GLGL$_n$ 的同调中的（$\mathbb{F}_2$）周期族

KELLY WANG

摘要。我们构造了无穷多个非零上同调类族，它们位于 $H_d(\mathrm{GL}_n(\mathrm{F}_2);\mathrm{F}_2)$ 中沿形如 $d=\frac{2}{3}n+$(常数) 的直线分布，从而证明这些同调群已知的斜率$_{23}$-稳定性是最优的。借助 Randal-Williams 提出的新稳定性霍普夫代数视角，我们的计算还重新得到 $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$ 在系数为 F_2, 时的斜率-$_{23}$ 稳定性，将 Aut(F_n) 的稳定性改进至$_{23}$，并证明这些斜率是最优的。或许另有独立的研究价值的是，我们还提供了一份关于如何在 F_2 上计算稳定性霍普夫代数的指南。

arXiv:2601.12431v1 [math.AT] 18 Jan 2026

目录

1. 引言 2 1.1. 概述 3 1.2. 致谢 4 2. 低次数群同调计算：GL$_g(\mathrm{F}_2)$ 4 2.1. 定理 2.1 的证明 5 2.2. 定理 2.2 和定理 2.4 的证明 10 3. 低次数群同调计算：GL$_g$(Z) 11 4. 背景 13 4.1. 约定 14 4.2. E_∞- 代数及其性质 14 4.3. Bar 与 cobar。15 5. 计算稳定性霍普夫代数的工具 18 5.1. The $[-]$-构造 20 5.2. 截断函子的形式性质 21 5.3. 定理 5.6 的证明 22 6. 构造探测器 22 6.1. CGL(F_2) 的稳定性霍普夫代数 23 6.2. 映射 cgl $\to a(1)$。24 6.3. $a(1)$ 和 $a(1)/h_{10}$ 的同伦群。25 6.4. 稳定化余纤维上的自映射 29 7. 检测器的应用 33 7.1. 检测 CGL(F_2)/σ $_{33}$ 中的周期族7.2. 滤过对象的蛇引理 35 8. 关于 GL$_n(\mathcal{O})$ 和 Aut(F_n) 的推论 37 参考文献 40

1. 引言

当 l为奇素数时，上同调 $H^*(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2);\ \mathbb{F}_l)$由 Quillen 在其开创性论文 [Qui72] 中完全确定。对于系数为 F_2, 的情形，已知结果非常少。Quillen 在同一篇论文中证明，稳定同调 $\mathrm{colim}_{n\to\infty}\widetilde{H}_*(\mathrm{GL}_n(\mathrm{F}_2);\ \mathrm{F}_2)$ 消失；结合 [GKRW18b 的稳定性结果，定理 B] 告诉我们，F_2-同调群呈现出斜率为$\frac{2}{3}$ 的消失线：$\widetilde{H}_d(\mathrm{GL}_n(\mathrm{F}_2);\ \mathrm{F}_2)\ = 0$对于 $d < \frac{2}{3}n - 1$。一个自然但此前尚未解决的问题是，斜率 $\overline{2\ 3}$ 是否可以提高。本文通过展示沿斜率为 $\overline{2\ 3}$ 的直线分布的无穷多个非零类，证明答案是否定的。

定理 1.1 (定理 7.4)。 对于每个 $i \geqslant 0$，都存在非零类

$$u_{i0} \in H_{8i+1}(\mathrm{GL}_{12i+2}(\mathbb{F}_2);\mathbb{F}_2)$$
$$u_{i1} \in H_{8i+2}(\mathrm{GL}_{12i+4}(\mathbb{F}_2);\mathbb{F}_2)$$
$$u_{i2} \in H_{8i+3}(\mathrm{GL}_{12i+6}(\mathbb{F}_2);\mathbb{F}_2)$$
$$s_{i+1} \in H_{8i+7}(\mathrm{GL}_{12i+11}(\mathbb{F}_2);\mathbb{F}_2).$$

$u_{00} \in H_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2);\ \mathbb{F}_2)$ 由矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 表示，并且 $u_{i1} = u_{00}u_{i0}$、$u_{i2} = u_{00}^2 u_{i0}$ 在 $H_*(\mathrm{GL}_*(\mathbb{F}_2);\ \mathbb{F}_2)$ 的代数结构下成立。

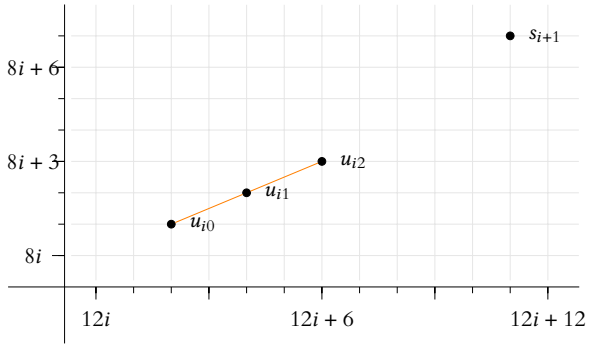


图 1. 定理 1.1中的非零类； $i \geqslant 0$。橙色线表示一个 u_{00}-扩张。

特别地，如果 $\lambda > 0$ 满足存在某个常数 μ，使得对于任意 $d < \lambda n + \mu$，都有 $\widetilde{H}_d(\mathrm{GL}_n(\mathrm{F}_2);\ \mathrm{F}_2)\ = 0$，那么必有 $\lambda \leqslant \frac{2}{3}$。值得注意的是，Lahtinen-Sprehn 以截然不同的方法构造了非零上同调类族 [LS18，定理 1]。例如，他们为每个 $n \geqslant 1$ 都在 $H^{2^n-1}(\mathrm{GL}_{2^n}(\mathrm{F}_2);\ \mathrm{F}_2)$ 中构造了一个非零上同调类。然而，他们构造的这些类都位于斜率为 1 的直线上方 $d = n - 2$。

我们的研究处于同调稳定性的一般框架之中。给定一列群

$$G_0 \xrightarrow{i_0} G_1 \xrightarrow{i_1} \cdots$$

以及一个固定的系数阿贝尔群 M，我们可以提出以下问题：是否存在函数$\alpha(n)$，使得当 $\alpha(n) \to \infty$ as $n \to \infty$时，$H_d(i_n;\ M)$ 是同构，只要 $d < \alpha(n)$? 如果存在形如 $\alpha(n)\ = \lambda n + \mu$ 的函数，我们就称这些 G_n具有斜率为 λ 的系数稳定性，其中系数取自 M。我们想指出，展示稳定性与证明非稳定性是两项风格迥异的任务。此外，人们已经发展出多种技术来处理前者，例如 Quillen 的谱序列方法 [QuiN, 1974–1, pp.1-15], [SW20], , 以及 Galatius-Kupers-Randal-Williams 的 E_k-胞腔机器 [GKRW18a]。然而，后者并未受到太多关注。我们希望本文能为这一方向作出贡献。GKRW18b]中斜率-$\frac{2}{3}$稳定性结果的计算表明[1] 存在一个 (12, 8) 自映射

$$\varphi_* : H_{d-8}(\mathrm{GL}_{g-12}(\mathbb{F}_2), \mathrm{GL}_{g-12-1}(\mathbb{F}_2);\mathbb{F}_2) \to H_d(\mathrm{GL}_g(\mathbb{F}_2), \mathrm{GL}_{g-1}(\mathbb{F}_2);\mathbb{F}_2). \tag{1.2}$$

因此，要排除任何斜率的改进，只需证明 φ_* 是非幂零的。

[1]更准确地说，他们实际上是在 φ_* 一个滤过商上；参见类 τ^4，见 [GKRW18b，§6。4]。

定理 1.3（定理 7.1）。这些上同调类

$$\alpha_{0j} \in H_j(GL_{2^j}(F_2),\ GL_{2^{j-1}}(F_2);\ F_2) \quad \gamma_{0j} \in H_{j+2}(GL_{2^{j+3}}(F_2),\ GL_{2^{j+2}}(F_2);\ F_2) \quad j = 0,\ 1,\ 2$$

定理 定理 7.1 中的类满足 $\alpha_{ij} := \varphi^i_*(\alpha_{0j})$ 和 $\gamma_{ij} := \varphi^i_*(\gamma_{0j})$ 对所有 $i \geqslant 0$ 均非零。

我们简要谈谈有限域 F_2 以外的有限域上的一般线性群的情形。令 p 为素数，$q > 2$ 为 p 次幂。在特征之外，上同调 $H^*(GL_n(F_q); F_l)$（其中 l 为不同于 p 的素数）已由 Quillen [Qui72，定理 4] 完全计算。当系数取 F_p 时，稳定同调是平凡的 [Qui72，推论 2]，且同调群具有斜率1稳定性[GKRW18b，定理 A]。[LS18] 中构造的上同调类表明，它们不可能具有超过斜率2的稳定性。我们没有探究这些情形中斜率是否尖锐，一个原因是 [RW25] 中的方法只处理斜率小于 1 的稳定性。

借助 [RW25], 中发展出的技术，我们能够将上述定理的要素推广为关于整数上的一般线性群和自由群自同构群的结论，其途径是通过同态

$$\mathrm{Aut}(F_n) \to GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{F}_2). \tag{1.4}$$

定理1.5（第8节）。

(i) $H_d(GL_n(\mathbb{Z}), GL_{n-1}(\mathbb{Z}); \mathbb{F}_2) = 0$ *for* $d < \frac{2}{3}(n-1)$, *and this slope is optimal.*

(ii) $H_d(\mathrm{Aut}(F_n), \mathrm{Aut}(F_{n-1}); \mathbb{F}_2) = 0$ *for* $d < \frac{2}{3}(n-1)$, *and this slope is optimal.*

特别地，与 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$ 相关联的 *Bockstein* 长正合序列表明，这些具有整数系数的相对群不可能具有斜率为 $> \frac{2}{3}$ 的消失线。

据我们所知，在这两种情形下，$\frac{2}{3}$ 的锐性此前均无人知晓。关于 $GL_n(\mathbb{Z})$ 的消失线已在 [KMP22，定理 C][2] 中建立。对于 $\mathrm{Aut}(F_n)$，已知的最佳消失斜率为 $\frac{1}{2}$，其结论来自整数系数情形，见 [WRW17，定理 G], [GKRW18a，定理 18。3] 事实上，我们将为定义在一类稍微更一般的环上的一般线性群建立这一“斜率-$\frac{2}{3}$ 界”。

定理 1.6（定理8.5）。设 $\mathcal{O}$ 是一个具有 $\mathbb{F}_2$ 商的戴德金整环。那么 $H_d(GL_n(\mathcal{O}); \mathbb{F}_2)$ 不可能具有斜率为 $> \frac{2}{3}$ 的稳定性。

目前已知的一般戴德金整环上线性群的最佳稳定性斜率是 $\frac{1}{2}$ 由 van der Kallen 给出 [vdK80，定理 4。11] 后来 Randal-Williams [RW24，定理 1。1]。

从定理1.5的计算推导定理 1.3，其要旨在于，由同态（1.4）所诱导的稳定性霍普夫代数上的映射，在不超过5的分次中是一个同构。假设 $\Bbbk$ 是一个域，并且 R 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-$\Bbbk$-模，满足一些温和条件，那么 Randal-Williams 的一项核心结果 [RW25] 表明，可以提取一个定义在 $\Bbbk$ 上的霍普夫代数，它“携带着与 R 相同数量的稳定性信息”。我们将 R 的（高阶）同调稳定性理解为 R 上（迭代）自映射的余纤维消失。更详细的介绍见 §5。

1.1. 概述。在 §2 中，我们将以对类 $\sigma \in H_0(GL_1(F_2); F_2)$ 施加 Dyer-Lashof 运算以及任取的基 v_1, v_2 的方式，描述 $H_d(GL_n(F_2); F_2)$ 在范围 $n \leqslant 6, d \leqslant 4$ 内的一个加性基。这些运算作用于同调群，源于将这些群实现为 F_2-模中的 E_∞-代数 $CGL(F_2)$ 的同伦群。不过，这里的论证只用到这些运算的形式性质，因此本节的写法尽可能减少了对 E_∞ 的了解需求。在 §3 中，我们将在更窄的范围 $n \leqslant 3$, $d \leqslant 2$ 内，对 $H_d(GL_n(Z); F_2)$ 作出类似描述。

§4 由三部分组成。§4.1 回顾了 ∞-范畴、滤过对象，以及对角 t-结构 $\mathbb{Z}$-分次模上的结构。在§4.2 中，我们介绍了一些通常对 $\mathbb{E}_\infty$-代数所作的假设。在§4.3中，我们回顾 Bar-Cobar 构造，并定义了作用于同伦群上的 *Bar* 运算，对象为 $\mathbb{E}_n$-代数。随后，我们研究这一运算如何与 Dyer-Lashof 运算及 Browder 括号相互作用。本部分与§5 共同提供了一套工具，用于计算稳定性霍普夫代数 Δ_A 的

[2] 那里的陈述有一处印刷错误，不等式应为严格不等式。

一个$\mathbb{E}_n$-代数 A，属于$\mathbb{F}_2$-模。本文基本上是对 [RW25]中发展的同调稳定性新视角——稳定性霍普夫代数视角的一种应用。在§5中，我们回顾相关概念，并说明（在大多数情况下）如何从 Δ_A 一个$\mathbb{E}_n$-胞腔结构中获得 A。

在 §6 中，我们构造了证明引言中各定理所需的所有组成部分，并在 §7 中将它们组装起来。策略很简单：§2 为我们提供了 $\mathrm{CGL}(\mathrm{F}_2)$ 的一个最小 E_∞-胞腔结构的初始部分，我们据此可以计算分次至 5 的稳定性霍普夫代数 $\Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)}$。随后，我们手动验证存在一个霍普夫代数映射 $\Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)}$ to $A(1)_*$，其目标是由 Sq^1 和 Sq^2生成的 Steenrod 代数子霍普夫代数的对偶。取 Cobar 后，这就成为 E_∞-代数之间的映射 $\mathrm{cgl}(\mathrm{F}_2) \to a(1)$。代数 $\mathrm{cgl}(\mathrm{F}_2)$ 是 $\mathrm{CGL}(\mathrm{F}_2)$ 的截断版本，包含相同数量的稳定性信息，并带有一个 E_∞-映射 $\mathrm{CGL}(\mathrm{F}_2) \to \mathrm{cgl}(\mathrm{F}_2)$。关键在于复合映射 $\mathrm{CGL}(\mathrm{F}_2) \to a(1)$。通过 May 型谱序列计算$\pi_{*,*}(a(1))$，可以看出 $\pi_{*,*}(a(1)/\sigma)$ 具有 (12, 8)-周期性。接下来的任务是将这种周期性提升到 $\mathrm{CGL}(\mathrm{F}_2)/\sigma$。事实上，大量工作都在于构造一个作用于 $\mathrm{CGL}(\mathrm{F}_2)/\sigma$ 的 (12, 8)-自同态 φ，使其在 $\pi_{*,*}(a(1)/\sigma)$ 上实现这种周期性。正如记号所暗示的，映射 φ_* (1.2) 是由 φ诱导的。

最后，§8 专门讨论 $\mathrm{CGL}(\mathcal{O})$ 和 $\mathrm{Aut}(F_n)$的稳定性推论，正如引言末尾所述。

1.2. **致谢**。 我由衷感谢我的博士导师 Oscar Randal-Williams，感谢他慷慨的指导、始终如一的鼓励，以及无数次宝贵的讨论。我谨向 Jan Steinebrunner 致以诚挚谢意，感谢他与我进行了许多富有启发性的交谈。非常感谢 Jan、Oscar 和 Robin Stoll，他们对早期稿件提出的意见大幅改进了本文。

2. 低次数群同调计算：$\mathrm{GL}_g(\mathrm{F}_2)$

同调群 $H_{g,d} := H_d(\mathrm{GL}_g(\mathrm{F}_2); \mathrm{F}_2)$ 是一个 N-分次 E_∞-空间的同调，因此带有乘法和 Dyer-Lashof 运算 $Q^1, Q^2, Q^3, \ldots$，使双分次向量空间 $H_{*,*}$ 成为一个W_∞-代数 [GKRW18a，第 16] 节。这意味着乘法和运算满足以下性质

(a) Q^s 是线性的。(b) 若类 x 的同调次数为 $< s$，则 $Q^s(x) = 0$。(c) Q^s 满足 Adem 关系；参见 GKRW18a 第 16.2.2 节。(c')]。(d) 若类 x 的同调次数为 s，则 $Q^s(x) = x^2$。(e) $Q^s(1) = 0$，其中 $1 \in H_{*,*}$ 是单位。(f) Q^s 满足 Cartan 公式；参见 GKRW18a 第 16.2.2 节。(f')]。

本节分析W_∞-结构在$H_{*,*}$于低次数时的情形。我们用作用于上同调类 σ， ν_1， ν_2上的运算来表述结果，其中$\sigma \in H_{1,0}$是生成元，而 ν_1， ν_2是$H_{3,3}$的任意固定基（$H_{3,3}$是2维的这一事实，将在§2.1开头说明）。

定理 2.1。 图 2 描述了$H_{g,d}$在 $g \leqslant 6$、 $d \leqslant 4$范围内的一组基。

由于确定此范围内这些基之间的所有 W_∞-关系似乎很困难，而且对我们的目的并非必要，因此我们将范围缩小到 $g \leqslant 6$、 $d \leqslant 3$，其中的关系可以概括如下。

定理 2.2。

(i) 令 $W_\infty[\sigma, \nu_1, \nu_2]$为由符号 σ、 ν_1、 ν_2生成的自由W_∞-代数，它们的双次数分别为(1，0)、(3，3)、(3，3别地删余令 I 由以下元素列表生成的W_∞-理想[3]

$$\sigma Q^1(\sigma), \quad \sigma Q^3(\sigma), \quad \sigma^2 Q^2(\sigma), \quad \sigma\nu_1, \quad \sigma\nu_2. \tag{2.3}$$

然后，将 σ、 ν_1、 ν_2 映射到 $H_{*,*}$ 中同名的上同调类，便定义了一个 W_∞-映射

$$\varphi : W_\infty[\sigma, \nu_1, \nu_2]/I \to H_{*,*}.$$

[3]给定 W_∞-代数 A 的一个子集 S，我们将由 S 生成的W_∞-理想 $(S)_{W_\infty}$ 定义为包含 S 且对乘法和 Dyer-Lashof 运算封闭的 A中的最小子集。特别地，$(S)_{W_\infty}$ 是 A的一个代数理想。代数商 $A/(S)_{W_\infty}$ 继承自 A的W_∞-结构。

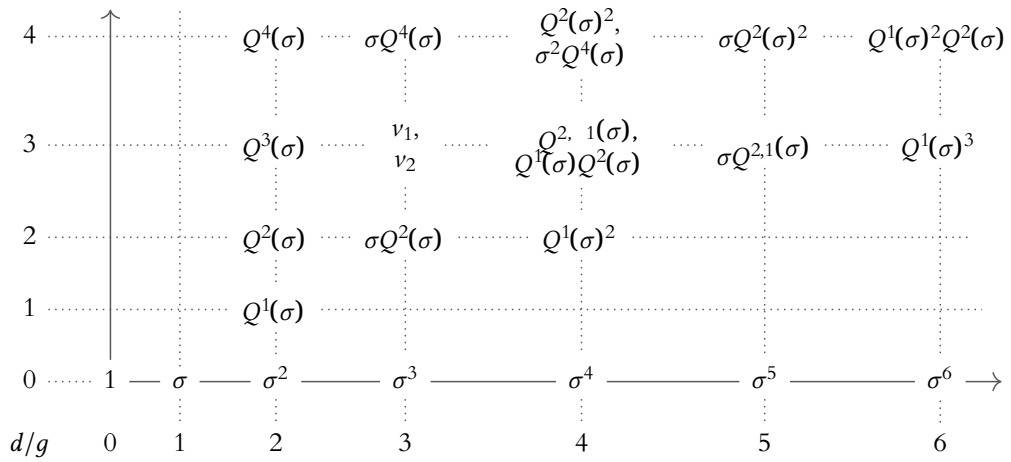


图 2. $H_d(\mathrm{GL}_g)$ 的向量空间基。

(ii) 映射 φ 在范围 $\{(g,d) \mid g \leqslant 6, d \leqslant 3\}$ 内是一个双射。

最后，我们记录一些关于同调次数4的恒等式。这些恒等式并非 §6 和 §7中的计算所需，但或许具有独立的研究价值。

推论 2.4。

(i) $Q^1(\sigma)^2Q^2(\sigma) = Q^1(\sigma)Q^{2,1}(\sigma)$ 属于 $H_6$4。*(ii)* $Q^1(\sigma)Q^3(\sigma) = \sigma^2Q^4(\sigma)$ 属于 $H_4$4。*(iii)* $\sigma^3Q^4(\sigma) = 0$ 属于 $H_5$4。

在本节中，$\mathrm{GL}_g := \mathrm{GL}_g(\mathrm{F}_2)$，且（上）同调均取 F_2 系数。

2.1. **定理 2.1 的证明**。 对于 $g = 1$，只有 σ，即 H_0 的生成元，它属于平凡群。$g = 2$ 列的计算见 [GKRW18b，引理 6.3(ii)]；为完整起见，我们将在下文回顾该论证。对于 $g \geqslant 3$ 列，我们依据此范围内 $H_{g\text{的维数信息},\ d}$ 其结果见 图 3。这些信息是使用 [HAP]软件包 [GAP4]获得的。

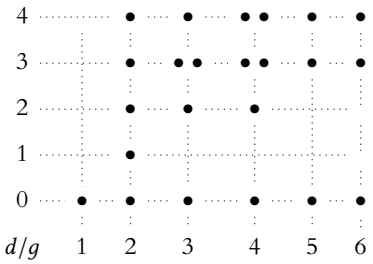


图 3. $\dim H_d(\mathrm{GL}_g)$ = 在 (g,d) 处的点数。

备注 2.5. 图 $g = 3$ 的 图 3 部分可根据现有的 $H^*(\mathrm{GL}_3)$([BC87，定理 11。7], [QuiN，1971-11：8 月 18 日，第 63-66]页）的计算得出。对于 $g = 4$ 部分，可以采用 $H^*(A_8)$ 的经典计算以及 Jordan-Dickson 同构 $\mathrm{GL}_4 \cong A_8$；这些内容可参见 [AM04，推论 6.5 和第211]页。 $g = 5, 6$ 部分似乎尚未见诸文献。

2.1.1. $g = 2$。

命题 2.6. 对于 $i \geqslant 0$, $H_{2,\ i}$ 是由 $Q^i(\sigma)$张成的一维空间。

证明。 从次数 1 上一点的自由 E_∞-空间到与 GL_g 相关联的 E_∞-空间的映射，其 2 次分级部分由将 $\Sigma_2 \hookrightarrow \mathrm{GL}_2$ 嵌入为置换矩阵给出。这是一个同调同构，因为 GL_2 可以分解为 Σ_2 的像与一个 3 阶循环子群的半直积，并且 $\widetilde{H}_*(C_3) = 0$。根据自由代数的同调群描述，我们知道$H_i(\Sigma_2)$由 $Q^i(\sigma)$生成。■

2.1.2. **映射**$\mathrm{GL}_3 \to \mathrm{GL}_4$。 我们的目标是下面的命题，稍后我们将用它来描述图 $g = 3$ 和 $g = 4$ 列 Fig. 2。

命题 2.7。 稳定化同态 $H_i(\mathrm{GL}_3) \to H_i(\mathrm{GL}_4)$ 是

(i) 当 $i = 2$、3 时为零映射；*(ii)* 当 $i = 4$ 时非零（因而是单射）。

我们的策略是研究线性对偶，即限制映射 $H^i(\mathrm{GL}_4) \to H^i(\mathrm{GL}_3)$。在 [Pha87] Pham 表明，限制映射 $H^*(\mathrm{GL}_4) \to \bigoplus_{i=1}^5 H^*(A_i)$ 到某个初等阿贝尔子群集合 A_1、……、A_5（见下文 (2.11) 中的描述）是单射的 [Pha87, (3.1)],，并且他们根据其在 A_i 中的像，描述了 $H^*(\mathrm{GL}_4)$ 的一组代数生成元。我们将描述 GL_3 的初等阿贝尔子群 B_1、B_2，它们具有类似的性质。这些 B_i 的排列方式还使得 B_1（分别为 B_2）在 GL_4 中的像将是 A_1（分别为 A_2）的子群，因此可以在 B_i 上明确检验 Pham 的类在 GL_3 中的消失性。

记号 2.8。

(1) 对于 $n > 1$ 和 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n, i \neq j$，令 $a_{ij}^{(n)} \in \mathrm{GL}_n$ 表示一个对角线上元素均为 1、位置 (i, j) 上为 1、其余位置均为 0 的矩阵。$a_{ij}^{(n)}$在 GL_{n+1}中的像为 $a_{ij}^{(n+1)}$，因此我们可以将 $a_{ij}^{(n)}$写作 a_{ij}。(2) 设 S 是 GL_n 中一组 a_{ij}，且由 S 生成的子群 A 是初等阿贝尔群，那么 a_{ij}构成 $H_1(A) = A$的基，并且我们将 $\alpha_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(A, \mathrm{F}_2) = H^1(A)$定义为对偶基。(3) 令 $\mathrm{UT}_n \leqslant \mathrm{GL}_n$ 表示上三角矩阵子群。由于 UT_n 是 GL_n的一个 Sylow 2-子群，上同调上的限制映射是单射。

命题 2.9。 考虑初等阿贝尔子群

$$B_1 := \langle a_{12}, a_{13} \rangle, \quad B_2 := \langle a_{13}, a_{23} \rangle$$

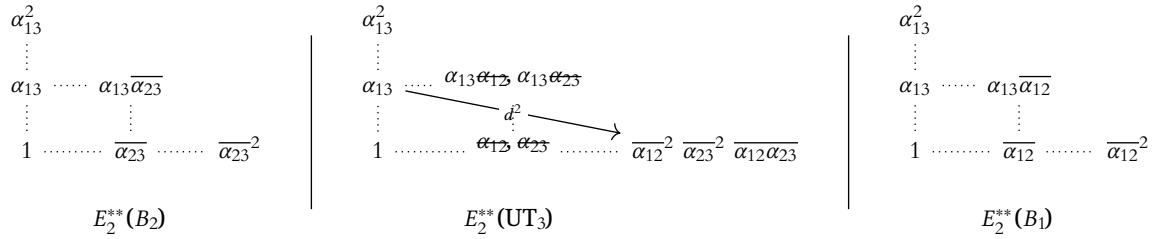
的UT_3。则

(i) 限制同态 $r\colon H^*(UT_3) \to H^*(B_1) \oplus H^*(B_2)$ 是单射。特别地，限制同态 $H^*(GL_3) \to H^*(B_1) \oplus H^*(B_2)$ 也是单射。*(ii)* 令 ρ_3 表示由 GL_3 在集合 $F\,3\,2 \setminus \{0\}$ 上的自然作用所给出的 GL_3 的 7 维实置换表示。令 $b = w_2(\rho_3)|_{\mathrm{UT}_3} \in H^2(UT_3)$ 表示 ρ_3 的第二斯蒂费尔-惠特尼类的限制。则 $r(b) = (\alpha_{13}^2 + \alpha_{12}^2, \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2)$。*(iii)* 存在上同调类 $a, c \in H^1(UT_3)$，满足 $r(a) = (0, \alpha_{23})$，$r(c) = (\alpha_{12}, 0)$。由 *(i)*，a, c 由其在 r 下的像唯一确定，且有 $ac = 0$。*(iv)* 分次环的映射 $F_2[a, b, c]/(ac) \to H^*(UT_3)$ 是同构。

证明。 令 $\overline{a_{12}}, \overline{a_{23}}$ 为 UT_3/a_{13} 中 a_{12}, a_{23} 的像。那么 UT_3/a_{13} 是由 a_{12}, a_{23} 生成的初等阿贝尔群。此外，$B_2/a_{13} = \overline{a_{23}}$，$B_1/a_{13} = \overline{a_{12}}$，并且我们有如下扩张图表

$$\begin{array}{lccccccccc}
(2.10_2) & 0 & \longrightarrow & \langle a_{13} \rangle & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & \langle \overline{a_{23}} \rangle & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \| & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \\
(2.10) & 0 & \longrightarrow & \langle a_{13} \rangle & \longrightarrow & \mathrm{UT}_3 & \longrightarrow & \langle \overline{a_{12}}, \overline{a_{23}} \rangle & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \| & & \uparrow{\scriptstyle f_1} & & \uparrow{\scriptstyle g_1} & & \\
(2.10_1) & 0 & \longrightarrow & \langle a_{13} \rangle & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & \langle \overline{a_{12}} \rangle & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

由子群的包含诱导。相关谱序列在 $\{(p, q) \mid 0 \leqslant p + q \leqslant 2\}$ 中的 E_2-页如下。



其中，$\overline{\alpha_{12}}, \overline{\alpha_{23}} \in H^1(a_{12}, a_{13})$ 定义为 a_{12}, a_{13} 的对偶基，$\alpha_{23} \in H_1(\overline{\alpha_{23}})$、$\overline{\alpha_{12}} \in H_1(a_{12})$ 也同理。此外，映射 $f_2^*\colon E_2^{**}(\mathrm{UT}_3) \to E_2^{**}(B_2)$ 将 α_{12} 映射为 0，而映射 $f_1^*\colon E_2^{**}(\mathrm{UT}_3) \to E_{**}^2(B_1)$ 将 α_{23} 映射为 0。d^2-微分由以下内容描述

Claim. $d^2(\alpha_{13}) = \overline{\alpha_{12}\alpha_{23}} \in E_2^{3,0}(\mathrm{UT}_3)$.

