arXiv:2601.12406v1 [math.OA] 18 Jan 2026

由有限指数 C^*-包含得到的弱量子超群

Keshab Chandra Bakshi,
Debashish Goswami,
Biplab Pal

2026年1月21日

摘要

我们研究简单含单位 C^*-代数的有限指数 $B \subset A$ 包含，并在第二相对交换子 $B' \cap A_1$ 上构造一个规范的完全正余乘法，从而赋予其自然的余代数结构。受此构造启发，我们引入弱量子超群的概念，这是对 Chapovsky 和 Vainerman [《紧量子超群》，J. Operator Theory 41（1999），第 2 期，261–289]所研究的量子超群的推广。我们证明，每个有限指数包含都会产生这样的弱量子超群，并且相应的弱量子超群具有 Haar 积分。在不可约情形下，该结构满足 Chapovsky 和 Vainerman 所定义的量子超群公理；而在深度 2 情形下，我们的框架给出由 Nikshych 和 Vainerman 构造的相应弱 Hopf 代数。这些结果为与有限指数包含相关的广义量子对称性提供了一个统一且内在的 C^*-代数框架。

美国数学学会数学分类： 46L37，47L40，46L05，43A30。

关键词。简单 C^*-代数、卷积、Watatani 指数、余乘法、余代数、量子超群、弱量子超群。

1 引言

Jones 提出了指标的概念 $[M : N]$ 对于类型 II_1 因子$N \subset M$ 在 [17]中的酉包含。这一突破开启了算子代数领域的活跃研究，并在数学和数学物理的多个领域产生了重要应用。后来，Kosaki 将指标的定义扩展到类型 III 因子 [19]的包含。简单 C^*代数的包含涵盖了类型 II_1 和类型 III 子因子。随后，Watatani 针对这一情形发展出一种非常一般的指标理论代数方法 [31], ，定义了一个

针对 C^*代数包含的指标 [26]，其条件期望具有拟基，即 Pimsner–Popa 基的推广形式 [26]。C^*代数的包含在算子代数理论中发挥着核心作用，为指标理论、量子对称性和张量范畴结构提供了统一框架。特别是，有限指标包含编码了丰富的内在对称性，并导出双模张量范畴；这些范畴已成为子因子理论、融合范畴和低维拓扑中的基础工具；例如参见 [5, 8, 13, 15, 21, 25, 27]，了解近期进展。从简单 C^*代数的包含中如何典范地提取这类对称性，而不施加不可约性或深度条件等限制性假设，是本研究的一个关键动机。

对于有限指数子因子 $N \subset M$ $[M:\ N] < \infty$，Jones 注意到可以构造另一个 II_1 型因子 M_1，称为基本构造，并满足 $[M_1:M] = [M:\ N]$。这一过程可以迭代，从而得到基本的 Jones 塔：

$$N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_k \subset \cdots .$$

这一塔的存在是 [17] 中著名的指标刚性定理证明的关键要素。自子因子理论创立以来，高阶相对交换子 $N' \cap M_k$和 $M' \cap M_k$ 在理解子因子方面发挥着至关重要的作用。Ocneanu 引入了从 $N' \cap M_1$ 到 $M' \cap M_2$ 的傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 这一概念，将有限阿贝尔群上的经典傅里叶变换加以推广（另见 [6, 7]）。通过这一变换，可以在 $N' \cap M_1$ 上得到一种新颖的乘法，它推广了经典卷积乘积。受这些进展的启发，第一作者与 Gupta 在 [1] 中引入了高阶相对交换子 $B' \cap A_k$ 和 $A' \cap A_k$ 上的一种卷积乘积，该乘积源自简单含幺 C^*-代数 $B \subset A$ 的含幺包含，且带有一个有限指标型的条件期望，其中

$$B \subset A \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$$

表示相对于唯一的极小条件期望的 C^*-基本构造 Watatani 塔。在 [1, 引理 3.20], 中，他们进一步证明了这个卷积乘积具有结合性。因此，第二相对交换子自然获得了结合代数结构。在本工作中，受 [14], 启发，我们利用这一卷积乘积在第二相对交换子 $B' \cap A_1$ 上构造余代数结构，并证明相应的余乘映射是完全正的。

定理 A (见定义 3.6) 设 $B \subset A$ 是简单含幺 C^*-代数的包含，并配备一个有限指标型条件期望。赋予 $B' \cap A_1$ 内积 $\langle x, y\rangle := \mathrm{tr}(x^*y)$。定义一个线性映射

$$\Delta\colon B' \cap A_1 \longrightarrow (B' \cap A_1) \otimes (B' \cap A_1)$$

by

$$\langle \Delta(x),\, y \otimes z \rangle = \tau^{\frac{1}{2}} \langle x,\, y \star z \rangle, \qquad x, y, z \in B' \cap A_1,$$

其中， $\star$ 表示卷积乘积， $\tau := [A\colon B]_0^{-1}$. 那么映射 Δ 是完全正的。

Hopf 代数及其推广在子因子与融合范畴理论中发挥着基础性作用，因为它们为量子对称性提供了代数模型。在深度 2 的情形下，有限指标子因子可由有限维弱 Hopf 代数（亦称量子群胚）完全刻画，正如 Nikshych 和 Vainerman 在 [22]中所证明的那样。在这种情况下，子因子可实现为弱 Hopf 代数的交叉积，而相应的双模融合范畴与该量子对称对象的表示范畴等价。对于具有有限指标条件期望的简单含幺 C^*-代数之间的深度 2 包含，最近也建立了类似的结构性结果（见 [15, 24]）。超越深度 2 的情形后，由子因子产生的融合范畴不再具有单一 Hopf 代数对称性。尽管如此，Hopf 代数结构的遗迹仍以双模范畴、旁群和平面代数的形式留存下来。量子超群（按照 Chapovsky 和 Vainerman 在 [10]中的定义）是一个带有完全正、余结合余乘法的含幺 C^*-代数。这类结构最重要的例子源自 Woronowicz 意义下的紧矩阵伪群的双陪集（[32]）。Chapovsky 和 Vainerman 还在 [10] 中进一步证明，量子超群具有丰富的附加结构。作为构建简单含幺 C^*-代数任意包含的一般框架的第一步，我们通过放宽量子超群的若干公理，引入弱量子超群的概念。本研究自然融入这一脉络，将弱量子超群作为 Hopf 代数和弱 Hopf 代数对称性的进一步推广。弱量子超群保留了量子对称性的基本解析特征——例如余乘法、Haar 积分和作用——同时以完全正性取代乘法性。这使我们能够为 C^*-代数的任意有限指标包含关联一个规范的对称对象，将 Hopf 代数方法拓展至无法获得真正的 Hopf 或弱 Hopf 代数对称性的情形。更确切地说，我们证明如下:

定理 B: （参见定理 4.14、4.17、4.23和4.24）设 $B \subset A$ 是具有有限指标型条件期望的单单位 C^*-代数的包含。本文建立以下结果:

- 我们证明，与基本构造相关的第二相对交换子 $B' \cap A_1$ 携带一种规范的弱量子超群结构，该结构自然源自包含 $B \subset A$。

- 我们证明，当包含 $B \subset A$ 不可约时，弱量子超群

结构 $B' \cap A_1$ 升级为一个（真正的）量子超群。

- 我们进一步证明，弱量子超群 $B' \cap A_1$ 存在左不变测度和右不变测度，并且还存在 Haar 积分。

本文的主要贡献是引入一种新的对称性对象——弱量子超群。它由简单幺正 C^*-代数的有限指数包含自然导出。这一概念提供了统一的算子代数框架，拓展并连接了先前已知的量子对称结构，同时在完全一般的情形下依然成立。尽管弱量子超群并未编码 Jones 塔中的所有高阶相对交换子 $B' \cap A_n$，但它仍以非常明确的方式捕捉了包含中固有量子对称性的第一层规范结构。此外，我们的构造统一了所有已知的特殊情形：在不可约情形下，弱量子超群满足 Chapovsky 和 Vainerman 意义下的量子超群公理；而在深度 2 情形下，它则退化为 Nikshych 和 Vainerman 的弱 Hopf 代数。

2 预备知识

本节汇集了后文将用到的一些基本概念。由于篇幅所限，我们的讨论必然十分简略；更详细的介绍请参阅相关文献。

2.1 单位简单 C^*-代数的包含

我们首先回顾 Watatani 关于酉包含 C^*的简单 C^*-代数的指标理论，遵循 [31]。随后，我们简要回顾 [1, 3, 4] 中针对相应相对交换子所发展的傅里叶理论。设 $B \subset A$ 是简单酉 C^*-代数的一个包含，并配备一个具有有限 Watatani 指数的条件期望。考虑与之相关的塔： C^*-基本构造：

$$B \subset A \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

其具有唯一的（对偶）最小条件期望 $E_n : A_n \to A_{n-1}$ （对于 $n \geq 0$），其中我们采用约定 $A_{-1} := B$ 和 $A_0 := A$。对于每个 $n \geq 1$，令 e_n 表示 A_n 中的 Jones 投影。记 $\tau := [A : B]_0^{-1}$。

引理 2.1 ([1])。 对于每个 $x_1 \in A_1$，都存在唯一的 $x_0 \in A$，使得 $x_1 e_1 = x_0 e_1$。事实上，$x_0 = \tau^{-1} E_1(x_1 e_1)$。

引理 2.2 ([18])。 设 $B \subset A$ 是简单 C^*代数的含幺包含，并令 $E_0 : A \to B$表示最小条件期望。那么，对任意 $x \in B' \cap A$ 和 $a \in A$，有$E_0(xa) = E_0(ax)$。

相对交换子 $B' \cap A_n := \{x \in A_n : \ xb = bx \text{ 对所有 } b \in B\}$ 均为有限维C^*代数（参见 [31]）。包含 $B \subset A$ 称为具有有限深度（参见 [16]），如果存在整数 $n \geq 1$ 使得 $(B' \cap A_{n-1})\ e_n\ (B' \cap A_{n-1}) = B' \cap A_n$. 这样的最小整数 n称为包含的深度。

利用最小条件期望，可以在这些代数上得到“马尔可夫型迹” [1, 命题 2.21]。具体而言，对于 $n \geq 0$，映射

$$\mathrm{tr}_n := (E_0 \circ E_1 \circ \cdots \circ E_n)\big|_{B' \cap A_n} : B' \cap A_n \to \mathbb{C}$$

在 $B' \cap A_n$ 上定义了一个忠实迹态。

命题 2.3 ([1])。 对于所有 $n \geq 1$，$\mathrm{tr}_n(xe_n) = \tau \mathrm{tr}_{n-1}(x)$ 对每个 $x \in B' \cap A_{n-1}$ 均成立，并且 $\mathrm{tr}_n|_{B' \cap A_{n-1}} = \mathrm{tr}_{n-1}$.

