arXiv:2601.12440v1 [math.DG] 18 Jan 2026

薛定谔算子、积分曲率与黎曼流形的欧拉示性数

Teng Huang 和 Pan Zhang

摘要

我们从薛定谔型算子的视角出发，建立了积分曲率界与闭黎曼流形欧拉示性数之间的新联系。我们的方法的核心是扭曲狄拉克算子 $\mathcal{D}_\theta$，其指标等于 $\chi(M)$。在势 V 的负部满足积分小量条件以及满足 Sobolev–Poincaré 不等式的条件下，我们证明，对 θ 进行适当缩放会迫使 $\mathcal{D}_{t\theta}$ 的核消失，从而推出 $\chi(M) = 0$。

将这一框架应用于几何上自然的势，可以得到若干拓扑结论。在偶数维中，曲率算子特征值部分和的充分小的积分界迫使 $\chi(M)$ 要么消失，要么具有由中间维数决定的符号。对于四维流形，相对于直径而言，负里奇曲率的较小 L^p-范数保证 $\chi(M) \geq 0$。此外，当 $\chi(M) \neq 0$ 时，我们得到粗拉普拉斯算子在 1-形式上的第一特征值关于直径和某个积分曲率量的李–丘型下界。随后，我们在几乎非负曲率条件下，给出 1-形式上拉普拉斯算子的第一特征值的显式下界，从而肯定地回答了丘的问题79。

关键词。积分曲率界，欧拉示性数，扭曲狄拉克算子，Schr¨odinger 算子，Morse–Novikov 上同调，1-形式的特征值

1 引言

黎曼几何中的一个核心主题是理解局部几何性质，尤其是曲率，如何支配整体拓扑结构。全球微分几何中的经典结果——以 Bochner [10], Meyer [38], Lichnerowicz [36], 和 Gromov [26, 27]的奠基性工作为代表——通常依赖逐点曲率条件来推导拓扑或几何结论。例如，

T. Huang：数学科学学院，中国科学技术大学；中国科学院吴文俊数学重点实验室，中国科学技术大学，合肥，安徽，230026，中国；电子邮箱：htmath@ustc.edu.cn；htustc@gmail.com P. Zhang：数学科学学院，安徽大学，合肥，安徽，230026，中华人民共和国；电子邮箱：panzhang20100@ahu.edu.cn数学主题分类（*2020*）：53C20；53C21；58A10；58A14

Bochner著名的定理指出，如果一个闭黎曼流形处处满足里奇曲率 Ric ≥ 0，那么其第一贝蒂数不超过维数；等号成立则意味着具有平坦度量结构 [10]。Meyer定理表明，如果 Ric $\geq n-1$, 则直径不能超过 π；而 Cheng刚性定理则说明，等号成立当且仅当该流形是标准球面[18]。类似地，Lichnerowicz证明了，在里奇曲率具有逐点下界的条件下，拉普拉斯算子的第一个非零特征值具有一个尖锐的下界估计。Meyer [38]建立了具有正曲率算子的流形的贝蒂数消失结果，即 $\lambda_1 > 0$；特别地，Meyer 证明了这些流形是有理（上）同调球面。近年来，Petersen 和 Wink [44] 利用曲率算子特征值平均值的逐点界，证明了类似的结果。这些结果虽然强大而优美，但所施加的条件对于自然界和实际应用中遇到的许多具有几何意义的流形而言，往往过于严格。

近期的研究转向探讨积分曲率界的影响。Gallot[24, 25] 在积分 Ricci 曲率界下建立了关于Sobolev常数的基本估计，为这一较弱的几何背景奠定了关键的分析工具。Aubry 利用 Ricci 曲率低于某个正常数的下方受限条件下的最小特征值的积分界，证明了 π_1的有限性，并给出了流形直径的上界 [2] 。此外，当直径也具有下界时，Aubry [3] 证明了此类流形与 S^n同胚。Petersen、Sprouse和Wei系统研究了积分曲率有界条件下的几何性质，得出了体积比较定理、直径估计以及其他比较结果 [41, 42, 43]。他们的工作表明，当适当的L^p 条件取代逐点界时，许多经典比较定理都具有自然的积分类比。

尽管在积分曲率条件下对贝蒂数的界取得了重大进展（近期进展见 [52]），但在这一背景下，欧拉示性数受到的系统性关注较少。目前已有一些零散的结果：例如，在曲率算子满足逐点条件时，有时可以推导出 $\chi(M)$ [12]的符号约束。然而，将曲率负部的积分界与欧拉示性数联系起来的完整理论仍难以建立。其困难源于若干分析障碍：Bochner公式和Moser 迭代等经典工具传统上依赖逐点曲率界，而将它们推广到积分情形则需要新的技术创新，并且要谨慎控制以积分曲率量表示的常数。

通过将某些几何微分算子视为薛定谔型算子，可以建立一个用于分析积分范数中曲率的强大框架

$$\nabla^*\nabla + V,$$

其中曲率张量作为势 V 出现。这一视角将几何问题转化为关于带有 L^p 势的薛定谔算子的谱性质和解析性质的问题。特别是，作用于微分形式上的霍奇拉普拉斯算子

$$\Delta_d = \nabla^*\nabla + \mathrm{Ric}$$

恰好具有这种形式。

本文利用薛定谔算子的这一视角，建立积分曲率界与欧拉示性数之间的新联系。我们的主要技术工具是扭曲狄拉克算子

$$\mathcal{D}_\theta = d_\theta + d_\theta^* : \Omega^+(M) \to \Omega^-(M),$$

其中 $d_\theta = d + \theta\wedge$， θ为一个闭1-形式。该算子最早由 Novikov [39] 在多值函数和哈密顿系统的背景下进行系统研究，它在经典霍奇–狄拉克算子（当 $\theta = 0$时）与 Morse–Novikov（扭曲）上同调理论中的微分算子之间起到插值作用。根据阿蒂亚–辛格指标定理，其指标等于欧拉示性数:

$$\mathrm{Index}(\mathcal{D}_\theta) = \chi(M).$$

我们的策略是证明，在适当的积分曲率条件下，可以选取一个调和 1-形式θ （其存在性由第一德拉姆上同调非零保证）和一个缩放参数 $t > 0$，使得 $\mathcal{D}_{t\theta}$在某些形式次数上核为零。将这一解析消失性与 Morse–Novikov 上同调的庞加莱对偶性 [39] 结合起来，便可对 $\chi(M)$施加强约束。

定理 1.1。设(M^n, g) 是一个满足 *Sobolev–Poincaré* 不等式的闭 n 维 $n \geq 4$ 黎曼流形

$$\|f - \bar{f}\|_2 \leq C_s D \|df\|_{\frac{2p}{p+2}}, \qquad p > 2.$$

记 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{\binom{n}{2}}$ 为曲率算子的特征值，并令

$$\lambda_{n,l} := \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-l}.$$

固定 $D > 0$ 和 $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。假设 θ 是一个非平凡的1-形式，满足

$$\nabla^*\nabla\theta + V\theta = 0,$$

其中 $V \in C^\infty\big(\mathrm{Sym}(T^*M)\big)$ 是一个势。那么对于任意 $+\infty \geq q > p$，存在一个常数

$$\varepsilon = \min\left\{ e\sqrt{\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}} D^2}\exp\Big(-\sqrt{C_s}C_6(n,p,q)(\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}} D^2)^{\frac{1}{4}}\Big), \right.$$
$$\frac{1}{6\sqrt{e}C_sC_1(p,q)}\exp\Big(-\sqrt{C_s}C_6(n,p,q)(\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}} D^2)^{\frac{1}{4}}\Big),$$
$$\left.\frac{1}{2C_sC_4(p,q)}\right\},$$

使得如果

$$\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}} D^2} \leq \varepsilon,$$

可以找到一个正实数 $t \in \mathbb{R}^+$，使得

$$\ker \mathcal{D}_{t\theta} \cap \Omega_l^{\pm}(M) = 0,$$

其中

$$\Omega_l^+ = \bigoplus_{2k \le l} (\Omega^{2k} \oplus \Omega^{n-2k}), \quad and \quad \Omega_l^- = \bigoplus_{2k+1 \le l} (\Omega^{2k+1} \oplus \Omega^{n-2k-1})$$

此外，如果 $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，则存在正常数 $t \in \mathbb{R}$，使得

$$\ker \mathcal{D}_{t\theta} \cap \Omega^{\pm}(M) = 0.$$

特别地， M 的欧拉示性数为零

$$\chi(M) = 0.$$

当势 V 与几何曲率相关时（例如，当 θ 是调和的，且 V 涉及曲率算子时），该定理将曲率的积分小性转化为欧拉示性数的消失。

许多重要的流形具有几乎正曲率，但其中包含曲率变为负值的局部区域，这使经典的逐点曲率定理难以适用 [27, 45,49]。这一研究方向奠基于 Gromov 关于几乎平坦流形的开创性工作 [26]，以及他随后提出的定理：该定理根据里奇曲率下界和直径给出了贝蒂数总和的上界 [27]。关于具有几乎非负曲率算子的流形的研究已在 [28]，中得到推进，而其在各种拓扑不变量中的应用仍是活跃的研究领域。在此背景下，提出了以下问题：

问题。 ([28, 问题 4.6]) 具有几乎非负曲率算子的流形是否具有非负欧拉示性数?

Huang 和 Tanin [30], 部分回答了 Herrmann、Sebastian 和 Tuschmann 提出的 Question4.6，他们通过研究莫尔斯–Novikov 上同调中的消去定理，证明当 κD^2 充分小时，具有非平凡第一德拉姆上同调的流形的欧拉示性数为零。

我们聚焦于偶数维流形并采用更精细的曲率条件，得到了第二个主要结果。通过定理 1.1，这将逐点情形推广到了积分情形。

定理 1.2。 设(M^{2n}, g) 是一个闭的 $2n$ 维、 $n \ge 2$ 黎曼流形，且其第一德拉姆上同调群非零，并设 $q > p > 2n$。记 $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_{\binom{2n}{2}}$ 为曲率算子的特征值，并令

$$\lambda_{2n,l} := \lambda_1 + \cdots + \lambda_{2n-l}.$$

固定 $D > 0$且 $1 \le l \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。存在一个一致常数 $C_{10}(n, p, q) > 0$，使得如果

$$\|\lambda_{2n,l}^-\|_{\frac{q}{2}} D^2 \le C_{10},$$

那么， M 的欧拉示性数满足

1. $\chi(M) = 0$，若 $l = n$;
2. $(-1)^n\chi(M) \geq 0$，如果 $l = n-1$。

这里，$\lambda^-_{2n,l}$ 表示曲率算子的最小（$2n-l$）个特征值之和的负部。该定理揭示了偶数维中的一个显著二分现象：当曲率算子的负部在积分意义下足够小时，欧拉示性数必为零，或其符号完全由中间维数决定。此外，在类似的积分曲率条件下，我们还得到了贝蒂数的上界。

定理 1.3. 设(M^n, g)是一个闭的 n维光滑黎曼流形，并固定 $D > 0$和一个整数 $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。存在一个正常数 $C_9(n,p)$，使得若曲率算子满足

$$\left\|\lambda^-_{n,l}\right\|_{\frac{q}{2}} D^2 \leq C_9(n,p), \qquad q > p > n,$$

那么，对于每个满足 $k \leq l$ 的调和 k-形式 $\theta \in \mathcal{H}^k_d(M)$，我们有如下 L^∞ 估计

$$\|\theta\|_\infty \leq \exp\left\{C_4\sqrt{\frac{n}{4}}\, C_8\sqrt{C_9}\right\} \|\theta\|_2.$$

其中，$C_4 = C_4(n,p,q)$和 $C_8 = C_8(n,p)$分别是命题 *3.5* 和引理 *4.1* 中出现的常数。

特别地，可以选取一个常数 $\varepsilon(n,p,q) > 0$，使得若 $C_9 \leq \varepsilon$，则第 k 个贝蒂数满足

$$b_k(M) \leq \binom{n}{k}.$$

在四维情形中，欧拉示性数因其与基本拓扑和几何结构的联系而具有特别重要的意义。根据希策布鲁赫符号定理，$\chi(M)$ 通过以下关系与符号 $\tau(M)$ 相联系：

$$\chi(M) = \frac{1}{2}(\sigma(M) + \tau(M)),$$

其中，$\sigma(M)$ 是庞特里亚金数的一个组合。此外，在光滑四维流形的范畴中，Donaldson 的规范理论 [22, 23] 和塞伯格–威滕理论 [48]揭示了$\chi(M)$、交叉型与可微结构之间的深刻联系。这些联系使得理解哪些曲率条件能够迫使 $\chi(M)$ 具有特定符号（尤其是非负性）成为一个具有相当几何和拓扑意义的问题。在此，我们得到一个简洁且几何意义清晰的结果，其中仅涉及里奇曲率：