断言的证明。类 $d^2(\alpha_{13}) \in H_3(a_{12}, a_{23})$ 对应于中心扩张 (2.10)。若 y 是 a_{12}、a_{23} 或 $a_{12}a_{23}$ 之一，则 $d^2(\alpha_{13})$ 在 y 上的限制对应于下面的拉回扩张。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \langle a_{13}\rangle & \longrightarrow & \mathrm{UT}_3 & \longrightarrow & \langle \overline{a_{12}}, \overline{a_{23}}\rangle & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \langle a_{13}\rangle & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \langle y\rangle & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

当 $y = a_{12}$（分别为 a_{23}）时，此扩张为 (2.10$_1$)（分别为 (2.10$_2$)），且分裂。当 $y = a_{12}a_{23}$ 时，此扩张不分裂，因为 $H \simeq C_4$。因此，若记 $d^2(\alpha_{12}) = \lambda_1\alpha_{12}^2 + \lambda_2\alpha_{23}^2 + \lambda_3\alpha_{12}\alpha_{23}$，则必有 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 和 $\lambda_3 \neq 0$。◀

现在 $E^{*,*}_3(\mathrm{UT}_3) = \mathbb{F}_2[\overline{\alpha_{12}}, \overline{\alpha_{23}}]/(\overline{\alpha_{12}\alpha_{23}}) \otimes \mathbb{F}_2[\alpha_{13}^2]$，而 d^3-微分由 $d^3(\alpha_{13}^2)$ 决定。可以将 $d^3(\alpha_{13}^2) = \lambda_1\alpha_{12}^3 + \lambda_2\alpha_{23}^2$ 写成某些 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}_2$ 的形式。由自然性可得 $d^3(\alpha_{13}^2) = \lambda_i\alpha_{i3}^2 \in E_3^{3,0}(B_i)$。由于 (2.10$_i$) 分裂为直积，谱序列在 E_2 处坍缩。因此 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$。于是，$\{E_r(\mathrm{UT}_3)\}_r$ 在 E_3 处坍缩，并且 $(f_1^*, f_2^*)\colon E^{*,*}_\infty(\mathrm{UT}_3) \to E^{*,*}_\infty(B_1) \oplus E^{*,*}_\infty(B_2)$ 是

$$\bar{r}\colon \mathbb{F}_2[\overline{\alpha_{12}}, \overline{\alpha_{23}}]/(\overline{\alpha_{12}\alpha_{23}}) \otimes \mathbb{F}_2[\alpha_{13}^2] \to \mathbb{F}_2[\overline{\alpha_{12}}, \alpha_{13}] \oplus \mathbb{F}_2[\overline{\alpha_{23}}, \alpha_{13}].$$

由于 $\bar{r}$ 是 r 上有下界滤过在滤过商上的映射，r 是单射这一事实意味着 r 也如此，从而证明了 (i)。

对于 (ii)，这在 [GKRW18b] 的引理 6.3 的证明中已计算。(ii)]，$\rho_3|_{\langle a_{12}\rangle}$ 由 2 个符号表示副本和 5 个平凡表示副本组成，因此 $b|_{\langle a_{12}\rangle} = \alpha_{12}^2$。由于矩阵 a_{13} 和 a_{23} 在 GL_3 中与 a_{12} 共轭，且 b 是从 GL_3 限制得到的，因此将 b 限制到 a_{13} 和 a_{23} 上也都非零，所以必有 $b|_{\langle a_{13}\rangle} = \alpha_{13}^2$ 以及 $b|_{\langle a_{23}\rangle} = \alpha_{23}^2$。现在将 $r(b) = (\lambda_1\alpha_{13}^2 + \lambda_2\alpha_{12}^2, \mu_1\alpha_{13}^2 + \mu_2\alpha_{23}^2)$ 限制到这些 2 阶子群上，其中系数为 λ_i, μ_j，我们得到 $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$。

对于 (iii)，我们将 $E^{1,0}_\infty(\mathrm{UT}_3)$ 视为 $H^*(\mathrm{UT}_3)$ 上滤过的最底层，并令 a, c 为 α_{23}, α_{12}。最后，对于 (iv)，只需验证复合映射

$$\mathbb{F}_2[a, b, c]/(ac) \to H^*(\mathrm{UT}_3) \to E^{*,*}_\infty(\mathrm{UT}_3) = \mathbb{F}_2[\overline{\alpha_{12}}, \overline{\alpha_{23}}]/(\overline{\alpha_{12}\alpha_{23}}) \otimes \mathbb{F}_2[\alpha_{13}^2]$$

是一个同构。确实如此，因为根据 (iii)，a（分别为 c）被映到 $\overline{\alpha_{23}}$（分别为 α_{12}），而根据 (ii)，b 被映到 $\alpha_{13}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2$。■

证明 定理 2.7。考虑以下初等阿贝尔子群，它们属于 GL_4：

(2.11) $A_1 := \langle a_{12}, a_{13}, a_{14}\rangle$ $A_2 := \langle a_{23}, a_{13}, a_{24}, a_{14}\rangle$ $A_3 := \langle a_{34}, a_{24}, a_{14}\rangle$ $A_4 := \langle a_{12}, a_{34}, a_{14}\rangle$,

$$A_5 := \langle a_1 := a_{12}a_{34}, a_2 := a_{13}a_{24}, a_3 := a_{14}\rangle.$$

Pham 证明 A_i 能检测 GL_4 [Pha87，引理 3。1] 并构造了代数生成元[4] $w_1, \ldots\ldots, w_{10}$ 子代数 $H^*(\mathrm{GL}_4)$ 的 $H^*(\mathrm{UT}_4)$，方法是指定它们在 A_i 中的像。由于其他

[4] 中有一个笔误：[Pha87，定理 A]：这里应为 $|v_{14}| = 4$（而不是 3），参见 v_{14} 在 A_i 该文第 58 页关于限制的说明。对 a_1 的定义也有一个印刷错误（该文中称为“c_1”）。

w_j在次数 4 之后才出现，因此只会用到 w_1， w_2， w_3， w_4到 A_1和 A_2的限制，如下所示。

element / its restriction to	A_1	A_2
w_1	0	$\alpha_{23}\alpha_{14}+\alpha_{13}\alpha_{24}$
w_2	0	$\alpha_{23}^2\alpha_{14}+\alpha_{23}\alpha_{14}^2+\alpha_{13}^2\alpha_{24}+\alpha_{13}\alpha_{24}^2$
w_3	0	0
w_4	x_1	x_2

其中

$$x_1=\alpha_{14}(\alpha_{14}+\alpha_{13})(\alpha_{14}+\alpha_{12})(\alpha_{14}+\alpha_{13}+\alpha_{12})+\alpha_{12}^4+(\alpha_{13}^2+\alpha_{13}\alpha_{12})^2$$

$$x_2=\alpha_{14}(\alpha_{14}+\alpha_{13})(\alpha_{14}+\alpha_{24})(\alpha_{14}+\alpha_{13}+\alpha_{24}+\alpha_{23})+(\alpha_{23}\alpha_{14}+\alpha_{13}\alpha_{24})((\alpha_{13}^2+\alpha_{13}\alpha_{23})+(\alpha_{24}^2+\alpha_{24}\alpha_{23})+\alpha_{23}^2)$$
$$+(\alpha_{13}^2+\alpha_{13}\alpha_{23})^2+(\alpha_{24}^2+\alpha_{24}\alpha_{23})^2+\alpha_{23}^4.$$

特别地， w_i 在 B_1 和 B_2 中的像如下。

(1) For $1\leqslant i\leqslant 3$, we have $w_i|_{B_1}=w_i|_{B_2}=0$.
(2) $w_4|_{B_1}=\alpha_{12}^4+\alpha_{12}^2\alpha_{13}^2+\alpha_{13}^4$ and $w_4|_{B_2}=\alpha_{13}^4+\alpha_{13}^2\alpha_{23}^2+\alpha_{23}^4$; both are non-zero.

现在我们准备证明命题的 (i) 部分。由于 $|w_1|=2$、 $|w_2|=|w_3|=3$ 以及所有其他 w_j的次数至少为 4，因此必有 $H^2(\mathrm{GL}_4)=\mathrm{F}_2\{w_1\}$ 和 $H^3(\mathrm{GL}_4)=\mathrm{F}_2\{w_2\}\oplus\mathrm{F}_2\{w_3\}$。由定理 2.9 (i)，(1) 推出 $w_i|_{\mathrm{GL}_3}=0$ 对 $i=1$、2、3 成立。

（ii）由（2）可得，因为类 w_4 的次数为 4。 ■

2.1.3. $g=3$. 令 a,b,c为定理 2.9 中的上同调类定理 2.9。那么

命题 2.12. 作为 $H^*(\mathrm{UT}_3)$ 的子代数， $H^*(\mathrm{GL}_3)$由 b, $a(b+a^2)$和 $c(b+c^2)$生成

证明。 我们引用如下事实： $H^*(\mathrm{GL}_3)$作为代数由次数 2 和 3生成。事实上，代数结构 $H^*(\mathrm{GL}_3)=\mathbb{F}_2[\xi,\gamma_1,\gamma_2]/(\gamma_1\gamma_2)$其中 $|\xi|=2$, $|\gamma_1|=|\gamma_2|=3$已在多个地方计算过：例如见 [BC87，定理 11。7] 以及 [QuiN，1971-11：8 月 18 日，第 63-66]。利用这一点，我们只需验证

(1) $H^2(\mathrm{GL}_3)=\mathbb{F}_2\{b\}$.
(2) $H^3(\mathrm{GL}_3)=\mathbb{F}_2\{a(b+a^2)\}\oplus\mathbb{F}_2\{c(b+c^2)\}$.

由于子群 a_{12}、a_{13} 和 a_{23} 在 GL_3，中共轭，因此一个类 $H^*(\mathrm{GL}_3)$ 在其中一个子群上的限制为零，当且仅当它在所有这些子群上的限制都为零。现在给定

$$x:=\lambda_1a^2+\lambda_2c^2+\lambda_3b\in H^2(\mathrm{UT}_3)=\mathbb{F}_2\{a^2\}\oplus\mathbb{F}_2\{c^2\}\oplus\mathbb{F}_2\{b\},\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{F}_2,$$

我们有

$$x|_{\langle a_{12}\rangle}=(\lambda_2+\lambda_3)\alpha_{12}^2,\quad x|_{\langle a_{13}\rangle}=\lambda_3\alpha_{13}^2,\quad x|_{\langle a_{23}\rangle}=(\lambda_1+\lambda_3)\alpha_{23}^2$$

根据定理 2.9。因此，若 $x\in{}^2H(\mathrm{GL}_3)$ 那么要么 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 要么 $\lambda_1=\lambda_2=0$， $\lambda_3=1$。由于我们知道$H^2(\mathrm{GL}_3)$ 是1维的，这就证明了 (1)。

对于 (ii)，首先注意到 $B\cdot\cdot=\{ab,\ bc,\ a^3,\ c^3\}\subset H^3(\mathrm{UT}_3)$是一个基。根据定理 2.9(iii)， 中的每个元素在$\langle a_{13}\rangle$上的限制均为零，因此 中的每个元素在$\langle a_{12}\rangle$ 和$\langle a_{23}\rangle$ 上的限制也均为零。给定

$$y:=\lambda_1ab+\lambda_2bc+\lambda_3a^3+\lambda_4c^3\in H^3(\mathrm{UT}_3),$$

我们有

$$y|_{\langle a_{12}\rangle}=(\lambda_2+\lambda_4)\alpha_{12}^3,\quad y|_{\langle a_{23}\rangle}=(\lambda_1+\lambda_3)\alpha_{23}^3.$$

因此 $H^3(\mathrm{GL}_3)\subseteq S\cdot\cdot=\{y$如上所述 $\mid\lambda_2=\lambda_4,\ \lambda_1=\lambda_3\}$。但 $H^3(\mathrm{GL}_3)$ 和 S都有四个元素，因此实际上 $H^3(\mathrm{GL}_3)=S$，从而证明了 (ii)。■

推论 2.13。 当 i为偶数时，映射 $H_i(\mathrm{GL}_2)\to H_i(\mathrm{GL}_3)$是同构；当 i为奇数时，它为零。特别地：

(i) 对每个偶数 $i\geqslant 2$, $H_{3,\ i}$都是 1 维的，且由 $\sigma Q^i(\sigma)$ 张成。
(ii) 对每个奇数 $i\geqslant 1$, $\sigma Q^i(\sigma)=0\in H_{3,i}$.

证明。 假设 $i = 2k > 0$。利用 定理 2.12 的代数结构可知 $H^{2k}(GL_3) = F_2\{b^k\}$。特别地 $H_{3,2k}$ 是一维的。由于 $H_{2,2k} = F_2\{Q^1(\sigma)\}$，对偶化后，只需证明限制映射 $H^{2k}(GL_3) \to H^{2k}(GL_2)$ 非零；为此，我们进一步将其限制到子群 a_{12}。根据定理 2.9(ii)，$b^{2k}|_{\langle a_{12}\rangle} = \alpha_{12}^{4k}$，且它非零。

设 $i = 2k + 1 > 0$。对其进行对偶化后，只需证明 $H^{2k+1}(GL_3) \to H^{2k+1}(GL_2)$ 是零映射。当 $i = 3$ 时，这仅仅是因为 $H^3(GL_3)$ 是零群，因此我们假设 $i > 3$。于是每个非零类 $x \in H^{2k+1}(GL_3)$ 都至少被 $a(b + a^2)$ 和 $c(b + c^2)$ 中的一个整除，所以 $x|_{\langle a_{13}\rangle} = 0$ 由定理 2.9(iii) 得出。由于 a_{13} 在 GL_3 中与 a_{12} 共轭，我们有 $x|_{\langle a_{12}\rangle} = 0$。由于限制 $H^*(GL_3) \to H^*(a_{12})$ 是同构，这就完成了证明。 ■

2.1.4. $g = 4$. 利用 维数 $H_{4,2} = 1$，维数$H_{4,3}$ = 维数$H_{4,4} = 2$ 由（图 3），我们将 $g = 4$ 定理 2.1 的列定理 2.1重述如下

命题 2.14.

(i) $Q^1(\sigma)^2 \neq 0$ 在$H_{4,2}$ 中；*(ii)* $Q^{2,1}(\sigma)$ 和 $Q^1(\sigma)Q^2(\sigma)$ 在 $H_{4,3}$ 中均非零且互不相同；*(iii)* $Q^2(\sigma)^2$ 和 $\sigma^2 Q^4(\sigma)$ 在 $H_{4,4}$ 中均非零且互不相同。

证明。 第 (i) 项见 [GKRW18b，引理 6.3 (iii)]。

对于 (ii)，我们考虑 Steenrod 运算的线性对偶 Sq^i_* : $H_{*,*} \to H_{*,*-i}$。对偶 Steenrod 运算与 Dyer-Lashof 运算之间的相互作用由 Nishida 关系描述 [CLM76，第 6] 页。下面列出几个将会用到的该关系实例。

(N1) $Sq^1_* Q^1 = 0$。

(N2) $Sq^1_* Q^2 = Q^1$。 (N3)

$Sq^2_* Q^4 = Q^2 + Q^3 Sq^*_1$。

由 (N2)

$$Sq^1_*(Q^{2,1}(\sigma)) = Q^1(Q^1(\sigma)) = Q^1(\sigma)^2.$$

另一方面

$$Sq^1_*(Q^1(\sigma)Q^2(\sigma)) = Q^1(\sigma)\, Sq^1_*(Q^2(\sigma)) + Sq^1_*(Q^1(\sigma))Q^2(\sigma) = Q^1(\sigma)^2$$

其中，第一个等式由 Cartan 公式得出，第二个等式由 (N2) 和 (N1) 得出。由于$Q^1(\sigma)^2 \in H_{4,2}$ 非零，$Q^{2,1}(\sigma)$ 和 $Q^1(\sigma)Q^2(\sigma)$ 也都非零。这两个上同调类彼此不同，因为$\sigma Q^1(\sigma)Q^2(\sigma) = 0$，而我们将在下文的定理2.15(i)中看到 $\sigma Q^{2,1}(\sigma) \neq 0$。

对于 (iii)，类 $\sigma^2 Q^4(\sigma)$ 非零，因为 $\sigma : H_{3,4} \to H_{4,4}$ 由 定理 2.7(ii) 可知是单射，而 $\sigma Q^4(\sigma)$由 定理 2.13(iii) 可知非零。为证明 $Q^2(\sigma)^2$ 非零，计算可得

$$Sq^2_*(Q^2(\sigma)^2) = Q^2(\sigma)\, Sq^2_*(Q^2(\sigma)) + (Sq^1_*(Q^2(\sigma)))^2 + Sq^2_*(Q^2(\sigma))Q^2(\sigma) = Q^1(\sigma)^2.$$

第一个等式由 Cartan 公式得到，第二个等式在中间项使用了 (N2)。为证明$\sigma^2 Q^4(\sigma)$ 和 $Q^2(\sigma)^2$ 互不相同，我们对它们作用 Sq^2_*。

$$Sq^2_*(\sigma^2 Q^4(\sigma)) = \sigma^2\, Sq^2_*(Q^4(\sigma)) + Sq^1_*(\sigma^2)\, Sq^1_*(Q^4(\sigma)) + Sq^2_*(\sigma^2)Q^4(\sigma) = \sigma^2 Q^2(\sigma)$$

由 Cartan 公式以及 (N3) 得到。根据 定理 2.7(i)，类 $\sigma^2 Q^2(\sigma)$ 为零。另一方面，$Sq^2_*(Q^2(\sigma)^2) = (Sq^1_* Q^2(\sigma))^2 = Q^1(\sigma)^2 \neq 0.$ ■

2.1.5. $g = 5$. 我们需要证明

命题 2.15。

(i) $\sigma Q^{2,1}(\sigma) \in H_{5,3}$ 非零。

(ii) $\sigma Q^2(\sigma)^2 \in H_{5,4}$ 非零。

证明。 第 (i) 部分直接由 定理2.16下方的 (i) 得出，该结论表明此类的稳定化非零。

第 (ii) 部分可利用 [GKRW18b的引理 6 中的斯蒂费尔-惠特尼类技巧得到。3]令 ρ_5 为由 32维实置换表示，其由 GL_5 在集合 $\mathbb{F}_2^5$ 上的自然作用给出。令 i为复合映射 $\langle a_{12}, a_{34}\rangle \hookrightarrow \mathrm{GL}_4 \to \mathrm{GL}_5$。则

$$i^*\rho_5 = (\rho_4|_{\langle a_{12},a_{34}\rangle})^{\oplus 2}$$

其中 ρ_4 是通过 16维表示，由 GL_4 对 $\mathbb{F}_4{}^2$的作用得到。关于 $\rho_4|_{\langle a_{12},a_{34}\rangle}$ 的前几个 Stiefel-Whitney 类计算见 [GKRW18b，证明 6.3 (iv)][5],给出

$$w(i^*\rho_5) = w(\rho_4|_{\langle a_{12},a_{34}\rangle})^2 = 1 + \alpha_{12}^2\alpha_{34}^2 + (\text{classes of degree} \geqslant 6).$$

特别地， $i^*w_4(\rho_5) = \alpha_{12}^2\alpha_{34}^2$与 $Q^2(\sigma) \times Q^2(\sigma)$ 配对得 1。因此， $w_4(\rho_5)$ 与 $i_*(Q^2(\sigma) \times Q^2(\sigma)) = \sigma Q^2(\sigma)^2$ 配对得 1。■

2.1.6. $g = 6$。 根据维数信息，只需验证

命题 2.16。

(i) $\sigma^2 Q^{2,1}(\sigma) \in H_{6,3}$ 非零。*(ii)* $Q^1(\sigma)Q^{2,1}(\sigma) \in H_{6,4}$ 非零。

证明。 第 (i) 项的解释见 [GKRW18b，引理 6.7 及其后的段落]。

对于 (ii)，我们将证明此类的 Sq^1_* 非零。

$$\mathrm{Sq}^1_*(Q^1(\sigma)Q^{2,1}(\sigma)) = \mathrm{Sq}^1_*(Q^1(\sigma))Q^{2,1}(\sigma) + Q^1(\sigma)\,\mathrm{Sq}^1_*(Q^{2,1}(\sigma)) = Q^1(\sigma)Q^{1,1}(\sigma) = Q^1(\sigma)^3.$$

将 Q^2 应用于 $\sigma Q^1(\sigma) = 0$ 中的恒等式定理 2.13(ii)，得到 $Q^1(\sigma)^3 = \sigma^2 Q^{2,1}(\sigma)$，根据第 (i) 部分，该式非零。■

2.2. 定理 2.2 的证明 和 定理 2.4。

证明 定理 2.2。 设 X是一个自然数分次的 E_∞-空间，那么对于任意子集 $B \subseteq H_{*,*}(X)$，都有一个诱导的 W_∞-映射 $W_\infty[B] \to H_{*,*}(X)$，它在 B上是恒等映射。对于子集 $S \subseteq W_\infty[B]$，当且仅当 S中每个元素在 $H_{*,*}(X)$ 中的像都为零时，该映射可分解为经过 $W_\infty[B]/(S)W_\infty$。因此，要证明 (i)，只需检验其中的上同调类

$$S := \{\sigma Q^1(\sigma), \sigma Q^3(\sigma), \sigma^2 Q^2(\sigma), \sigma v_1, \sigma v_2\}$$

在 i 中为零 n $H_{*,*}$。对于 $\sigma Q^1(\sigma)$ 这由 定理 2.13(iii) 得出；其余部分的消失 S 是其推论由 定理 2.7得出。

现在证明 (ii)。令 $B = \{\sigma, v_1, v_2\}$,

$$QB := \{Q^I(b) \mid I \text{ normal for } b\} \cap W_\infty[\sigma, v_1, v_2]_{\leqslant 6,\leqslant 3},$$
$$QS := \{Q^J(s) \mid J \text{ normal for } s\} \cap W_\infty[\sigma, v_1, v_2]_{\leqslant 6,\leqslant 3},$$

其中，若一个序列是容许的并满足某个超额条件，则称其为正规序列；详见 §6.4.1。则代数 $\mathrm{F}_2[QB]/(QS)$ 与 $W_\infty[B]/I$ 在双次数 (g,d)且 $g \leqslant 6, d \leqslant 3$ 时一致，因此只需证明 $\varphi\colon \mathrm{F}_2[QB]/(QS) \to W_\infty[B]/I \to H_{*,*}$ 在此范围内是一个双射。定理 2.1 中的加性基表明， φ 在所述范围内是满射，因此我们只需验证 $\mathrm{F}_2[QB]/(QS)$ 在每个双次数上的维数与 $H_{*,*}$ 的维数一致。利用定理 6.17，可得

$$QB = B \cup \{Q^1(\sigma), Q^2(\sigma), Q^3(\sigma), Q^{2,1}(\sigma)\}$$
$$QS = S \cup \{Q^2(\sigma Q^1(\sigma))\} = S \cup \{Q^1(\sigma)^3 + \sigma^2 Q^{2,1}(\sigma)\}.$$

然后逐行手动写出 $\mathrm{F}_2[QB]/(QS)_{\leqslant 6}$ 的加性基. $_{\leqslant 3}$。 ■

证明 定理 2.4。 (i) 将 Q^3 应用于恒等式 $\sigma Q^1(\sigma) = 0$，由定理 2.13(ii)得到 $\sigma^2 Q^{3,1}(\sigma) + Q^1(\sigma)Q^{2,1}(\sigma) + Q^2(\sigma)Q^1(\sigma)^2 = 0$。但是，根据阿德姆关系， $Q^{3,1} = 0$。

[5]这里的 ρ_4 与那里的相差一个平凡表示，因此斯蒂费尔-惠特尼类不受影响

(ii) 令 $x = \sigma^2 Q^4(\sigma)$ 和 $y = Q^2(\sigma)^2$。利用 $H_{4,\ 4}$ 由 定理 2.1 给出的基，有

$$Q^1(\sigma)Q^3(\sigma) = \lambda_1 x + \lambda_2 y$$

对于某个 $\lambda_1, \lambda_2 \in F_2$。我们将通过计算两边的 Sq^2_* 来确定 λ_2。根据 Cartan 公式

$$Sq^2_*(Q^1(\sigma)Q^3(\sigma)) = Q^1(\sigma)\,Sq^2_*(Q^3(\sigma)) + Sq^1_*(Q^1(\sigma))\,Sq^1_*(Q^3(\sigma)) + Sq^2_*(Q^1(\sigma))Q^3(\sigma).$$

第一项、第二项以及第三项分别由 Nishida 关系 $Sq^2_* Q^3 = Q^2\,Sq^1_*$、$Sq^1_* Q^3 = 0$ 和 $Sq^2_* Q^1 = Q^1\,Sq^1_*$ 消去。另一方面，我们在定理 2.14(iii) 的证明中已计算出 $Sq^2_*(x) = 0$，以及 $Sq^2_*(y) \neq 0$。因此 $\lambda_2 = 0$。我们将通过证明 $Q^1(\sigma)Q^3(\sigma)$ 与 [Pha87] 的类 $w_4 \in H^4(GL_4)$ 配对为 1，来证明 $\lambda_1 = 1$，即 $Q^1(\sigma)Q^3(\sigma)$ 非零。根据定义

$$w_4 = v_{14} + z_1(v_{12}^2 + v_{13} + v_{34}^2 + v_{24} + v_{23}^2) + v_{12}v_{34}(v_{12}^2 + v_{13} + v_{34}^2 + v_{24}) + v_{12}^4 + v_{13}^2 + v_{34}^4 + v_{24}^2 + v_{23}^4 \in H^*(UT_4),$$

其中 $H^*(UT_4)$ 中的 v_{ij}和 z_1由其在初等阿贝尔子群A_1、……、A_5上的限制刻画，这些子群见(2.11)中的描述。利用 [Pha87 第 57], 页的这些限制表，可以检验 $w_4|_{A_4}$ 沿着 $a_{12}, a_{34} \leqslant A_4$ 的限制为

$$w_4|_{\langle a_{12}, a_{34}\rangle} = \alpha_{12}^3\alpha_{34} + \alpha_{12}\alpha_{34}^3 + \alpha_{12}^4 + \alpha_{34}^4,$$

它与 a_{12}, a_{34} 的类 $Q^1(\sigma) \times Q^3(\sigma)$ 配对为 1，其中 $Q^i(\sigma)$ 是 $H_i(\Sigma_2)$ 的生成元。因此，正如所承诺的，w_4与 $Q^1(\sigma)Q^3(\sigma)$配对为 1。