为避免混淆，出于记号简便，我们将省略下标，直接写作 tr。若 $\{\lambda_i : \ 1 \leq i \leq n\} \subset A$ 是最小条件期望 E_0的准基，则从 $B' \cap A_n$ 到 $A' \cap A_n$ 的保 tr 条件期望如下所示:

$$E_{A' \cap A_n}^{B' \cap A_n}(x) = \tau \sum_i \lambda_i x \lambda_i^* \qquad \text{for all } x \in B' \cap A_n.$$

Ocneanu 首先提出了与有限深度子因子相关的旁群的傅里叶变换概念 [23], ，此后该概念在子因子理论中发挥了核心作用。Bisch 于 [6] 给出了任意极端子因子的高阶相对交换子上的傅里叶变换公式。遵循 [1] （另见 [3, 4]），我们简要回顾 C^*-包含中相对交换子上的傅里叶变换及其相关卷积结构；这些工具已有若干应用（例如参见 [1, 2, 3, 4]）。对于每个 $n \geq 0$, 傅里叶变换 $\mathcal{F}_n : B' \cap A_n \to A' \cap A_{n+1}$ 定义为

$$\mathcal{F}_n(x) = \tau^{-\frac{n+2}{2}} E_{A' \cap A_{n+1}}^{B' \cap A_{n+1}}(xv_{n+1}), \qquad x \in B' \cap A_n,$$

其中 $v_{n+1} = e_{n+1} \cdots e_1$。逆傅里叶变换 $\mathcal{F}_n^{-1}$: $A' \cap A_{n+1} \to B' \cap A_n$ 由下式给出

$$\mathcal{F}_n^{-1}(w) = \tau^{-\frac{n+2}{2}} E_{n+1}(wv_{n+1}^*), \qquad w \in A' \cap A_{n+1}.$$

这一术语是合理的，因为对于每个 $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n \circ \mathcal{F}_n^{-1} = \mathrm{id}_{A' \cap A_{n+1}}$和 $\mathcal{F}_n^{-1} \circ \mathcal{F}_n = \mathrm{id}_{B' \cap A_n}$, ，如 [1, 定理 3.5]所证明。对于 x, $y \in B' \cap A_n$, 卷积乘积定义如下

$$x \star y := \mathcal{F}_n^{-1}\big(\mathcal{F}_n(y)\, \mathcal{F}_n(x)\big), \tag{2.1}$$

根据 [1, 引理 3.20], 它是结合的。此外，如果 x, $y \in B' \cap A_1$,

$$(x \star y)^* = x^* \star y^*, \tag{2.2}$$

如 [4, 命题 3.8]所述。然而，这种 $*$相容性通常不会延伸到高阶相对交换子 [3, 注 4.3]。对于每个 $n \geq 0$，旋转算子 $\rho_n^+ : B' \cap A_n \to B' \cap A_n$ 定义如下：

$$\rho_n^+(x) = \left(\mathcal{F}_n^{-1}(\mathcal{F}_n(x)^*)\right)^*, \qquad x \in B' \cap A_n.$$

反射算子在 [3], 中引入，为建立高阶相对交换子上的傅里叶理论不等式，以及将规范移位的 Connes-Størmer 熵与最小 Watatani 指数联系起来，提供了强有力的工具。对于每个 $n \geq 0$, $r_{2n+1}^+ := (\rho_{2n+1}^+)^{n+1}$，定义映射 $r_{2n+1}^+ : B' \cap A_{2n+1} \to B' \cap A_{2n+1}$。对于 $n = 1$，这些算子具有以下具体表达式，后文将会用到。对于所有 $x \in B' \cap A_1$,

$$r_1^+(x) = \tau^{-1} \sum_i E_1(e_1 \lambda_i x)\, e_1 \lambda_i^*. \tag{2.3}$$

反射算子具有以下结构性质：

定理 2.4 ([3])。 对于每个 $n \geq 0$，反射算子 r_{2n+1}^+ 是保幺的、对合的，保$*$的反同态，并且还保持迹。

在简单含幺 C^*-代数的情形下，也定义了移位算子，如 [3]中所介绍。对于每个 $n \geq 0$, $S_n^+ := r_{2n+3}^+ \circ r_{2n+1}^+$. 每个映射 $S_n^+ : B' \cap A_{2n+1} \to A_1' \cap A_{2n+3}$都是保幺、保迹的 $*$-同构。根据 [3, 推论 3.26], ，反射算子 S_0^+ 具有以下显式形式：

$$S_0^+(x) = \tau^{-2} \sum_i \lambda_i e_1 e_2 y e_3 e_2 e_1 \lambda_i^*, \quad \text{for } x \in B' \cap A_1. \tag{2.4}$$

2.2 量子超群

现在我们回顾 Chapovsky 和 Vainerman [10]提出的量子超群的一些预备知识。有关量子超群概念的进一步发展和推广，也可参阅 [11, 12, 20] 。

定义 2.5 ([10])。 若四元组 $(A, \Delta, \varepsilon, \star)$ 满足以下条件，则称其在 C^*-代数 $(A, \cdot, 1, *)$ 上定义了一个量子超群结构：

- 系统 $(A, \Delta, \varepsilon, \star)$ 构成一个带余单位 ε 的 $*$-余代数；也就是说， Δ: $A \to A \otimes A$ 和ε: $A \to \mathbb{C}$是线性映射，而 $\star$: $A \to A$是一个反线性映射，满足

  (i) $(\Delta \otimes$恒等映射$) \circ \Delta =$ (恒等映射 $\otimes \Delta) \circ \Delta$,$(ii)$ $(\varepsilon \otimes$恒等映射$) \circ \Delta =$ (恒等映射 $\otimes \varepsilon) \circ \Delta =$ 恒等映射,(iii) $\Delta \circ \star = \Pi \circ (\star \otimes \star) \circ \Delta$,

(iv) $\star \circ \star = \mathrm{id}$,

其中 Π: $A \otimes A \to A \otimes A$ 表示翻转映射。

- 余乘法 Δ: $A \to A \otimes A$ 是正的。
- 对于所有的 $a, b \in A$, 以下相容条件均成立:

(i) $(a \cdot b)^\star = a^\star \cdot b^\star$,
(ii) $\Delta \circ * = (* \otimes *) \circ \Delta$,
(iii) $\varepsilon(a \cdot b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$,
(iv) $\Delta(1) = 1 \otimes 1$,(v)
$\star \circ * = * \circ \star$.

定义 *2.6*（[10]）。设 $(A, \Delta, \varepsilon, \star)$ 是 C^*-代数 A 上的量子超群结构。态 ϕ 称为 *Haar*测度，若对于所有 $a \in A.$, $(\phi \otimes id) \circ \Delta(a) = (id \otimes \phi) \circ \Delta(a) = \phi(a)$

如果 A 是一个量子超群，且正定元素的线性张成在A中稠密，那么 A 存在唯一的Haar测度 ϕ （见 [10, 定理 2.3]）。值得注意的是，在 [10] 中，作者进一步引入并研究了紧量子超群的概念。这类结构最重要的例子源自紧矩阵伪群的双陪集。文献中也研究了若干与子因子相关的超群概念；例如，参见 [8, 28]。Bischoff 等人 [8]将他们的构造与文献中出现的其他超群框架进行了比较，包括 [9, 10,29]中提出的框架。

3 卷积乘积与余代数结构

本节中，我们考察带有有限指标型条件期望的简单含幺 C^*-代数的包含 $B \subset A$，并利用卷积乘积在第二相对交换子 $B' \cap A_1$ 上定义余代数结构。随后，我们证明相应的余乘映射是完全正的。下一节将给出这一结果的一个应用。最后，我们证明，在深度2子因子的情形下，这一余代数结构与 Nikshych 和 Vainerman（[22, 24]）引入的结构在同构意义下相同。这一对应关系进一步印证了我们构造的自然性，并凸显了它在由子因子包含产生的广义量子对称性这一更广泛理论中的重要性。

记号： 本文始终考虑带有有限指标型条件期望的简单含幺 C^* 代数的包含 $B \subset A$。令 $\{\lambda_i : 1 \le i \le n\} \subset A$ 是最小条件期望 E_0 的一个准基。

定义 3.1。在第二相对交换子 $B' \cap A_1$ 上，我们定义映射 Δ 和 ε 如下：

$$\Delta : B' \cap A_1 \to (B' \cap A_1) \otimes (B' \cap A_1) : \quad \big\langle \Delta(x), y \otimes z \big\rangle = \tau^{\frac{1}{2}} \big\langle x, y \star z \big\rangle,$$

$$\varepsilon : B' \cap A_1 \to \mathbb{C} : \quad \varepsilon(x) = \tau^{-1} \big\langle e_1, x \big\rangle,$$

对所有的 $x, y, z \in B' \cap A_1$。这里 $B' \cap A_1$ 上的内积由 $\big\langle x, y \big\rangle = \mathrm{tr}(x^* y)$给出。

命题 3.2。$(B' \cap A_1, \Delta, \varepsilon)$ 成为一个余代数。

证明：对于任意的 $x, y_1, y_2, y_3 \in B' \cap A_1$，我们有如下结果：

$$\begin{aligned} \big\langle (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x), y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \big\rangle &= \big\langle \Delta(x_{(1)}), y_1 \otimes y_2 \big\rangle \big\langle x_{(2)}, y_3 \big\rangle \\ &= \tau^{\frac{1}{2}} \big\langle x_{(1)}, y_1 \star y_2 \big\rangle \big\langle x_{(2)}, y_3 \big\rangle \\ &= \tau \big\langle x, (y_1 \star y_2) \star y_3 \big\rangle. \end{aligned}$$

同样，容易验证，$\big\langle (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(x) \ y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \big\rangle = \tau \big\langle x, y_1 \star (y_2 \star y_3) \big\rangle$. 根据 [1][引理 3。20], 我们知道卷积乘积是结合的。因此得到 $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$. 此外还有，

$$\begin{aligned} \big\langle y_1, (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x) \big\rangle &= \varepsilon(x_{(1)}) \big\langle y_1, x_{(2)} \big\rangle \\ &= \tau^{-\frac{1}{2}} \big\langle e_1 \star y_1, x \big\rangle \\ &= \big\langle y_1, x \big\rangle. \end{aligned}$$

此外，很容易验证 $\big\langle y_1, \ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x) \big\rangle = \big\langle y_1, \ x \big\rangle$. 因此我们有 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}$。于是 $(B' \cap A_1, \ \Delta, \ \varepsilon)$ 成为一个余代数。□

作为 [30]，的直接推论，我们得到如下结果：

定理 3.3。设 $B \subset A$ 是简单含幺 C^*-代数的一个包含，并配有有限 *Watatani* 指数的条件期望。则可由余代数$(B' \cap A_1, \Delta, \varepsilon)$构造一个 *Hopf* 代数。