推论 1.4. 设(M^4, g)是一个闭的4维光滑黎曼流形，且 $q > p > 4$。存在一个统一的正常数 $C_{10}(p)$，使得若里奇曲率满足

$$\|\mathrm{Ric}^-\|_{\frac{q}{2}} D^2 \leq C_{10},$$

那么，M 的欧拉示性数为非负：

$$\chi(M) \geq 0.$$

这提供了一个定量障碍：任何满足 $\chi(M) < 0$ 的4维流形，都不可能具有一种相对于直径而言负里奇曲率在积分意义上过小的度量。

注 1.5。上述结果的重要性可通过 Anderson[1] 构造的例子来说明。他证明，对于整数 $n \geq 4$、$k \leq n-1$ 和常数 $\varepsilon > 0$，存在满足以下条件的闭 n 维流形M

$$|\mathrm{Ric}(g)| < \varepsilon, \quad \mathrm{diam}(M) < 1,$$

且 $b_1(M) = k$，但 M 的任何有限覆盖都不纤维化到圆 S^1 上。此外，这些流形的第二贝蒂数可以任意大。对于 $n = 4$，这些流形的欧拉示性数满足

$$\chi(M) = 2 - 2b_1(M) + b_2(M) > 0.$$

因此，我们的推论表明，这类构造在本质上是最优的：若要迫使 $\chi(M) < 0$，则在 L^p 意义下，必须具有一定最低程度的负里奇曲率。

我们考虑作用于微分形式上的粗拉普拉斯算子

$$\overline{\Delta} = \nabla^*\nabla$$

作用于微分 k-形式上。这是一个二阶椭圆算子，其谱由一列非负、无界且递增的实特征值组成：

$$0 = \lambda_0^{(k)} < \lambda_1^{(k)} \leq \lambda_2^{(k)} \leq \cdots \leq \lambda_l^{(k)} \leq \lambda_{l+1}^{(k)} \leq \cdots \nearrow +\infty,$$

其中，$\lambda_0^{(k)}$ 的几何重数等于dimker ∇ 的维数（即平行k-微分形式的维数）。如果不存在非零平行微分形式，则按照惯例，谱从第一个正特征值 $\lambda_1^{(k)} > 0$开始。

对于函数（即0-微分形式）的第一个正特征值 $\lambda_1^{(0)}$，已经建立了较为完善的几何估计理论。Cheeger [15] 和Buser [13]的工作表明，$\lambda_1^{(0)}$ 与流形的Cheeger等周常数密切相关；而Li和Yau [34] 发展出的梯度估计技术，则将其下界明确表示为里奇曲率下界和直径的函数。具体而言，如果里奇曲率满足

$$\mathrm{Ric}(g) \geq -(n-1)\kappa, \quad and \quad \mathrm{diam}(M) \leq D(g),$$

then

$$\lambda_1^{(0)} D^2(g) \geq c^{-1}(n) \exp\{-[1 + (1 + 2c^2(n)\Lambda^2)^{\frac{1}{2}}]\}.$$

文献 [53]改进了 Li-Yau 的结果。然而，对于高次微分形式 $1 \leq k \leq n-1$ 的特征值 $\lambda_1^{(k)}$，情况则大不相同。Colbois和Maerten [20] 指出，仅固定体积并不能保证 $\lambda_1^{(k)}$ 具有统一的正下界；此外，Ann´e 和Takahashi [5, 6] 的构造表明，在任意闭流形上，都存在一族体积固定的度量，使得粗拉普拉斯算子（或霍奇拉普拉斯算子）作用于 k-形式时的第 l 个正特征值可以任意接近零。

这些结果清楚地表明，为了获得高次微分形式特征值的正下界，必须施加额外的几何或拓扑约束。现有研究从不同角度引入了这类约束：例如，Ballmann、Br¨uning 和 Carron [7]考察了整体性限制；Lipnowski 和 Stern [35] 研究了闭双曲流形上 1-形式拉普拉斯算子的几何估计；Boulanger 和 Courtois [11]则为闭可定向黎曼流形上的余恰 1-形式建立了 Cheeger 型不等式。

最后，我们给出 1-微分形式上粗拉普拉斯算子第一特征值 $\lambda_1^{(1)}$ 的下界估计。正如 [31, 命题 1.2], 所指出的，仅在逐点里奇曲率下界条件下，通常并不存在适用于 $\lambda_1^{(1)}$ 的 Li-Yau 型估计。

通过将曲率假设加强为曲率算子的部分特征值之和具有逐点下界，并假设流形的欧拉示性数非零，我们得以为特征值 $\lambda^1_{(1)}$得到一个 Li-Yau 型不等式。

定理 1.6。 设(M^{2n}, g) 是一个欧拉示性数非零的闭合 $2n$维 $n \geq 2$光滑黎曼流形。记$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{\binom{2n}{2}}$ 为曲率算子的特征值，并且

$$\lambda_{2n,n} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

于是，粗拉普拉斯算子作用于1-微分形式上的第一特征值满足

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_1^{(1)} D^2} > \min\Bigg\{ & e\sqrt{\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2}\exp\Big(-\sqrt{C_s(\infty)}C_6(n,2n,\infty)(\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2)^{\frac{1}{4}}\Big), \\ & \frac{1}{6\sqrt{e}C_s(\infty)C_1(n,\infty)}\exp\Big(-\sqrt{C_s(\infty)}C_6(n,2n,\infty)(\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2)^{\frac{1}{4}}\Big), \\ & \frac{1}{2C_s(\infty)C_4(n,\infty)}\Bigg\},\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中

$$C_s(\infty) = C(n)\exp\Big(\frac{2n-1}{\sqrt{n}}\sqrt{\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2}\Big).$$

上述特征值估计表明，当量$\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2$ 足够小时，关于欧拉示性数和第一贝蒂数还可以得到另一个结论。

推论 1.7。 设(M^{2n}, g) 是一个闭的 $2n$ 维、 $n \geq 2$ 光滑黎曼流形。记曲率算子的特征值为 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{\binom{2n}{2}}$，并令

$$\lambda_{2n,n} := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

存在一个统一常数 $C_{11}(n) > 0$，使得若

$$\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2 \leq C_{11}(n),$$

那么，要么 $\chi(M) = 0$，要么 $b_1(M) = 0$。

在他列出的著名问题中 [51]（或参见 [46]），丘成桐提出了以下问题：

问题。 ([51,问题 79]) 设 M 为一个光滑闭流形。如何用可计算的几何量估计微分形式上的 Hodge-拉普拉斯算子的第一个非零特征值?

作用于 p-形式上的 Δ_d 的谱记为

$$0 = \mu_0^{(p)} < \mu_1^{(p)} \leq \mu_2^{(p)} \leq \cdots \leq \mu_k^{(p)} \leq \mu_{k+1}^{(p)} \leq \cdots \nearrow +\infty.$$

Colbois 和 Courtois 在 [19,定理 0.4] 中证明，若一个闭的 n维黎曼流形 (M, g) 满足

$$|\sec_g| \leq \kappa, \qquad \operatorname{diam}(M) \leq D, \qquad \operatorname{Vol}(g) \geq \nu,$$

那么存在常数 $C(n, \kappa, \nu, D) > 0$，使得对每个 $p = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\mu_1^{(p)} \geq C(n, \kappa, \nu, D).$$

他们证明的主要思想依赖于满足定理假设的流形类的紧性。若将曲率假设 $\sec_g| \leq \kappa$ 弱化为 $\sec_g \geq \kappa$，那么我们不知道是否仍存在这样的正下界。不过，Lott 猜想如下：

猜想。 ([37, Lott]) 对于给定的 $n \in \mathbb{N}$、 $\kappa \in \mathbb{R}$ 和 ν， $D > 0$，存在一个正常数$C(n, \kappa, \nu, D) > 0$，它仅依赖于 n， κ， ν 和 D，使得任意维数为 n 、满足条件的连通定向闭黎曼流形（M^n， g）

$$\sec_g \geq \kappa, \qquad \operatorname{diam}(M) \leq D, \qquad \operatorname{Vol}(g) \geq \nu,$$

满足

$$\mu_1^{(p)} \geq C(n, \kappa, \nu, D), \qquad \forall n = 0, 1, \cdots, n.$$

据作者所知，这一猜想仍未解决。最近，Honda 和 Mondino [29]在条件 $n \leq 4$下，为 $p = 1$ 得到了一个正的下界 $\mu_1^{(1)}$；其中里奇曲率 $|\mathrm{Ric}(g)| \leq \kappa$，直径$(M) \leq D$，体积$(g) \geq \nu$.

在 [11], 中，作者以一个与一维循环相关的等周常数为依据，得到了余恰 1-形式上拉普拉斯算子最小特征值的下界。

当曲率算子的特征值在 L^∞-范数下足够小时，且欧拉示性数非零时，我们可以建立作用于 1-形式的霍奇拉普拉斯算子首个非零特征值的下界。

定理 1.8. 设(M^{2n}, g) 是一个闭的 $2n$ 维、 $n \geq 2$、具有非零欧拉示性数的光滑黎曼流形。记曲率算子的特征值为 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{\binom{2n}{2}}$，并令

$$\lambda_{2n,n} := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

存在一个一致常数 $C_{11}(n) > 0$，使得若

$$\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2 \le C_{11}(n),$$

那么，霍奇-拉普拉斯算子作用于1-形式时的第一特征值满足

$$\mu_1^{(1)} > \|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty (e-2).$$

注 1.9. 若存在一列黎曼度量 $\{g_j\}$ 定义在光滑闭流形 M 上，使得相关曲率算子的所有特征值 $\lambda_i^{(j)} = \lambda_i(g_j)$以及 g_j 的直径 $\mathrm{diam}(g_j)$满足以下条件，则称该流形具有几乎非负曲率算子（几乎非负曲率算子）：

$$\lambda_i^{(j)} \ge -\frac{1}{j},\ \mathrm{diam}(g_j) \le 1.$$

容易验证，具有几乎非负曲率算子的流形满足定理 1.8 中所述的曲率条件。此外，对于偶数维的此类流形，我们针对 1-形式给出了丘成桐的第79个问题的答案。

文章概要

第 2 节介绍曲率算子的预备知识，并确立一项关键的分析结果——积分曲率条件下的平均值不等式。我们通过为 $\ker \mathcal{D}_\theta$ 中的微分形式推导博赫纳型公式，并结合仅依赖积分曲率界的精细 Moser 迭代（命题 2.4），将经典博赫纳理论的点态框架推广到积分情形。

第 3 节介绍扭曲狄拉克算子 $\mathcal{D}_\theta$，证明基本的积分恒等式，并为其核中的微分形式建立统一的 L^∞-估计。借助 $\mathcal{D}_\theta$，我们可以通过指标定理，将解析信息（$\mathcal{D}_{t\theta}$ 的核）直接与拓扑学联系起来。Morse–Novikov 上同调及其庞加莱对偶 ´ [39] 在推导关于 $\chi(M)$ 的符号约束时起着关键作用。

第 4 节给出主要定理及其推论的证明，其中包括在特征值估计中的应用。在我们的分析中，我们依托并拓展了 Gallot [25] 关于积分里奇曲率界下 Sobolev 常数的基础性工作（引理 4.1）；这需要仔细控制以积分曲率量表示的常数。

第 5 节在几乎非负曲率条件下，建立了粗拉普拉斯算子和霍奇拉普拉斯算子的特征值估计。具体而言，我们证明了 1-形式上粗拉普拉斯算子的第一特征值的 Li–Yau 型下界（定理 1.6），并表明，当曲率算子的负部在 L^∞-意义下足够小时，欧拉示性数或第一贝蒂数必为零（推论 1.7）。此外，我们还得到了 1-形式上霍奇拉普拉斯算子的第一特征值的显式正下界（定理 1.8），从而在我们的曲率设定下回答了 Yau 提出的问题。

记号约定

全文中，$(M^n,\ g)$ 表示一个闭的、定向的光滑 n 维黎曼流形。对于函数 $f\colon M\to\mathbb{R}$，我们将其正部和负部定义为

$$f^+(x)=\max\{0,f(x)\},\quad f^-(x)=\max\{0,-f(x)\}.$$

L^p-范数的归一化形式定义为

$$\|f\|_p=\left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M |f|^p\,d\mathrm{vol}_g\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中，$\mathrm{Vol}(g)$ 表示（$M,\ g$）的体积。（$M,\ g$）的直径记为 D。

