M$ 或 $\Gamma_I = R$。假设 $\Gamma_I = R$。则存在 R 的一个理想 J，使得 $I \not\subseteq J$ 且 $J \not\subseteq M$。考察 $J + M = R \supseteq I$ 的和，可知 $I \subseteq J$ 或 $I \subseteq M$。因此$\Gamma_I = M$，这与假设矛盾。□

注记 2.16。 定理2.15为从 [2,定理 1.27]中的所有结果提供了一个较弱的条件。它还表明， [2, 命题 2.14]和 [2,命题 2.15]对于任意强空洞理想都成立，而不仅仅是对于完全强空洞理想成立。

在陈述下一个结果之前，我们需要回顾一个定义。半本原环是雅各布森根为零的环。

推论 2.17. 半本原环中的每个强空洞理想都是完全强空洞的。

命题 2.18. 设I是环R的一个强空洞理想。若$I \not\subseteq J(R)$，则I关于不包含于$J(R)$是极小的。

证明。 设J是R的一个理想，满足$(0) \subset J \subseteq I$。若$J \not\subseteq \Gamma_I$，则$I \subseteq J$，因此$J = I$。所以，若$J \neq I$，则$J \subseteq J(R)$。由此得出，$I$关于不包含于$J(R)$是极小的。□

定理 2.19. 设I是环R的一个理想。若I关于不包含于$J(R)$是极小的，则I是完全强空洞的。

证明。 根据定理2.15，我们只需证明I是强空洞的。由于$I \not\subseteq J(R)$，必然存在一个极大理想M，使得$I \not\subseteq M$。因此，根据I的极小性，我们有$I \cap M \subseteq J(R)$。由于所有极大理想都是强不可约的，我们可以得出，对于所有$N \in \mathrm{Max}(R)\backslash\{M\}$，都有$I \subseteq N$。于是$I$是关于不包含于$M$的极小理想。根据命题 2.18 ，我们得到$I$是强空洞的。□

命题 2.20。 设$I \not\subseteq J(R)$是环R中的一个理想，且$a \in R$是一个非零因子。如果$I \cap Ra$是强空洞的，那么$I = (I : Ra)$，并且I是一个完全强空洞理想。在这种情况下，我们有$Ia = I \cap Ra$

证明。由命题 2.3 可知，(I : Ra) 是强空洞的。显然 I $\subseteq$ (I : Ra)，因此 (I : Ra) $\not\subseteq$ J(R)。于是，由定理 2.15，(I : Ra) 是完全强空洞理想；根据命题 2.18，它在不包含于雅可比根的理想中是极小的。这迫使 I =(I : Ra)，从而 I a =(I : Ra)a =I $\cap$Ra。□

定理 2.21. 设R是一个整环，且I是R的真理想。如果I是强空洞的，那么$I \subseteq J(R)$。

证明。假设 I 是强空洞的，且 I $\not\subseteq$ J(R)，以此导出矛盾。于是，根据定理 2.15，I 是完全强空洞的。因此，对某个 a $\in$R，有 I =Ra。由于 R 是整环，a 是非零因子。因此，根据命题. 1.9]，R 是局部环。根据假设，I $\not\subseteq$J(R) =M，其中 M 是 R 的唯一极大理想。因此 I =R，这与假设 I 是 R 的真理想相矛盾。因此，I 必须包含于 R 的雅可比根中。□

推论 2.22。 设R是一个半本原整环。当且仅当R是域时，R存在一个强空洞理想I。

证明。 假设$I \neq R$。根据命题2.21 ，我们有$I \subseteq J(R) = \{0\}$，这与强空洞理想是非零理想相矛盾。因此I $= R$。于是$I \not\subseteq J(R)$，从而是完全强空洞的。因此R根据 [2, 命题 1.12]是局部的。于是R是一个局部半本原整环，其唯一极大理想为零理想。因此R是域。反之，若R是域，则R显然是一个强空洞理想。□