现在我们旨在证明 Δ 是一个完全正映射。在有限指数子因子的框架下，这一点已在 [14]，中得到证明，其中证明采用了图示论证。相比之下，在 C^*-代数框架中，主要障碍在于，目前仍无法像平面代数那样，为傅里叶变换和卷积提供可比的图示描述。为克服这一困难，我们转而利用准基与最小条件期望之间的关系。我们先建立以下预备结果：

命题 3.4。 C^*-代数$(B' \cap A_1) \otimes (B' \cap A_1)$与$(B' \cap A_1)(A_1' \cap A_3)$同构。

证明：定义 $T\colon (B'\cap A_1)\otimes (B'\cap A_1)\to (B'\cap A_1)(A_1'\cap A_3)$ 如下

$$T(x\otimes y)=x\,S_0^+(y),\qquad x,y\in B'\cap A_1.$$

其中 S_0^+是 $B'\cap A_1$ 上的移位算子，定义见 [3]。显然， T 是一个 $*$-代数同态。现在我们注意到

$$\|\sum_i x_i\otimes y_i\|^2=\big\langle\sum_i x_i\otimes y_i,\sum_j x_j\otimes y_j\big\rangle=\sum_{i,j}\big\langle x_i\otimes y_i,x_j\otimes y_j\big\rangle=\sum_{i,j}\big\langle x_i,x_j\big\rangle\big\langle y_i,y_j\big\rangle.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\|\sum_i x_i\,S_0^+(y_i)\|^2&=\big\langle\sum_i x_i\,S_0^+(y_i),\sum_j x_j\,S_0^+(y_j)\big\rangle\\&=\sum_{i,j}\big\langle x_i\,S_0^+(y_i),x_j\,S_0^+(y_j)\big\rangle\\&=\sum_{i,j}\mathrm{tr}(S_0^+(y_i^*)\,x_i^*x_j\,S_0^+(y_j)\big\rangle\\&=\sum_{i,j}\mathrm{tr}(S_0^+(y_j)S_0^+(y_i^*)\,x_i^*x_j).\end{aligned}$$

下面的观察成立。

$\mathrm{tr}(S_0^+(y_jy_i^*)\,x_i^*x_j)=E_0\circ E_1\circ E_2\circ E_3(S_0^+(y_jy_i^*)\,x_i^*x_j)=E_0\circ E_1(E_2\circ E_3(S_0^+(y_jy_i^*))\,x_i^*x_j)$。

根据 [3, 定理 3.27], ，我们知道 $S_0^+(y_jy_i^*)\in A_1'\cap A_3$。因此 $E_2\circ E_3(S_0^+(y_jy_i^*))\in\mathbb{C}$。此外，由于 S_0^+是保迹的，我们得到：

$$\begin{aligned}\|\sum_i x_i\,S_0^+(y_i)\|^2&=\sum_{i,j}E_0\circ E_1(x_i^*x_j)E_2\circ E_3(S_0^+(y_jy_i^*))\\&=\sum_{i,j}\mathrm{tr}(x_i^*x_j)\mathrm{tr}(S_0^+(y_jy_i^*))\\&=\sum_{i,j}\mathrm{tr}(x_i^*x_j)\mathrm{tr}(y_jy_i^*)\\&=\sum_{i,j}\big\langle x_i,x_j\big\rangle\big\langle y_i,y_j\big\rangle.\end{aligned}$$

因此， T是等距映射，故为单射。现在设 $xw\in(B'\cap A_1)(A_1'\cap A_3)$。由于 S_0^+是满射，我们可以写成 $xw=x\,S_0^+(y)$，其中 $y\in B'\cap A_1$。但于是 $T(x\otimes y)=x\,S_0^+(y)=xw$，这表明 T 是满射。证明完毕。

命题 3.5。对于 $z\in B'\cap A_1$，我们有

$$\Delta(z)=\tau^{-2}\,T^{-1}\circ E(e_2ze_3e_2),$$

其中 E 是从 $B'\cap A_3$ 到$(B'\cap A_1)(A_1'\cap A_3)$的保迹条件期望。

证明： 因此，只需证明对于任意 $x, y \in B' \cap A_1$,

$$\tau^{-2}\left\langle T^{-1} \circ E(e_2 z e_3 e_2), x \otimes y\right\rangle = \tau^{\frac{1}{2}}\left\langle z, x \star y\right\rangle.$$

直接计算可得,

$$\left\langle \sum_i x_i \otimes y_i, \sum_j x'_j \otimes y'_j \right\rangle = \left\langle \sum_i x_i S_0^+(y_i), \sum_j x'_j S_0^+(y'_j)\right\rangle$$

因此，我们得到如下结果,

$$\tau^{-2}\left\langle T^{-1} \circ E(e_2 z e_3 e_2), x \otimes y\right\rangle = \tau^{-2}\left\langle E(e_2 z e_3 e_2), x\, S_0^+(y)\right\rangle$$

由于 $x\, S_0^+(y) \in (B' \cap A_1)(A'_1 \cap A_3)$，且 E 是保迹条件期望，因此:

$$\begin{aligned}
\tau^{-2}\left\langle T^{-1} \circ E(e_2 z e_3 e_2), x \otimes y\right\rangle &= \tau^{-2}\operatorname{tr}(e_2 e_3 z^* e_2 x\, S_0^+(y)) \\
&= \tau^{-4}\sum_i \operatorname{tr}(e_2 e_3 z^* e_2 x \lambda_i e_1 e_2 y e_3 e_2 e_1 \lambda_i^*) \quad \text{(by Equation (2.4))} \\
&= \tau^{-4}\sum_i \operatorname{tr}\big(e_2\, E_2(z^* e_2 x \lambda_i e_1 e_2 y) e_3 e_2 e_1 \lambda_i^*\big).
\end{aligned}$$

注意 由于 $E_2(z^* e_2 x \lambda_i e_1 e_2 y) = E_2\big(z^* E_1(x\lambda_i e_1) e_2 y\big) = \tau z^* E_1(x\lambda_i e_1) y$, 可得

$$\begin{aligned}
\tau^{-2}\left\langle T^{-1} \circ E(e_2 z e_3 e_2), x \otimes y\right\rangle &= \tau^{-3}\sum_i E_0 \circ E_1 \circ E_2 \circ E_3\big(e_2 z^* E_1(x\lambda_i e_1) y e_3 e_2 e_1 \lambda_i^*\big) \\
&= \tau^{-2}\sum_i E_0 \circ E_1 \circ E_2\big(e_2 z^* E_1(x\lambda_i e_1) y e_2 e_1 \lambda_i^*\big) \\
&= \tau^{-2}\sum_i E_0 \circ E_1 \circ E_2\big(E_1(z^* E_1(x\lambda_i e_1) y) e_2 e_1 \lambda_i^*\big) \\
&= \tau^{-1}\sum_i E_0 \circ E_1\big(E_1(z^* E_1(x\lambda_i e_1) y) e_1 \lambda_i^*\big) \\
&= \sum_i E_0 \circ E_1\big(z^* E_1(x\lambda_i e_1) y \lambda_i^*\big). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

现在我们计算如下结果,

$$\begin{aligned}
\left\langle z, x \star y\right\rangle &= \operatorname{tr}(z^*(x \star y)) \\
&= \operatorname{tr}(z^*(x^* \star y^*)^*) \quad \text{(by Equation (2.2))} \\
&= \big(E_0 \circ E_1\big((x^* \star y^*) z\big)\big)^*.
\end{aligned}$$

根据卷积乘积的定义，可得

$$\begin{aligned}
E_0 \circ E_1((x^* * y^*) z) &= E_0 \circ E_1\big(\mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{F}_1(y^*)\mathcal{F}_1(x^*)) z\big) \\
&= \tau^{-\frac{3}{2}} E_0 \circ E_1\big(E_2(\mathcal{F}_1(y^*)\mathcal{F}_1(x^*) e_1 e_2) z\big) \\
&= \tau^{-\frac{3}{2}} E_0 \circ E_1 \circ E_2\big(\mathcal{F}_1(y^*)\mathcal{F}_1(x^*) e_1 e_2 z\big). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

利用傅里叶变换的定义，我们得到如下结果：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(y^*)\mathcal{F}_1(x^*)e_1e_2z &= \tau^{-1}\sum_{i_1,i_2}\lambda_{i_1}y^*e_2e_1\lambda_{i_1}^*\lambda_{i_2}x^*e_2e_1\lambda_{i_2}^*e_1e_2z\\ &= \tau^{-1}\sum_{i_1,i_2}\lambda_{i_1}y^*e_2e_1\lambda_{i_1}^*\lambda_{i_2}x^*e_2E_0(\lambda_{i_2}^*)e_1e_2z\\ &= \sum_{i_1}\lambda_{i_1}y^*e_2e_1\lambda_{i_1}^*x^*e_2z\\ &= \sum_{i_1}\lambda_{i_1}y^*E_1(e_1\lambda_{i_1}^*x^*)e_2z.\end{aligned}$$

由方程（3.6）可得

$$\begin{aligned}E_0\circ E_1((x^**y^*)z) &= \tau^{-\frac{3}{2}}E_0\circ E_1\circ E_2\big(\sum_{i_1}\lambda_{i_1}y^*E_1(e_1\lambda_{i_1}^*x^*)e_2z\big)\\ &= \tau^{-\frac{1}{2}}\sum_{i_1}E_0\circ E_1\big(\lambda_{i_1}y^*E_1(e_1\lambda_{i_1}^*x^*)z\big).\end{aligned}$$

因此我们最终得到，

$$\tau^{\frac{1}{2}}\big\langle z, x*y\big\rangle = \sum_i E_0\circ E_1\big(z^*E_1(x\lambda_ie_1)y\lambda_i^*\big). \tag{3.7}$$

结合方程（3.5）和方程（3.7），可得所需的恒等式。 □

定理 3.6。 Δ 是一个保持 $*$的完全正映射。

证明：根据定义 3.5，有

$$\Delta(z) = \tau^{-1}T^{-1}\circ E(\tau^{-1}e_2ze_3e_2).$$

容易验证，映射 $z\to\tau^{-1}e_2ze_3e_2$ 是一个 $*$-代数同态。因此， Δ保持 $*$。由于两个 C^*-代数之间的任意 $*$-代数同态都是完全正的，所以映射 $z\to\tau^{-1}e_2ze_3e_2$是完全正的。此外，由于 T^{-1}是一个 $*$-同构，它也是完全正的。因此，作为完全正映射的复合， Δ是完全正的。□

现在，我们不再从简单含单位 C^*-代数的包含 $B\subset A$开始，而是考虑包含 $A\subset A_1$。在这种情况下，我们在相对交换子 $A'\cap A_2$上得到一个卷积乘积。我们将此卷积乘积记为 $\star_1$，对应于包含$A\subset A_1$。根据定义 3.1， $A'\cap A_2$ 上的余乘法和余单位为

$$\big\langle\Delta_{A'\cap A_2}(w), w'\otimes w''\big\rangle = \tau^{\frac{1}{2}}\big\langle w, w'*_1 w''\big\rangle,$$

$$\varepsilon_{A'\cap A_2}(w) = \tau^{-1}\big\langle e_2, w\big\rangle,$$

对所有 $w,\ w',\ w'' \in A' \cap A_2$成立。现在，我们旨在将这一余乘法和余单位与 Nikshych 和 Vainerman 在 [22] 中于 $A' \cap A_2$ 上定义的余乘法和余单位联系起来（另见 [24]）。双线性形式

$$\langle x, w\rangle_{\mathrm{NV}} = d\,\tau^{-2}\ \mathrm{tr}(x\,e_2 e_1\,w), \qquad x \in B' \cap A_1,\ w \in A' \cap A_2,$$