设 $\lambda_1\le\cdots\le\lambda_{\binom{n}{2}}$ 是（$M,\ g$）的曲率算子的特征值。我们记

$$\lambda_{n,l}:=\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-l}$$

作为最小的 $n-l$ 特征值之和，其中 $1\le l\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$。

下文中，设 $+\infty\ge q>p>2$。我们引入常数

$$\gamma:=\frac{p(q-2)}{(p-2)q}>1,$$

并定义

$$C_0(p,q):=\frac{q-2}{2q}\Big(\frac{2p}{p-1}+\frac{pq}{q-p}\Big).$$

$$C_1(p,q):=\exp\left\{\frac{4p}{(p-2)(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}\right\},$$

$$C_4(p,q):=\frac{2p}{p-2}\sqrt{C_0(p,q)}\frac{1}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma}-1)},$$

$$C_5(n,p,q):=\big(9e^5C_2^2(n)C_1^2(p,q)+1\big),$$

$$C_6(n,p,q):=\frac{4pq}{q-p}\sqrt{C_0(p,q)}(C_5(p,q))^{\frac{1}{4}}.$$

此外，令

$$C_{10}(n,p,q):=\min\Big\{\frac{1}{16C_8^2(n,p)C_6^4(n,p,q)},\frac{1}{72e^2C_8^2(n,p)C_1^2(p,q)},\frac{1}{8C_8^2(p,q)C_4^2(p,q)},\frac{1}{2}C_7(n,p)\Big\},$$

其中 $C_7(n,\ p)$ 和 $C_8(n,\ p)$ 是仅依赖于 n 和 q 的正常数。当 $q<+\infty$ 时，我们可以取 $p=\frac{q+n}{2}$。

在极限情形 $q=+\infty$ 下，我们有

$$\gamma=\frac{p}{p-2},\quad \lim_{q\to+\infty}\frac{q-p}{2pq}=\frac{1}{2p},$$

$$C_0=\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2},\quad C_1=\exp\big\{2p\sqrt{p(p-2)}\big\},$$

$$C_4=\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{p-2})\sqrt{\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2}}.$$

2 预备知识

2.1 曲率算子

我们首先回顾曲率算子的定义，以及 Petersen 和 Wink [44] 在这一领域取得的最新进展。

设 (M, g) 是一个闭的 n 维黎曼流形，并设

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

表示其曲率张量 。Weitzenb¨ock 曲率算子作用于一个 $(0,k)$-张量 T，定义为 y

$$\mathrm{Ric}(T)(X_1,\dots,X_k) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\big(R(X_i,e_j)T\big)(X_1,\dots,e_j,\dots,X_k).$$

我们用里奇张量的一种变体来表示该算子，因为当它作用于向量场或1-形式时，该算子确实与经典里奇张量一致 [43]。

设 (E,∇) 是 M 上纤维有限维的黎曼向量丛；也就是说， E 是一个配备光滑度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和相容联络 ∇ 的向量丛。在由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和度量 g 诱导的内积下，我们在 $\Gamma(E)$（即 E 的光滑截面空间）上定义 L^2-内积 $(\cdot,\cdot)$。联络 ∇ 自然延拓到取值于 E 的 p 阶张量上（定义在 M 上）。相对于 L^2-内积，其形式伴随算子 ∇^* 定义了粗拉普拉斯算子（或联络拉普拉斯算子），作用于 $\Gamma(E)$ 上，定义如下：

$$\overline{\Delta} = \nabla^*\nabla.$$

现在设 $E \to M$ 是 $T_{(0,k)}(M)$ 的一个子丛。对于常数 $c > 0$， E 上的*Lichnerowicz*拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_L = \nabla^*\nabla + c\,\mathrm{Ric}\,.$$

霍奇拉普拉斯算子对应于情形 $c = 1$；也就是说，

$$\Delta_d = \overline{\Delta} + \mathrm{Ric}\,.$$

以下关于曲率项的估计在我们的分析中起着至关重要的作用。

推论 2.1 ([44, 引理 2.1])**.** 设 (M^n, g) 是一个闭的 n维黎曼流形，且$\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_{\binom{n}{2}}$ 是其曲率算子的特征值。固定一个整数 $1 \le l \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。那么，对于任意满足 $k \le l$ 或 $k \ge n-l$的微分形式 $\alpha \in \Omega^k(M)$,

$$\langle \mathrm{Ric}(\alpha), \alpha\rangle \ge \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-l}}{n-l}\, k(n-k)\,|\alpha|^2. \tag{2.1}$$

注记 2.2。 由于里奇曲率有下界，该下界为曲率算子最小的 $n-1$ 个特征值之和，因此估计式 (2.1) 给出了逐点不等式

$$\mathrm{Ric}(g) \ge (n-1)\,\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-l}}{n-l}. \tag{2.2}$$

2.2 平均值不等式

下面这个初等估计将在 Moser 迭代中反复使用。

引理 2.3. 设 $t > 0,\ \zeta > 1$。则

$$P = \prod_{i=0}^{\infty} \big(1 + t\zeta^i\big)^{\frac{1}{\zeta^i}} \le \exp\Big\{\frac{2\sqrt{\zeta}}{\zeta - 1}\Big\}\big(1 + \sqrt{t}\big)^{\frac{2\zeta}{\zeta-1}}.$$

证明。 对于任意 $x > 0$，有

$$\begin{aligned}
\ln(1 + tx) &\le 2\ln\big(1 + \sqrt{tx}\big) \\
&= 2\ln\big(1 + \sqrt{t}\big) + 2\ln\Big(1 + (\sqrt{x} - 1)\frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}\Big) \\
&\le 2\ln\big(1 + \sqrt{t}\big) + 2(\sqrt{x} - 1).
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\ln P &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln\big(1 + t\zeta^i\big)}{\zeta^i} \\
&\le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\ln\big(1 + \sqrt{t}\big)}{\zeta^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\zeta^{\frac{i}{2}} - 2}{\zeta^i} \\
&\le \frac{2\zeta\ln\big(1 + \sqrt{t}\big)}{\zeta - 1} + \frac{2\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta} - 1} - \frac{2\zeta}{\zeta - 1} \\
&= \frac{2\zeta\ln\big(1 + \sqrt{t}\big)}{\zeta - 1} + \frac{2\sqrt{\zeta}}{\zeta - 1}.
\end{aligned}$$

两边取指数即可得到所需的不等式。 □

下一个命题是我们 L^∞ 估计的分析核心。它为满足系数取值于 L^p 的微分不等式的非负函数提供了一个一致的界。现在我们给出命题 2.4 的证明，其主要技术思想源自 [3, 4]。

命题 2.4 （平均值不等式）。 设 (M^n, g) 是一个满足 *Sobole*夫不等式的闭 n 维光滑黎曼流形

$$\|f\|_{\frac{2p}{p-2}} \le \|f\|_2 + C_s D\|df\|_2, \qquad p > 2. \tag{2.3}$$

假设 $f \in L_1^2(M)$ 是一个满足下述条件的非负连续函数

$$f\Delta_d f \le h_1 f^2 + \operatorname{div} X \tag{2.4}$$

在分布意义下，其中 $h_1 \in L^q_2(M)$，且 X 是一个向量场，满足

$$|X|(x) \le h_2(x) f^2(x), \qquad \forall x \in M, \tag{2.5}$$

对于非负连续函数 $h_2 \in L^q(M)$。那么，对于任意满足 $+\infty \geq q > p$ 的 q，

$$\|f\|_\infty \leq C_1(p,q)\left(1+\sqrt{C_0(p,q)C_sDB}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}\|f\|_2, \tag{2.6}$$

其中

$$B^2 := \|h_1\|_{\frac{q}{2}} + 2\|h_2\|_q^2, \quad and \quad C_1(p,q) = \exp\left\{\frac{4p}{(p-2)(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}\right\}$$

证明。对于任意整数 $k \geq 1$，将不等式 (2.4) 乘以 f^{2k-2}，并在 M 上积分。利用散度定理，得到

$$\int_M f^{2k-1}\Delta_d f \leq \|h_1\|_{L^{\frac{q}{2}}}\|f\|^{2k}_{L^{\frac{2kq}{q-2}}} + \left|(\operatorname{div} X, f^{2k-2})_{L^2(M)}\right|.$$

对于散度项，我们估计

$$\begin{aligned}\left|(\operatorname{div} X, f^{2k-2})_{L^2(M)}\right| &= \left|(X, \nabla f^{2k-2})_{L^2(M)}\right| \\ &= (2k-2)\left|(X, f^{2k-3}\nabla f)_{L^2(M)}\right| \\ &\leq (2k-2)\int_M f^{2k-1}|h_2|\,|\nabla f| \\ &\leq \frac{2k-2}{4}\int_M f^{2k-2}|\nabla f|^2 + (2k-2)\int_M f^{2k}|h_2|^2.\end{aligned}$$

结合这两个估计可得

$$\begin{aligned}(2k-1)\int_M f^{2k-2}|\nabla f|^2 &= \int_M f^{2k-1}\Delta_d f \\ &\leq \|h_1\|_{L^{\frac{q}{2}}}\|f\|^{2k}_{L^{\frac{2kq}{q-2}}} \\ &\quad + \frac{(2k-2)}{4}\int_M f^{2k-2}|\nabla f|^2 \\ &\quad + (2k-2)\|h_2\|^2_{L^q}\|f\|^{2k}_{L^{\frac{2kq}{q-2}}}.\end{aligned}$$

重新整理得

$$\int_M f^{2k-2}|\nabla f|^2 \leq \left(\frac{4(k-1)}{3k-1}\|h_2\|^2_{L^q} + \frac{2}{3k-1}\|h_1\|_{L^{\frac{q}{2}}}\right)\|f\|^{2k}_{L^{\frac{2kq}{q-2}}}. \tag{2.7}$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_M |df^k|^2 &= k^2\int_M f^{2k-2}|\nabla f|^2 \\ &\leq k^2B^2\|f\|^{2k}_{L^{\frac{2kq}{q-2}}},\end{aligned}$$

即，

$$\|df^k\|_2 \leq kB\|f\|^k_{\frac{2kq}{q-2}}. \tag{2.8}$$

现在将 Sobole夫不等式 (2.3) 应用于 f^k:

$$\begin{aligned}\|f\|_{\frac{2pk}{p-2}}^k &= \|f^k\|_{\frac{2p}{p-2}} \\ &\le \|f^k\|_2 + C_s D\|d(f^k)\|_2 \\ &\le \|f^k\|_2 + C_s DkB\|f\|_{\frac{2kq}{q-2}}^k.\end{aligned}$$

利用插值不等式

$$\|f\|_{2k} \le \|f\|_{\frac{2kq}{q-2}} \le \|f\|_\infty^{\frac{1}{k}} \|f\|_{\frac{2(k-1)q}{q-2}}^{1-\frac{1}{k}},$$

我们得到

$$\begin{aligned}\|f\|_{\frac{2pk}{p-2}}^k &\le \Big(\|f\|_\infty^{\frac{1}{k}} \|f\|_{\frac{2(k-1)q}{q-2}}^{1-\frac{1}{k}}\Big)^k + C_s DkB\Big(\|f\|_\infty^{\frac{1}{k}} \|f\|_{\frac{2(k-1)q}{q-2}}^{1-\frac{1}{k}}\Big)^k \\ &= \big(1 + C_s DkB\big)\|f\|_\infty \|f\|_{\frac{2(k-1)q}{q-2}}^{k-1}.\end{aligned}$$

因此,

$$\frac{\|f\|_{\frac{2pk}{p-2}}}{\|f\|_\infty} \le \big(1 + C_s DkB\big)^{\frac{1}{k}} \Big(\frac{\|f\|_{\frac{2(k-1)q}{q-2}}}{\|f\|_\infty}\Big)^{\frac{k-1}{k}}.$$

将两边提升至 $\frac{2pk}{p-2}$ 次方，得到迭代估计

$$\Big(\frac{\|f\|_{\frac{2pk}{p-2}}}{\|f\|_\infty}\Big)^{\frac{2pk}{p-2}} \le \big(1 + C_s DkB\big)^{\frac{2p}{p-2}} \Big(\frac{\|f\|_{\frac{2(k-1)q}{q-2}}}{\|f\|_\infty}\Big)^{\frac{2p(k-1)}{p-2}}. \tag{2.9}$$