备注 2.23。 上述结果表明，对于任意整环R ，多项式环$R[x]$ 没有强空洞理想。

命题 2.24。 设R是一个环，且I是R的一个理想。若Γ_I是一个真理想，则或者$I \subseteq J(R)$，或者I是完全强空洞的。

证明。 假设I不是完全强空洞的，因此$I \subseteq \Gamma_I$。若$I \not\subseteq J(R)$，则存在一个极大理想M使得$I \not\subseteq M$。因此$M \subseteq \Gamma_I$，这意味着$M = \Gamma_I$，从而$I \subseteq M$，这与假设矛盾。因此，若$I \subseteq \Gamma_I$，则$I \subseteq J(R)$。现在假设$I \not\subseteq \Gamma_I$。那么I是完全强空洞的。□

在讨论下一个命题之前，我们先引入一个术语。若环R的两个理想J和K满足$J + K = M$，其中R的某个极大理想为M，则称它们为弱互素 。

命题 2.25。 设R是一个环，I是R的一个理想。若Γ_I是真理想，则I关于互素理想之和是强空洞的。在这种情况下，若Γ_I不是极大理想，则I关于弱互素理想之和是强空洞的。

证明。 设$I \subseteq J + K = R$。那么，如果$I \not\subseteq J$且$I \not\subseteq K$，就会有$R = J + K \subseteq \Gamma_I$，这与我们的假设矛盾，因为$\Gamma_I$是一个真理想。当$\Gamma_I$不是极大理想时，命题的其余部分显然成立。□

命题 2.26。 设R是一个主理想整环。那么R是离散赋值环，当且仅当存在一个强空洞理想I *whichisstronglyhollow*。

证明。 设R是一个离散赋值环。那么，根据 [2, 命题。1.11]，唯一极大理想是完全强空洞的。反过来，设存在一个完全强空洞理想$I \neq R$。显然，R是局部的。若$J(R) = (0)$，则推论 2.22 表明R是一个域，因此$I = (0)$，这与I是完全强空洞理想的假设矛盾。因此$J(R) \neq (0)$。具有非零雅可比根的局部主理想整环要么是域，要么是离散赋值环。我们已经证明R不可能是域，因此它是离散赋值环。□

推论 2.27. 设R是一个非离散赋值环的主理想整环。当且仅当R是局部环时，R才存在强空洞理想I。在这种情况下，R唯一的强空洞理想就是R本身。

推论 2.28. 设R是一个非域的主理想整环。当且仅当R中的每个理想都是强空洞理想时，R才存在真强空洞理想I。

证明. 反向蕴含显然。对于正向蕴含，注意到命题 2.26 表明R是一个离散赋值环，因此R 中的理想构成一条链。因此R 中的所有理想都（按包含关系）可比较。由 [2, 定理 2.5] 可得，R中的每个理想都是强空洞理想。□

以下结果将 [2,命题 1.24] 推广到强空洞理想，并给出了一个更容易检验的条件。

命题 2.29. 设I是环R的一个理想，且$M \in \mathrm{Max}(R)$。若存在理想K，使得$K \subseteq M$，且K不包含于任何其他极大理想，并且$IK = (0)$，且I在R_M中是强空洞的，那么I就是强空洞理想。

证明。 我们有 $\mathrm{Ann}(I) \supseteq K$，因此对于任意极大理想 $N \in \mathrm{Max}(R)\backslash\{M\}$，都有 $\mathrm{Ann}(I) \not\subseteq N$，从而$\mathrm{Ann}(I) \subseteq M$。令 $N \in \mathrm{Max}(R)\backslash\{M\}$，并考虑局部化

$$(I\mathrm{Ann}(I))_N = I_N\mathrm{Ann}(I)_N = 0_N.$$

由于 Ann(I) ⊈N ，我们有 $I_N R_N = 0_n$从而 $I_n = 0_N$。设 I ⊆S +T 。那么 $I_N \subseteq S_N$且 $I_N \subseteq T_N$，由于 I_M在 R_M中是强空洞的，因此 $I_M \subseteq S_M$或 $I_M \subseteq T_M$。不妨设 $I_M \subseteq S_M$。那么 I ⊆S，因为该包含关系在每个极大理想处的局部化中都成立。因此，I 是强空洞的。□

注 2.30。 注意，极大理想 M 的任意n次幂，或任意 M-准素理想，都满足上述关于 K 的条件。

推论 2.31. 设 I 是环 R 的一个理想，M 是 R的一个极大理想。设 K 是包含于 M且不包含于任何其他极大理想中的理想，并且满足$IK = (0)$。若 $I \not\subseteq J(R)$，则I是完全强空洞的。

