arXiv:2601.12408v1 [math.FA] 18 Jan 2026

半正定矩阵的辛谱之间的主序

Temjensangba、Hemant K. Mishra 和 Niloy Paul

摘要。给定具有辛核的 $2n\times 2n$ 实对称半正定矩阵 A，存在一个实 $2n\times 2n$ 辛矩阵 M，使得 $M^TAM = D\oplus D$，其中 D 是一个 $n\times n$ 非负对角矩阵，其对角元素在置换意义下唯一。D的对角元素称为 A的辛特征值或辛谱。本文研究两个半正定矩阵的辛谱之间的一些主序和弱超主序关系。具体而言，设 A和 B 是具有辛核的 $2n\times 2n$ 实对称半正定矩阵。我们证明，若 A的辛谱被 B的辛谱主序，则 A属于 B的辛轨道的凸包。我们还证明，该结论仅有弱逆命题成立；也就是说，若 A属于 B 的辛轨道的凸包，则 A的辛谱被 B的辛谱弱超主序。本文还给出了我们结果的若干推论。我们的方法利用了主序理论、双随机矩阵、双超随机矩阵与辛矩阵之间众所周知的联系。

1 引言

J. Williamson于 [1] 1936年所开展的奠基性工作$2n \times 2n$ 的一个重要结果是，任何实对称正定矩阵都可以通过辛矩阵对角化。相应对角矩阵的对角元素称为该正定矩阵的辛特征值或辛谱。该结果通常称为 Williamson 定理，现已推广到具有辛核的半正定矩阵 [2, 3]。辛谱已成为量子力学 [4], 、量子信息理论 [5], 和哈密顿动力学 [6]等多个领域关注的对象。尤其是，Williamson 定理在玻色高斯信息理论 [7]丰富的数学形式体系中发挥着重要作用。辛谱理论的发展有望极大拓展我们对玻色高斯量子态的理解。过去几十年间，与经典谱理论平行的辛谱理论取得了显著进展。这包括经典矩阵分析结果的辛类比，例如 Weyl 不等式 [8], 、Lidskii定理 [2], 、Schur–Horn 定理 [9, 10], 、Horn猜想 [11], 以及可微性和解析性性质 [2, 12]。鉴于发展经典特征值结果的辛类比具有丰富成果且十分有用，本文研究了主序理论中一个关于特征值的著名结果的辛对应形式。我们将在下一段中对其进行讨论。

给定两个 $n\times n$ 厄米矩阵 A 和 B，A 的谱被主序于 B 的谱，当且仅当 A 属于 B 的酉轨道的凸包，即存在 $n\times n$ 酉矩阵 $U_1, \ldots\ldots, U_k$ 以及正数 $p_1, \ldots\ldots, p_k$ 满足

2020年数学主题分类：15B48、15A18。关键词：正定矩阵、辛特征值、主序、弱超主序、双随机矩阵、双重超随机矩阵。

$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$ 使得

$$A = \sum_{j=1}^{k} p_j U_j^* B U_j, \tag{1.1}$$

其中 U_j^*表示 U_j [13, 定理 2。2]。在本文中，我们建立上述结果的以下辛类比。假设A 和 B 是 $2n \times 2n$ 具有辛核的实对称半正定矩阵。我们在定理 3.1 中证明，如果 A 的辛谱被 B的辛谱主序，那么 A 属于 的辛轨道 的凸包；也就是说，存在 $2n \times 2n$ 实辛矩阵 M_1、……、 M_k 以及正数p_1、……、 p_k 满足 $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$，使得

$$A = \sum_{j=1}^{k} p_j M_j^T B M_j. \tag{1.2}$$

例 3.3 表明，上述命题的逆命题通常并不成立。尽管如此，我们在定理 3.4 中证明，弱逆命题成立；即，如果 A 属于 B 的辛轨道凸包，那么 A 的辛谱被 弱超主序 于 B的辛谱。我们还给出了主要结果的一些推论，这些推论本身也很有意义。

本文的结构安排如下。在第 2 节中，我们简要介绍本文所需的背景知识。在第 3 节中，我们陈述主要结果及其有趣的推论。证明见第4节。

2 预备知识

首先介绍一些记号。令 S_n 表示 $\{1, \ldots, n\}$ 上的置换群。对于每个 $\pi \in \mathrm{S}_n$，记 P_π 为其对应的置换矩阵，其第（i, j）个元素为 $\delta_{\pi(i),\, j}$。我们用 $\mathrm{Pd}(2n)$ 和 $\mathrm{Psd}(2n)$ 分别表示所有实对称正定矩阵和半正定矩阵构成的集合。