现在定义数列

$$a_0 = \frac{2p}{p-1}, \qquad a_{i+1} = \gamma a_i + \frac{2p}{p-2},$$

其中

$$\gamma = \frac{p(q-2)}{(p-2)q} > 1.$$

容易验证

$$a_i = \gamma^i\big(a_0 + \gamma_0\big) - \gamma_0, \qquad \gamma_0 = \frac{2p}{(p-2)(\gamma-1)} = \frac{pq}{q-p}.$$

Set

$$k_i = \frac{q-2}{2q} a_i + 1,$$

它满足

$$\frac{2p}{p-2} k_i = \gamma a_i + \frac{2p}{p-2} = a_{i+1}, \quad and \quad \frac{2p(k_i-1)}{p-2} = \gamma a_i.$$

将 (2.9) 应用于 $k = k_i$ ，得到

$$\Big(\frac{\|f\|_{a_{i+1}}}{\|f\|_\infty}\Big)^{\frac{a_{i+1}}{\gamma^{i+1}}} \le \big(1 + C_s Dk_i B\big)^{\frac{2p}{(p-2)\gamma^{i+1}}} \Big(\frac{\|f\|_{a_i}}{\|f\|_\infty}\Big)^{\frac{a_i}{\gamma^i}}.$$

将此不等式反向迭代至 $i=0$，得到

$$\Big(\frac{\|f\|_{a_{i+1}}}{\|f\|_\infty}\Big)^{\frac{a_{i+1}}{\gamma^{i+1}}} \le \prod_{\ell=0}^{i}\big(1+C_sDk_\ell B\big)^{\frac{2p}{(p-2)\gamma^{\ell+1}}}\Big(\frac{\|f\|_{a_0}}{|f\|_\infty}\Big)^{a_0}.$$

取极限 $i\to\infty$并注意到 $\|f\|_{a_i}\to\|f\|_\infty$，我们得到

$$\begin{aligned}1 &\le \prod_{\ell=0}^{\infty}\big(1+C_sDk_\ell B\big)^{\frac{2p}{(p-2)\gamma^{\ell+1}}}\Big(\frac{\|f\|_{a_0}}{\|f\|_\infty}\Big)^{a_0}\\ &\le \prod_{\ell=0}^{\infty}\big(1+C_0(p,q)D\gamma^\ell B\big)^{\frac{2p}{(p-2)\gamma^{\ell+1}}}\Big(\frac{\|f\|_{a_0}}{\|f\|_\infty}\Big)^{a_0}.\end{aligned}$$

这里我们使用以下事实

$$k_i<\gamma^i(a_0+\gamma_0):=\gamma^iC_0(p,q).$$

利用插值

$$\|f\|_{a_0}\le\|f\|_2^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_\infty^{\frac{1}{p}},$$

我们有

$$\Big(\frac{\|f\|_{a_0}}{\|f\|_\infty}\Big)^{a_0}\le\Big(\frac{\|f\|_2^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_\infty^{\frac{1}{p}}}{\|f\|_\infty}\Big)^{a_0}=\Big(\frac{\|f\|_2}{\|f\|_\infty}\Big)^2.$$

因此,

$$\frac{\|f\|_\infty^2}{\|f\|_2^2}\le\prod_{\ell=0}^{\infty}\big(1+C_0(p,q)C_sD\gamma^\ell B\big)^{\frac{2p}{(p-2)\gamma^{\ell+1}}}.$$

将引理 2.3 应用于 $t=C_0(p,\ q)C_sDB$，可得

$$\begin{aligned}\frac{\|f\|_\infty^2}{\|f\|_2^2} &\le \Big[\exp\Big\{\frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}\Big\}\big(1+\sqrt{t}\big)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\Big]^{\frac{2p}{(p-2)\gamma}}\\ &=\exp\Big\{\frac{4p}{(p-2)(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}\Big\}\big(1+\sqrt{C_0(p,q)C_sDB}\big)^{\frac{4p}{(p-2)(\gamma-1)}}.\end{aligned}$$

将 γ 和 $\gamma-1$ 的值代入，即得所需的界 (2.6)，其中常数 $C_1(p,\ q)$ 仅依赖于 p 和 q。

□

3 黎曼流形上的扭曲狄拉克算子 $\mathcal{D}_\theta$

3.1 一个积分不等式

设 $(M^n,\ g)$ 是一个闭的 n 维黎曼流形。我们用 $\Omega^k(M)$ 表示 $0\le k\le n$的实微分 k-形式空间。为简化记号，我们通常通过音乐同构将实向量场与实 1-形式等同起来。给定一个光滑的 1-形式 $\theta\in\Omega^1(M)$，相应的向量场 $\theta^\sharp$ 在 M 上由下式刻画

$$\theta(V)=g(V,\theta^\sharp),\qquad\forall\text{ vector field }V\text{ on }M.$$

我们用 $i_{\theta^\sharp}$ 表示关于 $\theta^\sharp$ 的内积。关于度量 g 的霍奇星算子记为 $*$。

我们定义扭曲微分算子 $d_\theta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ 如下：

$$d_\theta = d + \theta \wedge \cdot,$$

其形式伴随算子 $d_\theta^*: \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ 定义如下：

$$d_\theta^* = d^* + i_{\theta^\sharp}.$$

作用于微分形式上的扭曲狄拉克算子 $\mathcal{D}_\theta$ 定义为

$$\mathcal{D}_\theta = d_\theta + d_\theta^* : \Omega^+(M) \to \Omega^-(M),$$

其中

$$\Omega^+(M) = \bigoplus_{k=\text{ even}} \Omega^k(M) \quad and \quad \Omega^-(M) = \bigoplus_{k=\text{ odd}} \Omega^k(M).$$

当 θ 是闭1-形式（$d\theta = 0$）时，算子 d_θ 满足 $d_\theta^2 = 0$，并且可以定义*Morse– Novikov*上同调（也称扭曲德拉姆上同调）群

$$H^k(M, \theta) := \frac{\ker d_\theta \cap \Omega^k(M)}{\operatorname{im} d_\theta \cap \Omega^k(M)}.$$

这套理论由 Novikov [39] 在多值函数和哈密顿系统的背景下提出，此后已应用于辛几何、拓扑学和数理物理领域（见 [21]）。对于闭1-形式 θ，扭曲上同调群 $H^k(M, \theta)$ 是有限维向量空间，其仅取决于上同调类 $[\theta] \in H^1_{\text{dR}}(M)$。

扭曲狄拉克算子 $\mathcal{D}_\theta$ 与 Morse–Novikov 上同调密切相关。事实上，它的平方为

$$\mathcal{D}_\theta^2 = \Delta_\theta := d_\theta d_\theta^* + d_\theta^* d_\theta,$$

这就是扭曲拉普拉斯算子。关于该拉普拉斯算子的调和形式空间，

$$\mathcal{H}_\theta^k(M) := \ker \Delta_\theta \cap \Omega^k(M),$$

借助扭曲上同调的霍奇定理，它与 $H^k(M, \theta)$ 同构。特别地，

$$\dim \mathcal{H}_\theta^k(M) = \dim H^k(M, \theta).$$

当 $\theta = 0$ 时，我们恢复通常的 de Rham 上同调和霍奇定理。对于非恰当闭形式 θ，扭曲上同调群提供了通常上同调的一种变形，能够捕捉与 θ 相关联的多值势函数的动力学信息。

Morse-Novikov 上同调的一个重要特征是庞加莱 ′对偶 :

$$H^k(M, \theta) \cong (H^{n-k}(M, -\theta))^*,$$

其中 $*$表示 对偶向量空间。这将在我们的拓扑应用中发挥关键作用 s.

从指标理论视角来看，扭曲狄拉克算子 $\mathcal{D}_\theta$ 尤为有趣。当 θ是闭的时，它是一个椭圆算子，其指标由扭曲欧拉示性数给出：

$$\mathrm{Index}(\mathcal{D}_\theta) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k(M, \theta).$$

值得注意的是，当 M 定向时，这个扭曲欧拉示性数等于普通欧拉示性数$\chi(M)$，且与 θ无关。这是因为指标在算子的连续变形下保持不变，而且当 θ 闭合时， $\mathcal{D}_\theta$ 可以连续变形为 $\mathcal{D}_0$ 。这一观察揭示了 $\mathcal{D}_\theta$ 的解析性质与 M的拓扑学之间的有力联系。

Th以下指标公式是标准结果，也是我们后续结论的基础：

引理 3.1（指标公式）。 $\mathcal{D}_\theta$ 的指标满足

$$\mathrm{Index}(\mathcal{D}_\theta) := \dim\ker(\mathcal{D}_\theta) - \dim\mathrm{coker}(\mathcal{D}_\theta) = \chi(M).$$

此外，若 $d\theta = 0$，则

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim \mathcal{H}^k_\theta(M) = \chi(M).$$

已有研究为某些狄拉克算子建立了类似的积分恒等式 [16, 17]。然而，我们的分析依赖于以下更一般的不等式，它起着基础性作用（见 [30,定理 3.4]）。

定理 3.2（积分不等式）。 *([30,* 定理 *3.4])* 设 (M^n, g) 为一个闭的 n 维光滑黎曼流形。对于每个 $\alpha \in \ker \mathcal{D}_\theta \cap \Omega^{\pm}(M)$，有

$$\int_M |\theta|^2 |\alpha|^2 \le C_2(n) \int_M |\nabla\theta| \cdot |\alpha|^2,$$

其中 $C_2(n) > 0$是一个仅依赖于维数 n的常数。

3.2 $\ker \mathcal{D}_\theta$中微分形式的先验 L^∞-估计

现在，我们通过 Moser 迭代为光滑微分形式 $\alpha \in \ker \mathcal{D}_\theta \cap \Omega^{\pm}(M)$ 推导先验 L^∞-估计。分析从一个逐点 Bochner 型恒等式开始（见 [43, 第 181] 页）。

对于任意 $\alpha \in \Omega^l(M)$,

$$-\frac{1}{2}\Delta_d |\alpha|^2 = |\nabla\alpha|^2 - \langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle = |\nabla\alpha|^2 - \langle \Delta_d\alpha, \alpha\rangle + \langle \mathrm{Ric}(\alpha), \alpha\rangle, \tag{3.1}$$

其中 Ric(α) 表示作用于 α 上的 Weitzenb¨ock 曲率算子。

由于该算子

$$d + d^* : \Omega^+(M) \to \Omega^-(M)$$

是一个狄拉克算子（见 [32]），并且

$$\Delta_d = (d + d^*)^2,$$

我们可以应用 [17] 中的一个关键观察（另见 [32, 第 115 页，命题 5.3]）。对于任意光滑微分形式 α,

$$\langle \Delta_d \alpha, \alpha \rangle = \langle (d + d^*)\alpha, (d + d^*)\alpha \rangle + \operatorname{div} X, \tag{3.2}$$

其中 X 是由下式定义的向量场

$$\langle X, W \rangle = -\langle (d + d^*)\alpha, W^\sharp \wedge \alpha + i_W \alpha \rangle, \qquad \forall \text{ vector field } W. \tag{3.3}$$

命题 3.3 (关于 $\ker \mathcal{D}_\theta$ 的博赫纳不等式)。 *[30,* 命题 *3.7]* 设 (M^n, g) 为一个闭的 n 维黎曼流形，且 θ 为其上的光滑1形式。固定一个整数 $1 \le l \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。对于每个 $\alpha \in \ker \mathcal{D}_\theta \cap \Omega^{\pm}(M)$，下列博赫纳型不等式成立：

$$-\frac{1}{2}\Delta_d |\alpha|^2 \ge |\nabla \alpha|^2 - |\theta|^2 |\alpha|^2 - C_3(n) \lambda^-_{n,l} |\alpha|^2 - \operatorname{div} X, \tag{3.4}$$

其中 $C_3(n) := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\lambda^-_{n,l} =$ 最大值 $\{0, -\lambda_{n,l}\}$，且向量场 X 满足逐点界

$$|X| \le |\theta|\, |\alpha|^2.$$

证明。 条件 $\alpha \in \ker \mathcal{D}_\theta$ 蕴含 $(d_\theta + d_\theta^*)\alpha = 0$. 直接计算可得

$$(d + d^*)\alpha = -\theta \wedge \alpha - i_{\theta^\sharp} \alpha,$$

因此

$$|(d + d^*)\alpha| = |\theta|\, |\alpha|.$$

由恒等式 (3.1) 和 (3.2) 可得

$$-\frac{1}{2}\Delta_d |\alpha|^2 = |\nabla \alpha|^2 - \langle (d + d^*)\alpha, (d + d^*)\alpha \rangle + \langle \mathrm{Ric}(\alpha), \alpha \rangle - \operatorname{div} X.$$

应用推论 2.1 中的曲率估计 (2.1)，可得

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Ric}(\alpha), \alpha \rangle &\ge \frac{1}{n-l} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lambda_{n,l} |\alpha|^2 \\ &\ge -\frac{1}{n-l} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lambda^-_{n,l} |\alpha|^2 \\ &\ge -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lambda^-_{n,l} |\alpha|^2. \end{aligned}$$

将 $|(d + d^*)\alpha|^2 = |\theta|^2 |\alpha|^2$ 连同此估计代入该恒等式，即完成证明。 □

We n现在应用平均值不等式（命题 2.4）以获得一致界 .