证明. 我们只需证明I_M 在R_M中是完全强空洞的。为此，我们将证明$I_M = R_M$，然后利用R_M 是完全强空洞的这一事实，因为它是一个局部环。注意，对所有$N \in \mathrm{Max}(R)$，都有$IK \subseteq N$。因此，对所有$N \in \mathrm{Max}(R) \setminus \{M\}$，都有$I \subseteq N$。由于$I \not\subseteq J(R)$，可知$I \not\subseteq M$，证明完毕。□

推论 2.32. 设I 是环R 的一个非幂零理想，M 是R的一个极大理想。若存在一个M-准素理想K，使得$IK = (0)$，则I是完全强空洞的。此外，在这种情况下，I包含于除M之外的每个素理想中，且 $\mathrm{Ht}(M) = 0$，即M是一个极小素理想。因此R_M的克鲁尔维数为零。

证明。设 $\mathrm{P} \in \mathrm{Spec(R)}$。若 $\mathrm{P} \neq \mathrm{M}$，则 $\mathrm{I\,K} = (0) \subseteq \mathrm{P}$，这表明 $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{P}$。因此，I 包含于所有不等于 M 的素理想中。由于 $\mathrm{I} \not\subseteq \mathrm{Nil(R)}$，必有 $\mathrm{I} \not\subseteq \mathrm{M}$。因此，根据推论 2.31，I 是完全强空洞的。此外，由于 I 包含于每个不等于 M 的素理想中，且 $\mathrm{I} \not\subseteq \mathrm{M}$，因此 $\mathrm{Ht(M)} = 0$。该结论的其余部分由定义可得。□

注记 2.33。上述推论再次表明，若K是极大理想M的任意次幂，结论仍然成立。

推论 2.34。设I 是约化诺特环R 的一个理想，M 是R的一个极大理想。若存在一个M-准素理想K使I被其湮灭，则R_M是一个域。

证明。 由推论 2.32，可知 M 是一个极小素理想。因此 R_M 是一个域，根据 [6, 标签 00EU]。 □

为了证明下一个定理，我们需要回顾以下广为人知的结果。

引理 2.35。 设 V是一个 k-向量空间，且 $\dim V \geq 2$，并设 $0 \neq W \subsetneq V$是一个真子空间。则存在子空间 U， $H \subset V$使得

$$\dim U = 1, \qquad \dim H = \dim V - 1, \qquad V = U \oplus H,$$

此外，$W \not\subseteq U$且 $W \not\subseteq H$。特别地，如果 $\dim V = 2$，则 U和 H都可以取为一维，且 $V = U \oplus H$。

证明。取 $\mathrm{u} \in \mathrm{V} \setminus \mathrm{W}$，并令 $\mathrm{U} := \mathrm{ku}$，于是 $\mathrm{W} \not\subseteq \mathrm{U}$。取一个线性泛函 $\varphi \in \mathrm{V}^*$，使得 $\varphi(\mathrm{u}) = 1$且 $\varphi|_W \neq 0$。令 $\mathrm{H} := \ker \varphi$。则 $\mathrm{u} \notin \mathrm{H}$，因此 $\mathrm{V} = \mathrm{U} \oplus \mathrm{H}$；又由于 $\varphi|_W \neq 0$，存在 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$，使得 $\varphi(\mathrm{w}) \neq 0$。因此 $\mathrm{w} \notin \mathrm{H}$ 且 $\mathrm{W} \not\subseteq \mathrm{H}$。□

定理2.36. 设 R 是一个环，且 $I \subseteq J(R)$ 是 R 的一个强空洞理想。那么对于每个满足维数$\dim_{R/M}(M/M^2) \geq 2$ 的极大理想 M，都有 $I \subseteq M^2$。