其中 d 表示常数 $\|\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E_1|_{A'\cap A_1})\|_2$，它定义了 $B' \cap A_1$ 与 $A' \cap A_2$ 之间的非退化对偶（命题 3.2]）。

定义 3.7 ([22])。 利用配对 $\langle , \rangle_{NV}$，在 $A' \cap A_2$ 上定义余乘法$\Delta^{NV}_{A'\cap A_2}$ 和余单位$\varepsilon^{NV}_{A'\cap A_2}$ 如下：

$$\Delta^{NV}_{A'\cap A_2} : A' \cap A_2 \to (A' \cap A_2) \otimes (A' \cap A_2) : \quad \langle x_1 x_2, w\rangle_{NV} = \langle x_1, w_{(1)}\rangle_{NV}\,\langle x_2, w_{(2)}\rangle_{NV},$$
$$\varepsilon^{NV}_{A'\cap A_2} : A' \cap A_2 \to \mathbb{C} : \quad \varepsilon^{NV}_{A'\cap A_2}(w) = \langle 1, w\rangle_{NV},$$

对所有 x、 x_1、 $x_2 \in B' \cap A_1$和 $w \in A' \cap A_2$。

为验证该关系，我们先给出以下结果。

引理 3.8。 设 $x \in B' \cap A_1$ 和 $w \in A' \cap A_2$。则

$$\langle x, w\rangle_{NV} = d\tau^{-1}\langle w^*_x, w\rangle,$$

对于某个 $w_x \in A' \cap A_2$，使得 $\mathcal{F}_1^{-1}(w_x) = \tau^{\frac{1}{2}} x$.

证明： 我们有 $xe_2 \in B' \cap A_2$。根据 [24, 引理 3.1]， $xe_2e_1 \in (B' \cap A_2)e_1 = (A' \cap A_2)e_1$。因此，存在 $w_x \in A' \cap A_2$ 使得 $xe_2e_1 = w_x e_1$。所以，我们得到如下结果：

$$\begin{aligned}
\langle x, w\rangle_{\mathrm{NV}} &= d\tau^{-2}\mathrm{tr}(w_x e_1 w)\\
&= d\tau^{-2}(w w_x e_1)\\
&= d\tau^{-2}\mathrm{tr}\big(w w_x E^{B'\cap A_2}_{A'\cap A_2}(e_1)\big)\\
&= d\tau^{-1}\langle w^*_x, w\rangle.
\end{aligned}$$

此外，我们有 $\mathcal{F}_1^{-1}(w_x) = \tau^{-\frac{3}{2}} E_2(w_x e_1 e_2) = \tau^{-\frac{1}{2}} E_2(xe_2) = \tau^{\frac{1}{2}} x.$ □

定理 3.9. $A' \cap A_2$ 上的两个余乘法满足以下关系：

$$\Delta_{A'\cap A_2}(w) = d\,\Delta^{NV}_{A'\cap A_2}(w), \qquad \textit{for all } w \in A' \cap A_2.$$

证明：假设 $\Delta^{\mathrm{NV}}_{A'\cap A_2}(w) = w^{\mathrm{NV}}_{(1)} \otimes w^{\mathrm{NV}}_{(2)}$和 $\Delta_{A'\cap A_2}(w) = w_{(1)} \otimes w_{(2)}$。则有：

$$\begin{aligned}
\langle x_1, w_{(1)}\rangle_{\mathrm{NV}}\,\langle x_2, w_{(2)}\rangle_{\mathrm{NV}} &= d^2\tau^{-2}\langle w^*_{x_1}, w_{(1)}\rangle\,\langle w^*_{x_2}, w_{(2)}\rangle\\
&= d^2\tau^{-\frac{3}{2}}\langle w^*_{x_1} \star_1 w^*_{x_2}, w\rangle\\
&= d^2\tau^{-\frac{3}{2}}\langle w^*_{x_2} \star w^*_{x_1}, w\rangle \quad (\text{ by [3][Lemma 4.11]})\\
&= d^2\tau^{-\frac{3}{2}}\mathrm{tr}((w_{x_2} \star w_{x_1})w) \quad (\text{ by Equation (2.2)})\\
&= d^2\tau^{-\frac{3}{2}}\mathrm{tr}(\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_1^{-1}(w_{x_1})\mathcal{F}_1^{-1}(w_{x_2}))w).
\end{aligned}$$

现在，利用傅里叶变换的定义以及保迹条件期望 $E_{A'\cap A_2}^{B'\cap A_2}$ 的双模性质，可得:

$$\begin{aligned}\left\langle x_1, w_{(1)}\right\rangle_{\mathrm{NV}}\left\langle x_2, w_{(2)}\right\rangle_{\mathrm{NV}} &= d^2\tau^{-3}\mathrm{tr}\big(E_{A'\cap A_2}^{B'\cap A_2}(\mathcal{F}_1^{-1}(w_{x_1})\mathcal{F}_1^{-1}(w_{x_2})e_2e_1w)\big)\\ &= d^2\tau^{-3}\mathrm{tr}(\mathcal{F}_1^{-1}(w_{x_1})\mathcal{F}_1^{-1}(w_{x_2})e_2e_1w)\\ &= d^2\tau^{-2}\mathrm{tr}(x_1x_2e_2e_1w)\\ &= d\left\langle x_1x_2, w\right\rangle_{\mathrm{NV}}\\ &= d\left\langle x_1, w_{(1)}^{\mathrm{NV}}\right\rangle_{\mathrm{NV}}\left\langle x_2, w_{(2)}^{\mathrm{NV}}\right\rangle_{\mathrm{NV}}\end{aligned}$$

因此我们得到 $w_{(1)}\otimes w_{(2)} = d\, w_{(1)}^{\mathrm{NV}}\otimes w_{(2)}^{\mathrm{NV}}$。这意味着 $\Delta_{A'\cap A_2}(w) = d\,\Delta_{A'\cap A_2}^{\mathrm{NV}}(w)$。 □

命题 3.10. 定义在 $A'\cap A_2$ 上的两个余单位关系如下 :

$$\varepsilon_{A'\cap A_2}^{NV}(w) = d\,\varepsilon_{A'\cap A_2}(w).$$

证明：由定义 3.7，我们有:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{A'\cap A_2}^{\mathrm{NV}}(w) &= \left\langle 1, w\right\rangle_{\mathrm{NV}}\\ &= d\tau^{-2}\mathrm{tr}(e_2e_1w)\\ &= d\tau^{-2}\mathrm{tr}(E_{A'\cap A_2}^{B'\cap A_2}(e_2e_1w))\\ &= d\tau^{-1}\mathrm{tr}(e_2w)\\ &= d\,\varepsilon_{A'\cap A_2}(w)\end{aligned}$$

□

注记 *3.11.* 由非退化对偶 $\langle,\rangle_{\mathrm{NV}}$，在第二相对交换子 $B'\cap A_1$上诱导出一个余代数结构，它是定义 *3.7* 中定义的余代数 $A'\cap A_2$的对偶。令 $\Delta_{B'\cap A_1}^{\mathrm{NV}}$ 和 $\varepsilon_{B'\cap A_1}^{\mathrm{NV}}$ 分别表示由此对偶性得到的余乘法和余单位。容易验证， $d\,\Delta_{B'\cap A_1}^{\mathrm{NV}} = \Delta$ 和 $\varepsilon_{B'\cap A_1}^{\mathrm{NV}} = d\,\varepsilon$，其中 Δ 和 ε 分别表示定义 *3.1* 中定义的余乘法和余单位。因此，定义 *3.1* 中定义的余代数结构——一个定义在由包含 $B\subset A$诱导的 $B'\cap A_1$ 上，另一个定义在由包含 $A\subset A_1$诱导的 $A'\cap A_2$ 上——通过非退化配对 $\langle,\rangle_{\mathrm{NV}}$互为对偶。此外，直接计算表明，分别定义在 $B'\cap A_1$ 和 $A'\cap A_2$ 上的这两个余代数结构是同构的。

对于有限指数的 II_1 因子 $N\subset M$，Bhattacharjee 等人于 [5] 证明了与该包含相关的一个普适 Hopf $*$-代数的存在性，并将其称为量子伽罗瓦群 $Q\mathrm{Gal}(N\subset M)$。这引出了以下自然问题。

问题。 量子伽罗瓦群 $Q\mathrm{Gal}(N\subset M)$ 与定义3.3 中构造的 Hopf 代数之间是否存在关联?

4 第二相对交换子上的弱量子超群结构

本节的主要目标是证明，对于一个包含 $B \subset A$ 简单含幺 C^*-代数的包含，且配备有限指标型条件期望，其第二相对交换子 $B' \cap A_1$ 自然地获得下文定义的一种结构，我们称之为 弱量子超群。这一概念可以看作是 Chapovsky 和 Vainerman 在 [10]中引入的量子超群概念的弱化。此外，我们证明，当该包含不可约时，所得结构会提升为真正的量子超群。最后，我们证明弱量子超群 $B' \cap A_1$ 同时具有左不变和右不变的归一化测度，以及 Haar 积分。

定义 4.1。 设 $(A, \cdot, 1, *)$ 是一个含单位的 C^*-代数。若 $(A, \Delta, \varepsilon, \#)$ 满足以下条件，则称其在 $(A, \cdot, 1, *)$ 上定义了一个弱量子超群结构：

- $(A, \Delta, \varepsilon, \#)$ 是一个具有余单位 ε 的 $\#$-余代数；也就是说， $\Delta: A \to A \otimes A$ 和 $\varepsilon: A \to \mathbb{C}$ 是线性映射，而 $\#: A \to A$ 是满足以下条件的反线性映射：

  (i) $(\Delta \otimes \text{恒等映射}) \circ \Delta = (\text{恒等映射} \otimes \Delta) \circ \Delta$,

  (ii) $(\varepsilon \otimes \text{恒等映射}) \circ \Delta = (\text{恒等映射} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \text{恒等映射}$,

  (iii) $\Delta \circ \# = \Pi \circ (\# \otimes \#) \circ \Delta$，其中 $\Pi: A \otimes A \to A \otimes A$ 是翻转映射，

  (iv) $\# \circ \# = \text{恒等}$。

- 该映射 Δ 是正的。

- 以下恒等式成立：

  (i) $(x \cdot y)^\# = x^\# \cdot y^\#$，对所有 $x, y \in A$，(ii) $\Delta \circ * = (* \otimes *) \circ \Delta$，$(iii)$ $\# \circ * = * \circ \#$。