定理 3.4 (L^∞-估计)。 设(M^n, g) 是一个满足 *Sobole*夫不等式的闭 n 维光滑黎曼流形

$$\|f\|_{\frac{2p}{p-2}} \le \|f\|_2 + C_s D\|df\|_2, \qquad p > 2.$$

对于每个 $\alpha \in \ker \mathcal{D}_\theta \cap \Omega^{\pm}(M)$ 和 $+\infty \ge q > p$, 我们有

$$\|\alpha\|_\infty \le C_1(p,q)\big(1 + \sqrt{C_0(p,q)C_s DB}\big)^{\frac{2pq}{q-p}} \|\alpha\|_2, \tag{3.5}$$

其中 $B^2 := C_3(n)\big(\|\theta\|_q^2 + \|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}\big)$。

证明。 由命题 3.3 可得微分不等式

$$-\frac{1}{2}\Delta_d|\alpha|^2 \ge -|\theta|^2|\alpha|^2 - C_3(n)\lambda_{n,l}^-|\alpha|^2 - \operatorname{div} X.$$

应用 Kato不等式 $|\nabla|\alpha|| \le |\nabla\alpha|$（见 [8]），我们得到

$$-|\alpha|\Delta_d|\alpha| \ge -|\theta|^2|\alpha|^2 - C_3(n)\lambda_{n,l}^-|\alpha|^2 - \operatorname{div} X.$$

现在令 $f = |\alpha|$。则 f 满足

$$f\Delta_d f \le \big(|\theta|^2 + C_3(n)\lambda_{n,l}^-\big) f^2 + \operatorname{div} X,$$

与 $|X| \le |\theta| f^2$。定义

$$h_1 = |\theta|^2 + C_3(n)\lambda_{n,l}^-, \qquad h_2 = |\theta|.$$

它们的范数满足

$$\|h_1\|_q \le \|\theta\|_q^2 + C_3(n)\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}, \qquad \|h_2\|_q = \|\theta\|_q.$$

将命题 2.4 应用于如上所述的 h_1, h_2，恰好得到估计式 (3.5)。 □

3.3 L^∞-估计：薛定谔型方程的解

我们考虑如下形式的薛定谔算子

$$\overline{\Delta} + V,$$

其中势 $V \in C^\infty\big(\mathrm{Sym}(E)\big)$ 是 E 上对称端omorphism 的光滑场。根据 Weitzenböck 公式, 作用于 1-形式上的 Hodge 拉普拉斯算子恰好就是这样的算子。

下面这个针对满足 Schr¨odinger 方程的截面的估计，在我们稍后将结果应用于调和1-形式时将发挥关键作用。

命题 3.5 （L^∞-估计适用于 Schr¨ödinger 型方程的解）。 设 （M^n, g）是一个满足 *Sobole*夫不等式的闭 n 维黎曼流形

$$\|f\|_{\frac{2p}{p-2}} \le \|f\|_2 + C_s D\|df\|_2, \qquad p > 2.$$

假设 $+\infty \geq q > p$。那么，每个方程的解

$$\nabla^*\nabla S + VS = 0$$

满足 L^∞-估计

$$\|S\|_\infty \leq \exp\Big\{C_4(p,q)\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}}\, C_s D\Big\}\|S\|_2, \tag{3.6}$$

其中

$$C_4(p,q) := \frac{2p}{p-2}\sqrt{C_0(p,q)}\frac{1}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma}-1)}.$$

证明。 将 Kato不等式应用于 $\nabla^*\nabla S + VS = 0$ 可得

$$|S|\,\Delta_d|S| \leq \langle\nabla^*\nabla S, S\rangle \leq V^-|S|^2.$$

因此 $f :\, = |S|$满足

$$f\Delta_d f \leq |V^-|f^2.$$

按照推导（2.7）中的方法（取 $h_1 = |V^-|$ 和 $h_2 = 0$），对于任意 $k \geq 1$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_M f^{2k-2}|\nabla f|^2 &\leq \frac{2}{3k-1}\|V^-\|_{L^{\frac{q}{2}}}\|f\|^{2k}_{L^{\frac{2kq}{q-2}}}\\ &\leq \frac{1}{k}\|V^-\|_{L^{\frac{q}{2}}}\|f\|^{2k}_{L^{\frac{2kq}{q-2}}}.\end{aligned}$$

因此,

$$\|df^k\|_2 \leq k^{\frac{1}{2}}\|V^-\|^{\frac{1}{2}}_{\frac{q}{2}}\|f\|^k_{\frac{2kq}{q-2}}.$$

一个标准的莫塞尔迭代（类似于但比命题 2.4 的证明更简单）现在给出 es

$$\begin{aligned}\frac{\|f\|^2_\infty}{\|f\|^2_2} &\leq \prod_{\ell=0}^{\infty}\Big(1 + C_s D\sqrt{C_0(p,q)}\,\|V^-\|^{\frac{1}{2}}_{\frac{q}{2}}\gamma^{\frac{\ell}{2}}\Big)^{\frac{2p}{(p-2)\gamma^{\ell+1}}}\\ &\leq \exp\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2p}{(p-2)\gamma^{\ell+1}}\ln\Big(1 + C_s D\sqrt{C_0(p,q)}\|V^-\|^{\frac{1}{2}}_{\frac{q}{2}}\gamma^{\frac{\ell}{2}}\Big)\right)\\ &\leq \exp\left(\frac{2p}{p-2}C_s\sqrt{C_0(p,q)}\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}D^2}\;\frac{1}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma}-1)}\right).\end{aligned}$$

开平方并使用 $f = |S|$ 即可得到所需的估计。 □

下一个引理将 Sobolev–Poincar´e 不等式与普通Sobolev不等式联系起来，后文将需要这一结果。

引理 3.6。 设 (M^n, g) 是一个满足 ***Sobolev–Poincar´e*** 不等式的闭 n 维（$n \geq 4$）光滑黎曼流形

其中 $\bar{f} = \frac{1}{\text{体积}(g)}\int_M f\, dvol_g$ 以及 $p > 2$。于

$$\|f - \bar{f}\|_2 \leq C_s D\|df\|_{\frac{2p}{p+2}},$$

是

$$\|f\|_{\frac{2p}{p-2}} \leq \|f\|_2 + C_s\frac{p}{p-2}D\|df\|_2.$$

证明。令 $u = |f|^{\frac{p}{p-2}}$。于是

$$\bar{u} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)} \int_M |f|^{\frac{p}{p-2}} dvol_g = \|f\|_{\frac{p}{p-2}}^{\frac{p}{p-2}},$$

and

$$|du| = \frac{p}{p-2} |d|f|| \cdot |f|^{\frac{2}{p-2}} \le \frac{p}{p-2} |df| \cdot |f|^{\frac{2}{p-2}}.$$

由索博列夫–庞加莱不等式、霍尔德不等式和加利亚尔多–尼伦伯格插值不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\frac{2p}{p-2}}^{\frac{p}{p-2}} = \|u\|_2 &\le \|u - \bar{u}\|_2 + |\bar{u}| \\
&\le C_s \frac{p}{p-2} D \| d|f| \cdot |f|^{\frac{2}{p-2}} \|_{\frac{2p}{p+2}} + |\bar{u}| \\
&\le C_s \frac{p}{p-2} D \|df\|_2 \|f\|_{\frac{2p}{p-2}}^{\frac{2}{p-2}} + \|f\|_{\frac{p}{p-2}}^{\frac{p}{p-2}} \\
&\le C_s \frac{p}{p-2} D \|df\|_2 \|f\|_{\frac{2p}{p-2}}^{\frac{2}{p-2}} + \|f\|_2 \|f\|_{\frac{2p}{p-2}}^{\frac{2}{p-2}}.
\end{aligned}$$

将两边同时除以 $\|f\|_{\frac{2p}{p-2}}^{\frac{p-2}{2p}}$，即可得到所需的不等式。 □

3.4 ker$\ker \mathcal{D}_\theta$中的微分形式的关键估计

利用积分恒等式（定理 3.2）以及上述建立的 L^∞-估计，我们现在证明一个技术性引理，它对证明主定理至关重要。

引理 3.7. 设(M^n, g)是一个闭的n维光滑黎曼流形，满足索博列夫–庞加莱不等式

$$\|f - \bar{f}\|_2 \le C_s D \|df\|_{\frac{2p}{p+2}}, \qquad p > 2.$$

设 θ 是一个满足以下条件的1形式

$$\nabla^* \nabla \theta + V\theta = 0.$$

那么对于每个 $\alpha \in \ker \mathcal{D}_\theta \cap \Omega^{\pm}(M)$，都有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)} \int_M |u - \bar{u}| \, |\alpha|^2 &\le 2C_s C_1^2(p,q) \sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}} D^2} \big(1 + \sqrt{C_0(p,q) C_s D B}\big)^{\frac{4pq}{q-p}} \|\alpha\|_2^2 \\
&\quad \times \exp\big(2C_4(p,q) \sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}} C_s D\big) \|\theta\|_2^2, \qquad (3.7) \\
\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)} \int_M |\theta|^2 |\alpha|^2 &\le C_2(n) C_1^2(p,q) \sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}} \big(1 + \sqrt{C_0(p,q) C_s D B}\big)^{\frac{4pq}{q-p}} \|\alpha\|_2^2 \\
&\quad \times \exp\big(C_4(p,q) \sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}} C_s D\big) \|\theta\|_2, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

其中 $u = |\theta|^2$、$\bar{u} = \frac{1}{\text{体积}(g)} \int_M |\theta|^2 dvol_g$ 和 $+\infty \ge q > p$。

证明。 首先注意到，由方程 $\nabla^*\nabla\theta + V\theta = 0$，我们有

$$\begin{aligned}\|\nabla\theta\|_2^2 &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M \langle\nabla^*\nabla\theta,\theta\rangle dvol_g \\ &\leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M V^-|\theta|^2 dvol_g \\ &\leq \|V^-\|_{\frac{q}{2}}\|\theta\|_\infty^2.\end{aligned}$$

对于 (3.7)，我们计算

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M |u-\bar{u}|\,|\alpha|^2 &\leq \|u-\bar{u}\|_2\|\alpha\|_4^2 \\ &\leq C_s D\|\nabla u\|_{\frac{2p}{p+2}}\|\alpha\|_4^2 \\ &\leq C_s D\|\nabla u\|_2\|\alpha\|_\infty^2 \\ &\leq 2C_s D\|\theta\|_\infty\|\nabla\theta\|_2\|\alpha\|_\infty^2 \\ &\leq 2C_s\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}D^2}\|\theta\|_\infty^2\|\alpha\|_\infty^2.\end{aligned}$$

现在应用定理 3.4 对 $\|\alpha\|_\infty$ 进行估计，并应用命题 3.5 对 $\|\theta\|_\infty$ 进行估计。由此得到 (3.7)。

对于 (3.8)，我们使用定理 3.2：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M |\theta|^2|\alpha|^2 &\leq C_2(n)\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M |\nabla\theta|\,|\alpha|^2 \\ &\leq C_2(n)\|\nabla\theta\|_2\|\alpha\|_\infty^2 \\ &\leq C_2(n)\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}}\|\theta\|_\infty\|\alpha\|_\infty^2.\end{aligned}$$

再次应用 L^∞-估计，得到 (3.8)。 □

现在我们结合前一节中的估计来证明第一个主要定理。

定理 ***1.1*** 的证明. 假设定理 1.1 的假设成立。特别地，我们有

$$\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}D^2} \leq \varepsilon,$$

其中 ε 将由 (3.9)、(3.13) 和 (3.14) 确定。

首先，注意到如果

$$\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}D^2} \leq \frac{1}{2C_sC_4(p,q)}, \tag{3.9}$$

那么我们有

$$e^{2C_4(p,q)\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}}C_sD} \leq e. \tag{3.10}$$