考虑矩阵 $J := \left[\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right]$，其中 I_n 是大小为 n 的单位矩阵。若实矩阵 $2n \times 2n$ 满足条件 $M^T J M = J$，则称其为辛矩阵。所有实辛矩阵构成的集合记为 $\mathrm{Sp}(2n)$，在矩阵乘法下构成一个群，称为辛群 [14]。若线性子空间 W 属于$\mathbb{R}^{2n}$，且对每个 $0 \neq u \in$，都存在 $v \in$ 使得 $u^T J v \neq 0$，则称 W 为辛子空间。Williamson 定理 [1] 的一个推广指出，对于任意具有辛核的$A \in \mathrm{Psd}(2n)$，存在 $M \in \mathrm{Sp}(2n)$ 使得

$$M^T A M = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

其中 D是一个 $n \times n$ 对角元素非负的对角矩阵。 D 的对角元素在置换意义下唯一，称为 A [2, 3]的辛特征值。此外，如果辛矩阵 M 在（2.1）中是正交的，则 A 称为按照 Williamson 定理的意义可正交辛对角化。该条件等价于 $AJ = JA$ [15, 16]。

设 $A \in \mathrm{Psd}(2n)$，且具有辛核。我们用 $\mathrm{Sp}(2n, A)$ 表示满足 (2.1) 意义下对角化 A 的 $2n \times 2n$实辛矩阵集合。 A 的辛轨道是集合 $\{M^T A M\colon\ M \in \mathrm{Sp}(2n)\}$。我们用 $d(A)$ 表示一个 n 维向量，其各项按非递减顺序排列，等于 A 的辛特征值 $d_1(A) \leq \cdots \leq d_n(A)$。设 $M \in \mathrm{Sp}(2n, A)$，并设 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ 为 M 的列。以下 A 的表示将在定理 3.1 的证明中发挥关键作用，

利用 M 的定义和对角化（2.1）即可验证：

$$A = \sum_{i=1}^{n} d_i(A) J \left[x_i x_i^T + y_i y_i^T \right] J^T. \tag{2.2}$$

2.1 主序理论中的相关概念

对于任意 $x = (x_1、\ \ldots\ldots、\ x_n) \in \mathbb{R}^n$，我们用 $x^{\downarrow} = (x_1^{\downarrow}、\ \ldots\ldots、\ x_n^{\downarrow})$ 表示将 x 的元素按非递减顺序重新排列后得到的向量。类似地，我们定义 $x^{\uparrow}$。设 $x,\ y \in \mathbb{R}^n$。若 x 弱超主序于 y，记作 $x \prec^w y$，则

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^{\uparrow} \geq \sum_{j=1}^{k} y_j^{\uparrow} \qquad \text{for } 1 \leq k \leq n. \tag{2.3}$$

若对于 $k = n$，等式 (2.3) 成立，则称 x 被 y 主序，记作 $x \prec y$。若一个具有非负元素的 $n \times n$ 实矩阵的每一行和每一列的元素之和均为 1，则称其为双随机矩阵。若存在某个双随机矩阵 $E = [e_{ij}]$，使得对于所有 $1 \leq i,\ j \leq n$ 均有 $s_{ij} \geq e_{ij}$，则称一个 $n \times n$ 实矩阵 $S = [s_{ij}]$ 为双重超随机矩阵。当且仅当存在某个 $n \times n$ 双随机矩阵 E [17, 时，$x \prec y$ 才成立（定理 2.B.2]）。此外，若 x、y 是仅含非负元素的非零向量，则当且仅当存在某个 $n \times n$ 双重超随机矩阵 S [17, 时，$x \prec^w y$ 才成立（命题 1.A.5]）。另外，若 S 的所有元素均严格为正，则记作 $x \prec_+^w y$。

我们还将使用以下辛矩阵与双超随机矩阵之间的联系。设 $M \in \mathrm{Sp}(2n)$，写成分块形式

$$M = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

其中每个分块的大小为 $n \times n$。那么矩阵

$$\widetilde{M} := \frac{1}{2}(P \circ P + Q \circ Q + R \circ R + S \circ S) \tag{2.5}$$