(iii) 通过将 (ii) 稳定化一次并使用 $\sigma Q^1(\sigma) = 0$ 得到。 ∎

3. Low degree group homology computations: $GL_g(\mathbb{Z})$

与上一节类似，我们用 Dyer-Lashof 运算和乘积来描述低次数下 $H_{g,d}$:= $H_d(GL_g(Z); F_2)$ 的一个基。设 $\sigma \in H_{1,0}$,$\theta_1 \in H_{1,1}$,$\theta_2 \in H_{1,2}$ 分别为相应同调群的生成元。于是，我们的结果可概括如下。

命题 3.1。 图 4 描述了在范围 $g \leqslant 3$, $d \leqslant 2$内 $H_{g,d}$ 的一个基。

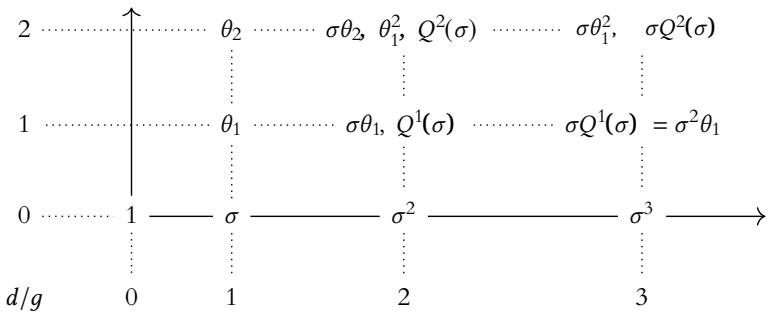


图4. $H_d(GL_g(Z); F_2)$的基。

这个命题由以下定理3.2和定理3.4结合而得。

命题3.2. 图5 描述维数$H_{g,\ d}$ 的范围为 $g \leqslant 3$, $d \leqslant 2$。

证明. 第 $g = 1$ 列可由注意到 $GL_1(Z) = Z^\times \simeq C_2$得出。

对于 $d = 1$ 行的其余部分，我们使用同一认定 $H_{g,1} = GL_g(Z)^{ab} \otimes F_2$。对于$H_{2,1}$，考虑同态 $\mu : GL_2(Z) \to Z/2$，由 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto bc \bmod 2$ 定义。

断言3.3. $\det \times \mu : GL_2(\mathbb{Z})^{ab} \to \mathbb{Z}^\times \times \mathbb{Z}/2$ 是一个同构。

断言的证明。 我们有一个表示

$$GL_2(\mathbb{Z}) = \left\langle s, t, r \mid s^3 = t^2, t^4 = 1, r^2 = 1, rsr^{-1} = t^{-1}s^2t, rtr^{-1} = t^{-1} \right\rangle$$

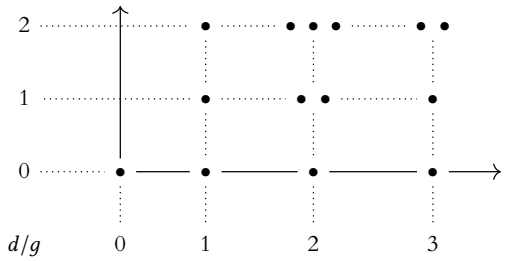


图5. dim $H_d(\mathrm{GL}_g(Z); \mathrm{F}_2) = (g,\ d)$处圆点的数量。

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle s、\ t \mid s^3 = t^2、\ t^4 = 1 \rangle$ 的经典表示得到，这一表示见于 [KTo8，命题 A]，并结合半直积分解 $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rtimes C_2$，其中 C_2 的生成元通过 r 的共轭作用。于是

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})^{\mathrm{ab}} = \left\langle \bar{t}, \bar{r} \mid \bar{t}^2 = 1, \bar{r}^2 = 1, \bar{t}\bar{r} = \bar{r}\bar{t} \right\rangle$$

并且 $(\det \times\mu)(t) = (1,\ -1)$，而 $(\det \times\mu)(r) = (-1,\ 0)$。因此 $\det \times\mu$ 是满射，但源群和目标的阶相同。◀

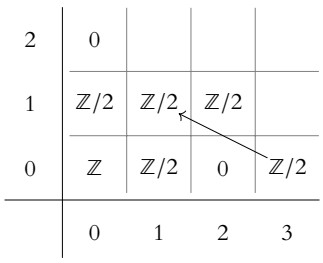
当 $g = 3$时，由于 I_3 是中心的，有 $\mathrm{GL}_3(\mathrm{Z}) = -I_3 \times \mathrm{SL}_3(\mathrm{Z})$。由于 $\mathrm{SL}_3(\mathrm{Z})$ 是完美群（[HO89，4.3.9 定理和 1.2.I5]），$\mathrm{GL}_3(\mathrm{Z})$ 的阿贝尔化由 $-I_3$ 的像生成。
对于$H_{2,\ 2}$，假设我们有如下

断言。 $H_2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$。

因此，根据泛系数定理，$H_2(\mathrm{GL}_2(\mathrm{Z}); \mathrm{F}_2)$ 同构于 $H_2(\mathrm{GL}_2(\mathrm{Z}); \mathrm{Z}) \otimes \mathrm{F}_2 = \mathrm{F}_2$ 与 Tor函子$(\mathrm{GL}_1(\mathrm{Z})^{\mathrm{ab}}, \mathrm{F}_2) = \mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{F}_2$的（非典范）直和。
断言的证明。 考虑与该扩张相关的 Hochschild–Serre谱序列

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}^\times.$$

前几个 $E^2_{p,q} = H_p(\mathrm{Z}^\times; H_q(\mathrm{SL}_2(\mathrm{Z}); \mathrm{Z}))$ 如下。唯一需要论证的项是$E^2_{1,1} = H_1(\mathrm{Z}^\times; H_1(\mathrm{SL}_2(\mathrm{Z}); \mathrm{Z})) = \mathrm{Z}/2$。为此，我们使用上文 $\mathrm{GL}_2(\mathrm{Z})$ 和 $\mathrm{SL}_2(\mathrm{Z})$ 的表示，得到 $H_1(\mathrm{SL}_2(\mathrm{Z}); \mathrm{Z})$ 作为 $\mathrm{Z}^\times$-模的描述：$H_1(\mathrm{SL}_2(\mathrm{Z}); \mathrm{Z}) = \left\langle s^3 \mid s^3 = 1 \right\rangle \times \left\langle t \mid t^4 = 1 \right\rangle$ 的 $\mathrm{Z}^\times$作用由 $(-1).s = s^{-1}$、$(-1).t = t^{-1}$给出。



离开或进入一个 $E^2_{p,q}$ 且带有 $p + q = 2$ 的唯一可能的非平凡微分，是图中所示的微分，即 $d^2 : E^2_{3,\ 0} \to E^2_{1,1}$。此微分要么为零，要么是同构，因此$H_2(\mathrm{GL}_2(\mathrm{Z}); \mathrm{Z})$ 要么是 Z/2，要么是 0。我们可以通过考虑与之相关的梅耶–维托里斯序列排除后一种情况

$$\cdots \to H_2(D_4; \mathbb{Z}) \to H_2(D_8; \mathbb{Z}) \oplus H_2(D_{12}; \mathbb{Z}) \to H_2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) \to \cdots$$

的 amalgamated free product 分解[6]

$$GL_2(\mathbb{Z}) \cong D_8 *_{D_4} D_6.$$

由于 $H_2(D_4; Z) = Z/2$，$H_2(D_8) \oplus H_2(D_{12}) = Z/2 \oplus Z/2$，因此 $H_2(GL_2(Z); Z)$ 不可能为零。 ◂

最后，Soulé 已经完全计算出$GL_3(\mathbb{Z})$ 的整系数上同调 [Sou78，第 14]页。对于 $H_{3,\ 2}$，我们通过使用 $H^2(GL_3(Z); Z) = Z/2$ 和 $H^3(GL_3(Z); Z) = Z/2$，以及泛系数定理，得到该命题。■

引理 3.4。

(i) $\sigma\theta_1, Q^1(\sigma) \in H_{2,1}$ 均非零且彼此不同。*(ii)* $\sigma\theta_2, Q^2(\sigma) \in H_{2,2}$ 均非零且彼此不同。*(iii)* $\sigma\theta_1^2, \sigma Q^2(\sigma) \in H_{3,2}$ 均非零且彼此不同。特别是，$\theta_1^2 \in H_{2,2}$ 非零。*(iv)* $\sigma Q^1(\sigma) = \sigma^2\theta_1 \in H_{3,1}$，且二者均非零。*(v)* $\sigma\theta_2, \theta_1^2$和 $Q^2(\sigma) \in H_{2,2}$ 线性无关。

证明。设 $r_2 : H_{g,*} \to H_*(GL_g(F_2); F_2)$ 为模 2 约化映射，则 $r_2(Q^1(\sigma))$ $r_2(Q^2(\sigma))$ $r_2(\sigma Q^2(\sigma))$ 均非零（定理 2.6 和定理 2.13(i)）。因此 $Q^1(\sigma)$ $Q^2(\sigma)$ $\sigma Q^2(\sigma) \in H_{*,*}$ 均非零。现在证明引理的其余部分。

(i) $\sigma\theta_1$ 由矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 表示，而 $Q^1(\sigma)$ 由 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ 表示。因此

$$(\det \times \mu)(\sigma\theta_1) = (-1, 0) \quad \text{and} \quad (\det \times \mu)(Q^1(\sigma)) = (1, 0),$$

其中 行列式$\times\mu$： $H_{2,\ 1} \to \mathbb{Z}^\times \times \mathbb{Z}/2$ 是从 定理 3.3 中的同态。这表明 $\sigma\theta_1$ 非零，且 $\sigma\theta_1 \neq Q^1(\sigma)$。

(ii) 由于 $H_2(GL_1(F_2); F_2) = 0$，类 $r_2(\sigma\theta_2) = \sigma r_2(\theta_2)$ 为零，因此 $\sigma\theta_2 \neq Q^2(\sigma)$。为证明 $\sigma\theta_2$非零，我们将证明 $\sigma : H_{1,2} \to H_{2,2}$ 非零。根据泛系数定理，只需证明 Tor函子$(GL_1(Z)^{ab}, Z/2) \to$ Tor函子$(GL_2(Z)^{ab}, Z/2)$ 非零。根据定理 3.3 的证明，阿贝尔化上的映射将 $GL_1(Z)^{ab} \simeq Z/2$ 的生成元映至r，而 $GL_2(Z)^{ab}$ 是由 t 和 r 生成的 $Z/2 \times Z/2$。

(iii) 同样，$r_2(\theta_1^2) = 0$表明 $\sigma\theta_1^2 \neq \sigma Q^2(\sigma)$。为说明 $\sigma\theta_1^2$非零，考虑实三维表示 $\rho : GL_3(Z) \to GL_3(R)$，它就是包含映射。令 $H \simeq C_2 \times C_2$ 为 $GL_2(Z)$ 中由 $a_1 := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $a_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$生成的子群，并令 $i : H \to GL_2(Z) \to GL_3(Z)$。于是

$$i^*\rho \simeq (\text{sign} \boxtimes \text{triv}) \oplus (\text{triv} \boxtimes \text{sign}) \oplus (\text{triv} \boxtimes \text{triv}).$$

特别地，它的总斯蒂费尔-惠特尼类为

$$w(i^*\rho) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2,$$

其中 α_1，$\alpha_2 \in H^1(H; F_2)$ 是 a_1，$a_2 \in H_1(H; F_2) = H \otimes F_2$ 的对偶基。我们看到，$w_2(i^*\rho)$ 与 $\theta_1 \times \theta_1$ 的配对为 1，这意味着 $w_2(\rho)$ 与 $i_*(\theta_1 \times \theta_1) = \sigma\theta_1^2$ 的配对为 1。

(iv) 我们知道 $\dim H_{3,\ 1} = 1$，所以只需验证 $\sigma^2\theta_1 \neq 0$。确实，$\sigma^2\theta_1$ 由 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 表示，其行列式为 1。

(v) 给定一般的依赖关系方程 $\lambda_1\sigma\theta_2 + \lambda_2\theta_1^2 + \lambda_3 Q^2(\sigma) = 0$, $\lambda_i \in F_2$,，我们可以在其上计算 r_2，得到 $\lambda_3 = 0$。由于 $\sigma \times \theta_2 \in H_*(H; F_2)$ 与 $w_2(\rho)$ 的配对为零，因此有 $0 = \langle w_2(\rho)\ \lambda_1\sigma\theta_2 + \lambda_2\theta_1^2 \rangle = \lambda_2$。由于 $\sigma\theta_2$ 非零，$\lambda_1 = 0$ 也如此。■

4. Backgrounds

在§4.1和§4.2 中，我们建立了所采用的一般框架，并引入了一些记号。本部分主要是为了在技术层面上确保完整性。在§4.3 中，我们回顾经典的 Bar 与 cobar 构造，并定义作用于同伦类上的*Bar* 运算 $x\ x$，它本质上是Bar 对胞腔粘附映射的作用。本部分对于§5至关重要，该节将计算$\mathbb{F}_2$上的稳定性霍普夫代数。本节最后将说明$(-)$ 与$\mathbb{E}_n$-运算如何相互作用，并且 ——

[6]这一分解众所周知，参见例如 [BT16，第 6]节。也可以由上文所述的$GL_2(\mathbb{Z})$ 的表示得到。

在这一背景下建立一个赫urewicz定理，供后文使用。尽管如此，对计算感兴趣的读者可以直接阅读§6–7，并仅在需要时回看本节§5 。

4.1. 约定。我们在 [HA] 中建立的框架下工作。特别地，我们采用 $\mathbb{E}_n$-运算子的 Lurie 模型及其代数。我们的主要 $\mathbb{E}_\infty$-代数 $\mathrm{CGL} = \mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)$（定义见定理 4.1）属于分次 $\mathbb{F}_2$-模的（导出）范畴 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathrm{gr}} := \mathrm{Fun}(\mathbb{Z}, \mathcal{D}(\mathbb{F}_2))$。对于一个（离散）交换环 k， $\mathcal{D}(k)$ 是通过在 k-模链复形的 Hovey模型范畴中求逆拟同构而得到的稳定、可呈示对称幺半范畴 [HA, §1.3.5]。或者，也可以将 $\mathcal{D}(k)$ 视为 $\mathbb{E}_\infty$-环 Hk 上的模 [HA, 7.1.1.16]。这里，$\mathbb{Z}$ 表示一个 1-范畴，其对象由整数索引且没有非恒等态射，幺半结构由加法给出。Day 卷积（参见 [BS23, §3], [Nik16]）为 $\mathcal{D}(k)^{\mathrm{gr}}$ 赋予可呈示对称幺半结构。我们通常会为对称幺半范畴之间的函子范畴赋予 Day 卷积，而不特别说明。

4.1.1. **双分次同伦群**。 d球面在 $\mathcal{D}(k)$ 中， d 为整数，是 $S^d := \Sigma^d \mathbb{1}$，其中 $\mathbb{1}$ 是幺半单位。双分次球面 $S^{g,d}$ 在 $\mathcal{D}(k)^{\mathbb{Z}}, g, d \in \mathbb{Z}$ 中，在分次 g 上为 S^d，在其他分次上为零对象。对象 X 在 $\mathcal{D}(k)^{\mathbb{Z}}$ 中的双分次同伦群为 $\pi_{g,d}(X) := \pi_d(X(g)) = \pi_0 \mathrm{Map}(S^{g,d}, X)$。它计算链复形 $X(g)$ 的次数 d 同调。

4.1.2. 滤过对象。令 $\mathbb{Z}^{\leqslant}$ 表示带通常序关系的整数偏序集，并赋予由加法给出的对称幺半结构。对我们而言，滤过对象具有递增滤过，即它们是稳定且可呈对称幺半范畴 $\mathrm{Fil}(\mathcal{D}(k)^{\mathbb{Z}}) := \mathrm{Fun}(\mathbb{Z}^{\leqslant}, \mathcal{D}(k)^{\mathbb{Z}})$ 中的对象。滤过同伦群 $\pi_{g,d,f}(\widetilde{X})$ 的定义与 4.1.1 类似，使用滤过球面 $S^{g,d,f}$；它是 $S^{g,d}$ 的一个滤过，在低于 f 的滤过层级上为零，在高于该层级的滤过中等于 $S^{g,d}$，并且等于 f。

近年来合成谱领域的革命展现了将谱序列技巧编码为滤过对象语言所具有的计算能力，我们将广泛运用这一方法。适用于我们情形的滤过对象实用指南见 [RW25，§2.7]。若要进行更深入的分析，我们推荐阅读原文 [BHS22，附录 A]。我们将沿用 [RW25，§27], 中的设定，不过为方便起见，我们回顾一下 Bockstein 谱序列的指标约定。给定一个滤过对象 $\widetilde{X}$，可以提取出一个双重滤过对象 $\beta \otimes \widetilde{X}$，它是$\tau$在 $\widetilde{X}$上的“ τ-进滤过”，其中 -1置于滤过中。相应的谱序列具有如下形式

$$ {}^{\mathrm{BS}}E^1_{g,d,f,p} = {}^{\mathrm{BS}}E^1_{g,d,f,p}(\widetilde{X}) \cong \begin{cases} \tau^{-p}\pi_{g,d,f+p}(C\tau \otimes \widetilde{X}) & , p \leqslant 0 \\ 0 & , p > 0 \end{cases} \implies \pi_{g,d,f}(\widetilde{X}) $$

其微分为 ${}^{\mathrm{BS}}d^r\colon {}^{\mathrm{BS}}E^1_{g,d,f,p} \to {}^{\mathrm{BS}}E^1_{g,d-1,f,p-r}$。在这个 $k[\tau]$-模对 E^1-页的描述中， τ的滤过次数为 $(0, 0, 1, -1)$。我们将与 $\widetilde{X}$相关的谱序列记为 $\{E^r_{*,*,*}(\widetilde{X}) \ d^r\}_r$。Omnibus 定理 [BHS22，定理 9.19] 指出， $E^r(\widetilde{X})$ 中的一个 d^r-微分 $d^r(x) = y$对应于 ${}^{\mathrm{BS}}E^r(\widetilde{X})$ 中的一个微分 ${}^{\mathrm{BS}}d^r(x) = \tau^r y$。

4.1.3. 对角 t结构 [RW25, §2.8]。我们用 $\tau^{\mathrm{diag}}_{\leqslant 0}\colon \mathcal{D}(k)^{\mathbb{Z}} \to (\mathcal{D}(k)^{\mathbb{Z}})^{\heartsuit}$ 表示关于对角 t结构 t^{diag} 的截断函子。回顾一下， X是 t^{diag} 中的连通（分别为余连通）对象，当且仅当每个 $\Sigma^g X(g)$相对于$\mathcal{D}(k)$上的 Postnikov t结构都是连通（分别为余连通）的。此外， t^{diag}与幺半结构相容。限制在连通对象上时，$\tau^{\mathrm{diag}}_{\leqslant 0}$是强对称幺半的，因此其右伴随 ι是松的。当 k 是域时， ι 实际上是强对称幺半的 [RW25, Warning 2.4]。特别地， ι 将心中的 $\mathbb{E}_1$余代数映为连通对象中的 $\mathbb{E}_1$余代数。

4.2. $\mathbb{E}_\infty$**-代数及其性质**。对于交换环 R，存在一个自然数分次空间中的 $\mathbb{E}_\infty$-代数 $\mathrm{CGL}(R)$，其同伦类型是分类空间$B\,\mathrm{GL}_g(R)$的不交并。粗略来说，$\mathbb{E}_\infty$-结构由矩阵的分块直和诱导。我们将关注

其 $\mathbb{F}_2$-线性化版本 $\mathrm{CGL}(R)^{\mathbb{F}_2}$，它是通过应用 $\mathbb{F}_2$-链函子 $(-)^{\mathbb{F}_2}: \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_\infty}(\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_\infty}(\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}})$ 得到的。定理 4.1 给出了严格的构造；不过，为了理解 §6 和 §7 中的计算，建议读者先接受 $\mathrm{CGL}(R)^{\mathbb{F}_2}$ 的以下重要性质，并跳过正式定义。

(i) 交换环 $R \to S$ 之间的映射会诱导一个 $\mathbb{E}_\infty$-映射 $\mathrm{CGL}(R)_{\mathbb{F}_2} \to \mathrm{CGL}(S)^{\mathbb{F}_2}$。(ii) $\pi_{g,\,d}(\mathrm{CGL}(R)^{\mathbb{F}_2})$ 计算群同调 $H_d(\mathrm{GL}_g(R); \mathbb{F}_2)$。特别地，存在一个典范类 $\sigma \in \pi_{1,\,0}(\mathrm{CGL}(R)^{\mathbb{F}_2})$，即 H_0 的生成元。特别地，此类与 (i) 中的映射相容。(iii) 由乘以 σ 得到的余纤维的同伦群 $\pi_{g,\,d}(\mathrm{CGL}(R)^{\mathbb{F}_2}/\sigma)$ 计算相对同调群 $H_d(\mathrm{GL}_g(R),\ \mathrm{GL}_{g-1}(R); \mathbb{F}_2)$。

构造 4.1。给定一个对称幺半群群胚 $\mathcal{G}$，以及一个对称幺半群函子 $r: \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$，存在一个对称幺半群 $r_!: \mathrm{Fun}(\mathcal{G}, \mathcal{S}) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{Z}, \mathcal{S}) = \mathcal{S}^{\mathrm{gr}}$，它是沿 r [BS23，命题 3.6]作逐对象左 Kan 延拓所得。到终对象 $* \in \mathcal{S}$ 的常值函子 $*$ 带有典范的 $\mathbb{E}_\infty$- 代数结构。沿用 [GKRW18a, §16.1]，的记号，令

$$\mathrm{B}\mathcal{G} := r_!(\underline{*}) \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_\infty}(\mathcal{S}^{\mathbb{Z}})$$

是与 $(\mathcal{G}, r)$ 相关联的 $\mathbb{E}_\infty$-代数。对于每个 $\mathrm{Spec}(R)$ 连通的交换环 R，取秩定义了一个对称幺半函子，其定义域为对象是有限生成投射 R-模的对称幺半 1-群胚，陪域为整数。我们将 $\mathrm{CGL}(R)$ 定义为相应的分次空间中的 $\mathbb{E}_\infty$-代数。最后，令 $(-)^{\mathbb{F}_2}: \mathcal{S}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}$ 为 $\mathbb{F}_2$-链函子[7]。函子 $(-)^{\mathbb{F}_2}$是对称幺半的[8]，，特别地，它提升为 $\mathbb{E}_\infty$-代数之间的函子。由于本文只涉及 $\mathbb{F}_2$ 同调，从现在起，$\mathrm{CGL}(R)$ 表示 $\mathrm{CGL}(R)^{\mathbb{F}_2}$。

为了运用$\mathbb{E}_\infty$-代数的同调稳定性研究方法 [RW25]，，我们需要对代数作一些温和的假设。

- **连通代数**。我们称 $A \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_\infty}(\mathcal{D}(\mathrm{k})^{\mathbb{Z}})$ 是连通的，若 $\pi_{*,*}(A)$ 支持在 $\{(g,d) \mid g, d \geqslant 0\}$ 中，且单位 $\mathbb{1} \to R$ 在 $\pi_{0,0}$ 上是同构。特别地，连通代数具有典范的增广结构。

- **(SCE).** 增广 $\mathbb{E}_\infty$ 代数 $\epsilon: A \to \mathbb{1}$ 在 $\mathcal{D}(\mathrm{k})^{\mathbb{Z}}$ 上为 1 提供一个 R, R-双模结构。我们称 $\epsilon: A \to \mathbb{1}$ 满足标准连通性估计 *(SCE)*，如果 $\mathbb{1} \otimes_A \mathbb{1}$ 关于 t_{diag} 是连通的，即当 $d < g$ 时，$\pi_{g,d}(\mathbb{1} \otimes_R \mathbb{1}) = 0$。

我们将通过在 A上找到一个 $\mathbb{E}_\infty$-胞腔结构，来计算 $\mathbb{E}_\infty$-代数 A 上的 Bar 构造。给定$x \in \pi_{g,d}(A)$，我们将 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_\infty}(\mathcal{D}(\mathrm{k})^{\mathbb{Z}})$ 中 $\mathbb{E}_\infty(S^{g,d}\{x\}) \to A$ 的余纤维记作 $A//_{\mathbb{E}_\infty} x$。我们通常写作$A//^{g,d+1}_{\mathbb{E}_\infty} x$，以提醒自己所附着胞腔的维数。

4.3. **Bar 与 cobar**。对于 $0 < n \leqslant \infty$，存在一个伴随

$$\mathrm{Bar}: \mathrm{Alg}^{\mathrm{aug}}_{\mathbb{E}_n}\left(\mathcal{D}(\Bbbk)^{\mathbb{Z}}\right) \rightleftarrows \mathrm{Coalg}^{\mathrm{aug}}_{\mathbb{E}_1}\left(\mathrm{Alg}^{\mathrm{aug}}_{\mathbb{E}_{n-1}}\left(\mathcal{D}(\Bbbk)^{\mathbb{Z}}\right)\right): \mathrm{Cobar} \tag{4.2}$$

通过将 [HA, 5.2.2.19] 的 Bar-Cobar 伴随应用于增广的 $\mathbb{E}_{n-1}$-代数的对称幺半范畴，并结合 Dunn-Lurie 可加性 [HA, 4.8.5.20] 得到。我们的 n 大多会是 ∞，但在 §5 中，我们将研究对一般 $\mathbb{E}_n$- 运算应用 Bar 的影响 n。

为方便起见，我们有时将 Bar 的目标称为增广 $\mathbb{E}_{1,n-1}$-双代数。若一个增广 $\mathbb{E}_n$-代数 $\epsilon: A \to \mathbb{1}$ 的增广理想（即 ϵ 在分次 k-模中的纤维）具有

[7]设 k 为一个交换环。由于 $\mathcal{D}(\mathrm{k})$ 是可呈示对称幺半范畴，Day 卷积的泛性质表明，沿 Yoneda 限制会诱导出等价 $\mathrm{Fun}^{\otimes,L}(\mathcal{S}, \mathcal{D}(\mathrm{k})) \simeq \mathrm{Fun}^{\otimes}(*, \mathcal{D}(\mathrm{k}))$。令 $C_*(-; \mathrm{k})$ 为与右侧幺半单位对应的保余极限的对称幺半函子。注意，在对象 $(X_{\Bbbk})(n)$ 上，$= \mathrm{colim}_{X(n)} \mathrm{k}$.[8]by [BS23, 命题 3.3]。

同伦群支撑于 $\{(g,d) \mid g,d \geqslant 0\} \setminus \{(0,0)\}$，则称其为连通的。若一个增广双代数的增广理想的同伦群支撑于 $\{(g,d) \mid g,d \geqslant 0\} \setminus \{(0,0),(0,1)\}$，则称其为单连通。我们有时会用到下文回顾的 [RW25，命题 2.2][9]；这一结果的不同版本广为人知。

命题 4.3. 伴随（4.2）限制为连通增广的 $\mathbb{E}_n$-代数与单连通 $\mathbb{E}_{1,n-1}$-双代数的全子范畴之间的等价。■

4.3.1. Bar 运算。我们希望理解 Bar 构造对 E_n-胞腔结构的影响。下面的定理 4.6 概括了这一点：Bar 构造将沿同伦类 x 附着的 E_n-胞腔变为沿 x 附着的 E_{n-1}-胞腔。设 $n \geqslant 1$ 和 A 是一个增广的 E_n-代数，我们用 $\overline{A}$ 表示 A 的增广理想，即增广映射 $\epsilon\colon A \to \mathbb{1}$ 的纤维。于是 $A \cong \mathbb{1} \oplus \overline{A}$，我们可以将 A 的同伦群视为 $\mathbb{1}$ 同伦群的一个直和项。Bar A 的同伦类型可计算为一个单纯形图表的余极限：存在一个等价 $\mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} \overline{A}^{\otimes \bullet} \to \mathrm{Bar}\, A$，其关于 A 是函子的。这里 $\overline{A}^{\otimes \bullet}$ 是一个单纯对象，其内部面映射由乘法构造，外部面映射则由沿增广映射 ϵ 进行的塌缩给出。考虑截断图表的余极限：

$$\mathrm{sk}_i(A) := \mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}_{\leqslant i}} \overline{A}^{\otimes \bullet}, \quad i \geqslant 0. \tag{4.4}$$