证明。固定一个极大理想 M，记 $\mathrm{k} := \mathrm{R/M}$，$\mathrm{V} := \mathrm{M/M}^2$。由于 $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{J(R)} \subseteq \mathrm{M}$，像 $\mathrm{W} := (\mathrm{I} + \mathrm{M}^2)/\mathrm{M}^2 \subseteq \mathrm{V}$ 有定义。假设 $\dim_k \mathrm{V} \geq 2$且 $\mathrm{I} \not\subseteq \mathrm{M}^2$。那么我们有 $\mathrm{W} \neq 0$。根据引理 2.35，可以选取 U，$\mathrm{H} \subset \mathrm{V}$，使得 $\dim \mathrm{U} = 1$，$\dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{V} - 1$，$\mathrm{V} = \mathrm{U} \oplus \mathrm{H}$，且 $\mathrm{W} \not\subseteq \mathrm{U}$，H。令 $\pi : \mathrm{M} \to \mathrm{V}$ 为商映射，并设

$$J := \pi^{-1}(U), \qquad K := \pi^{-1}(H).$$

Then

$$\frac{J+K+M^2}{M^2}=\frac{J+M^2}{M^2}+\frac{K+M^2}{M^2}=U+H=V=\frac{M}{M^2},$$

因此 J +K +M^2 =M。在 M 处局部化并在局部环 R$_M$中应用中山引理，得到 (J +K)$_M$ =M$_M$。因此 J + K =M。由于 W ⊈U，H，我们有 (I +M ^{2})/M^2 ⊈(J +M ^{2})/M^2 且 (I +M ^{2})/M^2 ⊈(K +M ^{2})/M ^{2}。因此，必有 I ⊈J 且 I ⊈K。这与 I 是强空洞理想这一事实矛盾。因此 W =0，从而得出 I ⊆M^2。□

注记 2.37。 注意，若维数$_{R/M}(M/M^2)=0$，则$M=M^2$，因此上述结果显然成立。所以，强空洞理想I满足$I\not\subseteq M^2$（其中M为某个极大理想）的唯一情形是维数$_{R/M}(M/M^2)=1$。

命题 2.38. 设R为一个环，且$I\subseteq R$是R的强空洞理想。至多存在一个极大理想，使得$I\not\subseteq M^n$，其中$n\in\mathbb{N}$。

证明。设 M 和 N 是两个不同的极大理想，且存在 i , j ∈N，使得 I ⊈M^{i}且 I ⊈N j。由于 M 和 N 是素理想，因此对于任意不同于 N 的极大理想 K，均有 N j ⊈K；对于任意不同于 M 的极大理想 J，均有 M^i⊈J。因此 M i +N j =R，这与 I 是强空洞理想这一事实矛盾。因此，对于所有 n ∈N，I 均包含于 M^{n}或 N n。若假设该极大理想不唯一，并采用相同的推理，即可得到这一性质所对应的极大理想唯一。□

推论 2.39。 设R为一个环。设A和I为R的理想，且I为强空洞，并且$I\not\subseteq J(R)$。若对于某个$n\in\mathbb{N}$，有$I\not\subseteq A^n$，则$A\subseteq\Gamma_I$。

证明。 I根据定理2.15为完全强空洞理想。该陈述的其余部分由以下事实可得： Γ_I是一个素理想。□

这些结果给出了强空洞理想的一般刻画，如下所述 w.

定理 2.40。 设R为一个环，且I是R的强空洞理想。则以下情形之一成立：

(1) 存在唯一的极大理想M，使得$I\not\subseteq M$。在此情况下，I是一个主完全强空洞理想，且有$\Gamma_I=M$，并且，

$$I\subseteq\bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ A\not\subseteq\Gamma_I}}A^n.$$

(2) I包含于所有极大理想以及所有极大理想的各次幂中。也就是说，

$$I\subseteq\bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ M\in\operatorname{Max}R}}M^n.$$

(3) I包含于所有极大理想中，并且存在唯一的极大理想M，使得$I\not\subseteq M^n$，其中$n\geq 2$。

3. 完全强空洞理想与完全不可约理想

命题 3.1. 设(R,M)是一个局部环。若J是R的强不可约理想，且$J\subset(J:M)$，则$(J:M)$是完全强空洞。

证明. 根据 [5,定理. 2.6(1)],，我们有 (J : M) 是一个主理想。取 x ∈R，使得 (J : M) =Rx。设 S、T 是 R 中的理想，且 R x ⊆S +T。反设 R x ⊈S 且 R x ⊈T。于是由 [5,定理. 2.6(3)],可得 R x ⊆ S +T ⊆J，这与我们的假设 J ⊂(J : M) 矛盾。因此我们得出 x 是 R 的强空心元素，故 (J : M) 是完全强空洞。□

