arXiv:2601.12506v1 [math.SG] 18 Jan 2026

拉格朗日子流形的可逼近性

GIOVANNI AMBROSIONI、PAUL BIRAN 和 OCTAV CORNEA

摘要。本文为度量空间引入了范畴可逼近性的概念，可以将其视为度量群可逼近性的范畴化；度量群可逼近性由图灵于1938年提出。本文引入的可逼近性是度量空间的一种性质，其一般性强于预紧性。本文证明，若干类赋有谱度量的拉格朗日子流形——余切圆盘丛中的闭拉格朗日子流形、球面上的赤道以及环面上的弱正合拉格朗日子流形——在此意义下均具有可逼近性。作为其他几何应用之一，我们证明，存在一些具有可逼近性的拉格朗日子流形空间，但它们并非预紧。

目录

1. 引言 2 1.1. 结果概述 2 1.2. 主要构成、技术工具与创新之处概述 8 1.3. 论文结构 8 2. Fukaya 范畴的三角化持久性精化 10 2.1. 持久性范畴 10 2.2. 三角持久范畴与 TPC 可逼近性 13 2.3. PC 与过滤 A_∞ 范畴的约定 16 2.4. 与过滤 A_∞-范畴相关的持久性导出范畴 17 2.5. 精度递增的范畴系统 20 2.6. 过滤导出福柯范畴与持久性导出福柯范畴 31 2.7. 无分次情形 40 3. 近邻可逼近性 40 3.1. 设定 40 3.2. 主要陈述及证明思路 41 3.3. 特殊莫尔斯函数 43 3.4. Giroux 构造回顾 48 3.5. 通过 Dehn 扭转实现不相交 50 3.6. 定理 3.2.1 的证明 52 3.7. 定理 3.2.1 推出定理 A i. 及更多结果 59 4. 过滤情形下的 Abouzaid 分裂原理与可逼近性 65 4.1. 结果 65

日期：2026年1月17日。

4.2. 定理 4.1.1 的证明 66 4.3. 推论 4.1.2 的证明 89 4.4. 定理 A ii 和 iii. 的证明 98 5. 可逼近性推论与加权复杂度 100 5.1. TPC 中的复杂度 100 5.2. 非消失的加权范畴熵与推论 1.1.3 113 5.3. S^2 123上的赤道复杂度 5.4. 准刚性与推论 1.1.4 125 5.5. 拉格朗日格罗莫夫宽度与推论1.1.5 130 附录 A. 过滤 A_∞-范畴 133 A.1. 过滤 A_∞-范畴、 A_∞-函子、 A_∞-自然变换与平移A_∞-函子 133 A.2. 过滤 A_∞-模与双模 135 A.3. 滤过 Yoneda 嵌入 136 A.4. 持久性 Hochschild 同调 138 A.5. 移位范畴 140 A.6. 具有线性偏差的函子 140 A.7. 与函子相关的滤过双模 142 A.8. 过滤 A_∞-模的拉回与推前 142 A.9. 滤过扭曲复形 144 参考文献 153

1. 引言

1.1. **结果概述**。 设 (M^{2n}, ω) 是一个辛流形。本文研究由拉格朗日子流形的类构成的度量空间 $(\mathcal{L}ag(M)\ d_\gamma)$，其元素为 $\mathcal{L}ag(M)$ 中拉格朗日子流形的类，并赋予所谓的谱拉格朗日度量 M（本文设定下该度量的定义见 §3.7 和 §4.4）。度量空间 $(\mathcal{L}ag(M)\ d_\gamma)$ 是可分的 [16]，但既不完备，也不紧致或局部紧致。

尽管如此，我们将看到，在若干有意义的情形下，该空间满足一种比紧性更一般的性质，称为范畴（度量）可逼近性。这是我们在本文中引入的概念，并具有一些有趣的辛几何推论。

为了解释这一性质，假设 X 是度量空间 (Y, d) 的子集；更一般地说， d也可以只是一个伪度量，并且可能取无穷值。对于 $\epsilon > 0$， X 在 Y 中的ϵ-逼近（也称为 ϵ-网）是一个子空间 $X_\epsilon \subset Y$，使得对所有 $x \in X$，都存在 $y \in X_\epsilon$，满足 $d(x, y) < \epsilon$。回想一下，如果对所有 $\epsilon > 0$，都存在一个有限的 ϵ-网，那么 (X, d) 就称为全有界。这等价于空间 (X, d) 是预紧的，即其完备化是紧致的。显然，紧致度量空间是全有界的，但反之不成立。