显然，$\mathrm{sk}_0(A) = \mathbb{1}$。存在如下自然同一认定

$$\mathrm{sk}_1(A) \cong \mathbb{1} \oplus \Sigma \overline{A}$$

。具体如下。我们可以通过增广映射，将截断图表映射到取值为 1 的常值图表。由于 $\mathcal{D}(\mathbf{k})^{\mathbb{Z}}$ 稳定，在余极限上，它分裂为取值为 1 的常值图表的余极限与逐点纤维 $0 \to A$ 的余极限之和，其中 $0 \to A$ 是终对象。特别地，我们有如下映射

$$i_{\overline{A}} : \Sigma \overline{A} \hookrightarrow \mathbb{1} \oplus \Sigma \overline{A} \to \mathrm{Bar}\, A. \tag{4.5}$$

定义 4.6. 设 A 是一个增广的 E_n-代数，且 $x \in \pi_{g,d}(A)$，则在 x 上的 *Bar 运算* 为

$$\overline{x} := (i_{\overline{A}})_*(\Sigma x) \in \pi_{g,d+1}(\mathrm{Bar}\, A).$$

Bar 运算的以下另一种描述将在 §5 中使用。

引理 4.7. 设 A 和 x 如定理 4.6 中所述。那么，$\overline{x}$ 是 $\mathbb{E}_{n-1}$-代数中的同伦类[10]，它是任意 Bar 的代表元 $\mathbb{E}_n \mathbb{E}_n(\mathbb{S}^{g,d}) \to A$ 与 x 复合 $\mathbb{E}_{n-1}$-等价所得

$$\mathrm{Bar}(\mathbb{E}_n(-)) \cong \mathbb{E}_{n-1}(\Sigma -) \tag{4.8}$$

通过 *[HA, 5.2.2.13]*。例如，若 $A = \mathbb{E}_n(\mathbb{S}^{g,d}\{x\})$，那么 $\mathrm{Bar}(A) \cong \mathbb{E}_{n-1}(\mathbb{S}^{g,d+1}\{x\})$。

证明。由于这两种构造关于 A 都是自然的，我们可以假设 $A = \mathbb{E}_n(\mathbb{S}^{g,d}x)$。由于这两种运算都与遗忘部分 $\mathbb{E}_n$-结构相容，我们还可以进一步假设 $n = 1$。在这种情况下，我们用来构造 $\overline{x}$ 的等价（4.8）是以下映射的复合

$$\mathbb{1} \sqcup_{\mathbb{S}^{g,d}\{x\}} \mathbb{1} \to \mathbb{1} \sqcup_A \mathbb{1} \to \mathrm{Bar}\, A, \tag{4.9}$$

其中第一个映射由自由-遗忘伴随的单位 $\mathbb{S}^{g,d}\{x\} \to A$ 诱导，第二个映射是 i_A（[HA, 5.2.2.14]）。我们可以将 $\mathbb{E}_1$ 的代表元取为 $x \in \pi_{*,*}(A)$ 恒等映射，因此两个 $i_{A*}(x)$ 和 x 都由上面的（4.9）表示。■

Bar 运算的一个关键性质是它会消去可分解元：

引理 4.10。 设 A 和 x 如上所述。若 x 经过乘法映射 $A \otimes A \to A$ 分解，则 $\overline{x} = \overline{0}$。

[9] 所引用的结果是 $n = 1$ 情形。但由于连通性和单连通性都是底层对象上的性质，伴随确实限制在所声称的子范畴上。我们只需检查单位和余单位是等价。再次，这些可以在底层对象上检查。

[10] 这里我们使用了由 E_{n-1}-代数的自由-遗忘伴随所提供的同一认定 $\pi_{g,d+1}(-) = \pi_0$ 映射 $^{\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_{n-1}}}(\mathrm{E}_{n-1}(\mathrm{S}^{g,d+1}) -)$。

证明。令 $\overline{\mathrm{sk}_i(A)}$ 表示自然分裂 $\mathrm{sk}_i(A) = \mathbb{1} \oplus \mathrm{sk}_i(A)$ 中的直和项，并令 $F\overline{表示\ \mathrm{sk}_1}(A) \to \mathrm{sk}_2(A)$ 的纤维。我们将在后面的定理 5.8 中看到，映射 $F \to \overline{\mathrm{sk}_1}(A)$ 等价于乘法 $A^{\otimes 2} \to \overline{A}$。由于 i_A 经过 $\mathrm{sk}_1(A) \to \mathrm{sk}_2(A)$ 分解，结论得证。■–

现在我们来说明如何让 Bar 运算“越过”E$_n$-运算进行交换。 $\mathcal{D}(\mathrm{F}_2)^{\mathbb{Z}}$, $n \geqslant 1$ 中 E$_n$-代数的同伦群带有一系列自然运算（Dyer-Lashof 运算），

$$Q_s^{\mathbb{E}_n} : \pi_{*,*}(-) \Rightarrow \pi_{2*,2*+s}(-), \quad 0 \leqslant s < n$$

始于 $Q_0^{\mathbb{E}_n}(x) = x^2$。当 $n < \infty$ 时，还有 Browder 括号

$$\lambda_{\mathbb{E}_n} := [-,-]_{\mathbb{E}_k} : \pi_{*,*}(-) \otimes \pi_{*',*'}(-) \Rightarrow \pi_{*+*',*+*'+n-1}(-)$$

定理 4.11. 设 $A \in$ 代数$^{\mathrm{aug}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}})$, $n \geqslant 2$. 则[11]

> *(i)* 对每个 $x \in \pi_{*,*}(\overline{A})$, $\overline{Q_s^{\mathbb{E}_n}(x)} = Q_{s-1}^{\mathbb{E}_{n-1}}(x) \in \pi_{*,*}(\mathrm{Bar}\, A)$，对每个 $0 \leqslant s < n$ 均有。其中包括顶层运算 $Q_{n-1}^{\mathbb{E}_n}$，通常记作 ξ。我们令 $Q_{-1}^{\mathbb{E}_{n-1}}$为零。*(ii)* 对于一对类 $a, b \in \pi_{*,*}(\overline{A})$, $[a,b]_{\mathbb{E}_n} = [a,b]_{\mathbb{E}_{n-1}} \in \pi_{*,*}(\mathrm{Bar}\ A)$。注意，$E_1$-括号就是交换子： $[x,y]_{\mathbb{E}_1} = xy - yx$ *[CLM76，第125页，定理 1.2 (2)]*。

证明。 根据自然性，只需考虑以下情形

(i) $A = \mathrm{E}_n(\mathrm{S}^{g,\,d}x)$，其中 g， d为任意整数；(ii) $A = \mathrm{E}_n(\mathrm{S}^{g,\,d}a \oplus \mathrm{S}^{g',\,d'}b)$，其中 g， g'， d， d'为任意整数。

(i) $s = 0$ 部分是定理 4.10的特殊情形，因此我们可以假设 。首先假设。由于 $\mathrm{BarE}(\mathrm{S},\ ^{d+1}a)$，类 $Q_{s-1}^{\mathbb{E}_{n-1}}(a)$ 非零，并张成 $\pi_{2g,\ 2d+s+1}(\mathrm{Bar}\ \overline{A})$。因此我们只需证明$y$，即$y \cdot\cdot = Q_s^{\mathbb{E}_n}(a)$ 也非零；又由于 $\overline{y} \in \pi_{g,\ 2d+s}(A)$ 非零，只需证明 $\pi_{g,\ 2d+s+1}(i_A)$ 是单射。考虑余纤维序列

$$\mathrm{sk}_i(A) \to \mathrm{sk}_{i+1}(A) \to \Sigma^{i+1}\overline{A}^{\otimes i+1}$$

对于 $i \geqslant 0$。当 $g > 0$ （分别地， $g < 0$）时， $\Sigma^{i+1}A^{\otimes i+1}$ 在分次 $\geqslant (i+1)g$ （分别地， $\leqslant (i+1)g$）中有支撑。特别地，当 $i \geqslant 2$ 时，sk_i（A） $\to \mathrm{sk}_{i+1}$（A）在分次 $2g$ 中是一个等价。另一方面，$\pi_{2g,\ *}(\Sigma^2 A)$ 集中在次数 $2d+2$ 上，是一维的，而边界映射

$$\pi_{2g,2d+2}(\Sigma^2\overline{A}) \to \pi_{2g,2d+1}(\mathrm{sk}_1(A)) = \mathbb{F}_2$$

是满射 由长正合列以及 $\pi_{2g,\ 2d+1}(\mathrm{sk}_2(A)) = \pi_{2g,\ 2d+1}(\mathrm{Bar}\, A) = 0$ 这一事实可知。因此实际上 $\pi_{2g,D}(\mathrm{sk}_1$ （A） $\to \mathrm{sk}_2$（A））对 $D \geqslant 2d+2$ 是一个同构。我们总有 $2d+s+1 \geqslant 2d+2$。

情形 $g = 0$ 可由情形 $g \neq 0$ 通过群胚变换技巧得到：任取 $g' \neq 0$ 并取$A' = \mathrm{E}_n(\mathrm{S}^{g',d}x)$。那么， A 等价于沿对称幺半函子复合 $f : \mathrm{Z} \to \{0\} \hookrightarrow \mathrm{Z}$ 左 Kan 延拓 A'。由于定义域群胚和目标群胚都没有非恒等态射，左 Kan 延拓的同伦群有一个自然分解

$$\pi_{h,d}(f_!-) = \bigoplus_{\substack{g\in\mathbb{Z}\\ f(g)=h}} \pi_{g,d}(-)$$

该分解在 Dyer–Lashof运算和 bar 运算下保持不变。

(ii) 可由 (i) 以及如下事实推出：最高阶 Dyer–Lashof 运算在线性意义上成立，除 Browder 括号项外[GKRW18a，16.2.2 (d)]。也就是说，对于 $A = \mathrm{E}_n(\mathrm{S}^{g,d}a \oplus \mathrm{S}^{g',d'}b)$，我们有

$$\begin{aligned} Q_{n-1}^{\mathbb{E}_{n-1}}(\overline{a}) + Q_{n-1}^{\mathbb{E}_{n-1}}(\overline{b}) + [\overline{a},\overline{b}]_{\mathbb{E}_{n-1}} &= Q_{n-1}^{\mathbb{E}_{n-1}}(\overline{a}+\overline{b}) \\ &= \overline{Q_n^{\mathbb{E}_n}(a+b)} \\ &= \overline{Q_n^{\mathbb{E}_n}(a) + Q_n^{\mathbb{E}_n}(b) + [a,b]_{\mathbb{E}_n}} \\ &= Q_{n-1}^{\mathbb{E}_{n-1}}(\overline{a}) + Q_{n-1}^{\mathbb{E}_{n-1}}(\overline{b}) + \overline{[a,b]_{\mathbb{E}_n}}. \end{aligned}$$

[11]在 F$_2$ 上，低指标的 Dyer-Lashof 运算与高指标运算之间满足公式 $Q_s(x) = Q^{|x|+s}(x)$。

■

4.3.2. **一个赫urewicz定理**。在这一部分，我们在自己的框架中建立赫urewicz定理[12]。令 $R \to S$为连通$\mathbb{E}_n$-代数在 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{gr}$, $n \geqslant 1$。令

$$i_{S,R} : \Sigma S/R \to \mathrm{Bar}(S)/\mathrm{Bar}(R)$$

表示由下列映射诱导的余纤维上的映射 i_R, i_S（4.5）的。下面的引理是 [GKRW18a，推论 11.12] 的对应结果。

定理 4.12。在上述情形下，对于整数 g, d，若 $\pi_{g',\,d'}(S,R) = 0$ 当 $g' \leqslant g, d' \leqslant d$ 时，以及 $(g',d') \neq (g,d)$，则

$$\pi_{g,i+1}(i_{S,R}) : \pi_{g,i+1}(\Sigma S, \Sigma R) \cong \pi_{g,i}(R,S) \to \pi_{g,i+1}(\mathrm{Bar}(S), \mathrm{Bar}(R))$$

当 $i = d$ 时是同构，当 $i = d+1$ 时是满射 .

证明。令 C_i 表示余纤维 $\mathrm{sk}_i(S)/\mathrm{sk}_i(R)$，则存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{sk}_{i-1}(R) & \longrightarrow & \mathrm{sk}_i(R) & \longrightarrow & \Sigma^i \overline{R}^{\otimes i} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{sk}_{i-1}(S) & \longrightarrow & \mathrm{sk}_i(S) & \longrightarrow & \Sigma^i \overline{S}^{\otimes i} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C_{i-1} & \longrightarrow & C_i & \longrightarrow & \Sigma^i (\overline{S}/\overline{R})^{\otimes i}
\end{array}$$

其中所有行和列都是余纤维序列。由于 $C_1 \simeq \mathbb{1} \oplus \Sigma(S/R)$且 $\mathrm{colim}_i C_i = \overline{\mathrm{Bar}}(S)/\overline{\mathrm{Bar}}(R)$，只需验证

* $\pi_{g,*}(C_{i-1} \to C_i)$ is an isomorphism for $i > 2$, $* \leqslant d+1$;
* $\pi_{g,*}(C_1 \to C_2)$ is an isomorphism when $* < d+2$ and an epimorphism when $* = d+2$.

由于 $\pi_{0,\,*}(\overline{R}) = \pi_{0,\,*}(\overline{S}) = 0$，在 $\pi_{*,\,0}$ 处计算最右侧的余纤维序列时，所有项都消失。根据假设$\pi_{<g,\,\leqslant d}(S/R) = 0$，因此由 Künneth 定理，$\pi_{<g+i-1,\,\leqslant d+i}(\Sigma^i (S/R)^{\otimes i}) = 0$。■

推论 4.13。在 定理 4.12的情形下：

(i) If $\pi_{g',d'}(S,R) = 0$ whenever $g' \leqslant g, d' \leqslant d$, then $\pi_{j,i}(\mathrm{Bar}(S), \mathrm{Bar}(R)) = 0$ whenever $j \leqslant g$, $i \leqslant d+1$.
(ii) If $R \to S$ is (g,d)-connected, then $\mathrm{Bar}(R \to S)$ is $(g, d+1)$-connected.

■

5. 计算稳定性 Hopf 代数的工具

设 $\mathcal{G}$ 是一个对称幺半群群胚，且 $r : \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ 是一个对称幺半函子，定理 4.1将这些数据关联到一个分次 $\mathbb{E}_\infty$-代数 $A := \mathrm{B}\mathcal{G}_{\mathbb{F}_2}$，其取值于分次 $\mathbb{F}_2$-模。根据[RW25] 的观点，若 A 连通且满足标准的连通性估计，那么

$$\begin{array}{c}\text{homological stability of } (\mathcal{G}, r) \\ \text{with coefficients in } \mathbb{F}_2\end{array} \approx \begin{array}{c}\text{vanishing lines of iterated cofibres} \\ \text{of the form } A/\alpha_1, \cdots, \alpha_r\end{array} \tag{5.1}$$

其中每个 α_i都是 A/α_1的自映射，……，α_{i-1}。在这一观点下，斜率为< 1 的 R的稳定性信息，可以通过离散 Hopf 代数 Δ_A检测。

定义 5.2 ([RW25])。设 $n > 0$ 和 A 一个满足 (SCE) 的连通$\mathbb{E}_n$-代数，位于 $\mathcal{D}(\Bbbk)^{\mathbb{Z}}$ 中。那么，稳定性霍普夫代数的 A 是 t（相对于对角Bar A的余连通截断：

$$\Delta_A := \tau^{\mathrm{diag}}_{\leqslant 0} \mathrm{Bar}\, A \in \mathrm{Coalg}^{\mathrm{aug}}_{\mathbb{E}_1}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{aug}}_{\mathbb{E}_{n-1}}((\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}})^{\heartsuit}).$$

[12]我们没有直接引用 [GKRW18a，推论 11。12]，是因为我们关注于比较 Bar 构造与 $\mathbb{E}_1$-不可分解元的模型。文中引用的 Hurewicz 映射是从代数到其导出 $\mathbb{E}_1$-不可分解元的映射，因此我们还需要使用 [GKRW18a，定理 13。7] 将不可分解元与一次去悬挂的 Bar 构造联系起来。尽管我们相信这两个 Bar 构造是一致的，但这一点并不十分明确。

当 $n \geqslant 2$ 时，我们将 Δ_A 视为 $\bigoplus_{n\geqslant 0} \pi_n$ 上具有正分次、连通霍普夫代数结构的对象，$_n(\mathrm{Bar}\ A)$。当 $n > 2$ 时，这是交换的。当 $n = 1$ 时，Δ_A 只是一个余代数。

对截断映射 $\mathrm{Bar}\, A \to \Delta_A$ 应用 Cobar，可得到一个 E$_n$-映射

$$t_A : A \cong \mathrm{Cobar}(\mathrm{Bar}\, A) \to a := \mathrm{Cobar}(\Delta_A). \tag{5.3}$$

[RW25、定理 7.1、定理 8.2 和命题 8.5]告诉我们如何利用映射 A 在 Δ_A 与 t_A之间传递稳定性信息。以下定理汇总了之后将用到的这些结果的特例。

定理 5.4（[RW25]）。我们称映射 $A \to A'$（从 $\mathbb{E}_\infty$-代数到 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)$）以及常数 $\theta > 0$ 满足性质（*5.5*），如果对每个 A-模 M，$0 < \lambda \leqslant \theta$以及任意常数 μ，

$$\pi_{g,d}(M) = 0 \quad \textit{for } d < \lambda g + \mu \iff \pi_{g,d}(M \otimes_A A') \quad \textit{for } d < \lambda g + \mu.$$

(i) 设 A 是一个满足（*SCE*）的连通$\mathbb{E}_\infty$-代数，属于 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)$。那么 t_A： $A \to a$ 满足（*5.5*），其中 $\theta = 1$。*(ii)* 设 $A \to B$ 是一个从 $\mathbb{F}_2$ 上的连通分次霍普夫代数出发的映射。

(a) 若 $A \to B$是满射，且其核集中在分次 $\geqslant N$，则Cobar$(A) \to$Cobar(B)满足 *(5.5)*，其中 $\theta = \frac{N-1}{N}$。*(b)* 若$A \to B$是单射，且其余核集中在分次 $\geqslant N$，则Cobar$(A) \to$Cobar(B)满足 *(5.5)*，其中 $\theta = \frac{N-2}{N}$。

本节的结论是以下用于计算定理 5.6的部分操作指南：Δ_A 根据$\mathbb{E}_n$-胞腔结构计算 A。也就是说，我们借助粘附映射上的 Bar 运算（定理 4.6），描述粘附一个胞腔如何改变稳定性霍普夫代数。陈述中出现的 -构造将在下文立即作非正式说明；其精确定义需要一些工作，将在 §5.1中给出。

定理 5.6。设 $n \geqslant 2$, A 是满足 *(SCE)* 的连通增广$\mathbb{E}_n$-代数，定义在 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}$ 上。设 $x \in \pi_{g,d}(A)$是一个同伦类，并令 $A' := A//^{g}_{,d+1\ \mathbb{E}_n}\ ^{x}$ 由沿 x 粘附一个$\mathbb{E}_n$-胞腔而成。假设 $d \geqslant g - 2 > 0$，使得 $A' := A//^{g}_{,d+1\ \mathbb{E}_n}\ ^{x}$ 也满足 *(SCE)*，则：

(i) 当 $d > g$ 时，自然映射 $A \to A'$ 诱导霍普夫代数的同构 $\Delta_A \to \Delta_{A'}$。*(ii)* 当 $d + 1 = g$ 时，$\Delta_A \to \Delta_{A'}$ 实现 $\Delta_{A'}$ 为商代数 $\Delta_A/(x)$。*(iii)* 假设 *Suppose* $d + 2 = g$ 和 $\overline{x = 0}$。设 μ_A： $A \otimes A$ 为 A 上的乘法 . 给定一个形如 m

$$x = (\mu_A)_*(q(x)), \quad q(x) = \sum_i a_i \otimes b_i$$

其双次数为 $|a_i| = (g_i, d_i)$ 和 $|b_i| = (g'_i, d'_i)$，且满足 $d_i + 1 = g_i > 0$ 和 $d'_i + 1 = g'_i > 0$ 的表达式，则存在一个相应的映射同伦类

$$[q(x)] : \Sigma\Sigma\mathbb{S}^{g,d} \to \mathrm{Bar}(A')$$

诱导出$\mathbb{E}_{n-1}$-代数的等价

$$\mathrm{Bar}(A) \sqcup^{\mathbb{E}_{n-1}} \mathbb{E}_{n-1}(\mathbb{S}^{g,d+2}\{[q(x)]\}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Bar}(A').$$

特别地，如果我们将 $[q(x)]$ 视为 $\Delta_{A'}$ 中分次为 g的一个元素，那么

$$\Delta_A * \mathbb{F}_2\langle [q(x)]\rangle \to \Delta_{A'} \qquad \textit{if } n = 2$$
$$\Delta_A \otimes \mathbb{F}_2[[q(x)]] \to \Delta_{A'} \qquad \textit{if } n > 2$$

是霍普夫代数的同构。这里，$*$ 表示结合 $\mathbb{F}_2$ 代数的自由积，而 $\otimes$ 表示交换的 $\mathbb{F}_2$ 代数的张量积。在这两种情况下，$[q(x)]$ 的余乘法为

$$\psi([q(x)]) = 1 \otimes [q(x)] + [q(x)] \otimes 1 + \sum_i \overline{a_i} \otimes \overline{b_i}.$$

如果 $q(x)$ 具有 $a \otimes b$ 的形式，那么我们将 $[a \mid b]$ 记作 $[q(x)]$。

粗略地说，分解 $q(x)$ 为 x 在 $\mathrm{Bar}(A)$ 中为零，进而在 $\mathrm{Bar}(A')$ 中为零提供了一个理由。另一方面，我们附加的胞腔为 x 在 A'中为零提供了一个理由，从而也为 x 在 $\mathrm{Bar}(A')$ 中为零提供了另一个理由。通过粘合这两个零同伦，我们得到 $[q(x)]$。

5.1. $[-]$构造。设 A 是一个连通（因而具有典范增广映射）的 E_n 代数 A，属于$\mathcal{D}(\mathrm{F}_2)^{\mathbb{Z}}$，且满足 (SCE)。我们用 $\overline{A}$ 表示 A 的增广理想，并将π_*、$_*(A)$视为π_*、$_*(A)$中由在增广映射下映为零的那些上同调类构成的直和项。固定 $\mathrm{E}_1 \hookrightarrow \mathrm{E}_n$二元运算空间中的一个点，并令 $\mu_A\colon\ A\otimes A\to A$ 为该点所确定的乘法 [HA, 5.3.3.1]。令$\mu_{\overline{A}}\colon\ \overline{A}\otimes A\to A$ 为利用由$A\cong \mathbb{1}\oplus A$诱导的 $A\otimes A$ 分解对 μ_A 作出的限制。由于 μ_A 关于 A是函子性的，$\mu_{\overline{A}}$也如此。

定义5.7。一个类$x\in \pi_{g,d}(A)$的分解 $q(x)$，是 $\mathcal{E}$ 中的一个分解：将 x的一个代表元经由$\mu_{\overline{A}}$分解。也就是说，它由如下图表的数据构成

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^{g,d} & \longrightarrow & \overline{A}\otimes\overline{A} & \xrightarrow{\mu_{\overline{A}}} & \overline{A} \\ & \searrow^{x} & & \nearrow & \end{array}$$

在 $\mathcal{D}(\mathrm{F}_2)^{\mathbb{Z}}$ 中。我们也将映射 $\mathrm{S}^{g,d}\to A\otimes A$ 记作 $q(x)$。

由于 $\mathrm{Bar}(-)$“在位移意义下等同于 E_1-不可分解元”，它应当消去所有可分解元。事实上，下面的引理给出了一个零伦

$$\Sigma\overline{A}^{\otimes 2}\xrightarrow{\Sigma\mu_{\overline{A}}}\Sigma\overline{A}\to \mathrm{Bar}(A),$$

关于 A函子性。如 §4.3.1中所述，我们记 $\mathrm{sk}_i(A)=\mathrm{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}_{\leqslant i}}A^{\otimes i}$，并记$\overline{\mathrm{sk}_i(A)}=\mathrm{cofib}(\mathbb{1}\to \mathrm{sk}_i(A))$

引理5.8. 令 F 表示 $\mathrm{sk}_1(A)\to \mathrm{sk}_2(A)$ 的纤维。那么映射 $F\to \mathrm{sk}_1(A)$ 等价于悬挂乘法 $\Sigma\mu_{\overline{A}}\colon \Sigma\overline{A}^{\otimes 2}\to\Sigma A$。

定义5.9. 令 $\varepsilon_{\mathrm{can}.A}$ 表示 $i_A\Sigma\mu_{\overline{A}}\colon \Sigma A\otimes A\to \mathrm{Bar}(A)$ 的零伦，它由将来自纤维序列的 $\Sigma\overline{A}^{\otimes 2}\to sk_2(A)$ 的零伦与映射 $\mathrm{sk}_2(A)\to \overline{\mathrm{Bar}}(A)$ 复合而得。给定一个分解 $q(x)$,

$$\varepsilon_{q(x)}:=\Sigma q(x).\varepsilon_{\mathrm{can}.A} \tag{5.10}$$

是 $x\colon \Sigma\mathrm{S}^{g,\ d}\to \mathrm{Bar}\,A$的零伦。

定理 的定理 5.8证明。令 $\iota\colon\ \Delta^{\mathrm{op}}_{\leqslant 1}\hookrightarrow\Delta^{\mathrm{op}}_{\leqslant 2}$ 表示包含，$D_i\colon\ \Delta^{\mathrm{op}}_{\leqslant i}\to \mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}$ 表示通过在截断单纯形图表 $A^{\otimes\bullet}$中拆出单位所得到的图表。于是 $\mathrm{sk}_1(A)\ \cong$ 余极限$D_1\ \cong$余极限$\iota_!D_1$，而图表映射 $\iota_!D_1\to D_2$ 如下所述。

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leftleftarrows & \overline{R} & \lhd\!\!\lhd & (\mathbb{1}\otimes\overline{R})\ \oplus(\overline{R}\otimes\mathbb{1}) \\ \| & & \| & & \downarrow \\ 0 & \leftleftarrows & \overline{R} & \xleftarrow{(*)} & (\mathbb{1}\otimes\overline{R})\ \oplus(\overline{R}\otimes\mathbb{1})\ \oplus(\overline{R}\otimes\overline{R}) \end{array}$$

顶行中的三个面映射 $(\mathbb{1}\otimes R)\ \oplus(R\otimes\mathbb{1})\to R$ 分别是投影到第一因子、零映射和投影到第二因子；而退化映射 $R\to(\mathbb{1}\otimes R)\ \oplus(R\otimes 1)$ 则是包含到第一因子和第二因子。在底行中，第二列里未标记的面映射和退化映射仍由包含和投影给出。映射 $(*)$ 是先投影到 $R\otimes R$ 直和项，再进行乘法。最右侧的垂直映射是直和项的包含。由于 $\mathcal{D}(\mathrm{F}_2)^{\mathbb{Z}}$ 是稳定的，F 可计算为逐点纤维 $D_1\to D_2$的余极限。■

现在我们可以描述 $[-]$-构造了。

构造 5.11. 由于 $\mathrm{Bar} : \mathrm{Alg}^{\mathrm{aug}}{}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{aug}}{}_{\mathbb{E}_{n-1}}(\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}})$ 是一个左伴随，它将定义 A' 的胞腔附着推出方块映射为一个推出方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_{n-1}(\Sigma\mathbb{S}^{g,d}) & \longrightarrow & \mathrm{Bar}\, A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}_{n-1}(0) & \longrightarrow & \mathrm{Bar}(A') \end{array} \tag{5.12}$$

在（增广的）E_{n-1}-代数中。特别地，它伴随于一个方形

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\mathbb{S}^{g,d} & \xrightarrow{\overline{x}} & \mathrm{Bar}\, A \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Bar}(A') \end{array} \tag{5.13}$$