是双超随机矩阵 [18,定理 6]。这里 $\circ$ 表示矩阵的哈达玛积。

2.2 与正定矩阵相关的某些向量

设 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{Pd}(2n)$ 具有 $n \times n$ 个分块 $A_{11},\ A_{12},\ A_{22}$。记 Δ_{11}，Δ_{12} 和 Δ_{22} 分别为由 $A_{11},\ A_{12}$ 及 A_{22} 的对角元素组成的 n-向量。定义

$$\Delta_c(A) := \frac{\Delta_{11} + \Delta_{22}}{2}, \tag{2.6}$$

$$\Delta_s(A) := \sqrt{\Delta_{11} \cdot \Delta_{22}}, \tag{2.7}$$

$$\Delta_h(A) := \sqrt{\frac{\Delta_{11}^2 + \Delta_{22}^2}{2}}, \tag{2.8}$$

$$\Delta_w(A) := \sqrt{\frac{\Delta_{11}^2 + \Delta_{22}^2 + 2\Delta_{12}^2}{2}}. \tag{2.9}$$

这里的 $\Delta_{11}\cdot\Delta_{22}$ 表示向量的逐元素乘法。已知以下弱超主序关系成立：

$$\Delta_{\xi}(A) \prec^{w} d(A) \tag{2.10}$$

对所有 $\xi \in \{c,\ s,\ h,\ w\}$。参见 [9, 10]。以下与 A相关的辛矩阵将在后文用到：

$$M = \operatorname{diag}\left(\sqrt[4]{\Delta_{11}^{-1}\cdot\Delta_{22}}\right) \oplus \operatorname{diag}\left(\sqrt[4]{\Delta_{22}\cdot\Delta_{11}^{-1}}\right). \tag{2.11}$$

同样，Δ_{11}^{-1}和 $\Delta_{11}^{-1}\cdot\ \Delta_{22}$ 中的代数运算均按逐项意义理解。

2.3 辛直和与辛压缩

给定任意方阵 X_1、……、X_k，用 $\oplus X_i$ 表示它们的直和。对于任意方阵 X，令 $\mathscr{C}(X)$ 表示 X 的一种压缩，即保留某些对角块并将其余所有元素置零所得的矩阵。现在回顾这些概念的辛类比。

设 m_1、……、$m_k \in \mathbb{N}$，使得 $m_1+\cdots+m_k = n$。对于每个 $i \in \{1$、…… $k\}$，令 $A_i = \left[\begin{smallmatrix} E_i & F_i \\ G_i & H_i \end{smallmatrix}\right]$为一个具有 $m_i \times m_i$ 个块 E_i，F_i，G_i，H_i的 $2m_i \times 2m_i$ 实矩阵。回顾 [18]，A_1、……、A_k的辛直和定义为

$$\oplus^{s} A_i := \begin{bmatrix} \oplus E_i & \oplus F_i \\ \oplus G_i & \oplus H_i \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

设 $A = \left[\begin{smallmatrix} E & F \\ G & H \end{smallmatrix}\right]$为一个大小为 $2n \times 2n$、具有 $n \times n$ 个分块 E，F，G，和 H的实矩阵。A 的辛压缩或 s-压缩定义为

$$\mathscr{C}^{s}(A) := \begin{bmatrix} \mathscr{C}(E) & \mathscr{C}(F) \\ \mathscr{C}(G) & \mathscr{C}(H) \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

进一步，假设 $\mathscr{C}(E) = \oplus E_i$，$\mathscr{C}(F) = \oplus F_i$，$\mathscr{C}(G) = \oplus G_i$，且 $\mathscr{C}(H) = \oplus H_i$。那么我们有

$$\mathscr{C}^{s}(A) = \oplus^{s} A_i, \tag{2.14}$$

其中，对所有 $1 \le i \le k$，$A_i := \left[\begin{smallmatrix} E_i & F_i \\ G_i & H_i \end{smallmatrix}\right]$。