- 余单位的弱乘法性成立，即，对所有 x， y， $z \in A$，我们有 ve

$$\varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_{(1)})\varepsilon(y_{(2)}z) = \varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z).$$

- 单位的弱余乘性成立，即

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(1) = (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1)) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1).$$

与弱 Hopf 代数的情形一样，我们为弱量子超群定义以下概念。

定义 4.2. 对于任意弱量子超群 A，我们在 A 上定义目标映射和源映射，分别记为 ε^t 和 ε^s，如下所示：

$$\varepsilon^t(x) = \varepsilon(1_{(1)}x)\,1_{(2)}, \quad \textit{for all } x \in A,$$

$$\varepsilon^s(x) = 1_{(1)}\,\varepsilon(x1_{(2)}), \quad \textit{for all } x \in A.$$

定义 4.3。 若泛函 $\phi \in A^*$ 满足

$$(\mathrm{id} \otimes \phi) \circ \Delta = (\varepsilon^t \otimes \phi) \circ \Delta.$$

若测度 ϕ 满足 $(\mathrm{id} \otimes \phi) \circ \Delta(1) = 1.$，则称其为归一化测度

类似地，若泛函 $\psi \in A^*$ 满足

$$(\psi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\psi \otimes \varepsilon^s) \circ \Delta.$$

若测度 ψ 满足 $(\psi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(1) = 1.$，则称其为归一化测度

定义 4.4。 左积分是满足 $ax = \varepsilon^t(a)x$ 的元素 $x \in A$，对所有 $a \in A.$ 均成立。类似地，右积分是满足 $ya = y\varepsilon^s(a)$ 的元素 $y \in A$，对所有 $a \in A.$ 均成立

若元素 $h \in A$ 同时是左积分和右积分，并且满足$\varepsilon^t(h) = \varepsilon^s(h) = 1.$，则称其为 ***Haar*** 积分

现在我们证明，对于单幺 C^*代数的一个包含，若其条件期望具有有限 Watatani 指数，则第二相对交换子 $B' \cap A_1$ 具有定义 **4.1** 中所定义的弱量子超群结构4.1。我们注意到，Bischoff 等人 [8] 引入了与不可约局部离散子因子相关联的紧超群概念。我们的方法更为一般，因为所考虑的包含不必是不可约的。为确立这一结构，我们在 $B' \cap A_1$上定义以下映射。

定义 4.5。设 $B \subset A$ 是单幺 C^*代数的一个包含，其条件期望为有限指标型。在第二相对交换子 $B' \cap A_1$上，取 Δ，ε 如定义*3.1* 中所定义，并按如下方式定义 $\#$：

$$x^{\#} = r_1^+(x^*), \quad \textit{for any } x \in B' \cap A_1.$$

命题 4.6。对于任意 $x \in B' \cap A_1$，我们有

$$\Delta(x^{\#}) = x^{\#}_{(2)} \otimes x^{\#}_{(1)}.$$

证明： 令 x，y，$z \in B' \cap A_1$。则有如下结论：

$$\left\langle x^{\#}_{(2)} \otimes x^{\#}_{(1)}, y \otimes z \right\rangle = \mathrm{tr}\big(r_1^+(x_{(2)})y\big)\,\mathrm{tr}\big(r_1^+(x_{(1)})z\big).$$

根据定义2.4，我们知道 r_1^+ 是对合的且保迹。因此我们得到，

$$\begin{aligned}\left\langle x_{(2)}^{\#}\otimes x_{(1)}^{\#}, y\otimes z\right\rangle &= = \operatorname{tr}\left(x_{(2)}r_1^+(y)\right)\operatorname{tr}\left(x_{(1)}r_1^+(z)\right)\\ &= \left\langle x_{(2)}^*, r_1^+(y)\right\rangle\left\langle x_{(1)}^*, r_1^+(z)\right\rangle\\ &= \tau^{\frac{1}{2}}\left\langle x^*, r_1^+(z)\star r_1^+(y)\right\rangle.\end{aligned}$$

由 [4, 命题 3.9], 可知， $r_1^+(z)\star r_1^+(y) = r_1^+(y\star z)$。因此我们得到如下结论：

$$\begin{aligned}\left\langle x_{(2)}^{\#}\otimes x_{(1)}^{\#}, y\otimes z\right\rangle &= \tau^{\frac{1}{2}}\left\langle x^*, r_1^+(y\star z)\right\rangle\\ &= \tau^{\frac{1}{2}}\operatorname{tr}\left(r_1^+(x)(y\star z)\right)\\ &= \tau^{\frac{1}{2}}\left\langle x^{\#}, y\star z\right\rangle\\ &= \left\langle \Delta(x^{\#}), y\otimes z\right\rangle.\end{aligned}$$

至此，证明完毕。 □

命题 4.7. 我们有以下结论：

(i) $\#$： $B'\cap A_1\to B'\cap A_1$ 是反线性的。
(ii) 对任意 $x\in B'\cap A_1$， $(x^{\#})^{\#}=x$.(iii) 对任意 $x,y\in B'\cap A_1$， $(x\cdot y)^{\#}=x^{\#}\cdot y^{\#}$.$(iv)$ 对任意 $x\in B'\cap A_1$， $(x^*)^{\#}=(x^{\#})^*$.

证明：由于 r_1^+ 是线性的且保持 $*$的反同态，前述结论立即成立。□

现在我们着手证明余单位的弱乘法性。在进入论证的主要部分之前，我们先记录若干辅助观察，这些观察对于我们的证明至关重要。

引理 4.8. 对于任意 x、 y、 $z\in B'\cap A_1$，有如下结论：
(i) $\left\langle z,(xe_1)\star y\right\rangle = \underline{\tau}^{-\frac{1}{2}}\operatorname{tr}\left(E_1(xe_1)yz^*\right)$.$(ii)$ $\varepsilon^t(x) = \tau^{-1}E_1(xe_1)$.$(iii)$ $\varepsilon(x_{(1)}y)x_{(2)} = x\varepsilon^t(y)$.

证明：

（i）利用公式（2.2），我们得到：

$$\left\langle z\,,\,(xe_1)\star y\right\rangle = \overline{\operatorname{tr}(z\,((e_1x^*)\star y^*))}. \tag{4.8}$$

根据卷积乘积的定义，可得：

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(z\,((e_1x^*)\star y^*)) &= \tau^{-\frac{3}{2}}\operatorname{tr}\big(zE_2(\mathcal{F}(y^*)\mathcal{F}(e_1x^*)e_1e_2)\big)\\ &= \tau^{-\frac{3}{2}}\operatorname{tr}\big(z\,\mathcal{F}(y^*)\mathcal{F}(e_1x^*)e_1e_2\big)\\ &= \tau^{-\frac{5}{2}}\sum_{i_1,i_2}\operatorname{tr}(\lambda_{i_1}e_1x^*e_2e_1\lambda_{i_1}^*e_1e_2z\lambda_{i_2}y^*e_2e_1\lambda_{i_2}^*)\\ &= \tau^{-\frac{3}{2}}\sum_{i_1}\operatorname{tr}(e_1x^*e_2z\lambda_{i_2}y^*e_2e_1\lambda_{i_2}^*)\\ &= \tau^{-\frac{3}{2}}\sum_{i_1}\operatorname{tr}(x^*e_2z\lambda_{i_2}y^*e_2E_0(\lambda_{i_2}^*)e_1)\\ &= \tau^{-\frac{3}{2}}\operatorname{tr}(x^*e_2zy^*e_2e_1).\end{aligned}$$

将上述内容与公式（4.8）结合，可得

$$\begin{aligned}\big\langle z\,,\,(xe_1)\star y\big\rangle &= \tau^{-\frac{3}{2}}\operatorname{tr}(e_1e_2yz^*e_2x)\\ &= \tau^{-\frac{3}{2}}E_0\circ E_1\circ E_2(e_1E_1(yz^*)e_2x)\\ &= \tau^{-\frac{1}{2}}E_0\circ E_1(xe_1E_1(yz^*))\\ &= \tau^{-\frac{1}{2}}E_0(E_1(xe_1)E_1(yz^*))\\ &= \tau^{-\frac{1}{2}}\operatorname{tr}\big(E_1(xe_1)yz^*\big).\end{aligned}$$

(*ii*) 只需证明，对于任意 $y\in B'\cap A_1$

$$\big\langle y,\varepsilon(1_{(1)}x)\,1_{(2)}\big\rangle = \tau^{-1}\big\langle y,E_1(xe_1)\big\rangle.$$

现在利用定义 4.5及上述第（i）项，可得到如下结果：

$$\begin{aligned}\big\langle y,\varepsilon(1_{(1)}x)\,1_{(2)}\big\rangle &= \tau^{-1}\big\langle e_1,1_{(1)}x\big\rangle\big\langle y,1_{(2)}\big\rangle\\ &= \tau^{-1}\big\langle 1_{(1)}^*,xe_1\big\rangle\big\langle 1_{(2)}^*,y^*\big\rangle\\ &= \tau^{-\frac{1}{2}}\big\langle 1,(xe_1)\star y^*\big\rangle\\ &= \tau^{-1}\operatorname{tr}\big(E_1(xe_1)y^*\big)\\ &= \tau^{-1}\big\langle y,E_1(xe_1)\big\rangle.\end{aligned}$$

因此，证明完毕。

（iii）对于任意 $z\in B'\cap A_1$，我们有如下结论：

$$\begin{aligned}\big\langle z,\varepsilon(x_{(1)}y)x_{(2)}\big\rangle &= \tau^{-1}\big\langle e_1,x_{(1)}y\big\rangle\big\langle z,x_{(2)}\big\rangle\\ &= \tau^{-1}\big\langle x_{(1)}^*,ye_1\big\rangle\big\langle x_{(2)}^*,z^*\big\rangle\\ &= \tau^{-\frac{1}{2}}\big\langle x^*,(ye_1)\star z^*\big\rangle\\ &= \tau^{-1}\operatorname{tr}\big(E_1(ye_1)z^*x\big)\\ &= \big\langle z,x\varepsilon^t(y)\big\rangle.\end{aligned}$$

因此证明完成。 □

命题 4.9. 对于任意 $x,\ y,\ z \in B' \cap A_1$，有

$$\varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_{(1)})\varepsilon(y_{(2)}z) = \varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z).$$

证明：根据定义 4.8，我们得到：

$$\begin{aligned}\varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z) &= \tau^{-1}\varepsilon(xyE_1(ze_1)) \\ &= \tau^{-2}\mathrm{tr}(e_1xyE_1(ze_1)) \\ &= \tau^{-2}\mathrm{tr}(E_1(ze_1)e_1xy) \\ &= \tau^{-1}\mathrm{tr}(ze_1xy) \\ &= \varepsilon(xyz).\end{aligned}$$