在 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}$。通过将（5.13）与$\epsilon_{q(x)}$ 沿着 x粘合，我们得到如下 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \Sigma\mathbb{S}^{g,d} & & \xrightarrow{\overline{x}} & & \mathrm{Bar}\, A \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & \longrightarrow & & \mathrm{Bar}(A') \end{array} \tag{5.14}$$

Let

$$[q(x)] : \Sigma\Sigma\mathbb{S}^{g,d} \to \mathrm{Bar}(A')$$

是 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}$ 中由对 $0 \leftarrow \Sigma\mathbb{S}^{g}{}_{\text{取余极限}}{}^{d} \to 0$所得的映射，它是（5.14）的

例 5.15. 假设 $A = \mathrm{E}_1(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{S}^{g_i,\ d_i}\{a_i\} \oplus \mathrm{S}^{g_i',\ d_i'}\{b_i\})$ 满足 $d_i = g_i - 1 > 0$、$d_i' = g_i' - 1 > 0$ 和 $g_i + g_i' = g_1 + g_1'$。若 x由 $q(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \otimes b_i$确定，则 $\mathrm{Bar}(A') = \Delta_{A'}$，其底层向量空间为 $\mathrm{F}_2\{1\} \oplus \mathrm{F}_2\{\{a_i,\ b_i\}_i\} \oplus \mathrm{F}_2\{\overline{[q(x)]}\}$，并且

断言。 $[q(x)] \in \Delta_{A'}$ 的约化余乘为 $\sum_{i=1}^{k} a_i \otimes b_i$。 — —

断言的证明。 通过分次变换，也就是说沿对称幺半函子$+ : \mathrm{Z} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ 作左 Kan 延拓，我们可以假设

$$A = \mathbb{E}_1(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{S}^{g_i,d_i,0}\{a_i\} \oplus \mathbb{S}^{g_i',0,d_i'}\{b_i\})$$

实际上是双分次的。因此，出于分次的原因，$q[x]$ 的余乘法具有如下形式

$$\psi([q(x)]) = 1 \otimes [q(x)] + [q(x)] \otimes 1 + \sum_{i,j} \lambda_{ij} \overline{a_i} \otimes \overline{b_j}, \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{F}_2.$$

关键的认识是，这个余乘法对应于 $\mathrm{Cobar}(\Delta_{A'})$ 的同伦群中的一个关系。而由于 $\mathrm{Bar}\, A'$ 对我们的 A' 是对角余连通的，根据 定理 4.3 ，映射 $A' \to \mathrm{Cobar}(\Delta_{A'})$是一个等价，因此可以在 A'上检验这个关系。更确切地说，同伦群

$$\pi_{g,d,d'}(\mathrm{Cobar}(\Delta_{A'})) = \mathrm{Cotor}^{g-d,g-d'}_{\Delta_{A'}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)(g)$$

可以利用余代数 $\Delta_{A'}$ 的余 bar 复形来计算。由于 $a_i,\ b_i \in \Delta_{A'}$ 是本原元，它们在 $\mathrm{Cobar}(\Delta_{A'})$ 的同伦群中定义了类 $[\overline{a_i}],\ [b_i]$，在等价 $A' \cong \mathrm{Cobar}(\Delta_{A'})$ 下对应于 $a_i,\ b_i$。余乘法 $\psi([q(x)])$ 在$\pi_{g_1+g_1',\ d_1,\ d_1'}(\mathrm{Cobar}(\Delta_{A'}))$ 中给出了关系 $\sum_{i,\ j} \lambda_{ij}[a_i][b_i] = 0$，因此 $\sum_{i,\ j} \lambda_{ij} a_i b_j = 0$ 属于 $\pi_{g_1+\overline{g_1'},\ d_1,\ d_1'}(A')$。但我们知道，在这个三重次数中，唯一的非平凡关系就是关系 $x = 0$。

◂

5.2. **截断函子的形式性质**。 我们将在下面的主定理证明中用到定理 5.19 。令 $\mathcal{E} \coloneqq \mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}$。首先回顾

引理 5.16。 *[HA, 2.2.1.9 (i)]* 对 τ^{diag} 对角连通对象的限制 $\tau^{\mathrm{diag}}_{\leqslant 0} :\ \mathcal{E}_{\geqslant 0} \to \mathcal{E}^{\heartsuit}$ 是包含的左伴随。特别地，它保留余极限。 ■

由于 $\tau_{\leqslant 0}^{\mathrm{diag}}$ 是强对称幺半的，而包含 $\iota\colon \mathcal{E}^{\heartsuit} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\geqslant 0}$ 是松的，因此它们都将代数映射提升为代数之间的映射；有时，为了与底层对象上的对应映射区分，给它们另取名称会比较方便，例如 $\bar{\tau}_{\leqslant 0}^{\mathrm{diag}}$ 和 $\bar{\iota}$。

Lemma 5.17. $\bar{\tau}_{\leqslant 0}^{\mathrm{diag}} : \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_{n-1}}(\mathcal{E}_{\geqslant 0}) \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_{n-1}}(\mathcal{E}^{\heartsuit})$ *is the left adjoint of* $\bar{\iota}$.

证明。 为简化记号，记 $\tau_{\leqslant 0}^{\mathrm{diag}}$ 为 τ，并暂时将-Alg 记作 $\mathrm{Alg}^{\mathbb{E}_{n-1}}$。令 $\alpha : \mathrm{id}_{\mathcal{E}_{\geqslant 0}} \Rightarrow \iota\tau$ 为 定理 5.16中的伴随 [HA，2.2.1.9(i)] α 提升为自然变换 $\alpha : \mathrm{id}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{E}_{\geqslant 0})} \Rightarrow \bar{\iota}\bar{\tau}$，其中现在 $\bar{\iota}$ 和 $\bar{\tau}$ 是代数的诱导函子。我们需要检查对于每个 $A \in \mathrm{Alg}(\mathcal{E}_{\geqslant 0})$、 $B \in \mathrm{Alg}(\mathcal{E}^{\heartsuit})$,

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{E}^{\heartsuit})}(\bar{\tau}A, B) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{E}_{\geqslant 0})}(\bar{\iota}\bar{\tau}A, \bar{\iota}B) \xrightarrow{-\circ\alpha_A} \mathrm{Map}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{E}_{\geqslant 0})}(A, \bar{\iota}B) \tag{5.18}$$

是一个等价。我们将需要

断言。 如果 $\mathbb{E}_{n-1}^{\heartsuit}$ 表示心中的自由 $\mathbb{E}_{n-1}$ 代数函子（即，当 $n > 2$ 时为对称幂，当 $n = 2$时为张量幂），那么函子 $\mathcal{E}_{\geqslant 0} \to \mathrm{Alg}(\mathcal{E}^{\heartsuit})$ 的自然变换 $\mathbb{E}_{n-1}^{\heartsuit}\tau \Rightarrow \tau\mathbb{E}_{n-1}$ 是一个等价。

断言的证明。 对于对象 τ，只需取对角同伦群。结论由自由代数的同伦群描述得出。◂

假设 $A = \mathbb{E}_{n-1}(X)$ 是一个自由代数，那么由于 α 是定理 5.16中伴随的单位，映射（5.18）等价于由伴随诱导的映射空间之间以下一系列等价的复合。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{E}^{\heartsuit})}(\bar{\tau}A, B) &\cong \mathrm{Map}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{E}^{\heartsuit})}(\mathbb{E}_{n-1}^{\heartsuit}(\tau X), B) && \text{根据断言} \\
&\cong \mathrm{Map}_{\mathcal{E}^{\heartsuit}}(\tau X, B) \\
&\cong \mathrm{Map}_{\mathcal{E}_{\geqslant 0}}(X, \iota B) && \text{根据 定理 5.16} \\
&\cong \mathrm{Map}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{E}_{\geqslant 0})}(R, \bar{\iota}B).
\end{aligned}$$

对于一般的 A，我们可以使用由 $\mathrm{Bar}(\mathbb{E}_{n-1}, \mathbb{E}_{n-1}, -)$ 中的自由代数构成的单纯形分解 $\mathcal{E}_{\geqslant 0}$。这将（5.18）实现为一个单纯形空间映射的余极限，其中该图表映射中的每条边都是等价。

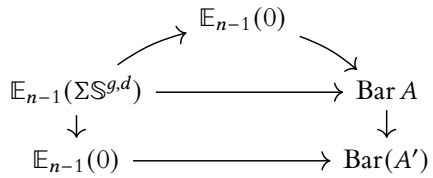
■

Corollary 5.19. $\bar{\tau}_{\leqslant 0}^{\mathrm{diag}} : \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_{n-1}}(\mathcal{E}_{\geqslant 0}) \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_{n-1}}(\mathcal{E}^{\heartsuit})$ *preserves colimits.* ■

5.1. 定理定理 5.6的证明。 (i) 和 (ii) 由 定理 5.19 应用截断函子$\tau_{\leqslant 0}^{\mathrm{diag}}$ 到$\mathbb{E}_{n-1}$-推挽图表（5.12）得出。–

现在假设我们处于 (iii) 的情形。考虑 (5.14) 关于 $\mathbb{E}_{n-1}$-代数的伴随映射

(5.20)



根据 (5.14) 的构造，这里的方块是 $\mathrm{Alg}^{\mathbb{E}_{n-1}}(\mathcal{D}(\mathbf{F}_2)^{\mathbb{Z}})$ 中的一个推出方块。因此，根据推出粘贴定律，我们得到 $\mathbf{E}_{n-1}$-代数中的一个等价： $\Sigma_{\mathbb{E}_{n-1}}\mathbf{E}_{n-1}(\Sigma\mathbb{S}^{g,d}) \sqcup^{\mathbb{E}_{n-1}} \mathrm{Bar}\ A$到 $\mathrm{Bar}(A')$。 $\psi([q(x)])$ 的表达式源于定理 5.15 和自然性。■

6. 构造探测器

如引言中所述，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ 取 $\mathbb{F}_2$系数时的同调稳定性，由 $\Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)}$ (定理 5.2) 中的 $\mathbb{E}_\infty$ $\mathbb{F}_2$-模$\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)$ 的定理 4.1所述稳定性霍普夫代数控制。稳定性霍普夫代数构造的另一类应用，是检测周期族。

假设 R 连通且满足 (SCE)，则我们有 (5.3) 中的 $\mathbb{E}_\infty$ 映射 $t_R\colon R \to r$， $r = \mathrm{Cobar}(\Delta_R)$。若能找到一个形式如 $\Delta_R \to \Gamma$ 的霍普夫代数映射，且其目标 Γ 的 Cotor 群可计算，那么就可以尝试通过沿 $\mathbb{E}_\infty$-映射 $R \to \mathrm{Cobar}(\Gamma)$ 进行基变换来检测同伦类。我们的 Γ 将是截断对偶Steenrod代数 $A(1)_*$，而在 §6.2 中我们描述映射 $\Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)} \to A(1)_*$。为此，我们需要描述$\Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)}$ 在低分次中的情况，相关内容见 §6.1。在该节中，我们通过为低次数的 CGL 找到胞腔逼近，并运用第 5 节发展的工具，描述 $\Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)}$ 至分次 5。§6.3 中，我们计算 $a(1) \coloneqq \mathrm{Cobar}(A(1)_*)$ 的同伦群以及余纤维$a(1)/h_{10}$。我们在 $\mathrm{CGL}(\mathrm{F}_2)/\sigma$ 中的类来自我们将在 §6.4 中构造的自同态。本节中，CGL $\coloneqq$CGL(F_2)。

6.1. **CGL(F) 的稳定性霍普夫代数**。我们的主要目标是以下结果。

定理 *6.1.* 设 $\delta \coloneqq [\sigma \mid Q^1(\sigma)] \in \Delta_{\mathrm{CGL}}(3)$ 和 $\rho \coloneqq [\sigma \mid Q^2(\sigma)] \in \Delta_{\mathrm{CGL}}(4)$ 分别为与分解 $\sigma \otimes Q^1(\sigma)$ 和 $\sigma^2 \otimes Q^2(\sigma)$ 相关联的类（参见定理 *5.6 (iii)*），图 *6* 给出了 Δ_{CGL} 在分次不超过 *5* 时的一组基。这里，σ 是对 σ 的 *Bar* 运算（定理 *4.6*）。此范围内的余乘结构由下式确定：

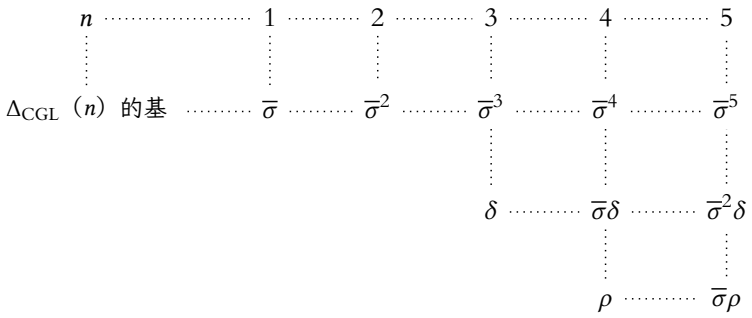


图 6. $\bigoplus_{n\leqslant 5} \Delta_{\mathrm{CGL}}(n)$

$$\psi(\bar{\sigma}) = 1 \otimes \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \otimes 1$$
$$\psi(\delta) = 1 \otimes \delta + \bar{\sigma} \otimes \bar{\sigma}^2 + \delta \otimes 1$$
$$\psi(\rho) = 1 \otimes \rho + \rho \otimes 1.$$

为方便后续使用，我们将分次 $\leqslant 4$ 中其余的余乘法明确写出：σ^2, σ^4 是本原元，$\psi(\sigma^3) = 1 \otimes \sigma^3 + \sigma \otimes \sigma^2 + \sigma^2 \otimes \sigma + \sigma^3 \otimes 1$，$\psi(\sigma\delta) = 1 \otimes \sigma\delta + \sigma \otimes \sigma^3 + \delta \otimes \sigma + \sigma\delta \otimes 1$，以及 $\psi(\quad)$。

我们先构造一个 $\mathbb{E}_\infty$-胞腔复形 X_5，并配上一个 (5,4)-连通的 $\mathbb{E}_\infty$-映射 $f_5\colon X_5 \to \mathrm{CGL}$。先取类 $\sigma \in \pi_{1,0}(\mathrm{CGL})$ 的一个代表元 $f_0\colon X_0 \coloneqq \mathbb{E}_\infty(S^{1,0}\sigma) \to \mathrm{CGL}$。假设我们已经构造出 $f_i\colon X_i \to \mathrm{CGL}$，那么：如果 $\pi_{*,*}(f)$ 在范围 $\{(g,d) \mid g \leqslant 5, d \leqslant 3\}$ 内是一个同构，我们就停止，此时这个终止的 f_i 已经是 (5,4)-连通的。否则，我们查看 $\pi_{g,d}(f_i)$ 不再是同构的最低行 d，然后查看最低列 g。这里有两种情况。

(1)：若失败是由于 $\ker \pi_{g,d}(f_i) \neq 0$，则从核中取一个非零的 x_i。我们取

$$f_{i+1}\colon X_{i+1} \coloneqq X_i /\!/^{g,d+1}_{\mathbb{E}_\infty} x_i \to \mathrm{CGL}.$$

作为 $\mathbb{E}_\infty$-映射，它由任意代表元 $\mathbb{E}_\infty(\mathbb{S}^{g,d}\{x_i\}) \to X_i$所诱导，$x$以及其与 f_i复合的任意零伦。接着，我们通过 $\pi_{*,*}(X_{i+1})$ 计算 $\{E_r(\mathrm{fil}^{\mathrm{cell}} X_{i+1})\}_r$的 [GKRW18a, §10.3。2]作为三重分次代数

$$E_1(\mathrm{fil}^{\mathrm{cell}} X_{i+1}) \cong \pi_{*,*,*}(0_! X_i) \otimes \pi_{*,*,*}(1_! \mathbb{S}^{g,d+1}\{\beta_i\}),$$

其中 $i_! X$ 对象 X 的 X 是分次对象：它在分次 i 上为 X，在其他分次上为零，而 β_i 是满足 $d^1\beta_i = x_i$的胞腔。在此计算中，在范围 $\{(g,\ d) \mid g \leqslant 5,\ d \leqslant 4\}$内，$E_2$ 页总是与 E_∞ 页重合，两者均可视为代数商 $\pi_{*,\ *,\ *}(0_! X_i)/(0_! x_i)$。这一便利主要是因为 β_i 的 Dyer–Lashof运算（包括 β_i^2）的分次为 > 5。

(2)：若 $\operatorname{im}\pi_{g,\,d}(f_i)\neq\pi_{g,\,d}(\mathrm{CGL})$，我们选取一个向量空间分裂 $\pi_{g,\,d}(\mathrm{CGL})\cong\operatorname{im}\pi_{g,\,d}(f_i)\oplus V_i$，取 V_i 的一组基 $\{x'_{ij}\}$，并令

$$f_{i+1}:X_{i+1}:=X_i\sqcup^{\mathbb{E}_\infty}\mathbb{E}_\infty(\bigoplus_{x'_{ij}}\mathbb{S}^{g,d}x'_i)\to\mathrm{CGL}\,.$$

由于 E_∞-代数中的有限余积可由张量积计算，我们可以读出$\pi_{*,\,*}(X_{i+1})$。我们在每一步所选的 x_i 和 x'_{ij} 列于下方。

Step 1.	$x_0=\sigma Q^1(\sigma)$	$f_1:X_1=\mathbb{E}_\infty(\mathbb{S}^{1,0}\sigma)/\!/^{3,2}_{\mathbb{E}_\infty}\sigma Q^1(\sigma)\to\mathrm{CGL}.$
Step 2.	$x_1=\sigma^2Q^2(\sigma)$	$f_2:X_2=X_1/\!/^{4,3}_{\mathbb{E}_\infty}\sigma^2Q^2(\sigma)\to\mathrm{CGL}.$
Step 3.	$x_2=\sigma Q^3(\sigma)$	$f_3:X_3=X_1/\!/^{3,4}_{\mathbb{E}_\infty}\sigma Q^3(\sigma)\to\mathrm{CGL}.$
Step 4.	$x'_3=\nu_1,\nu_2$	$f_4:X_4=X_3\sqcup^{\mathbb{E}_\infty}\mathbb{E}_\infty(\mathbb{S}^{3,3}\nu_1\oplus\mathbb{S}^{3,3}\nu_2)\to\mathrm{CGL}.$
Step 5.	$x_4=\sigma\nu_1,\sigma\nu_2$	$f_5:X_5=X_4/\!/^{4,4}_{\mathbb{E}_\infty}(\sigma\nu_1,\sigma\nu_2)\to\mathrm{CGL}.$

从步骤 3 开始，所有附加的胞腔斜率均为 $\geqslant 1$。因此 定理 5.6 (i) 告诉我们，$X_2\to X_5$ 在稳定性霍普夫代数上诱导同构，因此 定理 6.1 将由以下两个命题推出。

命题 6.2。设 σ、δ、$\bar{\rho}\in\Delta_{X_2}$ 的定义与 定理 *6.1* 中对应对象的定义类似。那么

$$\Delta_{X_2}=\mathbb{F}_2[\sigma,\delta,\rho],$$

其中 σ、ρ 均为本原元，且 $\psi(\delta)=1\otimes\delta+\bar{\sigma}\otimes\bar{\sigma}^2+\delta\otimes 1$。

证明。迭代应用 定理 5.6 (iii)。为证明 ρ 是本原元，我们使用定理 4.11(iii)。 ■

命题 6.3。霍普夫代数映射 Δ_{f_2}：$\Delta_{X_2}\to\Delta_{\mathrm{CGL}}$ 是分次 $\leqslant 5$ 上的双射。

证明。将赫urewicz定理以 定理 4.13 的形式应用于 (5,4)-连通映射 f_5：$X_5\to\mathrm{CGL}$，我们得到 Δ_{f_5} 是 5-连通的。由于 $\Delta_{X_2}\to\Delta_{X_5}$ 是一个同构，Δ_{f_2} 也是 5-连通的。为证明 Δ_{f_2} 在分次 5 上实际上是一个双射，我们计算余乘法

$$\psi(\Delta_{f_2}(\kappa))=\Delta_{f_2}(\psi(\kappa))\in\Delta_{\mathrm{CGL}}$$

对于 $\Delta_{X_2}(5)$ 中的一个一般元素 $\kappa:=\lambda_1\sigma^5+\lambda_2\sigma^2\delta+\lambda_3\sigma\rho$ $(\lambda_i\in\mathrm{F}_2)$，并利用 Δ_{f_2} 在较低分次上的单射性。■

6.2. **映射** $\mathrm{cgl}\to a(1)$。对偶 Steenrod 代数 A_* 是一个交换霍普夫代数，其底层代数为 $\mathrm{F}_2[\xi_1,\xi_2,\cdots]$，余乘法由 $\psi(\xi_n)=\sum_{i=0}^n\xi_{n-i}^{2^i}\otimes\xi_i$ 指定。对于每个 $n\geqslant 0$，代数商 $A(n)_*:=A_*/(\xi_1^{2^{n+1}},\ \cdots\ \xi_{n+1}^2,\ \xi_{n+2},\ \xi_{n+3},\ \cdots)$ 实际上是一个商霍普夫代数。本节中，我们构造一个对偶霍普夫代数映射 φ：$A(1)^\vee_*\to\Delta^\vee\,\mathrm{CGL}$。于是，我们的检测器是 E_∞-映射[13]

$$\mathrm{Cobar}(\varphi^\vee):\mathrm{cgl}\to a(1),$$

其中 $\mathrm{cgl}:=\mathrm{Cobar}(\Delta_{\mathrm{CGL}})$，且 $a(1):=\mathrm{Cobar}(A(1)_*)$。

备注 6.4. </style}较低阶的 ()'s 在同伦论中有其含义：对于，1，2， $A(n)$ 分别计算相对于 $H\mathrm{F}_2$，ko 和 tmf 的稳定 $H\mathrm{F}_2$ 上同调运算。不过，我们猜测在当前情形中出现 $A(1)$ 纯属巧合。

对偶的 $A(1)^\vee_*$ 是 Steenrod 代数的子霍普夫代数 $A(1)=\left\langle \mathrm{Sq}^1,\mathrm{Sq}^2\right\rangle$。作为代数，$A(1)$ 是由符号 Sq^1, Sq^2 生成的自由结合代数对由 $\mathrm{Sq}^{1,1}$ 和 $\mathrm{Sq}^{2,\ 2}+\mathrm{Sq}^{1,2,1}$ 生成的双边理想取商所得。现在我们指定元素 s_1，$s_2\in\Delta^\vee\,\mathrm{CGL}$ </style}，使得

$$\varphi:\mathrm{Sq}^i\in A(1)\mapsto s_i\in\Delta^\vee_{\mathrm{CGL}}$$

确定了一个霍普夫代数的映射。由（定理 6.1）回忆可知，$B:=\{\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\bar{\delta},\bar{\sigma^4},\bar{\sigma\delta},\bar{\rho}\}$ 是 $\bigoplus_{n=1}^4\Delta_{\mathrm{CGL}}(n)$ 的一组基。令 $B^\vee=\{b^\vee\mid b\in B\}$ 表示对偶基。我们取 s_1,s_2 为 $(\sigma^1)^\vee$、$(\sigma^2)^\vee$。

[13]这里我们作出了同一认定：$\Delta^{\vee\vee}\,\mathrm{CGL}\cong\Delta_{\mathrm{CGL}}$ 和 $A(1)^{\vee\vee}_*\cong A(1)_*$。两个霍普夫代数在每个次数上都是有限维的。对于 Δ_{CGL}，这是因为我们将 $\Delta_{\mathrm{CGL}}(g)\cong H_0(\mathrm{GL}_g(\mathrm{F}_2);\mathrm{St}^{\mathbb{E}_1}(g)\otimes\mathrm{F}_2)$ ([RW25, §1.6], [GKRW18a, p. 189]) 认定为一个有限群的群同调。霍普夫代数 $A(1)_*$ 的总维数为 8。

L引理 6.5。 图 7 描述了 $\Delta^\vee \mathrm{CGL}(n)$, $n \leqslant 4$ 的一组基。此外，元素 s_1 是本原元，并且

$$\psi(s_2) = 1 \otimes s_2 + s_1 \otimes s_1 + s_2 \otimes 1.$$

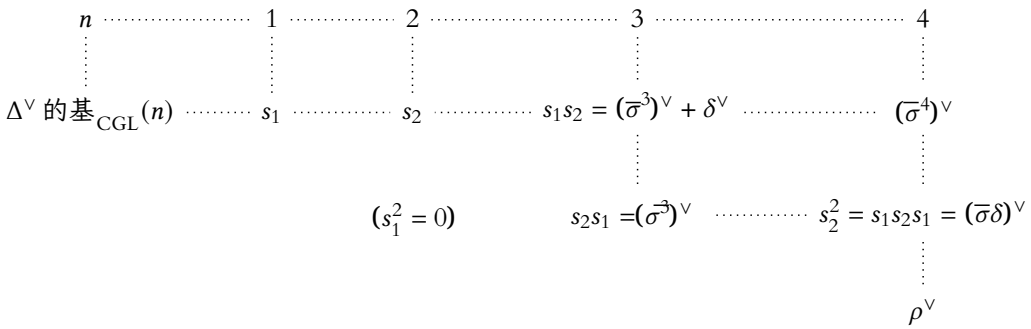


图 7. $\bigoplus_{n\leqslant 4} \Delta^\vee \mathrm{CGL}(n)$

证明。 由于取线性对偶会将本原元与不可分解元互换，因此 s_1 是本原元，而 $s_2 = (\sigma^2)^\vee$不是。对于 s_1，唯一可能非零的约化余乘是 $s_1 \otimes s_1$。这也意味着 $s_1^2 = 0$ 作为s_1^2 是本原元，并且 $\Delta_{\mathrm{CGL}}(2)^\vee$ 是一维。为了解释 $n = 3$ 列中的等式，令 $-,- : \Delta^\vee \mathrm{CGL} \otimes \Delta_{\mathrm{CGL}} \to \mathrm{F}_2$ 为求值映射。于是有

$$\begin{aligned} \left\langle s_2 s_1, \overline{\sigma}^3 \right\rangle &= 1 & \langle s_2 s_1, \delta \rangle &= 0 \\ \left\langle s_1 s_2 + s_2 s_1, \overline{\sigma}^3 \right\rangle &= 0 & \langle s_1 s_2 + s_2 s_1, \delta \rangle &= 1 \end{aligned}$$

这意味着 $s_2 s_1 = (\sigma^3)^\vee$ 以及 $s_1 s_2 + s_2 s_1 = \delta^\vee$。对于 $n = 4$ 列， s_2^2 和 $s_1 s_2 s_1 = s_1(s_2 s_1)$ $= s_1(\sigma^3)^\vee$ 在 $\sigma\delta$ 上的求值均为 1，在 σ^4, ρ上的求值均为 0，因此$s_2^2 = s_1 s_2 s_1 = (\sigma\delta)^\vee$。■

$s_1^2 = 0$ 和 $s_2^2 = s_1 s_2 s_1$ 在 $\Delta^\vee \mathrm{CGL}$ 中的关系表明， φ 定义了一个代数映射。为证明 φ 是一个霍普夫代数映射，我们检验 $\psi\varphi = (\varphi \otimes \varphi)\psi$ 在代数生成元 Sq^1 和 Sq^2上成立。根据我们关于 $\psi(s_1)$ 和 $\psi(s_2)$ 的公式，这确实成立。

注记 6.6。 由于 $\varphi^\vee \colon \Delta_{\mathrm{CGL}} \to A(1)_* = \mathrm{F}_2[\xi_1, \xi_2]/(\xi_1^4, \xi_2^2)$ 在次数 1 中是一个双射，并且保持余乘法，因此必有

$$\varphi^\vee(\overline{\sigma}) = \xi_1, \qquad \varphi^\vee(\delta) = \xi_2 + \xi_1^3.$$