由命题 3.5 得到

$$\|\theta\|_q^2 \leq \|\theta\|_\infty^2 \leq e\cdot\|\theta\|_2^2. \tag{3.11}$$

现在选取 $t > 0$，使得

$$\|t\theta\|_2^2 = 9e^4C_2^2(n)C_1^2(p,q)\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}. \tag{3.12}$$

作此选取后，我们有

$$\begin{aligned} B^2 &:= C_3(n)(\|t\theta\|_q^2 + \|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}) \\ &\le C_3(n)\big(9e^5 C_2^2(n)C_1^2(p,q)+1\big)\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}} \\ &:= C_5(n,p,q)\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \big(1+\sqrt{C_0(p,q)C_sDB}\big)^{\frac{4pq}{q-p}} &\le \exp\Big(\frac{4pq}{q-p}\sqrt{C_0(p,q)C_sDB}\Big) \\ &\le \exp\Big(\frac{4pq}{q-p}\sqrt{C_0(p,q)C_s}(C_5(n,p,q)\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}D^2)^{\frac14}\Big) \\ &:= \exp\Big(\sqrt{C_s}C_6(n,p,q)(\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}D^2)^{\frac14}\Big). \end{aligned}$$

现在进一步假设

$$\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}D^2} \le e\sqrt{\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}D^2}\exp\Big(-\sqrt{C_s}C_6(n,p,q)(\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}D^2)^{\frac14}\Big), \tag{3.13}$$

将引理 3.7 中的估计 (3.8) 应用于 $t\theta$，并利用 (3.12)–(3.13)，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M t^2|\theta|^2|\alpha|^2 \\ &\quad\le C_2(n)\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}}C_1(p,q)\big(1+\sqrt{C_0(p,q)C_sDB}\big)^{\frac{4pq}{q-p}}\|\alpha\|_2^2 e^{2C_sC_4(p,q)D\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}}}\|t\theta\|_2 \\ &\quad\le eC_2(n)C_1(p,q)\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}}\exp\Big(\sqrt{C_s}C_6(n,p,q)(\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}D^2)^{\frac14}\Big)\|\alpha\|_2^2\|t\theta\|_2 \\ &\quad= 3e^3C_2^2(n)C_1^2(p,q)\Big(\frac{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}}{\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}}\Big)^{\frac12}\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}\exp\Big(\sqrt{C_s}C_6(n,p,q)(\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}D^2)^{\frac14}\Big)\|\alpha\|_2^2 \\ &\quad= \frac{1}{3e}\Big(\frac{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}}{\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}}\Big)^{\frac12}\exp\Big(\sqrt{C_s}C_6(n,p,q)(\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}D^2)^{\frac14}\Big)\|t\theta\|_2^2\|\alpha\|_2^2 \\ &\quad\le \frac13\|t\theta\|_2^2\|\alpha\|_2^2. \end{aligned}$$

此外，如果

$$\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}D^2} \le \frac{1}{6\sqrt{e}C_sC_1(p,q)}\exp\Big(-\sqrt{C_s}C_6(n,p,q)(\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}D^2)^{\frac14}\Big), \tag{3.14}$$

于是由估计式 (3.7)，可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M t^2|u-\bar u||\alpha|^2 \\ &\quad\le 2C_sC_1(p,q)\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}D^2}\big(1+\sqrt{C_0(p,q)C_sDB}\big)^{\frac{4pq}{q-p}}\|\alpha\|_2^2 e^{C_sC_4(p,q)D\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}}}\|t\theta\|_2^2 \\ &\quad\le 2\sqrt{e}C_sC_1(p,q)\sqrt{\|V^-\|_{\frac{q}{2}}D^2}\exp\Big(\sqrt{C_s}C_6(n,p,q)(\|\lambda_{n,l}^-\|_{\frac{q}{2}}D^2)^{\frac14}\Big)\|\alpha\|_2^2\|t\theta\|_2^2 \\ &\quad\le \frac13\|t\theta\|_2^2\|\alpha\|_2^2. \end{aligned}$$

现在注意到，根据三角不等式，

$$\begin{aligned}\|t\theta\|_2^2\|\alpha\|_2^2 &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M t^2\bar{u}|\alpha|^2 \\ &\leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M t^2|u-\bar{u}||\alpha|^2 + \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M t^2|\theta|^2|\alpha|^2,\end{aligned}$$

其中 $u = |\theta|^2$ 和 $\bar{u} = \frac{1}{\text{体积}(g)}\int_M |\theta|^2 dvol_g$。

结合前面的估计，我们得到

$$\|t\theta\|_2^2\|\alpha\|_2^2 \leq \frac{2}{3}\|t\theta\|_2^2\|\alpha\|_2^2.$$

这意味着 $\|\alpha\|_2 = 0$，因此 $\alpha = 0$。所以，

$$\ker \mathcal{D}_{t\theta} \cap \Omega_l^{\pm}(M) = 0.$$

最后，若 $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，则 $\Omega_l^{\pm} = \Omega^{\pm}$。根据引理 3.1，

$$\begin{aligned}\mathrm{Index}(\mathcal{D}_{t\theta}) :&= \dim\ker(\mathcal{D}_{t\theta}) - \dim\mathrm{coker}(\mathcal{D}_{t\theta}) \\ &= \dim\ker(\mathcal{D}_{t\theta}) \cap \Omega^+ - \dim\ker(\mathcal{D}_{t\theta}) \cap \Omega^- \\ &= \chi(M).\end{aligned}$$

这意味着 $\chi(M) = 0$。 □

4 积分曲率条件的应用

4.1 具有 L^p 下界的曲率算子

我们首先证明，在适当的积分里奇曲率界条件下，该流形满足一个具有显式常数的 Sobolev–Poincar´e 不等式。

引理 4.1 (积分里奇曲率界下的 Sobolev–Poincar´e 不等式)。 设 (M^n, g) 为一个闭的 n 维光滑黎曼流形，且 $q > p > n$。存在一个正常数 $C_7(n,p)$，使得若里奇曲率满足

$$\| \mathrm{Ric}^- \|_{\frac{q}{2}} D^2 \leq C_7(n,p),$$

那么对于每个函数 $f \in L_1^2(M)$，我们都有 ***Sobolev–Poincar´e*** 不等式

$$\|f - \bar{f}\|_2 \leq C_8(n,p) D \|df\|_{\frac{2p}{p+2}},$$

其中 $\bar{f} = \frac{1}{\text{体积}(g)}\int_M f\, dvol_g$。

证明。 回想一下，索伯列夫常数定义为（[25, 第 201] 页）

$$\lambda_{\frac{2p}{p+2},2} = \inf_{f\in C^\infty(M)} \frac{\|\nabla f\|_{\frac{2p}{p+2}}}{\inf_{a\in\mathbb{R}} \|f-a\|_2}.$$

2p对于任意 $p > n$，这些常数出现在嵌入 $L_1^{p+2} \hookrightarrow L^2$ 中。

¯由于对常数 a 取下确界在平均值 f 处取得，即

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \|f-a\|_2 = \|f-\bar{f}\|_2,$$

我们有

$$\|\nabla f\|_{\frac{2p}{p+2}} \geq \lambda_{\frac{2p}{p+2},2}\|f-\bar{f}\|_2.$$

现在注意到

$$\Big(\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M (\mathrm{Ric}^-\, D^2-1)_+^{\frac{p}{2}}\, dvol_g\Big)^{\frac{2}{p}} \leq \|\,\mathrm{Ric}^-\,\|_{\frac{p}{2}} D^2 \leq \|\,\mathrm{Ric}^-\,\|_{\frac{q}{2}} D^2,$$

其中 (里奇曲率$^-$ $D^2-1)_+$ = 最大值{里奇曲率$^-$ D^2-1， 0}。

由 [25, 定理 6] （此处为 $\alpha = \frac{1}{D}$），如果

$$\|\,\mathrm{Ric}^-\,\|_{\frac{q}{2}} D^2 \leq C_7(n,p) := \frac{1}{2}(e^{B(p)}-1)^{-1},$$

那么存在一个正常数

$$\gamma(D,n,p) := \frac{B(p)}{D}\min\Big\{2^{-\frac{1}{p-1}}, \frac{1}{4}(e^{B(p)}-1)^{-1}\Big\}$$

使得

$$K(p,\frac{2p}{p+2})\cdot\lambda_{\frac{2p}{p+2},2} \geq \gamma(D,n,p),$$

其中 B（p）是 [25, 定理 2] 中出现的常数，而 K（p， $\frac{2p}{p+2}$）是~~[25,~~定理 6]中出现的常数。这立即推出所需的不等式，其中

$$C_8(n,p)D = \gamma(D,n,p)^{-1}K(p,\frac{2p}{p+2}).$$

□

作为一个直接推论，我们得到在积分曲率算子条件下调和形式的一致 L^∞-估计。基于 Li [33],的工作，我们进一步拓展博赫纳技巧，并在此情形下导出贝蒂数的界。

证明 ***of*** 定理 ***1.3***。 由于 θ 是一个调和的 k-形式，Weitzenb¨ock 恒等式给出 s

$$\nabla^*\nabla\theta + \mathrm{Ric}(\theta) = 0.$$

因此，函数 $f := |\theta|$满足微分不等式

$$f\,\Delta_d f \le \frac{k(n-k)}{n-l}\lambda^-_{n,l}\,f^2 \le \frac{n}{4}\lambda^-_{n,l}\,f^2.$$

现在假设 C_9 满足

$$C_9 \le \frac{n-l}{n-1}\,C_7(n,p).$$

于是我们有

$$\|\,\mathrm{Ric}^-\,\|_{\frac{q}{2}} D^2 \le \|\frac{n-1}{n-l}\,\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2 \le C_7(n,p).$$

因此，引理 4.1 给出了 Sobolev–Poincar´e 不等式

$$\|f-\bar{f}\|_2 \le C_8(n,p) D \|df\|_{\frac{2p}{p+2}},$$

应用命题 3.5（取 $V^- \le \frac{n}{4}\lambda^-_{n,l}$）可得

$$\|\theta\|_\infty \le \exp\Big\{C_4\sqrt{\frac{n}{4}}\,C_8\sqrt{C_9}\Big\}\,\|\theta\|_2.$$

当 $\varepsilon(n,p,q)$ 足够小时，通过标准的维数论证即可得到贝蒂数 $b_k(M)$ 的上界。

□

4.2 Morse–Novikov 上同调的消失

现在我们应用定理 1.1，在几何曲率条件下得到关于欧拉示性数的约束。

推论 4.2. 设(M^n, g) 是一个闭的 n 维光滑黎曼流形，其第一德拉姆上同调 $H^1_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$非平凡，并设 $q > p > n$。假设曲率算子满足

$$\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}}\,D^2 \le C_{10}(n,p,q),$$

其中

$$C_{10}(n,p,q) := \min\Big\{\frac{1}{16\,C_8^2(n,p)\,C_6^4(n,p,q)},\ \frac{1}{72\,e^2\,C_8^2(n,p)\,C_1^2(p,q)},\ \frac{1}{8\,C_8^2(n,p)\,C_4^2(p,q)},\ \frac{1}{2}\,C_7(n,p)\Big\}.$$

那么存在一个正数 $t \in \mathbb{R}^+$，使得对每个 $k \le l$,

$$H^k(M, t\theta) = \{0\},$$

其中 θ 是一个非零调和的1-形式。

证明。 注记 2.2 给出了逐点估计

$$\mathrm{Ric}^- \le \frac{n-1}{n-l}\,\lambda^-_{n,l} < 2\lambda^-_{n,l}.$$

因此,

$$\sqrt{\|\,\mathrm{Ric}^-\,\|_{\frac{q}{2}} D^2} \le \sqrt{2}\,\sqrt{\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2}. \tag{4.1}$$

首先假设常数 C_{10} 满足

$$C_{10} \le \frac{1}{2}\,C_7(n,p).$$

那么引理 4.1 给出了常数为 $C_s = C_8(n,p)$ 的 Sobolev–Poincaré 不等式。

由于 $b_1(M) \ge 1$，我们可以选取一个非平凡的调和 1-形式 θ。它满足 Weitzenböck 方程

$$\nabla^*\nabla\theta + \mathrm{Ric}(\theta) = 0,$$

这是一个薛定谔型方程，如定理 1.1 所示，其势为 $V =$ 里奇曲率。

如果我们进一步施加

$$\sqrt{\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2} \le \frac{1}{4C_8(n,p)C_6^2(n,p,q)},$$