注记 3.2。 在局部环$(R,\ M)$中，若强不可约理想J严格包含于商理想$(J:M)$之内，则J是完全强不可约的（[4, 定理. 1.3(iv)]）。

定理 3.3。 设$(R,\ M)$是一个局部环。那么，R 的完全强空洞理想集合与满足J 不等于 $J:M$的强不可约理想J集合之间存在一个双射。等价地，完全强空洞理想与完全强不可约理想之间存在一个双射。

证明。设 I 是一个完全强空洞理想。那么 Γ_I 是一个完全不可约理想。因此$\Gamma_I \subset (\Gamma_I : M)$，由 [4,定理. 1.3(iv)]可得。我们断言 I =$(\Gamma_I : M)$。显然，由 Γ_I的严格包含关系可知 I ⊆$(\Gamma_I : M)$。然后利用 [5,定理. 2.6(3)] 和 $\Gamma_I \not\supseteq I$，我们得到 $(\Gamma_I : M) \subseteq I$。由此得出 $(\Gamma_I : M) = I$。现在设 J 是一个强不可约理想，且满足 J ⊂(J : M)。那么，由命题 3.1 可知 (J : M) 是完全强空洞的。我们断言 $\Gamma_{(J:M)} = J$。由于 J ⊉(J : M)，可得 $J \subseteq \Gamma_{(J:M)}$。我们再次应用 [5, 定理. 2.6(3)]，并利用 $(J : M) \not\subseteq \Gamma_{(J:M)}$ 这一事实，得出$\Gamma_{(J:M)} = J$。因此，将完全强空洞理想 I 映射为 Γ_I，并将完全强不可约理想 J 映射为 (J : M) 的映射是一个双射。□

定理 3.3 中的双射，利用 [5, 定理. 2.6(2)] 可以写成更明确的形式。在局部环 (R, M) 中，每个完全强不可约理想都具有 $\Gamma_I = IM$ 的形式，其中 I 是某个完全强空洞理想。每个完全强空洞理想都具有 $I = (\Gamma_I : M) = (IM : M)$ 的形式，其中 Γ_I 是某个完全强不可约理想。下面的结果推广了这种联系，并阐明了完全强不可约理想与完全强空洞理想之间的对偶性。

定理 3.4. 在一个环中，完全强空洞理想与完全强不可约理想之间存在双射。

证明。 每个完全强空洞理想都通过不包含它的最大理想确定一个完全强不可约理想。反方向显然。给定一个完全强不可约理想 K，考虑理想 $I = \bigcap_{J \not\subseteq I} J$。注意，$I$是不包含于 K的最小理想，因此根据命题 2.8，它是完全强空洞的。最后，显然 $K = \Gamma_I$。□

推论 3.5。 完全强空洞理想与完全强不可约理想之间的双射是保序映射。

证明。 这由 [2, 推论。 1。16]。 □

回顾一下，腰理想 是指与环的每个其他理想都可比较（按包含关系）的理想。

推论 3.6。 设$(R : M)$是一个局部环。R 的每个完全不可约理想都是腰理想。

证明。 定理 3.3 表明，在局部环中，每个完全强空洞理想都具有如下形式： Γ_I 其中 I是一个完全强空洞理想。结论现由 [2, 定理。 2。5]。 □

现在我们来探讨诺特环中强空洞理想与非素强不可约理想之间的关系。

Lem命题 3.7. 诺特环中的每个强空洞理想都是完全强空洞的 .