3 结果

我们首先陈述第一个主要结果。

定理 3.1 设 $A, B \in$半正定$(2n)$具有辛核。若 $d(A) \prec d(B)$，则存在一族辛矩阵 M_π，其中 $\pi \in S_n$，以及一个概率向量 $(p(\pi))_{\pi\in S_n}$，使得

$$A = \sum_{\pi\in S_n} p(\pi) M_\pi^{T} B M_\pi. \tag{3.1}$$

顺便指出，将假设3.1 替换为 $d(A) \prec d(B)$后，可得到定理 $d(A) \prec_{+}^{w} d(B)$的一个修正版。

定理 3.2 设 A、$B \in$ 半正定$(2n)$，且它们的核是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的辛子空间。若 $d(A) \prec_{+}^{w} d(B)$，则存在一个概率向量$(p(\pi))_{\pi\in S_n}$，使得

$$A = \sum_{\pi\in S_n} p(\pi)\Big(K_\pi D_\pi M\Big)^{T} B\Big(K_\pi D_\pi M\Big), \tag{3.2}$$

其中 K_π 和 M 是辛矩阵，且每个 D_π 都是正对角矩阵。

下面的例子生动地说明了定理3.1 的逆命题一般并不成立。

例 ***3.3*** 取 $B = I_4$，以及辛矩阵 $M_1 = I_4$ 和 $M_2 = 2I_2 \oplus \frac{1}{2}I_2$。考虑

$$A = \frac{1}{2}M_1^T B M_1 + \frac{1}{2}M_2^T B M_2 = \frac{5}{2}I_2 \oplus \frac{5}{8}I_2. \tag{3.3}$$

我们有 $d(A) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$，且 $d(B) = (1,1)$。弱超主序 $d(A) \prec^w d(B)$ 成立，但主序 $d(A) \prec d(B)$ 不成立。

作为第二个主要结果，我们将在下一个定理中证明，定理3.1的一个“弱”逆命题成立。

定理3.4 设 $A, B \in \mathrm{Psd}(2n)$，使得它们的核是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的辛子空间。若 A 属于 B 的辛轨道的凸包，则 $d(A) \prec^w d(B)$。

我们在以下推论中给出主要结果对正定矩阵的一些有趣推论。

推论 *3.5* 设 $A \in Pd(2n)$ 满足 $AJ = JA$，并固定 $\xi \in \{c, w, h\}$。每个满足 $d(B) = \Delta_\xi(A)^\uparrow$ 的 $B \in Pd(n)$ 都属于 A 的辛轨道的凸包。特别地，$diag\,(\Delta_\xi(A)) \oplus diag\,(\Delta_\xi(A))$ 属于 A 的辛轨道的凸包。

推论 *3.6* 设 $A \in Pd(2n)$ 满足 $(MAM)J = J(MAM)$，其中 M 的定义见 *(2.11)*。每个满足 $d(B) = \Delta_s(A)^\uparrow$ 的 $B \in Pd(2n)$ 都属于 A 的辛轨道的凸包。特别地，$diag\,(\Delta_{11}) \oplus diag\,(\Delta_{22})$ 属于 A 的辛轨道的凸包，其中 Δ_{11} 和 Δ_{22} 是与 A 相关的向量，其定义见第 *2.2* 节。

推论 *3.7* 对于 $A \in Pd(2n)$，令 $\mathscr{C}^s(A) = \oplus^s A_i$ 如 *(2.14)* 中所定义。选定并固定 $M_i \in Sp(2m_i, A_i)$，并令 $M := \oplus^s M_i$。如果 $(M^T AM)J = J(M^T AM)$，则 $\mathscr{C}^s(A)$ 属于 A 的辛轨道的凸包。

4 证明

我们对定理3.1和定理3.4的证明受到 J. Watrous 的专著中所呈现的特征值经典对应结果证明的启发 [19, 定理 4。33]。

为避免平凡情形，我们假设定理陈述中所考虑的半正定矩阵 A 和 B 均非零。

4.1 定理3.1的证明。

由 [20, 定理 1.3] 可知，假设 $d(A) \prec d(B)$ 意味着存在一个双随机矩阵 E，使得

$$d(A) = Ed(B). \tag{4.1}$$

根据 Birkhoff–von Neumann定理 [21],存在一个概率向量 $(p(\pi))_{\pi\in \mathrm{S}}{}^{n}$，使得

$$E = \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi)P_\pi. \tag{4.2}$$

因此

$$d(A) = \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi)P_\pi d(B), \tag{4.3}$$

这意味着对所有 $1 \le i \le n$,

$$d_i(A) = \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi)d_{\pi(i)}(B). \tag{4.4}$$