由于 Δ 保持 $*$，我们知道 $\varepsilon(x) = \varepsilon(x^*)$。因此有：

$$\begin{aligned}\varepsilon(xyz) &= \overline{\varepsilon(z^*y^*x^*)} \\ &= \overline{\varepsilon(z^*y^*_{(2)})\varepsilon(y^*_{(1)}x^*)} \\ &= \varepsilon(xy_{(1)})\varepsilon(y_{(2)}z).\end{aligned}$$

至此得证。 □

现在我们转而验证单位的弱余乘性。这一性质是证明与包含 $B \subset A$ 相关的第二相对交换子 $B' \cap A_1$ 确实具有弱量子超群结构的关键要素。为准备主要论证，我们先汇集若干初步观察，这些观察将在后续分析中作为重要工具。

引理 4.10. 设 $\{\gamma_i\}$ 是 $E_0|_{B'\cap A}$ 的准基，则有：

$$\Delta(1) = \sum_i r_1^+(\gamma_i^*) \otimes \gamma_i.$$

证明：对于任意 $x, y \in B' \cap A_1$，我们有

$$\begin{aligned}\big\langle \Delta(1), x \otimes y \big\rangle &= \tau^{\frac{1}{2}}\big\langle 1, x \star y \big\rangle \\ &= \tau^{-1}\mathrm{tr}(E_2(\mathcal{F}(y)\mathcal{F}(x)e_1e_2)) \\ &= \tau^{-2}\mathrm{tr}(\sum_{i_1,i_2} \lambda_{i_1}xe_2e_1\lambda^*_{i_1}e_1e_2\lambda_{i_2}ye_2e_1\lambda^*_{i_2}) \\ &= \tau^{-1}\mathrm{tr}(\sum_{i_2} xe_2\lambda_{i_2}ye_2e_1\lambda^*_{i_2}) \\ &= \tau^{-1}\mathrm{tr}(\sum_{i_2} x\lambda_{i_2}E_1(y)e_2e_1\lambda^*_{i_2}) \\ &= \mathrm{tr}(\sum_{i_2} x\lambda_{i_2}E_1(y)e_1\lambda^*_{i_2}).\end{aligned}$$

利用公式（2.3），我们得到：

$$r_1^+(E_1(y)) = \tau^{-1}\sum_i E_1(e_1\lambda_i E_1(y))e_1\lambda_i^* = \sum_i \lambda_i E_1(y)e_1\lambda_i^*.$$

因此，我们得到如下结论：

$$\big\langle \Delta(1), x\otimes y\big\rangle = \mathrm{tr}\big(x\, r_1^+(E_1(y))\big). \tag{4.9}$$

我们进一步观察到

$$\begin{aligned}
\big\langle \sum_i r_1^+(\gamma_i^*)\otimes\gamma_i, x\otimes y\big\rangle &= \sum_i \mathrm{tr}(r_1^+(\gamma_i)x)\,\mathrm{tr}(\gamma_i^* y)\\
&= \sum_i \mathrm{tr}(r_1^+(\gamma_i)x)\, E_0(\gamma_i^* E_1(y))\\
&= \mathrm{tr}\big(r_1^+(\sum_i \gamma_i E_0(\gamma_i^* E_1(y)))x\big)\\
&= \mathrm{tr}\big(r_1^+(E_1(y))x\big)\\
&= \mathrm{tr}\big(x\, r_1^+(E_1(y))\big).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

因此，最后由公式（4.9）和公式（4.10），得证。

引理 4.11。对于任意 $x\in B'\cap A_1$ 和 $v\in B'\cap A$，有

$$\Delta(xv) = \Delta(x)(v\otimes 1).$$

证明：对于任意 y，$z\in B'\cap A_1$，有如下结论：

$$\begin{aligned}
\big\langle \Delta(xv), y\otimes z\big\rangle &= \tau^{\frac{1}{2}}\big\langle xv, y\star z\big\rangle\\
&= \tau^{-1}\mathrm{tr}(v^*x^*E_2(\mathcal{F}(z)\mathcal{F}(y)e_1e_2))\\
&= \tau^{-1}\mathrm{tr}(v^*x^*\mathcal{F}(z)\mathcal{F}(y)e_1e_2)\\
&= \tau^{-2}\sum_{i_1,i_2}\mathrm{tr}(\lambda_{i_1}ye_2e_1\lambda_{i_1}^*e_1e_2v^*x^*\lambda_{i_2}ze_2e_1\lambda_{i_2}^*)\\
&= \tau^{-1}\sum_{i_2}\mathrm{tr}(yv^*e_2x^*\lambda_{i_2}ze_2e_1\lambda_{i_2}^*).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

此外，我们还可以观察到以下内容：

$$\begin{aligned}
\big\langle x_{(1)}v, y\big\rangle\big\langle x_{(2)}, z\big\rangle &= \big\langle x_{(1)}, yv^*\big\rangle\big\langle x_{(2)}, z\big\rangle\\
&= \tau^{\frac{1}{2}}\big\langle x, (yv^*)\star z\big\rangle\\
&= \tau^{-1}\mathrm{tr}(x^*E_2(\mathcal{F}(z)\mathcal{F}(yv^*)e_1e_2))\\
&= \tau^{-1}\mathrm{tr}(x^*\mathcal{F}(z)\mathcal{F}(yv^*)e_1e_2)\\
&= \tau^{-2}\sum_{i_1,i_2}\mathrm{tr}(\lambda_{i_1}yv^*e_2e_1\lambda_{i_1}^*e_1e_2x^*\lambda_{i_2}ze_2e_1\lambda_{i_2}^*)\\
&= \tau^{-1}\sum_{i_2}\mathrm{tr}(yv^*e_2x^*\lambda_{i_2}ze_2e_1\lambda_{i_2}^*).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

因此，最终由等式（4.11）和等式（4.12），得证。 □

引理 4.12. 我们有， $r_1^+(B' \cap A) = A' \cap A_1$.

证明：令 $v \in B' \cap A$，则有如下结果：

$$r_1^+(v) = \tau^{-1} \sum_i E_1(e_1 \lambda_i v) e_1 \lambda_i^* = \sum_i \lambda_i v e_1 \lambda_i^* = \tau^{-1} E_{A' \cap A_1}^{B' \cap A_1}(v e_1).$$

因此我们得到， $r_1^+(B' \cap A) \subset A' \cap A_1$。此外，对于任意 $u \in A' \cap A_1$，我们有如下结果：

$$\begin{aligned} r_1^+(u) &= \tau^{-1} \sum_i E_1(e_1 \lambda_i u) e_1 \lambda_i^* \\ &= \tau^{-1} \sum_i E_1(e_1 u \lambda_i) e_1 \lambda_i^* \\ &= \tau^{-1} \sum_i E_1(e_1 u) \lambda_i e_1 \lambda_i^* \\ &= \tau^{-1} \sum_i E_1(e_1 u). \end{aligned}$$

因此我们得到， $r_1^+(A' \cap A_1) \subset B' \cap A$。由于 r_1^+ 是对合的，我们得到所需结果。 □

命题 4.13. 以下结论成立，

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(1) = (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1)) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1).$$

证明：根据定义 4.10 和定义 4.12，我们得到如下结果：

$$\begin{aligned} (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1)) &= (\sum_i r_1^+(\gamma_i^*) \otimes \gamma_i \otimes 1)(\sum_j 1 \otimes r_1^+(\gamma_j^*) \otimes \gamma_j) \\ &= \sum_{i,j} r_1^+(\gamma_i^*) \otimes \gamma_i r_1^+(\gamma_j^*) \otimes \gamma_j \\ &= \sum_{i,j} r_1^+(\gamma_i^*) \otimes r_1^+(\gamma_j^*) \gamma_i \otimes \gamma_j \qquad (4.13) \\ &= (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1). \end{aligned}$$

应用定义 4.10和定义4.11，我们得到：

$$\begin{aligned} (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(1) &= \sum_i r_1^+(\gamma_i^*) \otimes \Delta(1 \gamma_i) \\ &= \sum_{i,j} r_1^+(\gamma_i^*) \otimes r_1^+(\gamma_j^*) \gamma_i \otimes \gamma_j. \qquad (4.14) \end{aligned}$$

最后，根据公式（4.13）和公式（4.14），我们得到所需结果。 □

作为定义 3.2、定义3.6、定义 4.6、定义 4.7、定义 4.9和定义4.13的推论，我们现在可以综合迄今为止确立的结构性质。这些结果共同确保第二相对交换子上的余乘法、余单位和#-运算以完全符合弱量子超群公理的方式相互作用。因此，我们得到以下基本定理：

定理 4.14。 设 $B \subset A$ 是简单含幺 C^*-代数之间的一个包含，且配有有限指标型条件期望。若 Δ， ε 以及 $\#$ 如定义 *4.5*中所定义，则 $(B' \cap A_1,\ \Delta,\ \varepsilon,\ \#)$ 构成一个弱量子超群。

回顾一下，配对 $\langle ,\ \rangle_{\mathrm{NV}}$ 在相对交换子 $B' \cap A_1$ 和 $A' \cap A_2$之间给出了非退化对偶性。由此得到以下推论。

定理 4.15。 设 $B \subset A$ 是简单含幺 C^*-代数之间的一个包含，且配有有限指标型条件期望。则 $A' \cap A_2$ 具有由该对偶性诱导的弱量子超群结构。

证明。根据定义 4.14，四元组 $(B' \cap A_1, \Delta, \varepsilon, \#)$ 构成一个弱量子超群。现在考虑定义 3.7 中 $B' \cap A_1$ 上的余乘法和余单位。此外，定义 3.11 给出 $d\,\Delta^{\mathrm{NV}}_{B' \cap A_1} = \Delta$、 $\varepsilon^{\mathrm{NV}}_{B' \cap A_1} = d\,\varepsilon$，因此 $(B' \cap A_1, \Delta^{\mathrm{NV}}_{B' \cap A_1}, \varepsilon^{\mathrm{NV}}_{B' \cap A_1}, \#)$ 也是一个弱量子超群。接下来，我们考虑由对偶配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{NV}}$诱导的 $A' \cap A_2$ 上的余乘法和余单位，使其成为 $(B' \cap A_1, \Delta^{\mathrm{NV}}_{B' \cap A_1}, \varepsilon^{\mathrm{NV}}_{B' \cap A_1})$ 的对偶。根据定义 3.9，有 $d\,\Delta^{\mathrm{NV}}_{A' \cap A_2} = \Delta_{A' \cap A_2}$，其中 $\Delta_{A' \cap A_2}$ 是定义 3.1 中引入的余乘法，它源自包含 $A \subset A_1$。因此，根据定义 3.6， $\Delta^{\mathrm{NV}}_{A' \cap A_2}$ 是完全正的。我们赋予$A' \cap A_2$ 一个由下式确定的 $*$-结构

$$\langle x, w^* \rangle_{\mathrm{NV}} = \overline{\langle x^{\#}, w \rangle}_{\mathrm{NV}}, \qquad x \in B' \cap A_1, \quad w \in A' \cap A_2,$$