证明。 诺特环中的每个理想都是有限生成的。有限生成的强空洞理想是完全强空洞的。 □

定理 3.8。 设 P 是诺特环 R 的一个素理想，I 是 R 的一个理想，且 IR_P 是 R_P的真理想。若IR_P是强空洞的，则：

(1) $\Gamma^{R_P}{}_{IR_P} \cap R_P$是$P$-准素强不可约理想。(2) $IR_P = \Gamma^{R_P}{}_{IR_P}$:

$_{R_P}P$。(3) 对于R中的所有理想J，要么$J \subseteq \Gamma^{R_P}{}_{IR_P} \cap R_P$，要么$IR_P \subseteq J$。

证明。 对于R的一个理想J，记IR_P为I_e；对于R_P的一个理想K，记$K \cap R$为K_c。

(1) 在 R_P中，注意到根据引理 3.7，I^e是完全强空洞的。因此，$\Gamma^{R_P}I_e$是 R_P中的完全强不可约理想。I e $\not\subseteq \Gamma^{R_P}_e$I 给出 $\Gamma^{R_P}I_e \neq$P e。 Γ^{R_P}根据推论 1.5]，$_e$在 R_P中是 P e-准素理想。因此，根据[5, 引理 2.2(4)]，我们有 $(\Gamma^{R_P} I_e)^c$ 在 R 中是强不可约的。又因 R 是诺特环，$(\Gamma^{R_P} I_e)^c$ 是一个准素理想。

(2) $\Gamma^{R_P}{}_{I^e}$是一个真P_e准素理想，这表明$(\Gamma^{R_P}{}_{I^e})^c$是P准素的，因此$(\Gamma^{R_P}{}_{I^e})^c \neq P$。由 [5,推论。3.1], 可知$((\Gamma^{R_P}{}_{I^e})^c :_R P)^e$是一个主理想。注意，由于$R$是诺特环，$P$是有限生成的，因此，

$$((\Gamma^{R_p}_{I^e})^c :_R P)^e = \Gamma^{R_p}_{I^e} :_{R_p} P^e = IR_P,$$

其中，最后一个等式由定理3.3得出。

(3) 由 [5,推论。3.1]中的等价表述可得。 □

上述结果给出了定理3.3的如下推广。

推论 3.9。 设R 是一个诺特环，P 是R的一个素理想。P准素强不可约理想（不等于P）与R_P的真强空心理想之间存在一个双射。

证明。设 I 是一个 P 准素强不可约理想，且 I $\neq$P。假设 $(\mathrm{I} :_R \mathrm{P})\mathrm{R}_P \subseteq \mathrm{J}\ \mathrm{R}_P + \mathrm{K}\ \mathrm{R}_P$，其中 JR_P、$\mathrm{K}\ \mathrm{R}_P$是 R_P中的两个理想，满足 $(\mathrm{I} :_R \mathrm{P})\mathrm{R}_P \not\subseteq \mathrm{J}$ 且 $(\mathrm{I} :_R \mathrm{P})\mathrm{R}_P \not\subseteq \mathrm{K}$。由 [5,推论 3.1],可知，$\mathrm{J}^{ec} + \mathrm{K}\ \mathrm{ec} \subseteq \mathrm{I}$，这表明

$$I :_R P \subseteq ((I :_R P)R_p) \cap R \subseteq JR_P \cap R + KR_P \cap R \subseteq I.$$

那么 $I = (I:_R P)R_P \cap R$，这不可能，因为在诺特环中，每个真 P-准素理想 I都满足

$$(I :_R P)R_p \cap R \supsetneq I.$$

事实上，在 P处局部化，并注意到$IR_P = IR_P$以及$PR_P = PR_P \subset R_P$。由于I是P-准素的，IR_P在R_P中是PR_P-准素的；因此存在$n \geq 1$使得

$$(PR_P)^n \subseteq IR_P \subsetneq R_P \quad \text{and} \quad (PR_P)^{n-1} \not\subseteq IR_P.$$

取$x \in (PR_P)^{n-1} \setminus IR_P$。那么

$$PR_P x \subseteq PR_P \cdot (PR_P)^{n-1} = (PR_P)^n \subseteq IR_P,$$

因此$x \in (IR_P:_{R_P} PR_P) \setminus IR_P$，从而

$$(IR_P :_{R_p} PR_P) \supsetneq IR_P.$$

由于P是有限生成的，冒号理想与右侧的局部化可交换，从而得到

$$(I :_R P)R_P = (IR_P :_{R_p} PR_P) \supsetneq IR_P.$$

收缩后得到

$$(I :_R P)R_P \cap R \supsetneq IR_P \cap R = I,$$

矛盾。 □

推论 3.10。 设 R 是一个诺特环。当且仅当 R 中存在一个非素强不可约理想时，对于某个$P \in \mathrm{Spec}(R)$，R_P中存在一个完全强空洞理想。