令 $[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n] \in \mathrm{Sp}(2n,A)$ 和 $[u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n] \in \mathrm{Sp}(2n,B)$ 均任意。由式（2.2）可得

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi)d_{\pi(i)}(B)J\left[x_ix_i^T + y_iy_i^T\right]J^T. \tag{4.5}$$

对每个 $\pi \in \mathrm{S}_n$，取

$$N_\pi = \sum_{i=1}^{n}\left[u_{\pi(i)}x_i^T + v_{\pi(i)}y_i^T\right]. \tag{4.6}$$

现在我们来考虑

$$\sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi)N_\pi^T B N_\pi = \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi)N_\pi^T \sum_{i=1}^{n}\left[Bu_{\pi(i)}x_i^T + Bv_{\pi(i)}y_i^T\right] \tag{4.7}$$

$$= \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi)N_\pi^T \sum_{i=1}^{n}\left[d_{\pi(i)}(B)J\left(v_{\pi(i)}x_i^T - u_{\pi(i)}y_i^T\right)\right] \tag{4.8}$$

$$= \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi) \sum_{i=1}^{n}\left[d_{\pi(i)}(B)\left(N_\pi^T Jv_{\pi(i)}x_i^T - N_\pi^T Ju_{\pi(i)}y_i^T\right)\right]. \tag{4.9}$$

注意到 $N_\pi = [u_{\pi(1)},\dots,u_{\pi(n)},v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(n)}][x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n]^T$是一个辛矩阵。因此，我们得到

$$N_\pi^T Jv_{\pi(i)} = x_i. \tag{4.10}$$

类似地

$$N_\pi^T Ju_{\pi(i)} = -y_i. \tag{4.11}$$

因此，（4.9）变为

$$\sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi)N_\pi^T B N_\pi = \sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi) \sum_{i=1}^{n}\left[d_{\pi(i)}(B)\left(x_ix_i^T + y_iy_i^T\right)\right] \tag{4.12}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi\in \mathrm{S}_n} p(\pi)d_{\pi(i)}(B)\left(x_ix_i^T + y_iy_i^T\right) \tag{4.13}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d_i(A)\left(x_ix_i^T + y_iy_i^T\right) \tag{4.14}$$

$$= J^T AJ. \tag{4.15}$$

由此可得

$$A = \sum_{\pi \in S_n} p(\pi)(N_\pi J^T)^T B(N_\pi J^T). \tag{4.16}$$

通过取 $M_\pi = N_\pi J^T$，我们得到所需的表达式（3.1）。 ■

4.2 定理3.2的证明

该定理的证明是对前一定理 3.1 证明的修改版，该证明借助 Sinkhorn [22]结果得出。

根据假设 $d(A) \prec_+^w d(B)$，存在一个所有元素均为正的双重超随机矩阵K，使得 $d(A) = Kd(B)$。由于 K中的所有元素均为正，存在 $n \times n$ 正对角矩阵 D_1，D_2 以及一个双随机矩阵 E，使得 $K = D_1 E D_2$ [22, 定理 1]。根据 Birkhoff–von Neumann 定理，存在一个概率向量 $(p(\pi))_{\pi \in S_n}$，使得

$$E = \sum_{\pi \in S_n} p(\pi) P_\pi. \tag{4.17}$$

因此，K 可以写成

$$K = \sum_{\pi \in S_n} p(\pi) D_1 P_\pi D_2. \tag{4.18}$$

假设 $D_1 = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ 和 $D_2 = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$。对所有 $1 \le i \le n$，可以验证

$$d_i(A) = \sum_{\pi \in S_n} p(\pi) a_i b_{\pi(i)} d_{\pi(i)}(B). \tag{4.19}$$

任取 $[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \in \mathrm{Sp}(2n, A)$ 和 $[u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n] \in \mathrm{Sp}(2n, B)$。对于每个 $\pi \in S_n$，取

$$N_\pi = \sum_{i=1}^{n} \left[\sqrt{b_{\pi(i)}} u_{\pi(i)} \left(\sqrt{a_i} x_i\right)^T + \sqrt{b_{\pi(i)}} v_{\pi(i)} \left(\sqrt{a_i} y_i\right)^T \right]. \tag{4.20}$$