我们得到

$$e^{-\frac{1}{2}} \le \exp\Big(-\sqrt{C_s}\,C_6(n,p,q)\big(\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2\big)^{\frac{1}{4}}\Big),$$

and

$$\frac{1}{6e\,C_8(n,p)C_1(p,q)} \le \frac{1}{6\sqrt{e}\,C_sC_1(p,q)}\exp\Big(-\sqrt{C_s}\,C_6(n,p,q)\big(\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2\big)^{\frac{1}{4}}\Big).$$

因此，由（4.1）可得

$$\begin{aligned}\sqrt{\|\,\mathrm{Ric}^-\,\|_{\frac{q}{2}} D^2} &\le \sqrt{2}\,\sqrt{\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2}\\ &< e^{\frac{1}{2}}\sqrt{\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2}\\ &\le e\sqrt{\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2}\;\exp\Big(-\sqrt{C_s}\,C_6(n,p,q)\big(\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2\big)^{\frac{1}{4}}\Big),\end{aligned} \tag{4.2}$$

and

$$\begin{aligned}\sqrt{\|\,\mathrm{Ric}^-\,\|_{\frac{q}{2}} D^2} &\le \sqrt{2}\,\sqrt{\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2}\\ &\le \sqrt{2}\,\frac{1}{6\sqrt{2}\,e\,C_8(n,p)C_1(p,q)}\\ &\le \frac{1}{6\sqrt{e}\,C_sC_1(p,q)}\exp\Big(-\sqrt{C_s}\,C_6(n,p,q)\big(\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2\big)^{\frac{1}{4}}\Big).\end{aligned} \tag{4.3}$$

最后，

$$\begin{aligned}\sqrt{\| \operatorname{Ric}^- \|_{\frac{q}{2}} D^2} &\leq \sqrt{2}\sqrt{\|\lambda^-_{n,l}\|_{\frac{q}{2}} D^2} \\ &\leq \sqrt{2}\,\frac{1}{2\sqrt{2}\,C_8(n,p)C_4(p,q)} \\ &= \frac{1}{2\,C_8(n,p)C_4(p,q)} = \frac{1}{2\,C_s\,C_4(p,q)}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

不等式 (4.2)–(4.4) 验证了定理 1.1 的三个条件对于势 V =里奇曲率均得到满足。因此，根据定理 1.1，存在一个缩放参数 $t>0$，使得

$$\ker \mathcal{D}_{t\theta} \cap \Omega^{\pm}_l(M) = \{0\}.$$

由于 θ 是闭的，我们有分解

$$\ker \mathcal{D}_{t\theta} \cap \Omega^{\bullet}_l(M) = \bigoplus_{k\leq l} \ker \mathcal{D}_{t\theta} \cap \Omega^k(M) \bigoplus_{k\leq l} \ker \mathcal{D}_{t\theta} \cap \Omega^{n-k}(M),$$

其中，$\bullet = +$ 对应偶数 k，而 $\bullet = -$ 对应奇数 k。

最后，回顾 ker $\mathcal{D}_{t\theta} \cap \Omega^k(M) \cong H^k(M,\ t\theta)$（第 k 个 Morse–Novikov 上同调群），我们得出证明。 □

定理 ***1.2*** 的证明。 由于 $H^1_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$，存在一个非零调和 1-形式 θ。根据推论 4.2，在条件

$$\left\|\lambda^-_{2n,l}\right\|_{\frac{q}{2}} D^2 \leq C_{10},$$

我们可以选择 $t>0$使得

$$H^k(M,\, t\theta) = 0 \qquad \text{for all } k \leq l,$$

其中 $H^k(M,\ t\theta)$ 表示由 $t\theta$ 扭曲的 Morse–Novikov 上同调。

利用 Morse–Novikov 上同调的 Poincar´e 对偶性 [39]，我们有

$$\dim H^k(M, t\theta) = \dim H^{2n-k}(M, t\theta).$$

因此，欧拉示性数可以写为

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \dim H^k(M, t\theta) \\ &= \sum_{k<n} 2(-1)^k \dim H^k(M, t\theta) + (-1)^n \dim H^n(M, t\theta).\end{aligned}$$

若 $l=n$，则假设给出：对所有 $k \leq n$，$H^k(M, t\theta) = 0$。由对偶性可知，对每个 k，$H^k(M, t\theta) = 0$，因此

$$\chi(M) = 0.$$

若 $l = n-1$，则对所有 $k \neq n$，$H^k(M, t\theta) = 0$。因此

$$\chi(M) = (-1)^n \dim H^n(M, t\theta),$$

由此得到

$$(-1)^n \chi(M) = \dim H^n(M, t\theta) \geq 0.$$

证明至此完成。 □

推论 4.3. 设(M^{2n}, g)是一个第一德拉姆上同调群非零的闭 $2n$ 维光滑黎曼流形，并设 $q > p > 2n$。假设截面曲率和直径满足

$$|\sec(g)|(x) \leq K(x), \qquad \operatorname{diam}(M) \leq D.$$

其中 $K(x)$ 是 M 上的一个非负函数。存在一个正常数 $C_{10}(n, p, q)$，使得若

$$\|K\|_{\frac{q}{2}} D^2 \leq \frac{3}{2n(2n-1)} C_{10}(n, p, q),$$

则 M 的欧拉示性数满足 $\chi(M) = 0$。

证明。 根据命题 3.8], , 曲率算子的特征值满足

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \geq -\frac{2n(2n-1)}{3} K.$$

因此，如果

$$\|K\|_{\frac{q}{2}} D^2 \leq \frac{3}{2n(2n-1)} C_{10},$$

then

$$\left\|\lambda^-_{2n,n}\right\|_{\frac{q}{2}} D^2 \leq C_{10}.$$

将 $l = n$ 代入定理 1.2，得到 $\chi(M) = 0$。 □

推论 ***1.4*** 的证明。 设 (M^4, g) 是一个闭的 4 维黎曼流形。欧拉示性数可以用贝蒂数表示为

$$\chi(M) = 2 + b_2(M) - 2b_1(M).$$

如果 $b_1(M) = 0$，那么

$$\chi(M) = 2 + b_2(M) \geq 2 > 0.$$

现在假设 $b_1(M) \geq 1$。那么存在一个非零调和 1-形式 θ。将 $n = 4$ 和 $l = 1$ 代入推论 4.2，假设 $\|$里奇曲率$^-\|_{\frac{q}{2}} D^2 \leq C_{10}$保证存在一个数 $t > 0$，使得

$$H^0(M, t\theta) = H^1(M, t\theta) = 0.$$

庞加莱对偶给出 $H^3(M, t\theta) = H^4(M, t\theta) = 0$。因此，

$$\chi(M) = \dim H^2(M, t\theta) \geq 0.$$

在这两种情况下，我们得到 $\chi(M) \geq 0$，从而完成证明。 □

5 粗拉普拉斯算子的特征值估计

现在我们转向积分曲率条件下 1-形式的粗拉普拉斯算子的特征值估计。首先，我们回顾流形上几乎非负里奇曲率条件下的一个庞加莱型不等式。

定理 5.1. 设 (M^n, g) 是满足以下条件的闭 n 维光滑黎曼流形

$$\mathrm{Ric}(g)D^2(g) \geq -(n-1)b^2$$

对某个常数 $b > 0$ 成立。则对任意 $1 \leq p \leq \frac{nq}{n-q}$, $p < \infty$ 和 $f \in L_1^q(M)$，有

$$\|f - \bar{f}\|_{L^p(M)} \leq S_{p,q}\|df\|_{L^q(M)},$$

其中

$$\bar{f} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M f d\,\mathrm{vol}_g, S_{p,q} = \Big(\frac{\mathrm{Vol}(g)}{\mathrm{Vol}(S^n(1))}\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} R(b)\Sigma(n,p,q),$$

$\Sigma(n, p, q)$ 是标准单位球面 $S^n(1)$ 的索伯列夫常数，并且 $R(b) = {}^{D}{}_{(g)\,bC(b)}$ 中 $C(b)$ 是以下方程的唯一正根

$$x\int_0^b (\cosh t + x\sinh t)^{n-1}dt = \int_0^\pi \sin^{n-1} t\, dt. \tag{5.1}$$

证明。 参见 [16, 定理 5.1] 或 [8, 页 397]。 □

为了应用定理 5.1，常数 $C(b)$ 的以下估计对于得到显式下界至关重要。

引理 5.2。 （*[31,* 引理 *2.3]*）设 $C(b)$ 是方程 (5.1) 的唯一正根。则

$$bC(b) \geq a_n e^{-(n-1)b} > 0$$

其中常数 a_n 仅依赖于 n。

以下命题是定理 5.1 和引理 5.2 的直接推论。

命题 5.3。 设 (M^n, g) 是一个闭的 n 维光滑黎曼流形。记 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{\binom{n}{2}}$ 曲率算子的特征值，并设

$$\lambda_{n,l} := \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-l}.$$

固定 $D > 0$和 $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。如果 $f \in L_1^2(M)$，那么

$$\|f - \bar{f}\|_2 \leq C(n)De^{\frac{(n-1)}{\sqrt{n-l}}\sqrt{\|\lambda_{n,l}^-\|_\infty D^2}}\|df\|_{\frac{2n}{n+2}}.$$

证明。 注意到

$$\mathrm{Ric} \geq -\frac{n-1}{n-l}\lambda^-_{n,l}.$$

根据定理 5.1 以及引理 5.2（取 $p=2$ 和 $q=\frac{2n}{n+2}$），我们可以选取 Sobolev 常数 t

$$C_s = C(n)e^{\frac{(n-1)}{\sqrt{n-l}}\sqrt{\|\lambda^-_{n,l}\|_\infty D^2}},$$

其中

$$C(n) = a_n^{-1}\Big(\mathrm{Vol}(S^n(1))\Big)^{\frac{1}{n}}\Sigma(n,2,\frac{2n}{n+2}).$$

□

现在我们证明特征值估计。

***Pro*定理 *1.6*。** 设 θ 是一个达到第一特征值的非平凡 1-形式:

$$\nabla^*\nabla\theta - \lambda_1^{(1)}\theta = 0.$$

该方程是定理 1.1 中方程在势为 $V \equiv -\lambda_1^{(1)}$ 时的特例。注意到

$$\|V^-\|_\infty = \lambda_1^{(1)},$$

且索伯列夫常数满足

$$C_s(\infty) = C(n)\exp\Big(\frac{2n-1}{\sqrt{n}}\sqrt{\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2}\Big).$$

此外，若

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_1^{(1)}D^2} \leq \min\Bigg\{ & e\sqrt{\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2}\exp\Big(-\sqrt{C_s(\infty)}C_6(n,2n,\infty)(\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2)^{\frac{1}{4}}\Big),\\ & \frac{1}{6\sqrt{e}C_s(\infty)C_1(n,\infty)}\exp\Big(-\sqrt{C_s(\infty)}C_6(n,2n,\infty)(\|\lambda^-_{2n,n}\|_\infty D^2)^{\frac{1}{4}}\Big),\\ & \frac{1}{2C_s(\infty)C_4(n,\infty)}\Bigg\},\end{aligned}$$

那么由定理 1.1（此处取 $p=2n$ 和 $q=+\infty$）可得 $\chi(M)=0$，这与假设 $\chi(M)\neq 0$ 矛盾。因此，反向的严格不等式必然成立，这正是所要证明的估计。

□

命题 5.4. 设 (M^{2n},g) 是一个闭的 $2n$ 维、 $n\geq 2$ 的光滑黎曼流形，且欧拉示性数非零。假设里奇曲率满足

$$\mathrm{Ric}(g) \geq 0.$$

于是，作用于1-微分形式上的霍奇-拉普拉斯算子的第一特征值满足

$$\mu_1^{(1)} \geq \lambda_1^{(1)}.$$

证明。 由于里奇曲率$(g) \geq 0$，对于任意 $\alpha \in \Omega^1(M)$，我们有

$$\frac{(\Delta_d \alpha, \alpha)_{L^2}}{\|\alpha\|_{L^2}^2} \geq \frac{(\nabla^* \nabla \alpha, \alpha)_{L^2}}{\|\alpha\|_{L^2}^2}.$$

在条件 Ric$(g) \geq 0$ 下，任意调和 1-形式 α 满足 $\nabla \alpha = 0$，即 α 平行。由于 $\chi(M) \neq 0$，不存在非零调和 1-形式。Hodge–拉普拉斯算子作用于 1-形式的第一个非零特征值为

$$\mu_1^{(1)} = \inf_{\alpha \in \Omega^1(M) \setminus \{0\}} \frac{(\Delta_d \alpha, \alpha)_{L^2(M)}}{\|\alpha\|_{L^2(M)}^2}.$$