命题 3.11。 设 $I \subseteq J(R)$ 是诺特环R的一个强空洞理想。那么，对于某个极大理想M，$I = (\Gamma_I : M)$，当且仅当R 是局部环。

证明。我们已经在定理 3.1 中证明了局部环 R 的情形。设对于某个极大理想 M，有 $I = (\Gamma_I : M)$。由于 $I \subseteq J(R)$，我们有 Γ_I不是素理想。此外，对于某个极大理想 M，Γ_I是 M -primary（参见 [4, 推论 1.5]）。由于 R 是诺特环，存在 $n \in N$，使得 $M^n \subseteq \Gamma_I$。因此，$M n^{-1} \subseteq (\Gamma_I : M)$。反设 $(\Gamma_I : M) \not\subseteq M$。那么 $(\Gamma_I : M)R_M = R_M$，这就导致矛盾 $\Gamma_I R_M = M R_M$。因此，$\Gamma_I : M$ 是 M -primary。根据假设，I 是 M -primary。因此，对于所有 $N \in \mathrm{Max}(R)\backslash\{M\}$，$I \not\subseteq N$。根据假设 $I \subseteq J(R)$，所以我们得出 R 是局部环。□

命题 3.12。 设$I \subseteq J(R)$ 是诺特环R的一个强空洞理想。若$I \not\subseteq \mathrm{Nil}(R)$，则 $\Gamma_I = M^n$，其中$M = \Gamma_I : I$。

证明。 若高度$(\Gamma_I) = 0$，则每个素理想都包含I，因此$I \subseteq \mathrm{Nil}(R)$。所以，若$I \not\subseteq \mathrm{Nil}(R)$，则必有高度$(\Gamma_I) > 0$。因此，$\Gamma_I = M^n$（见 [5, 定理. 3.6]）。为完成证明，我们注意到 $\Gamma_I \subset \Gamma_I : I$，后者是一个极大理想 [2,命题. 1.20]。□

引理 3.13。 阿廷环R 中的每个强不可约理想都是完全强不可约的 *le.*

证明。 设K是阿廷环R的一个强不可约理想。那么K是完全不可约的（见 [4,第 1]页），并且是强不可约的。设$\{C_\omega\}_{\omega\in\Omega}$是$R$的一个理想族，使得$\bigcap_{\omega\in\Omega} C_\omega \subseteq K$。由于$R$是阿廷环，我们有$\bigcap_{\omega\in\Omega} C_\alpha = \bigcap_{\omega\in F} C_\alpha$，其中$F \subset \Omega$是一个有限子集。由于$K$是强不可约的，存在 $\omega \in \Omega$ 使得$K \supseteq C_\omega$。□

命题 3.14. 在阿廷环 R 中，每个极大理想都对应一个极小完全强空洞理想。

证明. 设 M 是 R 的一个极大理想。那么，根据引理 M 3.13，它是完全强不可约的。因此，存在一个完全强空洞理想 I，它是所有不包含于 M 的理想中最小的。根据完全强不可约理想与完全强空洞理想之间的双射的保序性质，以及 M 的极大性可知，I 是完全强空洞理想中极小的。□

4. 强空洞理想与公因子

我们从定义最大公因数环中理想的一种新性质开始本节。在两个元素 x 和 y 的最大公因数存在时，我们用 g.c.d.(x,y) 表示它。

定义 4.1. 若最大公因数环 R 的理想 I 满足 $(\star)$，则称其满足

$$I \subseteq R(\text{g.c.d.}(x, y)) \implies I \subseteq Rx \text{ or } I \subseteq Ry \quad \forall x, y \in R.$$