从（4.7）开始，按照定理3.1 证明中的相同步骤，可得

$$A = \sum_{\pi \in S_n} p(\pi)(K_\pi D_\pi M)^T B(K_\pi D_\pi M), \tag{4.21}$$

其中

$$K_\pi = [u_{\pi(1)}, \ldots, u_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}], \tag{4.22}$$

$$D_\pi = \mathrm{diag}\left(\sqrt{a_1 b_{\pi(1)}}, \ldots, \sqrt{a_n b_{\pi(n)}}, \sqrt{a_1 b_{\pi(1)}}, \ldots, \sqrt{a_n b_{\pi(n)}}\right). \tag{4.23}$$

$$M = [x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] J^T. \tag{4.24}$$

■

定理3.4的证明

设 $[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \in \mathrm{Sp}(2n, A)$ 和 $[u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n] \in \mathrm{Sp}(2n, B)$ 为任意对象。对于 $1 \le j \le n$ 有

$$d_j(A) = \frac{1}{2}\left(x_j^T A x_j + y_j^T A y_j\right). \tag{4.25}$$

假设

$$A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i M_i^T B M_i, \tag{4.26}$$

其中 $(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m)$ 是一个各分量均严格为正的概率向量，而$M_1, \ldots\ldots, M_m$ 是辛矩阵。将（4.26）代入（4.25），得到

$$d_j(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(x_j^T M_i^T B M_i x_j + y_j^T M_i^T B M_i y_j \right) \tag{4.27}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{k=1}^{n} d_k(B) \left(x_j^T M_i^T J (u_k u_k^T + v_k v_k^T) J^T M_i x_j + y_j^T M_i^T J (u_k u_k^T + v_k v_k^T) J^T M_i y_j \right) \tag{4.28}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{k=1}^{n} d_k(B) \left((x_j^T M_i^T J u_k)^2 + (x_j^T M_i^T J v_k)^2 + (y_j^T M_i^T J u_k)^2 + (y_j^T M_i^T J v_k)^2 \right) \tag{4.29}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left((x_j^T M_i^T J u_k)^2 + (x_j^T M_i^T J v_k)^2 + (y_j^T M_i^T J u_k)^2 + (y_j^T M_i^T J v_k)^2 \right) d_k(B). \tag{4.30}$$

由此可得

$$d(A) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \widetilde{S}_i d(B), \tag{4.31}$$

其中每个 S_i 都是与辛矩阵对应的双重超随机矩阵

$$S_i = [x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]^T M_i^T J [u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n], \tag{4.32}$$

$_m$如（2.5）所定义。选取 $K = \sum \lambda_i \widetilde{S}_i$使得 K是满足等式的双重超随机矩阵$_{i=1}$ d（ A） $= Kd$（B）。由 [17],中的命题 1.A.5，我们于是得到d（ A） $\prec^w$ d（B）。 ■

4.4 推论3.5的证明。

由 [23, 定理 5.4] 和 [24, 定理 1.2] 可知， $AJ = JA$ 蕴含Δ_ξ(A) $\prec$ d(A), 对所有 $\xi \in \{c, w, \mathrm{h}\}$均成立。因此，若 $d(B) = \Delta_\xi(A)^\uparrow$，则有 $d(B) \prec d(A)$。由此根据定理 3.1 可知， B 属于 A 的辛轨道的凸包。

特别地，选择 $B = \mathrm{diag}\ (\Delta_\xi(A)) \oplus \mathrm{diag}\ (\Delta_\xi(A))$可得 $d(B) = \Delta_\xi(A)^\uparrow$, 因此 B 属于 A的辛轨道的凸包。■

4.5 推论 3.6的证明。

证明与推论3.5的证明采用了类似的论证，其中我们将A 替换为 MAM，并使用定理 1.1 [24]。■

4.6 推论证明 3.7。

根据 [24] 的定理 1.4，我们知道 $(M^TAM)J = J(M^TAM)$ 推出 $d(\mathscr{C}^s(A)) \prec d(A)$。由定理 3.1 可直接得出 $\mathscr{C}^s(A)$ 属于 A 的辛轨道的凸包。■