6.3. **(1) 的同伦群 $a(1)$ 和 $a(1)/h_{10}$**。 设 $A = \mathrm{k} \oplus \overline{A}$ 是域 k 上的一个连通[14] 分次霍普夫代数，则同伦群 $a = \mathrm{Cobar}(A)$ 是 A的 Cotor 群：

$$\pi_{g,d}(a) = \mathrm{Cotor}^A_{g-d}(\Bbbk, \Bbbk)(g). \tag{6.7}$$

特别地，$\pi_{*,*}(a)$ 可以通过经典余边复形来计算。当 $A = A(1)_*$时，本原元 ζ_1， ζ_1^2和 ζ_2在余 bar 复形中定义了循环 $\zeta_i^{2^j}$。我们将$\pi_{*,*}(a(1))$ 中相应的类记为 h_{ij}。我们将看到，在映射 $\mathrm{CGL} \to \mathrm{cgl} \to a(1)$ 下， h_{10}对应于类 σ。本节旨在描述 $\pi_{*,*}(a(1))$ 及其代数结构，并计算$\pi_{*,*}(a(1)/h_{10})$ 作为$\pi_{*,*}(a(1))$-模。

6.3.1. **Ivanovsky 谱序列**。 该滤过

$$(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}} A)_p := \begin{cases} A & \text{for } p \geqslant 0 \\ (\overline{A})^{-p} & \text{for } p < 1 \end{cases}$$

在 A 上的滤过在 A上的余 bar 复形上诱导出一个滤过。假设 A 在每个分次中均为有限维，则可得到一个强收敛于 $\mathrm{Cotor}^A(\mathrm{k}, \mathrm{k})$ 的谱序列。该谱序列

[14]我们的意思是，单位映射 $\mathbb{1} \to A$ 在分次 $\leqslant 0$上是一个同构。特别地， A 具有典范的增广结构，且增广理想 $\overline{A}$ 仅支撑在正分次上。

由 L. N. Ivanovsky 引入 [Iva64] 其中 A 是对偶 Steenrod 代数[15]；一个很好的参考文献是[BS94]。

这个谱序列具有自然的 W_{n-1}-结构，其中 $n=\infty$ 当 A 是交换的，且 $n=1$ 否则，由同一认定（6.7）给出：我们可以将 $\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}} A$ 视为滤过对象中的离散 $\mathbb{E}_1$-余代数-$\mathbb{E}_n$-代数，因此其 Cobar

$$\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}} a := \mathrm{Cobar}(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}} A)$$

是 $\mathbb{E}_{n+1}$-滤过，作用于 a。这个滤过对象在*RW25*[§8 中称为未导出的典范乘法滤中[RW25，§8。4]。相伴的谱序列 $\{E^r(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}} a)\}_r$ 是 Ivanovsky 谱序列。

例 6.8。当 $A=A(1)_*$时，E^1 页是代数 $\mathbb{F}_2[h_{10},h_{11},h_{20}]$，而该页上的 Dyer–Lashof运算 E^1 满足 $h_{ij}=Q_1^{\circ j}(h_{i0})$；参见 [RW25，§8 中的讨论。4]。

展开 A 的余 bar 复形上的滤过，我们看到，$\{E^r(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}} a)\}_r$ 中的微分可以由 A 上的余乘积导出如下。假设 $x\in \mathrm{fil}_r^{\mathrm{aug}} A$ $(r<0)$ 的约化余乘为

$$\overline{\psi}(a)=\sum x_i'\otimes x_i''\in \bigcup_{p+q\leqslant -n+r} \mathrm{fil}_p^{\mathrm{aug}} A\otimes \mathrm{fil}_q^{\mathrm{aug}} A,$$

于是 $x\in E^1(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}} a)$ 存活到第 E^n 页，而 $d^n([a])$ 由 $\sum x_i'x_i''$ 对模 $\mathrm{fil}_{r-n-1}^{\mathrm{aug}} A$ 的像表示。我们将利用此谱序列计算 $\pi_{*,\,*}(a(1))$，并通过与 $\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}} a(1)$ 的余纤维相关、由 h_{10} 的一个滤提升得到的谱序列，计算 $\pi_{*,\,*}(a(1)/h_{10})$。

6.3.2. **.....的同伦群** $a(1)$。在本部分中，我们始终令 $E^r := E^r(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}} a(1))$。回顾 $E^1_{*,*,*}=\mathbb{F}_2[h_{10},h_{11},h_{20}]$ 在 定理 6.8中的描述。

定理 6.9。谱序列 $\{E^r\}_r$ 在 E^5 处退化，并且

$$E^\infty_{*,*,*}=E^5_{*,*,*}=\frac{\mathbb{F}_2[h_{10},\ h_{11},\ y_{7,4},\ y_{12,8}]}{(h_{10}h_{11},\ h_{11}^3,\ h_{11}y_{7,4},\ y_{7,4}^2-h_{10}^2y_{12,8})} \tag{6.10}$$

其中 $y_{7,4}\in E^5=E^\infty$ 由 $h_{10}h_{20}^2\in E^1_{7,4,-3}$ 表示，而 $y_{12,8}$ 由 $h_{20}^4\in E^1_{12,8,-4}$ 表示。由于每个 $E^\infty_{g\,d,,*}$ 的维数都是 1，$\pi_{*,*}(a(1))$ 上的滤过是平凡的，因此$\pi_{*,*}(a(1))$ 与第 E^∞ 页典范地同构。

图 8 描述了低次数下的 $\pi_{*,\,*}(a(1))$。注意，$\pi_{*,\,*}(a(1))$ 是 (12，8)-周期的：从加法结构看，它是以 $\mathbb{F}_2[h_{10},h_{11},y_{74}]/(h_{10}h_{11},\ h_{11}^3,\ y_{7,\,4}^2)$ 为基的自由 $\mathbb{F}_2[y_{12,8}]$-模。

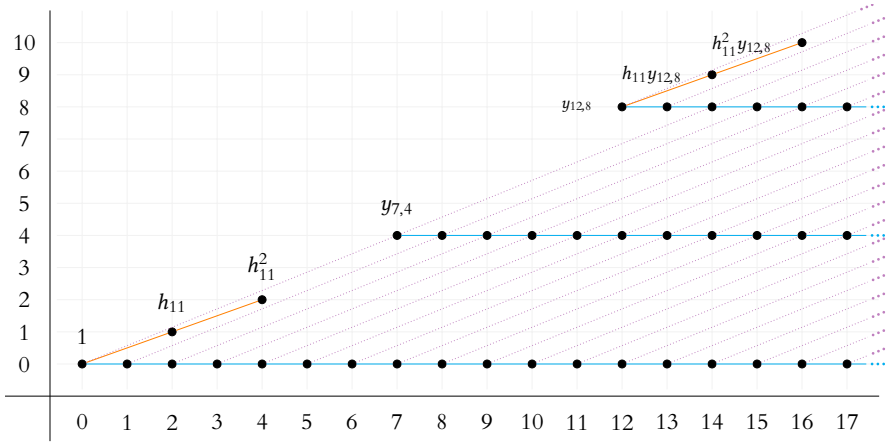


图 8. $\pi_{g,\,d}(a(1))$，其中 $g\leqslant 17$，$d\leqslant 10$。蓝色 / 橙色 / 紫色点线结构线 $\cdots=h_{10}/\ h_{11}/y_{7,\,4}$-扩张。

我们先整理这个谱序列中的一些微分。下面的 (i) 部分可由观察到 $d^r\colon E^r_{g,\,d,\,f}\to E^r_{g,\,d-1,\,f-r}$ 使 $g+f$降低 r 得出，并且 $|h_{10}|=(1,0,\ -1)$、$|h_{20}|=(3,2,\ -1)$、$|h_{11}|=(2,1,\ -2)$ 都

[15]马 该谱序列是通过按增广理想对 Steenrod 代数的条复形进行滤积得到的。

具有偶数 $g+f$。约化余乘 $\psi(\zeta_2) = \zeta_1 \otimes \overline{\zeta_1^2}$给出了下面的 (iii)。通过注意到 ζ_1 是本原元，或考察次数，可以得到 (ii)。其余结论都是谱序列上的 W_∞-结构的结果 [GKRW18a，§16。6]。

引理 6.11。

(i) 当 r 为奇数时，不存在非平凡微分 d^r。*(ii)* $h_{10} \in E^1_{1,\,0,\,-1}$ 是一个永久循环。*(iii)* $h_{20} \in E^1_{3,\,2,\,-1}$ 存活到 E^2，且 $d^2(h_{20}) = h_{10}h_{11}$。*(iv)* $h_{20}^2 \in E^1_{6,\,4,\,-2}$ 存活到 E^4，且 $d^4([h_{20}^2]) = h_{11}^3$。*(v)* $h_{20}^4 \in E^1$，因此每个 $h_{20}^{4k} \in E^1$、$k \geqslant 0$ 都是永久循环。*(vi)* 对于任意 $k \geqslant 0$ 和 $1 \leqslant i \leqslant 3$，类 $h_{20}^{4k+i} \in E^1$ 存活到 $E^{3+(-1)^i}$，并且

$$\begin{aligned} d^2(h_{20}^{4k+1}) &= h_{10}h_{11} \cdot h_{20}^{4k}, && i = 1 \\ d^4(h_{20}^{4k+2}) &= h_{11}^3 \cdot h_{20}^{4k}, && i = 2 \\ d^2(h_{20}^{4k+3}) &= h_{10}h_{11} \cdot h_{20}^{4k+2}, && i = 3. \end{aligned}$$

(vii) $h_{10}h_{20}^2 \in E^1_{7,\,4,\,-3}$ 存活至第4页，且 $d^4(h_{10}h_{20}^2) = [h_{10}h_{11}^3] = 0$。 ■

引理 6.12. $E^3 = \mathbb{F}_2[h_{10}, h_{11}, h_{20}^2]/(h_{10}h_{11})$。

证明。 由 定理 6.11$E^1 = E^2$ 以及 d^2-微分由下式给出

$$d^2(h_{10}^i h_{11}^j h_{20}^k) = \begin{cases} 0 & , k \equiv 0 \bmod 2 \\ h_{10}^{i+1} h_{11}^{j+1} h_{20}^{4l+\epsilon} & , k = 4l + \epsilon + 1,\ \epsilon \in \{0,1\} \end{cases}.$$

现在，结论由此得出

断言。 对于每个 g, d, f，都有 维数 $E^2_{g,\,d,\,f}$ = 维数 $E^1_{g,\,d,\,f} \leqslant 1$。

断言的证明。 设 $h_{10}^a h_{11}^b h_{20}^c = h_{10}^{a'} h_{11}^{b'} h_{20}^{c'}$。那么

$$a + 2b + 3c = a' + 2b' + 3c', \quad b + 2c = b' + 2c', \quad -a - 2b - c = -a' - 2b' - c'.$$

通过比较三重次数，我们得到 $c = c'$，然后是 $b = b'$，再然后是 $a = a'$。 ◀

■

证明 定理 6.9。 单项式 $h_{10}^i h_{20}^{2k}$和 $h_{11}^j h_{20}^{2k}$，$i,\ k \geqslant 0,\ j = 1,\ 2$，构成了 E^4 页的一个基。相对于该基，d^4 微分为

$$\begin{aligned} d^4(h_{10}^i h_{20}^{4k}) &= 0 \\ d^4(h_{11}^j h_{20}^{4k}) &= 0 \\ d^4(h_{11}^j h_{20}^{4k+2}) &= h_{11}^{j+3} h_{20}^{4k} \\ d^4(h_{10}^i h_{20}^{4k+2}) &= h_{10}^i h_{11}^3 h_{20}^{4k} = 0 \end{aligned}$$

由于 E^4 是 E^2的一个商，正如我们在定理 6.12 的证明中所见，$\dim E^2_{g,d,f} \leqslant 1$这一事实告诉我们 $\dim E^4_{g,d,f} \leqslant 1$。特别地，不可能有两个非平凡微分从同一个三重次数开始，因此我们得到了所需的 $E^5_{*,*,*}$的描述。最后，我们需要证明当 $r \geqslant 5$时不存在非平凡微分 d^r，而且只需检查 (6.10) 的生成元。由于 h_{10} 是一个永久循环（定理 6.11(ii)），根据谱序列上的W_∞-结构，$h_{11} = Q^1(h_{10})$也如此。由于同调次数的原因，$d^2(y_7,4)$ 和 $d^r(y_{12},8)$ 必须为零（参见图 8）。■

注记 6.13。 $\pi_{*,\,*}(a(1))$ 是关于连通实K-理论 ko 的 2-局部 Adams谱序列的 E_2 页。

6.3.3. **的同伦群** $a(1)/h_{10}$。 令 $E^r = E^r(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}\, a(1)/\widetilde{h_{10}})$，其中 $\widetilde{h_{10}} \in \pi_{1,\,0,\,-1}(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}\, a(1))$ 由 Bockstein 谱序列中的 h_{10} 定义。根据 $\{E^r\}_r$ 上的 $\{E^r\}_r$-模结构，类

$[h_{20}]\in E^1$ 是一个永久循环。由于 $E^1=E^1/(h_{10})$，由定理 6.12证明中的断言可知，每个 $E_{g,d,*}^1$ 因而每个 $E_{g,d,*}^r$ 不是零维就是一维，特别是 $[h_{20}]$ 对应于一个类 $z_{3,2}\in\pi_{3,2}(a(1)/h_{10})$。令 $z_{0,0}\in\pi_{0,0}(a(1)/h_{10})$ 为 1 的像。

定理 6.14。令 $\mathcal{L}\subseteq\pi_{*,*}(a(1)/h_{10})$ 为由以下上同调类集合张成的子空间

$$z_{0,0},\quad h_{11}.z_{0,0},\quad h_{11}^2.z_{0,0},\quad z_{3,2},\quad h_{11}.z_{3,2},\quad h_{11}^2.z_{3,2}.$$

那么，以下给出了$\pi_{*,*}(a(1)/h_{10})$ 作为一个$\pi_{*,*}(a(1))$-模的描述，.另见 图 9 。.

(i) 上述列出的类均非零，并且

$$\pi_{*,*}(a(1)/h_{10})=\mathbb{F}_2[y_{12,8}].\mathcal{L}$$

作为左 $\mathbb{F}_2[h_{11},y_{12,8}]/(h_{11}^3)\subseteq\pi_{*,*}(a(1))$-模。

(ii) $h_{10}.z_{3,2}$ 非零，因此实际上 $h_{10}.z_{3,2}=h_{11}^2.z_{0,0}$。

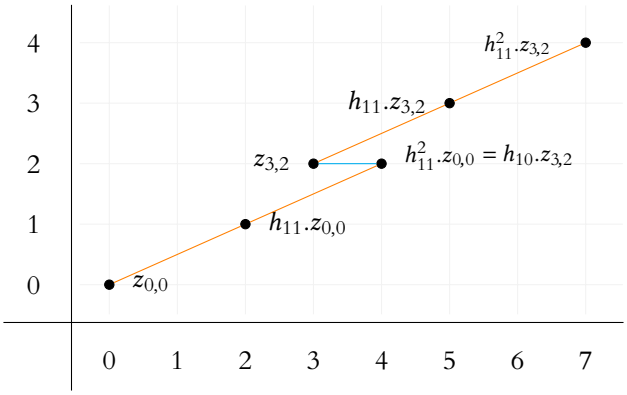


图9。这道闪电 $\mathcal{L}$：$\pi_{g,d}(a(1)/h_{10},\ g\leqslant 7,\ d\leqslant 4$。$\pi_{*,*}(a(1)/h_{10})=\mathbb{F}_2[y_{12,8}].\mathcal{L}$。

证明。根据本部分开头的观察，$\pi_{g,d}(a(1)/h_{10})=E_{gd,,*}^{\infty}$。利用模结构可知 $E^1=\cdots=E^4$，并且

$$\bar{d}^r([h_{11}^ih_{20}^{4k}])=0\quad\text{for all } r>0,$$
$$\bar{d}^4([h_{11}^ih_{20}^{4k+2}])=[h_{11}^{i+3}h_{20}^{4k}],\qquad i,k\geqslant 0.$$

我们还有 $d^2([h_{20}])=0$。事实上，对所有 r，$d^r([h_{20}])=0$ 都成立，因为目标落在三重次数 $(3,1,*)$，而即使在 E^1 中那里也没有任何元素。因此剩余的 d^4 微分为

$$\bar{d}^4([h_{11}^ih_{20}^{4k+1}])=\bar{d}^4(h_{11}^ih_{20}^{4k}.[h_{20}])=0$$
$$\bar{d}^4([h_{11}^ih_{20}^{4k+3}])=\bar{d}^4(h_{11}^ih_{20}^{4k+2}.[h_{20}])=[h_{11}^{i+3}h_{20}^{4k+1}],\qquad k\geqslant 0.$$

要得出 (i)，我们还只需证明 $d^r([h_{11}^ih_{20}^{4k+1}])=0$ 对 $r>4$ 也成立。$[h_{11}^ih_{20}^{4k+1}]$ 的双次数 $(12k+2i+3,8k+i+2)$ 具有 $2d-g=4k+1$。微分的目标具有 $2d-g=4k-1$。其他可能非零的双次数是 $(12k'+2i',8k'+i')$，它们具有 $2d-g=4k'$。

对于 (ii)，我们采用一种用于检测隐藏扩张的标准技巧。反设$h_{10}.z_{3,2}=0$。那么，由于 $h_{11}\cdot h_{10}=0\in\pi_{*,*}(a(1))$，我们可以在 [BK24, §3.3] 的设定下构造 Toda 括号 $\langle h_{11},h_{11},z_{3,2}\rangle$（其中 $(X''X'X)=(a(1)\ a(1)\ a(1)/\sigma)$）。将 Moss收敛定理以 [BK24, Theorem 1.1] 的形式应用于 $(a,a',a'')=(h_{11},h_{10},[h_{20}])$ 和 $r=2$，可知 Massey积 $h_{11},h_{10},[h_{20}]\subset E^2(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}a(1)/\sigma)\cdots=E^2$ 含有一个永久循环，它收敛到 Toda 括号中的某个类。但 $h_{11},h_{10},[h_{20}]=\{h_{20}.[h_{20}]\}$ 且 $h_{20}.[h_{20}]\in E^2$ 不是永久循环：它存活到第 4 页，此时 $d^4(h_{20}.[h_{20}])=d^4([h_{20}^2])=[h_{11}^3]\neq 0$。注意，我们需要检查的交叉微分假设 [BK24, (2.5)] 等价于

- All elements in $\bar{E}_{3,2,0}^4,\bar{E}_{3,2,-1}^3,\bar{E}_{4,3,0}^3$ are permanent cycles.

但事实上，所有这些向量空间都为零。

■

6.4. **稳定化余纤维上的自映射**。至此，我们收集了 $\mathbb{E}_\infty$-近似：CGL的底部部分 $f_1 : X_1 \to \mathrm{CGL}$ 的极小胞腔结构CGL (§6.1)、截断映射CGL $\to$ cgl (5.3)，以及 cgl $\to a(1)$，它由霍普夫代数映射的 Cobar 构造而成（§6.2）。将这些组合起来，我们得到一个 $\mathbb{E}_\infty$-映射

$$\Psi_{X_1} : X_1 \to a(1) \tag{6.15}$$

与 $\Psi_{X_1*}(\sigma) = h_{10}$ (定理 6.23)。因此，若我们通过 Ψ_{X_1} 将 $a(1)$视为右 X_1-模，则存在左 $a(1)$-模的等价 $a(1)/h_{10} \simeq a(1) \otimes_{X_1} X_1/\sigma$。本节的目标是构造一个左 $\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1$-模自同态 $\widetilde{\varphi_{X_1}}$，其三重次数为 (12, 8, −4)，并且具有如下性质：X_1-模映射 $\tau^{-1}\widetilde{\varphi_{X_1}}$ 到 $a(1)$ 的基变换等价于由 $y_{12,\,8} \in \pi_{12,\,8}(a(1))$ 作用。

策略是选取 ${}^{\mathrm{BS}}E^\infty(\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma})$ 中一个恰当的类，并选取一个由它检测到的滤过类 $\widetilde{\omega_{12}}_{,\,8}$。我们验证在 $\widetilde{\widetilde{\sigma}\omega_{12}}_{,\,8}$ 的三重次数处，滤过同伦群消失，因此任何此类 $\widetilde{\omega_{12}}_{,\,8}$ 所诱导的左模映射都下降到余纤维 $\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma}$。

6.4.1. **旁论：正规序列**。一个分次 $\mathbb{E}_\infty$-代数在一个 $\mathbb{F}_2$-模X上的同伦群，是由那些 $Q^I(x)$生成的自由交换代数，其中 x遍历 π_*的一个基，$*(X)$，并且 I遍历满足某个超额条件的所有容许序列 x，条件见 [GKRW18a，第 181页]；我们称这样的 I为 正规序列，对应于 x。具体而言，这意味着以下情况之一：

- $I = \varnothing$，并将 $Q^\varnothing$ 解释为恒等运算；或者
- $I = (s)$，其中有 $s > |x|$；或者
- $I = (s_1, \dots, s_r)$，$r \geqslant 2$是可容许的，这意味着对于 $2 \leqslant i \leqslant r$，有 $s_{i-1} \leqslant 2s_i$，并且

$$e(I) := s_1 - (s_2 + \cdots + s_r) > |x|.$$

用“低指标”Dyer–Lashof运算来表达时，正规性条件更容易处理。它们与高指标运算之间的关系由公式 $Q^s(x) = Q_{s-|x|}(x)$给出，其中 $|x|$表示同调次数。因此，给定一个非空序列 I，有 $Q^I(x) = Q_{I'}(x)$，其中

$$I' = (s_1', \cdots, s_r'), \quad s_i' := s_i - \sum_{j>i} s_j - |x|.$$

我们称 I' 为正规，当且仅当 I是正规时。下面给出一些观察。

Observation 6.16. 设 I的长度为 $r > 1$。令 $I_{>1}$表示截断序列$(s_2, \dots, s_r)$。Then (i) $(I_{>1})' = (s_2', \dots, s_r')$，因此我们可以将这个序列记作 $I'_{>1}$。(ii) 如果 I是正规的，那么 $I_{>1}$也是正规的。(iii) 如果 I'是正规的，那么 $I_{I'>1}$也是正规的。

引理 6.17. 非空的 $I = (s_1, \dots, s_r)$对于 x 是正规的，当且仅当 $I' = (s_1', \dots, s_r')$满足

$$0 < s_1' \leqslant \cdots \leqslant s_r'. \tag{6.18}$$

证明。我们对 I 的长度作归纳。当 $I = (s)$ 时，I 为正规的条件恰好是$s' = s - |x| > 0$。现在假设 I 的长度为 $r > 1$。假设 I 是正规的，那么根据上面的观察，$I'_{>1}$ 也是正规的。因此我们只需验证 $0 < s_1' \leqslant s_2$。部分 $s_1' = e(I) - |x| > 0$ 是I 的超额条件，而 $s_1' - s_2' = s_1 - 2s_2 \leqslant 0$ 是 I 的容许性的一部分。反过来，假设 (6.18) 成立。如上所见，$s_1' > 0$ 恰好是超额条件，因此我们只需验证容许性。根据归纳假设，$I'_{>1}$ 是正规的，接下来只需验证 $s_1 \leqslant 2s_2$。同样，我们刚刚看到 $s_1 - 2s_2 = s_1' - s_2'$。■

6.4.2. **滤过自同态的构造 $\widetilde{\varphi_{X_1}}$**。在本节中，令 $\{E^r, d^r\}_r$和 $\{E'^r, d'^r\}_r$分别表示与滤过 $\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1$ 及其左模滤过 $\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma}$ 相关联的谱序列。令 β 表示其中的 (3,2)- 胞腔。

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1 = \mathbb{E}_\infty((-1)_!\mathbb{S}^{1,0}\{\sigma\} \oplus (-1)_!\mathbb{S}^{3,2}\{\beta\}).$$

对于一个类$x \in E^1_{*,*,*}$，我们用 $[x]$ 表示它在商代数 $E^1_{*,*,*} = E^1_{*,*,*}/(\sigma)$ 中的像。接下来的大部分工作都围绕定理 6.19 和定理 6.21 展开。第一个引理描述了 $\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma}$ 的 Bockstein谱序列的 E^∞页在 (g, d, f)-次数 $(12, 8, -4)$ 上的情况；特别地，类 $[\beta^4]$ 定义了一个可能不唯一的滤过同伦类 $\widetilde{\omega_{12}}_8$, 。第二个引理说明，$\widetilde{\omega_{12}}$,8 的任意代表元都经由余纤维 $\Sigma^{12,8,-4}\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma}$分解，从而得到所需的左模自映射 $\widetilde{\varphi}_{X_1}$。证明将在本节末尾给出。

引理 6.19。 $^{\mathrm{BS}}E^\infty_{12,\ 8,\ -4,\ *}$ 由 $[\beta^4]$ 和 $\tau^8[Q_{1,1}(\sigma)^2 Q_1(\sigma)^2]$张成。

定义 6.20。 令 $\widetilde{\omega_{12}}_{,\ 8} \in \pi_{12,\ 8,\ -4}(\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma})$ 为由 $[\beta^4]$ 在 定理 6.19 中检测到的任意类。

$\widetilde{\omega_{12}}_{,\ 8}$ 的不确定性正是由 $\tau^8[Q_{1,1}(\sigma)^2 Q_1(\sigma)^2]$ 定义的滤过同伦类。下一个引理告诉我们，这种不确定性并无影响。

引理 6.21。 群 $\pi_{13,\ 8,\ -5}(\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma})$ 为零。特别地，无论我们选择 $\widetilde{\omega_{12}}_8$, 如何，$\widetilde{\sigma}.\widetilde{\omega_{12}}_{,\ 8} = 0$ 都成立。

定义 6.22。 任取一个代表元 $\widetilde{\omega_{12}}_{,\ 8}$：$\Sigma^{12,\ 8,\ -4}\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1 \to \mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma}$。由上面的定理 6.21 可知，复合映射 $\widetilde{\omega_{12}}_{,\ 8} \circ \widetilde{\sigma}$ 是零映射。令

$$\widetilde{\varphi_{X_1}} : \Sigma^{12,8,-4}\,\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma} \to \mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma}$$

为通过任意此类零伦得到的左 $\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1$-模自同态。

定理 6.19 的证明。 我们首先注意到，谱序列 E^r 和 E^r 与代数 $\mathbf{A}$ 的胞腔附着谱序列以及$\mathbf{A}/\sigma$ 在 [GKRW18b]第 6.2 节中的谱序列非常相似。由于其中已对微分进行了详尽分析，我们将在此直接断言相应的微分，而不赘述细节。这里称为 τ 的类对应于此处的 β。结论由

断言。 $\widetilde{E}^1_{12,\ 8,\ *}$ 由表*1*中的上同调类张成。

name	类	乘法滤过
	$[\beta^4]$	-4
χ_2	$[Q_1(\sigma)^2\beta^2 Q_2(\sigma)]$	-6
χ_2'	$[Q_1(\sigma)^2 Q_{1,1}(\sigma)^2]$	-12
χ_3	$[Q_1(\sigma)^3 Q_1(\beta)]$	-8
χ_3'	$[Q_1(\sigma)^3 Q_{1,\ 1}(\sigma) Q_2(\sigma)]$	-12
χ_4	$[Q_2(\sigma)^2 Q_1(\sigma)^4]$	-12
χ_5	$[Q_1(\sigma)^5 Q_3(\sigma)]$	-12

表1. $\widetilde{E}^1_{12,\ 8,\ *}$的基。

断言告诉我们，$^{\mathrm{BS}}\widetilde{E}^1_{12,\ 8,\ -4,\ *}$由 $[\beta^4]$、$\tau^2\chi_2$、$\tau^8\chi_2'$、$\tau^4\chi_3$、$\tau^8\chi_3'$、$\tau^8\chi_4$、$\tau^8\chi_5$张成。结果由下面的分类分析得出。