并且可以验证，这与 $A' \cap A_2$ 上通常的对合一致。此外，映射 $\# :\ A' \cap A_2 \to A' \cap A_2$ 定义如下：

$$\langle x, w^{\#} \rangle_{\mathrm{NV}} = \overline{\langle x^*, w \rangle}_{\mathrm{NV}}, \qquad x \in B' \cap A_1, \quad w \in A' \cap A_2.$$

在这些结构下，代数对象 $(A' \cap A_2, \Delta_{A' \cap A_2}, \varepsilon_{A' \cap A_2}, \#)$ 满足弱量子超群的所有公理。至此，证明完成。□

注 *4.16.* 代数 $A' \cap A_2$ 也具有定义 *4.5* 所给出的弱量子超群结构，该结构源自包含 $A \subset A_1$。在此情形下，余乘法和余单位满足 $d\,\Delta^{\mathrm{NV}}_{A' \cap A_2} = \Delta_{A' \cap A_2}$和 $\varepsilon^{\mathrm{NV}}_{A' \cap A_2} = d\,\varepsilon_{A' \cap A_2}$.。对于由定义 *4.5* 在 $A' \cap A_2$ 上得到的弱量子超群结构， $\#$ 由下式给出： $w^{\#} := (r_1^+)^{A \subset A_1}(w^*)$。根据 *[3,*命题 *3.20],* ，有 $(r_1^+)^{A \subset A_1} = r_1^-$。此外，根据 *[24,* 引理 *4.3],* $\langle x, r_1^-(w) \rangle_{\mathrm{NV}} = \langle r_1^+(x) w \rangle_{\mathrm{NV}}$，其中 $x \in B' \cap A_1$, $w \in A' \cap A_2$. 。利用这些恒等式可知，定义 *4.5* 中定义的 $\#$-运算与由对偶配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{NV}}$导出的运算一致。

若 $B'\cap A=\mathbb{C}$，则根据定义4.10 有 $\Delta(1)=1\otimes 1$。因此，由定义4.9 可得 $\varepsilon(xy)=\varepsilon(x)\varepsilon(y)$，对所有 x， $y\in B'\cap A_1$. 因此，我们得到如下结论：

定理 4.17。 设 $B\subset A$ 是简单含幺 C^*-代数的不可约包含，并带有有限指标型的条件期望。那么$(B'\cap A_1,\Delta,\varepsilon,\#)$ 成为一个量子超群。

推论 4.18。 设 $B\subset A$ 是简单含幺 C^*-代数的不可约包含，并带有有限指标型的条件期望。那么 $A'\cap A_2$ 具有由对偶性 $\langle,\rangle_{\mathrm{NV}}$ 诱导的量子超群结构。

注 4.19。 当包含 $B\subset A$ 的深度为2 且 $E_1|_{A'\cap A_1}$ 具有标量 *Watatani* 指数时， $B'\cap A_1$ 具有弱 *Kac* 代数的结构（见 *[22, 24]*）。在这种情况下，余乘法是一个 $*$-同态，因而是完全正的，并且弱量子超群的所有公理都自动成立。因此，在深度为2 且 $E_1|_{A'\cap A_1}$ 具有标量 *Watatani* 指数的情形下，可以恢复弱 *Kac* 代数意义下的弱量子超群结构。由此，弱量子超群这一概念提供了一个更一般的框架。

值得注意的是， $B'\cap A_1$ 存在许多类似的代数结构，它们满足弱量子超群的所有公理，唯独不满足 #的反余乘性。例如，从包含 $B\subset A_1$出发，可在 $B'\cap A_3$上得到余乘法 Δ_3，以及 $\Delta_3(B'\cap A_1)\subset(B'\cap A_3)\otimes(B'\cap A_1)$。定义 $\Delta_{D_1}=(E_2^3\otimes\mathrm{id})\circ\Delta_3\big|_{B'\cap A_1}$， $\varepsilon_{D_1}=\varepsilon_3\big|_{B'\cap A_1}$， $x^{\#}=r_1^+(x^*)$，其中$E_2^3=E_2\circ E_3$。这就得到 $B'\cap A_1$ 上的一种结构，它满足弱量子超群的所有公理，唯独不满足 $\Delta\circ\#=\Pi\circ(\#\otimes\#)\circ\Delta$；相反，它满足 $\Delta_{D_1}\circ\#=(\#\otimes\#)\circ\Delta_{D_1}$.。沿基本构造塔以此方式继续下去，可得到无穷多个此类结构，它们都具有相同的偏离，即不满足 #的反余乘性。

我们现在证明，定义 $B'\cap A_1$ 4.14 中出现的弱量子超群同时具有左不变和右不变的归一化测度。为准备这一结果，我们先确立若干将在整个证明过程中用到的初步观察。

引理 4.20。 对于任意 $x\in B'\cap A_1$，我们有如下结论：

$$\varepsilon^s(x)=\tau^{-1}r_1^+(E_1(e_1x)).$$

证明：对于 $y\in B'\cap A_1$，我们得到

$$\begin{aligned}
\big\langle y,\,1_{(1)}\varepsilon(x1_{(2)})\big\rangle &= \tau^{-1}\big\langle y,\,1_{(1)}\big\rangle\big\langle e_1,\,x1_{(2)}\big\rangle\\
&= \tau^{-1}\mathrm{tr}(1_{(1)}y^*)\,\mathrm{tr}(1_{(2)}e_1x)\\
&= \tau^{-1}\mathrm{tr}\big(r_1^+(1_{(1)})r_1^+(y^*)\big)\,\mathrm{tr}\big(r_1^+(1_{(2)})r_1^+(e_1x)\big)\quad\text{(by Definition 2.4)}\\
&= \tau^{-1}\big\langle 1^{\#}_{(1)},\,r_1^+(y^*)\big\rangle\big\langle 1^{\#}_{(2)},\,r_1^+(e_1x)\big\rangle\\
&= \tau^{-\frac{1}{2}}\big\langle 1,\,r_1^+(e_1x)\star r_1^+(y^*)\big\rangle\quad\text{(by Definition 4.6).}
\end{aligned}\tag{4.15}$$

应用公式（2.3），我们计算得

$$r_1^+(e_1x)=\tau^{-1}\sum_i E_1(e_1\lambda_i e_1x)e_1\lambda_i^*=\tau^{-1}\sum_i E_1(E_0(\lambda_i)e_1x)e_1\lambda_i^*=\tau^{-1}E_1(e_1x)e_1.$$

那么，由等式（4.15），可得

$$\begin{aligned}\big\langle y,\,1_{(1)}\varepsilon(x1_{(2)})\big\rangle&=\tau^{-\frac{3}{2}}\big\langle 1,\,(E_1(e_1x)e_1)\star r_1^+(y^*)\big\rangle\\&=\tau^{-2}\mathrm{tr}\big(E_1(E_1(e_1x)e_1)r_1^+(y^*)\big)\quad\text{(by Definition 4.8 item }(i))\\&=\tau^{-1}\mathrm{tr}\big(E_1(e_1x)r_1^+(y^*)\big)\\&=\tau^{-1}\mathrm{tr}\big(r_1^+(E_1(e_1x))y^*\big)\\&=\tau^{-1}\big\langle y,\,r_1^+(E_1(e_1x))\big\rangle.\end{aligned}$$

因此，证明完毕。 □

引理 4.21。 对于任意 x、$y\in B'\cap A_1$，有

$$\big\langle x,y\star 1\big\rangle=\tau^{-\frac{1}{2}}\mathrm{tr}(yE_1(x^*)).$$

证明：有如下结论：

$$\begin{aligned}\big\langle x,y\star 1\big\rangle&=\tau^{-\frac{3}{2}}\mathrm{tr}(x^*E_2(\mathcal{F}(1)\mathcal{F}(y)e_1e_2))\\&=\tau^{-2}\mathrm{tr}(\mathcal{F}(y)e_1e_2x^*e_2)\\&=\tau^{-\frac{5}{2}}\sum_i\mathrm{tr}(\lambda_iye_2e_1\lambda_i^*e_1e_2x^*e_2)\\&=\tau^{-\frac{3}{2}}\mathrm{tr}(ye_2x^*e_2)\\&=\tau^{-\frac{1}{2}}\mathrm{tr}(yE_1(x^*)).\end{aligned}$$

□

引理 4.22。 对于任意 $v\in B'\cap A$，有 $e_1\,r_1^+(v)=e_1v$。

证明：令 $v\in B'\cap A$。利用等式（2.3）和定义 2.2，可得

$$e_1\,r_1^+(v)=\tau^{-1}\sum_i e_1E_1(e_1\lambda_iv)e_1\lambda_i^*=\sum_i e_1E_0(v\lambda_i)\lambda_i^*=e_1v.$$

□

定理 4.23。 设 $B\subset A$ 是简单含幺 C^*-代数的一个包含，且带有有限指标型的条件期望。那么，按定义 $B'\cap A_1$中的定义，弱量子超群 *4.5*同时存在左不变和右不变的归一化测度。

证明：考虑泛函 $\phi(x) = \mathrm{tr}(x)$。首先，我们将证明 ϕ 是左不变测度，即 $(\mathrm{id} \otimes \phi) \circ \Delta = (\varepsilon^t \otimes \phi) \circ \Delta$. 对于任意 $y \in B' \cap A_1$，根据定义 4.21，有如下结果：

$$\begin{aligned}\big\langle y, x_{(1)}\mathrm{tr}(x_{(2)})\big\rangle &= \big\langle x^*_{(1)}, y^*\big\rangle \big\langle x^*_{(2)}, 1\big\rangle \\ &= \tau^{\frac{1}{2}}\big\langle x^*, y^* \star 1\big\rangle \\ &= \mathrm{tr}(y^* E_1(x)) \\ &= \mathrm{tr}(xE_1(y^*)).\end{aligned} \tag{4.16}$$

此外，利用定义 4.8第 (ii) 项以及定义4.21，我们得到

$$\begin{aligned}\big\langle y, \varepsilon^t(x_{(1)})\mathrm{tr}(x_{(2)})\big\rangle &= \tau^{-1}\big\langle y, E_1(x_{(1)}e_1)\big\rangle \big\langle x^*_{(2)}, 1\big\rangle \\ &= \tau^{-1}E_0\big(E_1(y^*)E_1(x_{(1)}e_1)\big) \big\langle x^*_{(2)}, 1\big\rangle \\ &= \tau^{-1}E_0\big(E_1(x_{(1)}e_1E_1(y^*))\big) \big\langle x^*_{(2)}, 1\big\rangle \\ &= \tau^{-1}\big\langle x^*_{(1)}, e_1E_1(y^*)\big\rangle \big\langle x^*_{(2)}, 1\big\rangle \\ &= \tau^{-\frac{1}{2}}\big\langle x^*, (e_1E_1(y^*)) \star 1\big\rangle \\ &= \tau^{-\frac{1}{2}}\,\overline{\big\langle x, (E_1(y)e_1) \star 1\big\rangle}.\end{aligned}$$