致谢

Temjensangba 感谢那加兰大学批准其带薪学习假。Hemant K. Mishra 感谢 FRS 项目编号 MISC 0147 的资助。

参考文献

[1] John Williamson。《线性动力系统标准形相关的代数问题》。《美国数学杂志》，58(1)：141–163，1936年。[2] Tanvi Jain 和 Hemant K. Mishra。《辛特征值的导数与一种 Lidskii 型定理》。《加拿大数学通报》，74(2)：457–485，2022年4月。arXiv:2004.11024。[3] Nguyen Thanh Son 和 Tatjana Stykel。《半正定矩阵的辛特征值与迹极小化定理》。《电子线性代数杂志》，38：607–616，2022年9月。arXiv:2208.05291。[4] Maurice De Gosson。《辛几何与量子力学》。施普林格，2006年。[5] Alessio Serafini。《量子连续变量：理论方法入门》。CRC 出版社，2023年。[6] Helmut Hofer 和 Eduard Zehnder。《辛不变量与哈密顿动力学》。Birkhäuser，2012年。[7] Christian Weedbrook、Stefano Pirandola、Raúl García-Patrón、Nicolas J. Cerf、Timothy C. Ralph、Jeffrey H. Shapiro 和 Seth Lloyd。《高斯量子信息》。《现代物理评论》，84(2)：621–669，2012年。arXiv:1110.3234。[8] Rajendra Bhatia 和 Tanvi Jain。《辛特征值的变分原理》。《加拿大数学通报》，64(3)：553–559，2021年。[9] Rajendra Bhatia 和 Tanvi Jain。《关于辛特征值的 Schur–Horn 定理》。Linear Algebra and its Applications，599：133–139，2020年。arXiv:2004.03906。[10] Shaowu Huang。《Schur–Horn 型定理的新版本》。《线性与多重线性代数》，71(1)：41–46，2023年。[11] Paul-Emile Paradan。《与辛特征值相关的 Horn 锥》。《科学院报告：数学》，360(G10)：1163–1168，2022年。arXiv:2202.10260。[12] Hemant K. Mishra。《辛特征值的一阶灵敏度分析》。Linear Algebra and its Applications，604：324–345，2020年。arXiv:2007.10572。[13] Peter M. Alberti 和 Armin Uhlmann。《随机性与偏序》。德国科学出版社，柏林，1982年。[14] Biswadeb Dutta、Narasimhaiengar Mukunda 和 Rajiah Simon。《量子力学与光学中的实辛群》。《Pramana》，45：471–497，1995年12月。arXiv:quant-ph/9509002。[15] Nguyen Thanh Son、P-A Absil、Bin Gao 和 Tatjana Stykel。《通过迹极小化与黎曼优化计算对称正定矩阵的辛特征值对》。《SIAM 矩阵分析与应用杂志》，42(4)：1732–1757，2021年。[16] Rudra R. Kamat 和 Hemant K. Mishra。《将二次型同时辛约化为标准形》。arXiv 预印本，2024年。arXiv:2412.01492。[17] Albert W. Marshall、Ingram Olkin 和 Barry C. Arnold。《不等式：主序理论及其应用》第二版。施普林格，2011年。[18] Rajendra Bhatia 和 Tanvi Jain。《关于正定矩阵的辛特征值》。Journal of Mathematical Physics，56(11)：112201，2015年11月。arXiv:1803.04647。[19] John Watrous。《量子信息理论》。剑桥大学出版社，2018年。[20] T. Ando。《主序、双随机矩阵与特征值的比较》。Linear Algebra and its Applications，118：163–248，1989年。[21] Garrett Birkhoff。《线性代数的三点观察》。图库曼国立大学，Rev. Ser. A，5 151，1946 147：–。[22] Richard Sinkhorn。《任意正矩阵与双随机矩阵之间的关系》。《数理统计年刊》，35(2)：876–879，1964年。

[23] Hemant K. Mishra。某些辛特征值不等式中的等式。*Linear Algebra and its Applications*，728：141–160，2025年。arXiv:2309.04562。[24] Shaowu Huang 和 Hemant K. Mishra。某些辛弱超主序中的主序。*Linear Algebra and its Applications*，703：1–10，2024年。arxiv:2404.05795。

印度理工学院（*ISM*）丹巴德分校数学与计算系，印度贾坎德邦丹巴德，*826 004*电子邮箱：*temjensangba111@gmail.com*。

印度理工学院（*ISM*）丹巴德分校数学与计算系，印度贾坎德邦丹巴德，*826 004*电子邮箱：*hemantmishra1124@gmail.com*。数学与计算系，印度理工学院（*ISM*）丹巴德分校，印度贾坎德邦丹巴德，*826 004*电子邮箱：*niloy.paul009@gmail.com*。