- 在 τ-滤过 -2中，类 $\tau^2\chi_2$支持一个非平凡微分$d_{\mathrm{BS}\,2}(\tau^2\chi_2) = \tau^6[Q_1(\sigma)^5 Q_2(\sigma)]$。
- 在 τ-滤过 -4中，只有 $\tau^4\chi_3$，它是$d_{\mathrm{BS}\,4}(Q_1(\sigma)Q_2(\sigma)^2[\beta^2]) = \tau^4\chi_3$的目标。
- 在 τ-滤过中，$\tau^8\chi_2$是一个永久循环，而所有的 $\tau^8\chi_{,3}, \tau^8\chi_4, \tau^8\chi_5$都是微分的目标

$$^{\mathrm{BS}}\widetilde{d}^4(\tau^4 Q_{1,1}Q_2(\sigma).[\beta^2]) = \tau^8\chi_3'$$
$$^{\mathrm{BS}}\widetilde{d}^4(\tau^4 Q_2(\sigma)^2 Q_1(\sigma).[\beta^2]) = \tau^8\chi_4$$
$$^{\mathrm{BS}}\widetilde{d}^4(\tau^4 Q_1(\sigma)^2 Q_3(\sigma).[\beta^2]) = \tau^8\chi_5$$

因此，$^{\mathrm{BS}}\widetilde{E}^\infty_{12,\ 8,\ -4,\ -8}$ 由 $\tau^8\chi_2$ 张成。

断言的证明。令 S为满足$x \in \{\sigma, \beta\}$的$Q_I(x)$所构成的集合，其中I遍历 x 的非空正规序列。令 $M(S)$ 为由 S 生成的单项式集合，并通过双射将 $E^1_{*,*,*}$ 与由 $M(S)$ 张成的向量空间 $\mathbb{F}_2\{M(S)\}$ 视为同一对象

$$\mathbb{F}_2\{M(S)\} \hookrightarrow \mathbb{F}_2[\{Q^I(x)\}_{I,x}] = E^1_{*,*,*} \to \overline{E}^1_{*,*,*}$$

它用符号表示为将 $Q_I(x)$ 映射到 $[Q_I(x)]$。对于每个 $r \geqslant 0$，定义

$$A(S)^{(r)} := \{x \in M(S)_{12,8,*} \mid x \text{ is divisible by } Q_1(\sigma)^r \text{ but not by } Q_1(\sigma)^{r+1}\}.$$

现在我们证明，对于 $i = 2$， $A(S)(0) = \{\beta^4\}$、 $A(S)^{(i)} = \{\chi_i, \chi_i'\}$ 为空；对于 $i = 4$， $_i = \{\chi_i\}$，其中 $A(S)(i)$， $A(S)^{(r)}$ 以及其他所有此类项均为空。首先， $A(S)(r) = \varnothing$ 对 $r \geqslant 6$ 显然成立，因为 $Q_1(\sigma)^r$ 的分次为 $2r$，而 S 的所有元素都具有正分次。为计算其他 $A(S)(r)$，按 I 的长度整理 S 会很方便：令 L_rS 表示形如 $Q_I(\sigma)\ Q_I(\beta)$ 的元素集合，其中 I 的长度为 r。于是可以利用定理 6.17 列出以下表格，给出{ 同调次数为 $\leqslant 8$ 的元素}。如果我们定义

$r = 0$	$(3,2)\ \beta$			
$r = 1$	$(2,i)\ Q_i(\sigma), 1 \leqslant i \leqslant 8$	$(6, 4+j)\ Q_j(\beta), 1 \leqslant j \leqslant 4$		
$r = 2$	$(4,3)\ Q_{1,1}(\sigma)$	$(4,5)\ Q_{1,2}(\sigma)$	$(4,7)\ Q_{1,3}(\sigma)$	$(4,6)\ Q_{2,2}(\sigma)$
	$(4,8)\ Q_{2,3}(\sigma)$	$(4,9)\ Q_{1,4}(\sigma)$	$(4,9)\ Q_{3,3}(\sigma)$	

表 2. $L_rS \cap${同调次数为 $\leqslant 8$ 的元素}。这些上同调类按其分次和同调次数标记。

斜率三重次数为 (g,d,f) 的元素 $x \in M(S)$ 的斜率为 $\frac{d}{g}$。于是

$$\operatorname{slope}(Q_{(s_1,s_2,\ldots,s_n)}(x)) = \frac{s_1 + 2s_2 + \cdots + 2^{n-1}s_n + 2^n d(x)}{2^n g(x)}.$$

特别地，当 $r > 0$ 时，$\min \operatorname{slope}(L_rS) = \frac{2^r-1}{2^r}$ 且仅在 $Q_1^{\circ r}(\sigma)$ 处取到。对于一个区间 $I \subseteq [0,1]$，令 S'_I 表示 $S' := S \setminus \{Q_1(\sigma)\}$ 中斜率为 $\lambda \in I$ 的元素集合。令 $M(S')$ 表示 S' 上非零单项式的集合。由于 $A(S)^{(r)} \subseteq Q_1(\sigma)^r \cdot \mathbb{F}_2\{M(S')\}$，我们的策略是通过分析 $S'_{[0,1]}$中元素的斜率来计算 $A(S)(r)$。上述关于最小斜率的讨论有一个有用的推论：

$$S'_{[0,\frac{2}{3})} = \varnothing, \qquad S'_{[0,\frac{2}{3}]} = \{\beta\}, \qquad S'_{(\frac{2}{3},\frac{3}{4}]} = \{Q_{1,1}(\sigma)\},$$

由此可得 $A(S)^{(0)} = \{\beta^4\}$。

- 若 $x \in A(S)(1)$，则对于某个 $x' \in M(S')_{10,7,*}$，有 $x = Q_1(\sigma)x'$。由于 $\frac{7}{10} < \frac{3}{4}$且 $S'_{[0,\frac{2}{3})} = \varnothing$，$A(S)(1) = \varnothing$。
- 若 $x \in A(S)(2)$，则对于某个 $x' \in M(S')_{8,6,*}$，有 $x = Q_1(\sigma)^2x'$。若 y可被 β整除，则由于 β是 S' 中唯一处于奇分次的元素， y必须可被 β^2整除，因此 $y = \beta^2 z$ 满足 $z \in M(S')_{2,2}(S') = \{Q_2(\sigma)\}$。若 y不可被 β 整除，则 $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$告诉我们 $y = Q_{1,1}(\sigma)^2$。
- 若 $x \in A(S)(3)$，则对于某个 $y \in M(S')_{6,5,*}$，有 $x = Q_1(\sigma)^3 y$。和之前一样，如果 y是 β−可除的，那么 y就是β^2−可除的，但这是不可能的，因为 $M(S')_{0,1,*} = \varnothing$。现在，当$r \geqslant 3$时，$L_rS$的最小斜率超过 5 6，因此 y必须包含一个属于 $(L_1S \cup L_2S) \cap S'$ 的因子。如果 y在 L_2S 中没有因子，那么我们必须有 $y = Q_1(\beta)$；否则， y是在 $Q_i(\sigma)$、 $i \geqslant 2$上分次为 6 的单项式，并且所有单项式的同调次数都是 > 5。如果 y含有 $L_2S \cap S'$ 中的一个因子，那么该因子只能是$Q_{1,1}(\sigma)$ $(M(S')_{2,1} = \varnothing)$，所以 $y = Q_{1,1}(\sigma)Q_2(\sigma)$。
- 如果 $x \in A(S)(4)$，那么 $x = Q_1(\sigma)^4 y$、 $y \in M(S')_{4,4} = \{Q_2(\sigma)^2\}$。
- 最后，如果 $x \in A(S)(5)$，那么对于某个 $y \in M(S')_{2,2}$，$x = Q_1(\sigma)^5 y\{Q_3(\sigma)\}$。

◀

■

证明 定理 6.21。我们首先证明， $E^1_{13,8,*}$由表3中的类张成。我们使用与定理 6.19的证明类似的论证；我们也采用那里使用的同一套记号，只是这次我们令 $A(S)^{(r)}$恰好由 $Q_1(\sigma)^r$-可除的、位于 $M(S)$ 中且滤过为 $(13, 8, *)$ 的元素组成。

断言。 $A(S)^{(r)} = \{\omega_r\}$对于 $r = 2$、3、4以及所有其他 $A(S)^{(r)}$ 均为空。

name	类	乘法滤过
ϖ_2	$[Q^1(\sigma)^2\beta^3]$	-7
ϖ_3	$[Q_1(\sigma)^3Q_{1,1}(\sigma)\beta]$	-11
ϖ_4	$[Q_1(\sigma)^4Q_2(\sigma)\beta]$	-11

表3。 $E_{13,\,8,\,*}^{1}$的基。

断言的证明。 $*$假设 $x=\beta^i y\in A(S)^{(0)}$对于某个 $i\geqslant 0$成立，则 $\operatorname{slope}(y)=\frac{8-2i}{13-3i}$，这对于 all $i<7$。So by 迭代 ly 应用lying t he fact $S^{(0,\frac{3}{4})}=S'_{\frac{1}{2}=3}\{\beta\}$，我们看到任意 $x\in A(S)^{(0)}$ must be β^7-可整除，而这不可能发生，因为 β^8 的分次太大。

$*$假设 $x\in A(S)_{(1)}$，那么对于某个 $y\in M(S')_{11,7,*}$，有 $x=Q_1(\sigma)y$。如上所述，关于 $i<5$ 的不等式 $\frac{11-2i}{7-3i}<\frac{3}{4}$表明 y必须是 β^5-可整除的，这不可能发生。

$*$假设 $x\in A(S)_{(2)}$，因此 $x=Q_1(\sigma)^2y$对某个 $y\in M(S')_{9,6,*}$成立。由于 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=\min\operatorname{slope}(S')$，因此只能有 $y=\beta^3$。

$*$若 $x\in A(S)_{(3)}$，则 $x=Q_1(\sigma)^3y$对某个 $y\in M(S')_{7,5,*}$成立。由于 β是 S'中唯一具有奇分次的元素，因此 $y=\beta z$对某个 $z\in M(S')_{4,3,*}$成立。但 $M(S')_{4,3,*}=\{Q_1,1(\sigma)\}$： S'中长度为 j的元素，其分次为 $\geqslant 2^j$；我们在表 2 中列出了长度为 $\leqslant 2$ 且同调分次为$\leqslant 8$ 的元素。

$*$若 $x\in A(S)_{(4)}$，则 $x=Q_1(\sigma)^4y$对于某个 $y\in M(S')_{5,\,4,\,*}$。再次考察分次的奇偶性可知， $y=\beta z$对于某个 $z\in M(S')_{2,\,2,\,*}$，且 $M(S')_{2,\,2,\,*}=\{Q_2(\sigma)\}$。

$*$ $A(S)_{(5)}=Q_1(\sigma)^5\cdot M(S')_{3,3,*}$以及 $A(S)_{(6)}=Q_1(\sigma)^6\cdot M(S')_{1,2,*}$。但 $M(S')_{3,3,*}$和 $M(S')_{1,2,*}$都为空。

$*$当 $r\geqslant 7$时， $Q_1(\sigma)^r$的分次超过 13，因此 $A(S)_{(r)}=\varnothing$对于 $r\geqslant 7$。

◀

根据该断言， ${}^{\mathrm{BS}}E_{13,\,8,\,-5,\,*}^{1}$由 $\tau^2\varpi_2$、 $\tau^6\varpi_3$、 $\tau^6\varpi_4$张成。第一个类存活到第 4 页，并在那里支持一个非平凡微分 ${}^{\mathrm{BS}}d^4(\tau^2\varpi_1)=\tau^6[\beta Q^1(\sigma)^5]$。另外两个是永久循环，但它们也是微分的目标

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{BS}}d^4(\tau^2Q_{1,1}(\sigma)[\beta^3])&=\tau^6\varpi_3\\
{}^{\mathrm{BS}}d^4(\tau^2Q_1(\sigma)Q_2(\sigma)[\beta^3])&=\tau^6\varpi_4.
\end{aligned}
$$

因此 ${}^{\mathrm{BS}}E_{13,\,8,\,-5,\,*}^{\infty}$为零，引理得证。 ■

6.4.3. **基变换到** $a(1)$。 我们的目标是描述自同态 $\varphi_{X_1}:=\tau^{-1}\widetilde{\varphi_{X_1}}$沿着 $\mathbb{E}_\infty$-映射 Ψ_{X_1}： $X_1\to a(1)$ (6.15) 的基变换，见下文的 定理 6.24。为此，我们将 Ψ_{X_1} 细化为一个带滤过的$\mathbb{E}_\infty$-映射

$$\widetilde{\Theta}:=u_{a(1)}\circ \mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty}(\Psi_{X_1}):\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty}X_1\to \mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}a(1),$$

其中 $u_{a(1)}$： $\text{滤}^{\mathbb{E}_\infty}a(1)\to \text{滤}^{\mathrm{aug}}a(1)$ 由典范乘法滤过的泛性质得到；详细内容请参阅 [RW25, §8。4]。

引理 6.23。 设$\{E^r(\widetilde{\Theta})\}_r$ 是由 $\widetilde{\Theta}$ 诱导的谱序列映射。那么

(i) $E^1(\widetilde{\Theta})(\sigma)=h_{10}\in E^1(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}a(1))$,
(ii) $E^1(\widetilde{\Theta})(\beta)=h_{20}\in E^1(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}a(1))$

其中 σ， $\beta\in E^1(\text{滤}^{\mathbb{E}_\infty}X_1)$ 与 §6.4.2 中的相同。特别地， $\Psi_{X_1}\cong\tau^{-1}\widetilde{\Theta}$ 将 $\sigma\in\pi_{1,\,0}(X_1)$ 映至 $h_{10}\in\pi_{1,\,0}(a(1))$，因此 $a(1)\otimes_{X_1}X_1/\sigma\simeq a(1)/h_{10}$ 作为左 $a(1)$-模。

证明。 对于 (i)，我们首先提醒自己， Ψ_{X_1} 的正式定义是复合映射

$$X_1\xrightarrow{f_1}\mathrm{CGL}\xrightarrow{t_{\mathrm{CGL}}}\mathrm{cgl}\xrightarrow{\mathrm{Cobar}(\varphi^\vee)}a(1),$$

其中 f_1 是底胞腔的包含， t_{CGL} 是截断 $\mathbb{E}_\infty$-映射（5.3），而 $\varphi^\vee$ 是在 §6.2中构造的。考虑霍普夫代数映射

$$\varphi' : \Delta_{X_1} = \mathbb{F}_2[\overline{\sigma}, \delta] \to \Delta_{\mathrm{CGL}} \xrightarrow{\varphi^\vee} A(1)_*$$

其中，第一个映射将生成元映到 Δ_{CGL} 中同名的元素。由截断映射的自然性， $t_{(-)}$, Ψ_{X_1} 等价于

$$X_1 \xrightarrow{t_{X_1}} x_1 \xrightarrow{\mathrm{Cobar}(\varphi')} a(1)$$

因此，只需证明

(a) $u_{x_1}\,\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty}(t_{X_1}) : \mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1 \to \mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}\, x_1$ 将 $\sigma \in E^1(\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty}(X_1))$ 映到 $\sigma \in E^1(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}\, x_1)$。(b) 由 φ' 诱导的 $E^1(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}\, x_1) \to E^1(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}\, a(1))$ 将 σ 映到 h_{10}。

这里，$\overline{\sigma}$ 由余 bar 复形中由本原元 $\sigma \in \Delta_{X_1}$ 给出的循环定义。特别地，(b) 只是 $\overline{\varphi}'(\sigma) = \xi_1$ 的推论。利用自然性，我们可以将 (a) 化简为

(a') Let $R = \mathbb{E}_\infty(\mathbb{S}^{1,0}\{\sigma\})$, then $E^1(u_r \circ \mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty}(t_R))(\sigma) = \overline{\sigma}$.

由于 σ 和 σ 都是永久循环，且分别对应其各自 $\pi_{1,0} \cong \mathrm{F}_2$, 中的生成元，因此只需证明 $\tau^{-1}(u_r \circ \mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty}(t_R))$ 在 $\pi_{1,}0$ 上是同构。由于 $\tau^{-1}u_r$是等价，接下来只需考虑 $\tau^{-1}\,\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty}\, t_R \simeq t_R$。根据 [Bur22，引理 A.11]， t_R 是等价，当且仅当 $\mathrm{Bar}(t_R)$ 是等价。由于 R是连通的， $\mathrm{Bar}\, R$和 $\tau^{\mathrm{diag}}_{\leqslant 0}\mathrm{Bar}\ R$都是单连通的，因此 Bar Cobar $\simeq$在它们上恒等。由此可得， $\mathrm{Bar}(t_R)$ 等价于关于对角 t-结构的截断映射 Bar $R \to \tau^{\mathrm{diag}}_{\leqslant 0}\mathrm{Bar}\ R$，而这确实是次数 1 上的等价。

对于 (ii)，只需注意到 h_{20} 是 $E^1_{3,\ 2,\ -1}(\mathrm{fil}^{\mathrm{aug}}\, a(1))$ 中唯一能够存活到 E^2、且在 d^2 下的像为 $h_{10}h_{11}$ 的类。另一方面， $d^1(E^1(\widetilde{\Theta})(\beta)) = E^1(\widetilde{\Theta})(d^1\beta) = 0$，并且

$$d^2(E^2(\widetilde{\Theta})(\beta)) = E^2(\widetilde{\Theta})(d^2\beta) = E^2(\widetilde{\Theta})(\sigma Q_1(\sigma)) = h_{10}h_{11}.$$

最后一个等式用到了 (i) 以及 $\widetilde{\Theta}$ 是 E_∞ 这一事实。 ■

命题 6.24. 在上述同一认定下， $a(1) \otimes_{X_1} \varphi_{X_1}$ 等价于乘以 $y_{12,\ 8}$ 这一左模自同态。

证明. 将 $[-,-]$ 记作左 $a(1)$-模映射的同伦类。定义 $a(1)/h_{10}$ 的余纤维序列诱导出一个长正合列，其中包含如下片段

$$\pi_{13,9}(a(1)/h_{10}) \to [\Sigma^{12,8}a(1)/h_{10}, a(1)/h_{10}] \to \pi_{12,8}(a(1)/h_{10}) \to \pi_{13,8}(a(1)/h_{10}).$$

根据 定理 6.14 ，首项和末项均为零，因此得到

$$[\Sigma^{12,8}a(1)/h_{10}, a(1)/h_{10}] \cong \pi_{12,8}(a(1)/h_{10}) \cong \mathbb{F}_2.$$

现在只需证明 $a(1) \otimes_{X_1} \varphi_{X_1}$ 非零。事实上，$(a(1) \otimes_{X_1} \varphi_{X_1})_*(z_{0,\ 0})$ 的像由非零元素 $E^\infty(\widetilde{\Theta})(\beta^4) = h_{20}^4$检测到。■

7. 检测器的应用

在 §7.1 中，我们陈述并证明引言中 定理 1.3 和 定理 1.1 的精确版本。在 §7.2 中，我们说明，除滤过外，相对类 α_{i1}, α_{i2} 不会为绝对同调群带来新的信息。下图 图 10 概括了这一情形。 与上一节一样，CGL $\cdot\cdot$=CGL($\mathbb{F}_2$)。

7.1. 在 $\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)/\sigma$ 中检测周期族。设

$$\Psi : \mathrm{CGL} \to a(1)$$

是以下映射的复合 t_{CGL}： CGL $\to$ cgl （5.3）与检测映射 cgl $\to a$（1），该检测映射由我们在第 §6.2 节中构造$\Psi f_1 = \Psi_{X_1}$，因此根据定理 6.23 $\Psi_*(\sigma) = h_{10}$，从而 Ψ 诱导出余纤维序列之间的映射

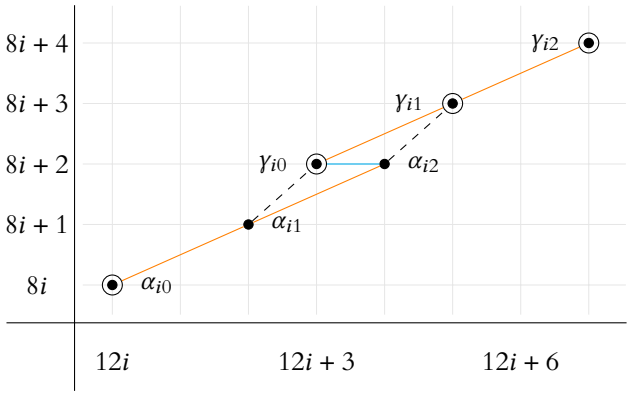


图 10. 定理 7.1 的非零类 α_{ij}, γ_{ij} $(i \geqslant 0)$ 定理 7.1；被圈出的类在边界映射下保持不变 $\partial_*^{\mathrm{CGL}}$；虚线表示 $q_*^{\mathrm{CGL}}\partial_*^{\mathrm{CGL}}(\gamma_{ij}) \equiv \alpha_{i(j+1)}$ 在 E^∞(滤过$^{\mathbb{E}_\infty}$ CGL/$\overline{\sigma}$)中。橙色/蓝色线表示一个 $Q^1(\sigma)$ / σ-扩张。

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{1,0}\mathrm{CGL} & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{CGL} & \xrightarrow{q^{\mathrm{CGL}}} & \mathrm{CGL}/\sigma & \xrightarrow{\partial^{\mathrm{CGL}}} & \Sigma^{1,1}\mathrm{CGL} \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma^{1,0}\Psi} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\Psi}} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma^{1,1}\Psi} \\
\Sigma^{1,0}a(1) & \xrightarrow{h_{10}} & a(1) & \xrightarrow{q^{a(1)}} & a(1)/h_{10} & \xrightarrow{\partial^{a(1)}} & \Sigma^{1,1}a(1)
\end{array}$$

检查长正合序列可知，边界映射

$$\pi_{3,2}(\mathrm{CGL}/\sigma) \to \pi_{2,1}(\mathrm{CGL}) = \mathbb{F}_2\{Q^1(\sigma)\}$$

是一个同构；令 $\omega_{3,2} \in \pi_{3,2}(\mathrm{CGL}/\sigma)$ 为与 $Q^1(\sigma)$对应的类。我们记 $\omega_{0,0} \coloneqq q_*^{\mathrm{CGL}}(1) \in \pi_{0,0}(\mathrm{CGL}/\sigma)$。最后，令 $\varphi\colon \Sigma^{12,8}\mathrm{CGL}/\sigma \to \mathrm{CGL}/\sigma$ 表示左 CGL-模自同态 $\mathrm{CGL} \otimes_{X_1} \varphi_{X_1}$。

命题 7.1。 对于每个 $i \geqslant 0$, $j \in \{0,1,2\}$，这些上同调类

$$\alpha_{ij} \coloneqq \varphi_*^i(Q^1(\sigma)^j.\omega_{0,0}) \in \pi_{12i+2j,8i+j}(\mathrm{CGL}/\sigma)$$
$$\gamma_{ij} \coloneqq \varphi_*^i(Q^1(\sigma)^j.\omega_{3,2}) \in \pi_{12i+2j+3,8i+j+2}(\mathrm{CGL}/\sigma) \tag{7.2}$$

满足

$$\Psi_*(\alpha_{ij}) = y_{12,8}^i h_{11}^j.z_{0,0}$$
$$\Psi_*(\gamma_{ij}) = y_{12,8}^i h_{11}^j.z_{3,2}$$

特别地， α_{ij}, γ_{ij}均非零。

证明。 利用 $\pi_{*,*}(a(1))$-模结构以及 定理 6.14 中给出的$\pi_{*,*}(a(1)/h_{10})$，再结合$\Psi_*(\sigma) = h_{10}$这一事实，只需验证 $\Psi_*(\alpha_{00}) = z_{0,0}$ 和 $\Psi_*(\gamma_{00}) = z_{3,2}$。这可以利用长正合列的自然性来完成。 ■

注 7.3。根据构造， $f_{1*}\colon \pi_{g,d}(X_1) \to \pi_{g,d}(\mathrm{CGL})$ 对 $g \leqslant 3$, $d \leqslant 2$ 是一个同构，因此$\omega_{3,2} \in \pi_{3,2}(\mathrm{CGL}/\sigma)$ 唯一对应于 $\pi_{3,2}(X_1/\sigma)$ 中的一个上同调类，我们也将其记作 $\omega_{3,2}$。当然，$\pi_{0,0}(X_1/\sigma)$ 中的 1 在 f_1 下映为$\omega_{0,0} \in \pi_{0,0}(\mathrm{CGL}/\sigma)$，因此我们也可以将这个类称为$\omega_{0,0}$。于是，以 φ 的位置代入 φ_{X_1} 的公式 (7.2)，便定义了 X_1/σ 中的若干类，它们在f_1下映为 α_{ij}, γ_{ij}。因此，定理 7.1 也告诉我们， X_1/σ 不具有斜率为 $> \frac{2}{3}$ 的消失线。将 [RW25 定理 8.1 (ii)] 应用于 $t_{X_1}\colon X_1 \to x_1$ ，可知 x_1/σ 也不具有斜率为 $> \frac{2}{3}$ 的消失线。

W现在证明，闪电图的顶部和尖端在边界映射下保持不变 p.