而粗拉普拉斯算子作用于 1-形式的第一特征值为

$$\lambda_1^{(1)} = \inf_{\alpha \in \Omega^1(M) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla \alpha\|_{L^2(M)}^2}{\|\alpha\|_{L^2(M)}^2}.$$

我们立即得到

$$\mu_1^{(1)} \geq \lambda_1^{(1)}.$$

证明至此完成。 □

推论 ***1.7*** 的证明. 我们只需证明，当 $b_1(M) > 0$ 时， $\chi(M) = 0$。反设 $b_1(M) > 0$，但 $\chi(M) \neq 0$。由于 $\chi(M) \neq 0$，由定理 1.6 可知，粗拉普拉斯算子作用于 1-形式的第一特征值满足 (1.1)。因为 $\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty D^2 \leq C_{11}(n)$，且我们可以选取足够小的 $C_{11}(n)$，所以最小值中的第二项和第三项都大于第一项。因此，

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_1^{(1)} D^2} &> e \sqrt{\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty D^2} \exp\Big(-\sqrt{C_s(\infty)} C_6(n, 2n, \infty) (\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty D^2)^{\frac{1}{4}}\Big) \\ &\geq e^{\frac{1}{2}} \sqrt{\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty D^2}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

另一方面，由于 $b_1(M) > 0$，存在一个非平凡的调和 1-形式 θ。Weitzenb¨ock 公式给出

$$\nabla^* \nabla \theta + \mathrm{Ric}(\theta) = 0.$$

与 θ 取内积并积分，得到

$$\|\nabla \theta\|_2^2 = -\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)} \int_M \langle \mathrm{Ric}(\theta), \theta \rangle \leq \| \mathrm{Ric}^- \|_\infty \|\theta\|_2^2.$$

利用逐点估计 $\mathrm{Ric}^- \leq \binom{2n-1}{n} \lambda_{2n,\ n}^-$，我们得到

$$\|\nabla \theta\|_2^2 \leq \frac{2n-1}{n} \|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty \|\theta\|_2^2. \tag{5.3}$$

注意到当 $\chi(M) \neq 0$ 时，$\ker \nabla \cap \Omega^1 = 0$。因此，根据 $\lambda_1^{(1)}$ 的变分刻画，

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} : &= \inf_{\alpha \in \Omega^1(M) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla \alpha\|_2^2}{\|\alpha\|_2^2} \leq \frac{\|\nabla \theta\|_2^2}{\|\theta\|_2^2} \\ &\leq \| \mathrm{Ric}^- \|_\infty \\ &\leq \frac{2n-1}{n} \|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty. \end{aligned}$$

将此与 (5.2) 结合可得

$$e\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty < \lambda_1^{(1)} \le \frac{2n-1}{n}\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty,$$

这是不可能的，因为 $e > 2 > \frac{2n-1}{n}$。因此，当 $b_1(M) > 0$ 时，必有 $\chi(M) = 0$。 □

定理 ***1.8*** 的证明。根据推论 1.7 以及条件 $\chi(M) \neq 0$，我们有 $b_1(M) = 0$。因此，

$$\mu_1^{(1)} = \inf_{\alpha\in\Omega^1(M)\setminus\{0\}} \frac{(\Delta_d\alpha,\alpha)_{L^2(M)}}{\|\alpha\|^2_{L^2(M)}}.$$

此外，定理 1.6 给出（见（5.2））

$$\lambda_1^{(1)} > e\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty.$$

对于任意非零的 1-形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$,

$$\begin{aligned}(\Delta_d\alpha,\alpha)_{L^2(M)} &= (\nabla^*\nabla\alpha,\alpha)_{L^2(M)} + (\mathrm{Ric}(\alpha),\alpha)_{L^2(M)}\\ &\ge \lambda_1^{(1)}\,\|\alpha\|^2_{L^2(M)} - \frac{2n-1}{n}\,\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty\,\|\alpha\|^2_{L^2}\\ &> \left[e\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty - \frac{2n-1}{n}\,\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty\right]\|\alpha\|^2_{L^2}\\ &> (e-2)\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty\,\|\alpha\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

这意味着，对于任意非零的 $\alpha \in \Omega^1(M)$,

$$\frac{(\Delta_d\alpha,\alpha)_{L^2(M)}}{\|\alpha\|^2_{L^2(M)}} > (e-2)\|\lambda_{2n,n}^-\|_\infty.$$

对所有非零 1-形式 α 取下确界，即可得到所需的 $\mu_1^{(1)}$ 下界。 □

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会项目 12271496（Huang）、中国科学院青年创新促进会、中央高校基本科研业务费以及中国科学技术大学双一流建设研究基金的资助。作者还感谢 DeepSeek 协助校对本文并改进语法和表达。

声明

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

数据可用性

本手稿没有相关数据。

参考文献

[1] Anderson, M., Ricci 平坦流形的 Hausdorff 扰动与分裂定理，《杜克数学杂志》68 (1992)，第 1 期，67–82 页。[2] Aubry, E.，π_1 的有限性及几乎正 Ricci 曲率下的几何不等式。《高等师范学校科学年报》40 (2007)，第 4 期，675–695 页。[3] Aubry, E., 几乎正 Ricci 曲率下的直径夹逼，《赫尔维数学评论》 84 (2009)，第 2 期，223–233 页。[4] Aubry, E., Colbois, B., Ghanaat, P., Ruh, E.A., 曲率、Harnack 不等式与幂零流形的谱刻画，《全球分析与几何年刊》23 (2003)，第 3 期，227–246 页。[5] Ann´e, C., Takahashi, J., 固定体积下粗拉普拉斯算子与霍奇拉普拉斯算子的小特征值。《图卢兹数学年报》（第 6 辑）33 (2024)，第 1 期，123–151 页。[6] Ann´e, C., Takahashi, J., 截面曲率有下界时霍奇-拉普拉斯算子的小特征值。《全球分析与几何年刊》68 (2025)，第 1 期，论文编号 1，共 15 页。[7] Ballmann, W., Br¨uning, J., Carron, G., 特征值与整体性。《国际数学研究通报》12 (2003)，657–665 页。[8] B´erard, P.H., 从消灭定理到估计定理：重新审视博赫纳技巧。《美国数学会通报》19 (1988)，371–406 页。[9] Berger, M., 关于曲率算子为正的流形。《巴黎科学院院报》253 (1961)，2832–2834 页。[10] Bochner, S., 向量场与里奇曲率。《美国数学会通报》52 (1946)，776–797 页。[11] Boulanger, A., Courtois, G., 余恰 1-形式的 Cheeger 型不等式。《杜克数学杂志》171 (2022)，第 18 期，3593–3641 页。[12] Bourguignon, J.-P., Karcher, H., 曲率算子：挤压估计与几何实例。《高等师范学校科学年报》11 (1978)，71–92 页。[13] Buser, P., 关于等周常数的一则注记。《高等师范学校科学年报》15 (1982)，213–230 页。[14] Buser, P., Karcher, H., Gromov 的几乎平坦流形。Ast´erisque 81 (1981)，1–148 页。[15] Cheeger, J., 拉普拉斯算子最小特征值的下界。《分析问题》（献给 Salomon Bochner 的论文集，1969），195–199 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970。[16] Chen, X.Y., 几乎非负曲率流形的 Morse-Novikov 上同调。《数学进展》371 (2020)，107249，共 23 页。[17] Chen, X.Y., Han, F., 新的 Bochner 型定理。《数学年刊》388 (2024)，3757–3783 页。[18] Cheng, S., 特征值比较定理及其几何应用。《数学杂志》143 (1975)，289–297 页。[19] Colbois, B., Courtois, G., 关于作用于 p-形式的拉普拉斯算子的第一个非零特征值。《数学手稿》68 (1990)，第 2 期，143–160 页。[20] Colbois, B., Maerten, D., 微分形式上的粗拉普拉斯算子的特征值估计。《数学手稿》132 (2010)，399–413 页。[21] de Leon, M., Lopez, B., Marrero, J.C., Padron, E., 关于 Lichnerowicz-Jacobi 上同调的计算。《几何物理杂志》44 (2003)，507–522 页。[22] Donaldson, S.K., 规范理论在四维拓扑中的一个应用。《微分几何杂志》18 (1983)，279–315 页。[23] Donaldson, S.K., Yang-Mills 模空间的定向与 4-流形拓扑。《微分几何杂志》26 (1987)，397–428 页。

[24] Gallot, S., 黎曼流形上的定量索伯列夫估计及其应用。《巴黎科学院院报》数学辑 I 292 (1981)，375–377 页。[25] Gallot, S., 基于里奇曲率积分范数的等周不等式。Ast´erisque 157-158 (1988)，191–216 页。[26] Gromov, M., 几乎平坦流形。《微分几何杂志》13 (1978)，231–241 页。[27] Gromov, M., 曲率、直径与贝蒂数。《赫尔维数学评论》56 (1981)，179–195 页。[28] Herrmann, M., Sebastian D., Tuschmann, W., 具有几乎非负曲率算子的流形与主丛。《全球分析与几何年刊》44 (2013)，391–399 页。[29] Honda, S., Mondino, A., Ricci 曲率有界的四维流形上 1-形式的庞加莱不等式。《数学档案》124 (2025)，449–455 页。[30] Huang, T., Tan, Q., 曲率算子与欧拉数。《变分法与偏微分方程》64 (2025)，第 7 期，论文编号 205，共 31 页。[31] Huang, T., Wang, W., 1-形式上粗拉普拉斯算子的特征值估计及其应用。arXiv:2512.04740 (2025)[32] Lawson, H.B., Michelsohn, M.-L., 自旋几何。普林斯顿大学出版社，1989。[33] Li, P., 关于紧黎曼流形的索伯列夫常数与 p-谱。《高等师范学校科学年报》13 (1980)，451–468 页。[34] Li, P., Yau, S.T., 紧黎曼流形的特征值估计。《美国数学会纯数学研讨会论文集》36 (1980)，205–239 页。[35] Lipnowski, M., Stern, M., 双曲流形上最小 1-形式拉普拉斯算子特征值的几何。《几何与泛函分析》28 (2018)，第 6 期，1717–1755 页。[36] Lichnerowicz, A., 泊松流形及其相关李代数。《微分几何杂志》12 (1977)，253–300 页。[37] Lott, J. 曲率有下界的塌缩过程中 p-形式拉普拉斯算子的谱札记。《美国数学会会刊》132 (2004)，911–918 页。[38] Meyer, D., 关于曲率算子为正的黎曼流形。《巴黎科学院院报》数学辑 A-B 272 (1971)，A482–A485 页。[39] Novikov, S.P., 哈密顿形式体系与莫尔斯理论的多值类比。《数学科学进展》37 (1982)，3–49 页。[40] Petersen, P., 黎曼几何。施普林格出版社，1998。[41] Petersen, P., Shteingold, S.D., Wei, G., 带积分曲率界的比较几何。《几何与泛函分析》7 (1997)，第 6 期，1011–1030 页。[42] Petersen, P., Wei, G., 带积分曲率界的相对体积比较。《几何与泛函分析》7 (1997)，第 6 期，1031–1045 页。[43] Petersen, P., Sprouse, C., 积分曲率界、距离估计及其应用。《微分几何杂志》50 (1998)，第 2 期，269–298 页。[44] Petersen, P., Wink, M., 博赫纳技巧的新曲率条件。《发明数学》224 (2021)，33–54 页。[45] Ruh, E.A., 几乎平坦流形。《微分几何杂志》17 (1982)，1–14 页。[46] Schoen, R., Yau, S.-T., 微分几何讲义。国际出版社，剑桥，马萨诸塞州，1994。[47] Shiohama, K., 正里奇曲率流形的球面定理。《美国数学会汇刊》275 (1983)，811–819 页。[48] Witten, E., 单极子与四维流形。《数学研究通讯》1 (1994)，769–796 页。[49] Yamaguchi, T., 下曲率界下的塌缩与挤压。《数学年刊》133 (1991)，317–357 页。[50] Yau, S.-T., 完备黎曼流形上的调和函数。《纯粹与应用数学通讯》28 (1975)，201–228 页。

[51] Yau, S.-T., 问题部分。微分几何研讨会。《数学年刊研究》，第**102**号，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1982年，第669–706页。[52] Yu, R.，积分曲率界与贝蒂数。(2022) arXiv:2211.05176v1.[53] Zhong, J.Q., Yang, H.C., 关于紧黎曼流形第一特征值的估计。《中国科学》A辑**27**(1984)，1265–1273。