最后一个等式由公式 (2.2) 可得。现在利用定义 4.8 第 (i) 项，我们得到

$$\begin{aligned}\big\langle y, \varepsilon^t(x_{(1)})\mathrm{tr}(x_{(2)})\big\rangle = \tau^{-1}\overline{\mathrm{tr}\big(E_1(E_1(y)e_1)x^*\big)} &= \overline{\mathrm{tr}\big(E_1(y)x^*\big)} \\ &= \mathrm{tr}(xE_1(y^*)).\end{aligned} \tag{4.17}$$

因此，由公式 (4.16) 和公式 (4.17)，我们得出 ϕ 是左不变测度。此外，很容易验证 ϕ 是归一化的。现在我们将证明 ϕ 也是右不变测度，即 $(\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\phi \otimes \varepsilon^s) \circ \Delta$. 对于任意 $y \in B' \cap A_1$，我们得到如下结果：

$$\big\langle y,\, \mathrm{tr}(x_{(1)})x_{(2)}\big\rangle = \big\langle x^*_{(1)},\, 1\big\rangle \big\langle x^*_{(2)}, y^*\big\rangle = \tau^{\frac{1}{2}}\big\langle x^*,\, 1 \star y^*\big\rangle. \tag{4.18}$$

根据定义 4.20 以及 r_1^+是一个对合的保迹反同态这一事实，我们可以推得

$$\begin{aligned}\big\langle y, \mathrm{tr}(x_{(1)})\varepsilon^s(x_{(2)})\big\rangle &= \tau^{-1}\big\langle x^*_{(1)},\, 1\big\rangle \,\mathrm{tr}(y^* r_1^+(E_1(e_1x_{(2)}))) \\ &= \tau^{-1}\big\langle x^*_{(1)},\, 1\big\rangle \,\mathrm{tr}\big(E_1(e_1x_{(2)})r_1^+(y^*)\big) \\ &= \tau^{-1}\big\langle x^*_{(1)},\, 1\big\rangle \,E_0(E_1(e_1x_{(2)})E_1(r_1^+(y^*))) \\ &= \tau^{-1}\big\langle x^*_{(1)},\, 1\big\rangle \big\langle x^*_{(2)},\, E_1(r_1^+(y^*))e_1\big\rangle \\ &= \tau^{-\frac{1}{2}}\big\langle x^*,\, 1 \star (E_1(r_1^+(y^*))e_1)\big\rangle.\end{aligned}$$

现在，利用 [4, 命题 3。9] 结合 $r_1^+(e_1) = e_1$这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
\big\langle y, \mathrm{tr}(x_{(1)})\varepsilon^s(x_{(2)})\big\rangle &= \tau^{-\frac{1}{2}}\big\langle r_1^+(x^*),\, \big(e_1 r_1^+(E_1(r_1^+(y^*)))\big)\star 1\big\rangle \\
&= \tau^{-\frac{1}{2}}\big\langle r_1^+(x^*),\, \big(e_1 E_1(r_1^+(y^*))\big)\star 1\big\rangle \quad \text{(by Definition 4.22)} \\
&= \tau^{-\frac{1}{2}}\overline{\big\langle r_1^+(x),\, \big(E_1(r_1^+(y))e_1\big)\star 1\big\rangle} \quad \text{(by Equation (2.2))} \\
&= \tau^{-1}\overline{\mathrm{tr}\big(E_1(E_1(r_1^+(y))e_1)r_1^+(x^*)\big)} \quad \text{(by Definition 4.8 item } (i)) \\
&= \mathrm{tr}\big(r_1^+(x)E_1(r_1^+(y^*))\big) \\
&= \tau^{\frac{1}{2}}\big\langle r_1^+(x^*),\, r_1^+(y^*)\star 1\big\rangle \quad \text{(by Definition 4.21)} \\
&= \tau^{\frac{1}{2}}\big\langle x^*,\, 1\star y^*\big\rangle. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

因此，由公式（4.18）和公式（4.19），我们得到 ϕ 也是一个右不变测度。显然， ϕ 是一个归一化的右不变测度。□

定理 4.24。 设 $B \subset A$ 是简单含单位元的 C^*-代数的一个包含，且具有有限指标型的条件期望。那么，由定义 *4.5*产生的弱量子超群 $B' \cap A_1$具有 ***Haar*** 积分。

证明：利用定义 4.8 第（ii）项、定义 4.20以及定义 4.22，可直接得到 e_1 是一个 Haar 积分。□

致谢

第一作者感谢 INSPIRE 教师基金 DST/INSPIRE/04/2019/002754 和 ANRF/ECRG/2024/002328/PMS 的支持。第二作者部分得到了由印度政府颁发的 ANRF JC Bose 国家研究员计划的资助。

参考文献

[1] K. C. Bakshi 和 V. P. Gupta，中间子代数的格，伦敦数学学会杂志(2)**104** (2021)，第 5 期，2082–2127；MR4368671

[2]K. C. Bakshi、S. Guin 和 B. Pal，一对中间子代数之间角算子的冯·诺依曼熵，即将在非交换几何杂志发表。DOI:10.4171/JNCG/606。

[3] K. C. Bakshi、S. Guin、B. Pal 和 Sruthymurali，具有有限 Watatani 指数的 C^*-代数包含的高阶反射与典范移位的熵，*Internat. J.Math.***37** （2026），第 1 期，论文编号 2650007；MR5002824

[4] K. C. Bakshi、S. Guin 和 Sruthymurali，简单 C^*-代数包含的傅里叶理论不等式，New York J. Math. 29（2023），335–362；MR4564011[5] S. Bhattacharjee、A. C hirv˘asitu 和 D. Goswami，子因子的量子伽罗瓦群，Internat. J. Math. 33（2022），第 2 期，论文编号 2250013，30 页；MR4384240[6] D. H. Bisch，双模、高阶相对交换子与关联于子因子的融合代数，载于《算子代数及其应用》（安大略省滑铁卢，1994/1995），13–63，Fields Inst. Commun.，13，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯；MR1424954[7] D. H. Bisch 和 V. F. R. Jones，小维数的单生成平面代数，Duke Math. J. 101（2000），第 1 期，41–75；MR1733737[8] M. Bischoff、S. Del Vecchio 和 L. Giorgetti，离散子因子产生的紧超群，J. Funct. Anal. 281（2021），第 1 期，论文编号 109004，78 页；MR4234861[9] W. R. Bloom 和 H. Heyer，超群上概率测度的调和分析，De Gruyter 数学研究丛书，20，de Gruyter，柏林，1995；MR1312826[10] Y. A. Chapovsky 和 L. I. Vainerman，紧量子超群，J. Operator Theory 41（1999），第 2 期，261–289；MR1681575[11] L. Delvaux 和 A. Van Daele，代数量子超群，Adv. Math. 226（2011），第 2 期，1134–1167；MR2737779[12] L. Delvaux 和 A. Van Daele，代数量子超群 II。构造与例子，Internat. J. Math. 22（2011），第 3 期，407–434；MR2782694[13]L. Hataishi 和 R. H. Palomares，来自张量范畴的算子代数包含：超越不可约性，Glasg. Math. J.，在线发表 2025：1-35，DOI:10.1017/S0017089525100839。[14] L. Huang、Z. Liu、S. Palcoux 和 J. Wu，余乘法的完全正性与酉范畴化的初级判据，Int. Math. Res. Not. IMRN 2024，第 1 期，817–860；MR4686667[15] M. Izumi，简单 C^*-代数的包含，J. Reine Angew. Math. 547（2002），97–138；MR1900138[16] J. A. Jeong、H. Osaka、N. C. Phillips 和 T. Teruya，有限深度 C^*-代数包含的消去性，Indiana Univ. Math. J. 58（2009），第 4 期，1537–1564；MR2542972 C^*V. F. R. Jones，子因子的指标，Invent. Math. 72（1983），第 1 期，1–25；MR0696688

[18] T. Kajiwara 和 Y. Watatani，基于 Hilbert C^*-双模及 K-理论的琼斯指标理论，《美国数学会汇刊》352 (2000)，第 8 期，3429–3472；MR1624182[19] H. Kosaki，将复插值方法应用于冯诺依曼代数：非交换 L^p-空间，J. Funct. Anal. 56 (1984)，第 1 期，29–78；MR0735704[20] M. B. Landstad 和 A. Van Daele，有限量子超群，arXiv:2209.13282。[21] M. Mukohara，紧群作用所产生的简单 C*-代数的包含，J. Funct. Anal. 288 (2025)，第 2 期，论文编号 110702，共 33 页；MR4813137[22] D. A. Nikshych 和 L. I. Vainerman，II_1因子深度 2 子因子的刻画，J. Funct. Anal. 171 (2000)，第 2 期，278–307；MR1745634[23] A. Ocneanu，量子化群、弦代数与代数的伽罗瓦理论，算子代数及其应用，第 2 卷，119–172，伦敦数学会讲义丛书第 136 卷，剑桥大学出版社，剑桥；MR0996454[24] B. Pal，简单 C^*-代数的深度 2 包含及其弱 C^*-Hopf 代数对称性，arXiv:2511.19954。[25] R. H. Palomares 和 B. Nelson，C^*-代数的离散包含，arXiv:2305.05072。[26] M. V. Pimsner 和 S. T. Popa，子因子的熵与指标，《高等师范学校科学年刊》(第 4 系列) 19 (1986)，第 1 期，57–106；MR0860811[27] M. Rørdam，简单 C^*-代数的不可约包含，《数学教学》69 (2023)，第 3–4 期，275–314；MR4599249[28] V. S. Sunder，II_1 因子、其双模与超群，《美国数学会汇刊》330 (1992)，第 1 期，227–256；MR1049618[29] V. S. Sunder 和 N. J. Wildberger，有限超群的作用，《代数组合杂志》18 (2003)，第 2 期，135–151；MR2002621[30] M. Takeuchi，由余代数生成的自由霍普夫代数，《日本数学会杂志》23 (1971)，561–582；MR0292876[31] Y. Watatani，C^*-子代数的指标，美国数学会回忆录 83 (1990)，第 424 号，vi+117 页；MR0996807[32] S. L. Woronowicz，紧矩阵伪群，《数学物理通讯》111 (1987)，第 4 期，613–665；MR0901157

印度理工学院坎普尔分校数学与统计学系，印度北方邦 *208016*。电子邮箱：
keshab@iitk.ac.in，bakshi209@gmail.com

印度统计研究所统计数学单元，印度加尔各答 *B.T.* 路 *203* 号，邮编 *700108*。电子邮箱地址：debashish goswami@yahoo.co.in

印度理工学院坎普尔分校数学与统计系，印度北方邦，邮编 *208016*。电子邮箱地址：
biplabpal32@gmail.com，bpal21@iitk.ac.in