定理 7.4. 设 α_{ij}, $\gamma_{ij} \in \pi_{*,*}(\mathrm{CGL}/\sigma)$, $i \geqslant 0$, $j \in \{0, 1, 2\}$为定理 定理 7.1中的上同调类。

(i) 对于每个 $i \geqslant 0$, $j \in \{0,1\}$, 该类

$$u_{ij} \coloneqq \partial_*^{\mathrm{CGL}}(\gamma_{ij}) \in \pi_{12i+2j+2,8i+j+1}(\mathrm{CGL})$$

非零。

(ii) 上同调类

$$s_i \cdot\cdot= \partial_*^{\mathrm{CGL}}(\alpha_{i0}) \in \pi_{12i-1,8i-1}(\mathrm{CGL}) \qquad ,i>0$$

$$u_{i2} := \partial_*^{\mathrm{CGL}}(\gamma_{i2}) \in \pi_{12i+6,8i+3}(\mathrm{CGL}) \qquad ,i\geqslant 0$$

均非零。

证明。 对于 (i)，只需验证 $\Psi_*(u_{ij})$; 由自然性可知它等于 $\partial^{a(1)}(y_{12,8}^i h_{11}^i \cdot z_{3,2})$，且它们均非零。它们确实非零，因为在 $a(1)$的长正合列中，边界映射两侧的向量空间均为零，而该边界映射的目标非零。

对于 (ii)，反设 $u_{i2}=0$。那么对某个类 $\gamma_i' \in \pi_{12i+7}$， $\gamma_{i2}=q_*^{\mathrm{CGL}}(\gamma_i')\ {}_{8i+4}(\mathrm{CGL})$。$\Psi_*(\gamma_i')$ 非零，因为根据定理 7.1， $q_{a(1)*}\Psi_*(\gamma_i') = \Psi_*(\gamma_{i2}) \neq 0$，所以 $\Psi_*(\gamma_i')$ 必须等于该双次数中唯一的非零类，即 y_{12}^i, ${}_8y_7$,4（参见 (6.10)、图 8），它是 h_{10}-无挠的。但 $\pi_{*,>0}(\mathrm{CGL})$ 中的每个类都是 σ-挠的[16]。同理，若 $s_i=0$，则对某个类 α_i'， $\alpha_{i0}=q_*^{\mathrm{CGL}}(\alpha_i')$。如前所述，必有 $\Psi_*(\alpha_i') = y_{12}^i,8$，它是 h_{10}-无挠的。■

7.2. **滤过对象的蛇引理**。 本节的主要结果是 定理 7.8，它说明对于 α_{i1} 和 α_{i2} 分别与 γ_{i0} 和 γ_{i1} 通过某种“σ-Bockstein”相关，且满足一定的滤过条件。由于构造自同态时可能涉及非平凡的选择 φ_{CGL}，这已是我们所能期望的最好结果。 定理 7.8 本身并未为 $H_*(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2);\mathbb{F}_2)$带来新的见解；相反，我们希望证明方法本身也能引起兴趣。

对于 $X \in \mathrm{Fil}(\mathcal{D}(F_2)^{\mathbb{Z}})$，我们记作

$$\delta_1^\infty : X/\tau \to \Sigma^{0,1,1}X$$

余纤维序列 $\Sigma^{0,\ 0,\ 1}X \xrightarrow{\tau} X \xrightarrow{\text{模}\tau} X/\tau$的边界映射。这个定义是我们从[CDN24第 2 节中了解到的。3]。从本质上说， δ_1^∞编码了$\{E^r(X)\}_r$中的所有微分。

给定余纤维序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathrm{Fil}(\mathcal{D}(F_2)^{\mathrm{gr}})$，其边界映射为 $Z \xrightarrow{\partial} \Sigma^{0,\ 1,\ 0}X$，我们提出一种方法，用于计算 $\pi_{*,\ *,\ *}(Z)$ 的某个子集上的边界映射。考虑以下交换图表

(7.5)

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\partial} & \Sigma^{0,1,0}X \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\tau} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\tau} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\tau} & & \\
X/\tau & \xrightarrow{f/\tau} & Y/\tau & \xrightarrow{g/\tau} & Z/\tau & & \\
\downarrow{\scriptstyle \delta_1^\infty} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_1^\infty} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_1^\infty} & & \\
\Sigma^{0,1,1}X & \xrightarrow{\Sigma^{0,1,1}f} & \Sigma^{0,1,1}Y & \xrightarrow{\Sigma^{0,1,1}g} & \Sigma^{0,1,1}Z & & \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma^{0,1,0}\tau} & & & & & & \\
\Sigma^{0,1,0}X & & & & & &
\end{array}$$

其行和列均为余纤维序列。假设 $\widetilde{z} \in \pi_{g,\ d,\ f}(Z)$ 具有

$$(\partial/\tau \circ \mathrm{mod}\tau)_*(z) = 0,$$

那么我们可以选取一个代表元 $\widetilde{z}\colon S^{g,\ d,\ f} \to Z$ 以及 一个 $\partial/\tau \circ \mathrm{mod}\tau \circ \widetilde{z}$ 的零伦，从而得到一个$y : S^{g,\ d,\ f} \to Y/\tau$。右下角的同伦方块与右侧的垂直余纤维序列共同提供了 $\Sigma^{0,\ 1,\ 1}g \circ \delta_1^\infty \circ y$ 的零伦，从而得到一个映射 $\widetilde{x}\colon S^{g,\ d,\ f} \to \Sigma^{0,\ 1,\ 1}X$。

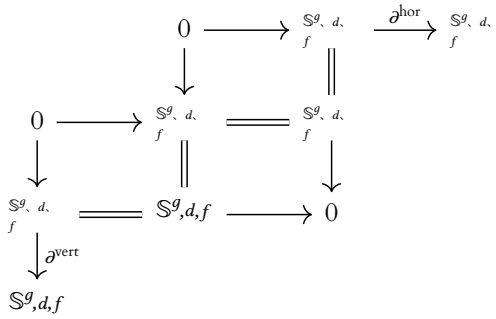
引理 7.6。 在上述情形下，

$$\partial_*(z) = \tau\widetilde{x} \in \pi_{g,d,f}(\Sigma^{0,1,0}X)$$

无论我们做出哪些选择。特别地，我们可以用一个类 $y \in \pi_{g,d,f}(Y/\tau)$ 来指定映射 y，使得 $(g/\tau)_*(y) = (\text{模}\tau)_*(z)$。

[16]当 $d>0$ 时，稳定同调 $H_d(\mathrm{colim}_n(\mathrm{GL}_n(F_2)); F_2)$ 消失。

证明。 输入数据给出了一个从……出发的图表映射



到（7.5）。该图表的行和列都是余纤维序列。由于我们是在 F_2，上，映射空间 $\mathrm{S}^{g,d,f}$ 到其自身的路径分支仅包含零映射和恒等映射所在的路径分支，因此 ∂^{hor} 和 ∂^{vert} 等价。由自然性可得该引理。■

定理 7.7。 令 $\widetilde{\gamma_{i\epsilon}} \coloneqq \widetilde{\varphi_{X_1}}^{i}(Q^1(\widetilde{\sigma})^{\epsilon}.\widetilde{\omega_{3\,2,}})$，$\epsilon = 0, 1$，和 $\widetilde{\alpha_{i(\epsilon+1)}} \coloneqq \widetilde{\varphi_{X_1}}^{i}(Q^1(\sigma)^{\epsilon+1}\widetilde{\omega_{0\,0,}})$。 [17]考虑余纤维序列

$$\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1 \xrightarrow{\widetilde{q}} \mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\widetilde{\sigma} \xrightarrow{\widetilde{\partial}} \Sigma^{1,1,-1}\,\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1.$$

那么 $\widetilde{q}_*\widetilde{\partial}_*(\widetilde{\gamma_{i\epsilon}})$ 和 $\tau\widetilde{\alpha_{i\ \epsilon+1\ ()}}$ 在 ${}^{\mathrm{BS}}E^{\infty}(\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X/\widetilde{\sigma})$ 中有相同的像。

证明。 令 $X \to Y \to Z$ 为

$$\Sigma^{1,0,-1}\,\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X \xrightarrow{\widetilde{\sigma}} \mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X \xrightarrow{\widetilde{q}} \mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X/\widetilde{\sigma}$$

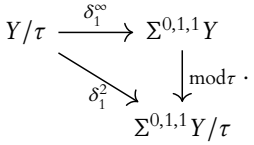
and

$$\widetilde{z} = \widetilde{\omega_{12,8}}^{i}\widetilde{\omega_{3,2}}Q^1(\widetilde{\sigma})^{\epsilon}, \quad y = \beta^{4i+1}Q^1(\sigma)^{\epsilon} \in \pi_{*,*,*}(\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1/\tau) = {}^{\mathrm{BS}}E^1_{*,*,*,0}(\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1)$$

在上述讨论中。

断言 (1). $(\text{模}\tau)_*\delta_1^{\infty}(y) = \sigma Q^1(\sigma)^{\epsilon+1}\beta^{4i} \in \pi_{*,*-1,*-1}(Y\!/\tau)$.

断言的证明 (1)。 设 δ_1^2 为余纤维序列 $Y/\tau \xrightarrow{\tau} Y/\tau^2 \xrightarrow{\text{模}\tau} Y\!/\tau$ 中的边界映射。则存在一个交换三角形



根据截断全书 [CDN24，定理 2。21]，$\delta_1^2(y)$ 是 $d^2(y)$ 的代表元。这样的代表元只有一个，即所提出的类。◂

断言 (2). 无论在获得 $\widetilde{x}$ 时涉及何种选择，我们都有

$$(\mathrm{mod}\tau)_*(\widetilde{x}) = Q^1(\sigma)^{\epsilon+1}\beta^{4i} \in \pi_{*-1,*,*+1}(X/\tau) = {}^{\mathrm{BS}}E^1_{*-1,*,*+1}(\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1)$$

断言的证明。我们有

$$\sigma(\mathrm{mod}\tau)_*(\widetilde{x}) = (\mathrm{mod}\tau)_*(\widetilde{\sigma x}) = (\mathrm{mod}\tau)_*(\delta_1^{\infty}(y)) = \sigma Q^1(\sigma)^{\epsilon+1}\beta^{4i}$$

其中，第一个等式由 $\mathrm{mod}\tau$ 的自然性得出，第二个等式由 $\widetilde{x}$ 的定义得出，最后一个等式则是断言 (1)。由于 $\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1$ 的 Bockstein E_1 页没有 σ-扭挠，断言得证。◂

由断言 (2) $(\text{模}\tau)_*(q_*\widetilde{x}) = (\widetilde{q}/\tau)_*(\text{模}\tau)_* = [Q_1(\sigma)^{\epsilon+1}\beta^{4i}]$，因此

$$q_*\widetilde{x} = \widetilde{\alpha_{i(\epsilon+1)}} + \tau\widetilde{\alpha'}$$

[17]这里 X_1 是 §6.1 中构造的 2-胞腔复形 $\mathrm{E}_\infty(\sigma)/\!/_{\mathbb{E}_\infty}\sigma Q^1(\sigma)$。这里的名称类定义于 §6.4.2。 X 在证明中将指如前所述的滤过对象 $\Sigma^{1,0,-1}\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty} X_1$。对于这种符号过载，我们深表歉意。

对某个 $\widetilde{\alpha'}$。由本节开头的讨论 $\widetilde{\partial}_*(\widetilde{\gamma_{i\epsilon}}) = \tau\widetilde{x}$，因此

$$\widetilde{q}_*\widetilde{\partial}_*(\widetilde{\gamma_{i\epsilon}}) = \tau\widetilde{\alpha_{i(\epsilon+1)}} + \tau^2\widetilde{\alpha'}.$$

这就证明了该结果，因为 Bockstein 谱序列给出的滤过同伦群上的滤过就是 τ-进滤过。■

将 τ 取逆后，我们推得

推论7.8。 类 $q_*^{\mathrm{CGL}}(u_{i\epsilon})$和 $\alpha_{i(\epsilon+1)}$在 $E_{*,*}^{\infty}(\mathrm{fil}^{\mathbb{E}_\infty}\mathrm{CGL}/\widetilde{\sigma})$中的像相同。 ■

8. 对 GL$_n(\mathcal{O})$ 和 Aut(F_n) 的推论

设 $\mathcal{O}$是一个戴德金整环，其商中含有 $\mathbb{Z}/2$（例如 $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$）。本节将证明关于 2 3- 稳定性”的一些推论，涉及 GL$_n(\mathcal{O})$ 和 Aut(F_n) (定理 8.4 和 定理8.5）。首先，我们需要为 Aut(F_n)做一些准备。

令 $\mathbf{G}^{\mathrm{Aut}(F)}$ 为一个 1-群胚，其对象为非负整数，态射由自由群 Aut(F_n) 在 n 个字母上的自同构群给出。令 $\mathbf{G}^{\mathrm{Aut}(F)}$配备由加法给出的对称幺半结构。由对象上的包含给出的函子 $r\colon \mathbf{G}^{\mathrm{Aut}(F)} \to \mathbf{Z}$ 是对称幺半的。应用 定理 4.1 ，我们得到一个 E$_\infty$-代数 CAut(F) $\coloneqq (\mathrm{B}\mathbf{G}^{\mathrm{Aut}(F)})_{\mathbb{F}_2}$，其分次 n处的同伦群计算群同调 $H_*(\mathrm{Aut}(F_n); \mathrm{F}_2)$。由 $\mathbf{Z}^{\oplus n} = F_n^{\mathrm{ab}}$诱导的同态 Aut($F_n$) $\to$ GL$_n$(Z) 诱导一个 E$_\infty$-映射 CAut(F) $\to$ CGL(Z)，从而得到

$$\mathrm{CAut}(F) \to \mathrm{CGL}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2) \to a(1). \tag{8.1}$$

由于 Aut(F_1) = GL$_1$(Z)，稳定化类 $\sigma \in \pi_{1,0}(\mathrm{CGL}(\mathrm{F}_2))$ 完全提升到 CAut(F)，使得 CAut(F)/σ在分次 n 处的同伦群计算 $H_*(\mathrm{Aut}(F_n), \mathrm{Aut}(F_{n-1}); \mathrm{F}_2)$。我们希望将自同态 φ提升为 CAut(F)/σ上的自同态。然而，由于 $\sigma Q^1(\sigma)$ 在 CAut(F) 中非零，我们无法将 X_1 映射到 CAut(F)。但是

引理*8.2.* $\pi_{n,d}$*(CAut(F))* $\to$ $\pi_{n,d}$*(CGL(Z))* 在 $n \leqslant 3, d \leqslant 1$ 时是一个同构。特别地，若令$\theta_1 \in \pi_{1,}$ *1(CAut(F))* 为类 $\theta_1 \in \pi_{1,}$*1(CGL(Z))*，则 $\sigma^2\theta_1 = \sigma Q^1(\sigma) \in \pi_{3,}$*1(CAut(F))*，因此我们有一个 E_∞-映射

$$g_1 : Y_1 := \mathbb{E}_\infty(\mathbb{S}^{1,0}\{\sigma\} \oplus \mathbb{S}^{1,1}\{\theta_1\})//_{\mathbb{E}_\infty}(\sigma Q^1(\sigma) - \sigma^2\theta_1) \to \mathrm{CAut}(F). \tag{8.3}$$

证明. $d = 0$ 情形显然。对于 $d = 1$，只需验证 Aut(Fn) $\to$ GL$_n$(Z) 在阿贝尔化上对于 $n = 1, 2, 3$ 是一个同构。对于 $n = 1$，Aut(F_1) 就是 GL$_1$(Z)。对于 $n = 2$，众所周知，Out(F_2) $\cong$ GL$_2$(Z) 是一个同构。利用 [AFV07 提供的 Aut(F_3) 的显式表示，推论 1] 可计算出 Aut(F_3)$^{\mathrm{ab}} \cong$ Z/2，它在抽象意义上也与 GL$_3$(Z)^{ab}同构。由于 Aut(F_3)$^{\mathrm{ab}} \to$ GL$_3$(Z)^{ab} 是满射，故证毕。■

根据定理 5.6 (iii) 和定理 4.11 (iii)，$\mathbb{E}_\infty$-映射 $c\colon\ Y_1 \to X_1$ 通过压缩胞腔 θ_1在稳定性霍普夫代数上诱导一个同构。

定理 8.4. 设 A *is* 是一个连通$\mathbb{E}_\infty$-代数，属于 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}$，满足$(SCE)$。假设存在$\mathbb{E}_\infty$ 映射

$$Y_1 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{r} \mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)$$

使得 $\Delta_{ri} \circ (\Delta_c)^{-1} = \Delta_{f_1}\colon \Delta_{X_1} \to \Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)}$。那么 $A/i_*\sigma$不具有斜率为 $> \frac{2}{3}$ 的消失线。 –

证明。令 x_1、 y_1、 a分别表示 E$_\infty$ 代数 Cobar(Δ_{X_1})、Cobar(Δ_{Y_1})、Cobar(Δ_A)。由于 $y_1 \xrightarrow{\cong} x_1$ 是一个等价，自同态 $\varphi_{x_1} \coloneqq \mathrm{Cobar}(\Delta_{\varphi_{X_1}})$ 在 y_1/σ 上定义了一个自同态，我们将其称为 φ_{y_1}。根据假设，Cobar(Δ_{ri}) 在 $x_1 \cong y_1$ 下等价于 Cobar(Δ_{f_1})。特别地，与 cgl $\to a(1)$（在 §6.2 中构造）的复合等价于 $x_1 \to a(1)$，因此，φ_{y_1} 沿着 $y_1 \to a(1)$的基变换等价于 φ_{X_1} 在 $X_1 \to a(1)$ 下的基变换；我们已知后者是非幂零的（定理 6.24）。因此φ_{y_1} 基变换得到 $a \otimes_A A/i_*(\sigma)$ 上的一个非幂零自同态。所以 $a \otimes_A A/i_*(\sigma)$ 不具有斜率为 $> \frac{2}{3}$ 的消失线。根据定理 5.4 (i)， $A/i_*(\sigma)$ 也不具有消失线。■

命题 8.5。两者

(i) A =CGL($\mathcal{O}$)，其中 $\mathcal{O}$ 是一个以$\mathbb{Z}/2$ 为商的戴德金整环，并且

(ii) $A = \mathrm{CAut}(F)$

满足定理 *8.4*的假设。

证明。首先注意，CGL(R) 和 CAut(F) 是连通的：若定理 4.1 中的 $r\colon \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ 经由非负整数 N 分解，且其在 $0 \in \mathbb{Z}$ 上的纤维是连通的，则所得的 $\mathbb{E}_\infty$-代数也是连通的。要求 $R = \mathrm{CGL}(\mathbb{Z})$、CAut($F$) 满足 (SCE)，等价于要求相应的 $\mathbb{E}_1$-分裂复形 $S^{\mathbb{E}_1}(n)$ 对每个 n 都是 $(n-2)$-连通的；而这正是 [Cha80，定理 1.1] 中关于 $A = \mathrm{CGL}(R)$ 的内容，以及 [Hep20，推论 4.5] 中关于 $A = \mathrm{CAut}(F)$ 的内容。我们将在下文 §8.0.1 解释细节。对于分解：

(i) CGL($\mathbb{Z}$) 中的关系 $\sigma^2\theta_1 = \sigma Q^1(\sigma)$ 定义了一个 $\mathbb{E}_\infty$-映射 $Y_1 \to \mathrm{CGL}(\mathbb{Z})$。对于 $A = \mathrm{CGL}(\mathcal{O})$，我们取 i 为 $Y_1 \to \mathrm{CGL}(\mathbb{Z})$ 与映射 $\mathrm{CGL}(\mathbb{Z}) \to A$ 的复合，并取 r 为由 $\mathcal{O} \to \mathbb{Z}$ 诱导的映射。(ii) 对于 $A = \mathrm{CAut}(F)$，我们取 i 为映射 (8.3)，并取 r 为由 $\mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ 诱导的映射。

关于霍普夫代数的判据相当于要求 $\sigma, \delta \in \Delta_{Y_1}$ 映射到 $\sigma, \delta \in \Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)}$。由于在$\Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)}$中，元素 σ 是本原元，且 $\psi(\delta) = 1 \otimes \delta + \sigma \otimes \bar{\sigma}^2 + \delta \otimes 1$，通过考察余乘积并利用 σ-上的代数结构，只需证明 $\Delta_{Y_1} \to \Delta_{\mathrm{CGL}}(\mathbb{F}_2)$ 在分次 1 上是同构。根据定理 4.13，我们只需证明 $Y_1 \to \mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)$ 是 (1, 0)- 连通的。确实如此。■

命题 8.6。令 A 为 $\mathrm{CGL}(\mathbb{Z})$ 或 $\mathrm{CAut}(F)$。那么 $\pi_{n,\ d}(A/\sigma) = 0$ 对于 $d < \frac{2}{3}(n-1)$成立。

证明。由于定理 8.4 中关于稳定性霍普夫代数的映射 $Y_1 \to A \to \mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)$等价于由 $X_1 \to \mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)$诱导的映射，而我们知道后者在分次 $\leqslant 5$, $\Delta_R \to \Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)}$ 上是同构，因此前者在分次 $\leqslant 5$ 上是满射。另一方面，根据将定理 4.13 应用于定理 3.1、定理 8.2，可得 $\Delta_R(n) = \Delta_{Y_1}(n)$ 对于 $n \leqslant 2$成立。因此 $\Delta_R \to \Delta_{\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)}$ 在分次 $\leqslant 2$ 上是单射。现在由定理 5.4 (ii)，映射 $r \to \mathrm{cgl}(\mathbb{F}_2)$ 反映斜率为 $\leqslant \min\{\frac{3-1}{3}, \frac{6-2}{6}\} = \frac{2}{3}$ 的消失线；结论由已知的消失线 [GKRW18b, 定理 B] 对于 $\mathrm{CGL}(\mathbb{F}_2)/\sigma$成立。■

8.0.1. $\mathbb{E}_1$ 分裂复形具有高度连通性。设 G 是一个对称幺半 1-群胚，其底层对象为自然数，且对象上的对称幺半结构由加法给出。令R 为在 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}$ 中通过对映射 $r\colon \mathrm{G} \to \mathbb{Z}$ 应用定理 4.1 得到的 $\mathbb{E}_\infty$-代数，该映射在对象上为 $\mathrm{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$。与 (G r) 相关联，对每个 $n \geqslant 2$，都有一个 $G_n \coloneqq \mathrm{Aut}_{\mathrm{G}}(n)$-半单纯集合 $S_\bullet^{\mathbb{E}_1}$，其 p-单形为

$$S_p^{\mathbb{E}_1} = \coprod_{\substack{n_0+\cdots+n_{p+1}=n \\ n_i>0}} \frac{G_n}{G_{n_0} \times \cdots \times G_{n_p}}$$

且面映射由合并相邻因子给出。 [GKRW18a，定义 17.9，注 17。11]。令$S^{\mathbb{E}_1}(n)$ 表示其厚实现，而 $S^{\mathbb{E}_1}(n)//G_n$ 表示同伦轨道，则存在自然同构

$$\pi_{n,*}(\mathrm{Bar}\, R) \cong H_{n,*-2}(S^{\mathbb{E}_1}(n)//G_n; \mathbb{F}_2)$$

[GKRW18a，定义 17.9，推论 17.5，引理 17。10]。特别地，若每个 $S^{\mathbb{E}_1}(n)$ $(n-3)$-连通，则 R 满足 (SCE)。

当 $R = \mathrm{CGL}(\mathcal{O})$， $\mathcal{O}$ 为戴德金整环时，$\mathrm{St}_R^{\mathbb{E}_1}(n)$ 同胚于偏序集 $\mathcal{T}^{\mathbb{E}_1}(n) \coloneqq \{(P, Q)\}$ 的神经，其中包含 $\mathcal{O}^{\oplus n} = P \oplus Q$且满足 $0 \subsetneq P, Q \subsetneq \mathcal{O}^{\oplus n}$ 的分解。 [Cha80 定理 1.1] 表明 $\left|\mathcal{T}^{\mathbb{E}_1}(n)\right|$同伦等价于由 $(n-2)$-球面构成的楔和。

对于 $R = \mathrm{CAut}(F)$，我们断言半单纯集合 $S_\bullet^{\mathbb{E}_1}$ 与非含单位偏序集 SP_n° 的半单纯神经[18]同构； SP_n°由 Hep20 命题 3.5] 中的偏序集 SP_n 删去所有恒等关系得到。回忆一下， SP_n 的对象是由非平凡真子群组成的有序对（P， Q），满足 $P * Q = F_n$；且（P, Q） $\leqslant$（P'， Q'），当且仅当存在 F_n 的真子群 J_0、J_1、J_2，使得（P, Q） $=(J_0, J_1 * J_2)$，（P', Q'） $=(J_0 * J_1, J_2)$。特别地， SP_n° 中的长度为 p 的链，等同于由 F_n 的非零真子群构成的有序元组（H_0, …， H_{p+1}），满足 $H_0 * \cdots * H_{p+1} = F_n$（通过 Hep20 推论 4.5] 证明中的映射 λ）。固定 F_n 的一个自由基 e_1、$\cdots$ e_n。所述同构将 $g \in G_{n_0} \times \cdots \times G_{n_p}$

[18]在 [ERW19 定义 3 的意义下。3]

映射为 $g.(\langle e_1, \ldots, e_{n_0}\rangle, \ldots, \langle e_{n-n_p+1}, \ldots, e_n\rangle)$。注意，$SP_n^\circ$的添单位化[19]（$SP_n^\circ$）$^+$恰好是 SP_n，并且根据[ERW19] $\left\|SP_n^\circ\right\| \to \left\|SP_n^{\circ+}\right\|$，这是一个弱同伦等价。厚实现 $\|SP_n\|$ 与薄实现 $|SP_n|$ [同伦等价（ERW19，引理 1.7]）。$|SP_n|$ 与（$n-2$）个球面的楔和同伦等价，这正是 Hep20 推论 4.5] 的内容。

[19]按照 [ERW19，定义 3。7]。

参考文献

[AFV07] Heather Armstrong、Bradley Forrest 和 Karen Vogtmann。“Aut(F_n) 的一个表示”。即将在《群论杂志》发表（2007）。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0701937.[AM04] Alejandro Adem 和 R. James Milgram。《有限群上同调》。柏林、海德堡：施普林格，2004。DOI：https://doi.org/10.1007/978-3-662-06280-7.[BC87] D. J Benson 和 J. F. Carlson。“模表示与上同调的图示方法”。《代数通讯》51（1987）。[BHS22] Robert Burklund、Jeremy Hahn 和 Andrew Senger。“高度连通、几乎闭合流形的边界”。即将在《数学学报》发表（2022）。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.1910.14116.[BK24] Eva Belmont 和 Hana Jia Kong。“乘法谱序列的 Toda 括号收敛定理”（2024）。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.08689.[BS23] Shay Ben-Moshe 和 Tomer M. Schlank。“高等半加性代数 K 理论与红移”（2023）。URL：https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.10203.[BS94] Anetta Bajer 和 Hal Sadofsky。“有限维连通余交换霍普夫代数的上同调”。《纯粹与应用代数杂志》94（2，1994），第 115–126 页。URL：ttps://doi.org/10.1016/ 0022-4049(94)90027-2.[BT16] Michelle Bucher 和 Alexey Talambutsa。“自由积与合并积的指数增长率”。《以色列数学杂志》212（2016），第 521–546 页。DOI：https://doi.org/10.1007/s11856-016-1299-4.[Bur22] Robert Burklund。“Moore 谱上的乘法结构”（2022）。DOI：https://doi.org/10. 48550/arXiv.2203.14787.[CDN24] Christian Carrick、Jack Morgan Davies 和 Sven van Nigtevecht。“拓扑模形式的下降谱序列”（2024）。URL：https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.01640.[Cha80] Ruth Charney。“戴德金整环上的 GLn 的同调稳定性”。《数学新进展》56（1980），第 1–18 页。URL：http://eudml.org/doc/142684.[CLM76] F. R. Cohen、T. J. Lada 和 P. J. May。《迭代环路空间的同调》。数学讲义，533。施普林格，1976。ISBN：3-540-37985-1。[ERW19] Johannes Ebert 和 Oscar Randal-Williams。“半单纯空间”。Algebr. Geom. Topol. 19（2019），第 2099–2150 页。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.1705.03774.[GAP4] GAP——群、算法与编程，4.15.1 版。GAP 团队。2025。URL：%5Curl % 7Bhttps://www.gap-system.org%7D.[GKRW18a] Soren Galatiusm、Alexander Kupers 和 Oscar Randal-Williams。“胞腔 E_k-代数”。即将在 Asterisque 发表（2018）。URL：https://arxiv.org/abs/1805.07184.[GKRW18b] Soren Galatius、Alexander Kupers 和 Oscar Randal-Williams。“E_∞-胞腔与有限域上的一般线性群”。即将在《高等师范学校科学年刊》发表（2018）。URL：https://arxiv. org/abs/1810.11931.[HA] Jacob Lurie。《高等代数》。2017。URL：https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf。[HAP] G. Ellis。《同调代数编程》，1.66 版。GAP 软件包。2024 年 10 月。URL：https://gap-packages.github.io/hap.[Hep20] Richard Hepworth。“稳定范围的边缘”。《数学年刊》377（2020），第 123–181 页。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.1608.08834。URL：https://link.springer.com/article/ 10.1007/s00208-020-01955-0.[HO89] Alexander Hahn 和 O. Timothy O’Meara。《经典群与 K 理论》。柏林、海德堡：施普林格，1989。[Iva64] L. N. Ivanovsky。“Steenrod 代数的上同调”。《苏联科学院通报》157（6，1964），第 1284–1287 页。URL：https://www.mathnet.ru/eng/dan29952.[KMP22] Alexander Kupers、Jeremy Miller 和 Peter Patzt。“某些一般线性群的同调稳定性改进”。《伦敦数学学会会刊》125（3，2022），第 511–542 页。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.2106. 12363.[KT08] Christian Kassel 和 Vladimir Turaev。《辫群》。施普林格，2008。[LS18] Anssi Lahtinen 和 David Sprehn。“有限域上表示的模特征类”。《数学进展》323（2018），第 1–37 页。URL：https://doi.org/10.48550/arXiv.1607.01052.[Nik16] Thomas Nikolaus。“稳定的 ∞-歌剧代数与乘法 Yoneda 引理”（2016）。URL：https://arxiv.org/abs/1608.02901.[Pha87] Pham Viet Hung。“$H^*(GL_4(Z_2); Z_2)$ 的代数”。《越南数学学报》12（1987）。URL：https://beta.math.ac.vn/uploads/files/198702051.pdf.[Qui72] Daniel Quillen。“有限域上的一般线性群的上同调与 K 理论”。《数学年刊》96（1972）。[QuiN] Daniel Quillen。《未发表笔记》。URL：https://www.claymath.org/online-resources/quillen-notebooks/。

[RW24] Oscar Randal-Williams。“戴德金整环上的一般线性群的同调稳定性”（2024）。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.07566.[RW25] Oscar Randal-Williams。“同调稳定性的色性方法”（2025）。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.20629.[Sou78] Christophe Soulé。“SL3(Z) 的上同调”（1978）。DOI：https://doi.org/10.1016/0040- 9383(78)90009-5.[SW20] David Sprehn 和 Nathalie Wahl。“经典群的同调稳定性”。《美国数学会汇刊》373（2020），第 4807–4861 页。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.1812. 08742.[vdK80] W. van der Kallen。“线性群的同调稳定性”。60（3，1980），第 269–295 页。[WRW17] Nathalie Wahl 和 Oscar Randal-Williams。“自同构群的同调稳定性”。《数学进展》318（2017），第 534–626 页。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.1409.3541。