命题 4.1. 设I 是最大公因数环R的一个理想。若I 有限生成且满足$(\star)$，则I 是强空洞的。

证明。 设$I \subseteq S+T$，但$I \not\subseteq S$且$I \not\subseteq T$。由于I有限生成，存在两个有限子集F_1和F_2，分别属于S和T，使得

$$I \subseteq \sum_{s\in F_1} Rs + \sum_{t\in F_2} Rt.$$

注意，对每一对元素 s ∈S 和 t ∈T，都有 I ⊈R(g.c.d.(x, y))。因此 I ⊈R s +R t。现在，固定 $s_1 \in F_1$，并注意，对于所有 t ∈F_2,，都有 I ⊈R(g.c.d.(s_1, t))。因此，取 $t_1 \in F_2$，并令 $x_1 := $g.c.d.($s_1$, t_1)。然后，取 $t_2 \in F_2$，并注意 I ⊆R(g.c.d.(x_1,t_1))。令 $x_2 := $g.c.d.($x_1$,$t_2$)，并重复这一过程，直到 F_2 中的所有元素都已使用。于是我们有 R x_n，其中 n := |F_2|，是一个主理想，它包含 $\Sigma_{t\in F_2}$R t，且不包含 I。因此 I ⊆ $\Sigma_{s\in F_1}$R s +Rx_n。现在对 F_1 中的元素重复同一过程，构造一个主理想 R y_m，使其包含第一项而不包含 I。于是我们有 I ⊆R y_m +R x_n ⊆R(g.c.d.(y_m, x_n))，这与 I ⊈R y_m和 I ⊈R x_n的事实矛盾。因此 I ⊆S 或 I ⊆T。□

命题 4.2。 设 I 是满足主理想上的升链条件（*ACCP*）的最大公因数环 R 中的一个理想。若 I 满足$(\star)$，则 I 是强空洞的。

证明。 假设 $I \subseteq S+T$。接着，考虑由 S 中元素的某条最大公因数链生成的主理想集合，

$$U_S = \{Rx \mid x = \underbrace{\text{g.c.d.}(\ldots(\text{g.c.d.}(\text{g.c.d.}(\text{g.c.d.}(}_{n\text{ times}} k_1, k_2), k_3), k_4), \ldots, k_n; \quad k_i \in K \text{ for every } i \in [1,n]\}.$$

设 C 是 U_S 中的一条链。由于 C 是一条主理想链，根据 ACCP，它有一个极大元，因而有一个上界。于是，由佐恩引理，U_S 有一个极大元，记为 x_S。对于所有 s ∈S，都有 R(g.c.d.(x_S, s)) ∈U，且 R(g.c.d.(x_S, s)) ⊇R x_S。因此，R(g.c.d.(x_S, s)) =R x_S，从而 s ∈R x_S。故 R x_S ⊇S。此外，由于 x_S是由 S 中元素的最大公因数组成的一条有限链，我们有 I ⊈R x_S，否则就会与 I ⊈S 矛盾。对 T 采用相同的构造，并将所得元素记为 x_T。于是 I ⊆Rx_S +R x_T，但 I ⊈R x_S且 I ⊈R x_T，这与 I 满足 $(\star)$ 的假设矛盾。因此，必有 I ⊆S 或 I ⊆T 。□

注 4.3： 上述结果的逆命题在任意贝祖环中都成立。

参考文献

[1] S. Çeken 和 C. Yüksel，强空洞理想及相应拓扑的推广，AIMS Math.，6(12)，(2021)，12986–13003。[2] E. Rostami，交换环的强空洞元素，J. Algebra Appl.，20(6)，(2021)，23页。[3] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald，《交换代数导论》，Addison–Wesley，1969。[4] L. Fuchs、W. Heinzer 和 B. Olberding，无有限性条件的交换理想理论：完全不可约理想，Trans. Amer. Math. Soc.，358(7)，(2006)，3113–3131。[5] W. J. Heinzer、L. J. Ratliff 和 D. E. Rush，交换环的强不可约理想，J. Pure Appl. Algebra，166(3)，(2002)，267–275。[6] The Stacks Project Authors，*StacksProject*，https://stacks.math.columbia.edu，2018。

[1] 约翰内斯堡大学数学与应用数学系，南非奥克兰公园 2006，邮政信箱 524。 [2] 南非国家理论与计算科学研究所（NITHECS）。电子邮箱地址： agoswami@uj.ac.za

开普敦大学数学与应用数学系，南非隆德博斯 7700电子邮箱地址： ZLZJOS001@myuct.ac.za