这里所用意义下的范畴可逼近性弱于全有界性，因为 ϵ-网不再需要是有限的；我们只要求它们在下一定义将进一步明确的意义下由一个有限集合生成。

定义 1.1.1. 设 $(X, d) \subset (Y, d)$ 是度量空间的一个包含映射，使得 Y 中的点是三角范畴 $\mathcal{C}$ 的对象。对于 $\epsilon > 0$，我们称 X 在 $\mathcal{C}$ 中是**范畴度量 ϵ- 可逼近的**，如果存在子空间 $X_\epsilon \subset Y$，使得 X_ϵ 中的元素是 $\mathcal{C}$ 的一个有限生成（按三角生成的意义）的子范畴的对象；此外，X_ϵ 是 X 的一个 ϵ-网。如果对所有 $\epsilon > 0$ 都满足这一性质，我们就称 X 在 $\mathcal{C}$ 中是**范畴度量可逼近的**。

有关这一概念的背景，见下文注 1.1.6 。当然，构造$\mathcal{C}$ 既是三角化的、又带有自然（伪）度量的范畴并非易事。这类结构的一个来源是一种称为**三角持久范畴**（TPC）的范畴，它们由 [13] 引入（§2中回顾了主要相关定义）。事实上，本文将采用一种更精确、专用于 TPC 的可逼近性版本。该版本在定义 2.2.1（另见定义 2.2.3）中提出，称为***TPC* 可逼近性**，并应用于导出 Fukaya 范畴的 TPC 精化。在定义 1.1.1 中，三角结构与度量彼此无关。然而，TPC 可逼近性以自然的方式将这两种结构联系起来（我们本可以通过一些简单公理，在定义 1.1.1 中就将二者联系起来，但为了使此处的表述更简洁，我们选择略去这一点）。与定义 1.1.1 相关的一个重要概念（TPC 情形下同样见定义 2.2.3 ）是 ϵ-逼近族。它是 $\mathcal{C}$中的一个有限对象族，通常记作 $\mathcal{F}_\epsilon$，并具有如下性质： X_ϵ 由定义 1.1.1 给出的对象包含于该族的三角完备化中 $\mathcal{F}_\epsilon$。

注 1.1.2。 三角范畴理论中存在另一种可逼近性的概念，它与任何底层度量结构都无关，例如 [34]。这就是我们在定义中使用 **度量** 一词的原因。在本文中，我们会经常省略这个限定词，因为此处使用的唯一含义就是定义 1.1.1 及其 TPC 变体。

我们还将使用一种较弱的可逼近性概念，称为缩回对象范畴（度量） ϵ-可逼近性。它通过将定义 1.1.1 中的条件“ X_ϵ 是 X 的ϵ-网”替换为较弱的要求得到：对每个 $x \in X$ ，存在 $\mathcal{C}$中的一个对象 k_x ，使得 $x \oplus k_x$ 满足 $d(x \oplus k_x, X_\epsilon) < 2\epsilon$。需要强调的是，定义 1.1.1 中较强的形式等价于能够选取 $k_x = 0$、 $\forall x$，并将 2ϵ 替换为 ϵ （这里的因子 2 无关紧要，因为我们关注的是对所有 $\epsilon > 0$的 ϵ-可逼近性；在实践中，这是本文某些约定的结果，见注 2.2.4）。

缩回可逼近性具有更易于进行代数估计的优点，正如下文将要讨论的；同时，它足够稳健，能够以 X 的复杂度为上界，约束其中对象的复杂度（具体含义将予以明确），

中的元素 X_ϵ。相应的 TPC缩回可逼近性 概念定义于 §2.2.2，我们的应用将采用这一形式。

本文的主要结果是，若干自然的拉格朗日子流形类在范畴意义下是可逼近的。

定理 A。定 以下三类拉格朗日子流形 $\mathcal{L}ag(M)$ 是可逼近的，具体如下 .

i. 任意闭流形 N （以及其上的任意度量 N）的单位余切圆盘丛 $M = D^*N$ 中的闭恰当拉格朗日子流形是 *TPC* 可逼近的。*ii.* 2-球面上的赤道 $M = S^2$ 是 *TPC* 缩回可逼近的。*iii.* 2-环面上的非可缩拉格朗日子流形 $M = \mathbb{T}^2$ 是 *TPC* 缩回可逼近的。

在这三种情形中，*TPC* 可逼近性均发生于适当的导出 *Fukaya* 范畴的 *TPC* 精化中；相关的拉格朗日子流形空间 $\mathcal{L}ag(M)$赋有由谱度量 d_γ 给出的度量结构——在情形 *i* 和 *ii* 中如此；在情形 *iii* 中，则赋有一种在每个哈密顿同伦类上限制为谱度量的度量。

余切圆盘丛 D^*N 上的辛形式是 Liouville 形式 λ的导数，而拉格朗日子流形的恰当性是相对于 λ来理解的。相关的 Fukaya 范畴 $\mathcal{C}$ 将在正文中予以精确定义。在三种情形中，ϵ-逼近族分别由以下对象组成：第一种情形中的余切圆盘丛纤维；第二种情形中连接南北极的大圆；第三种情形中环面上的一条纬线和一组（有限条）经线。

为将下一个结果置于背景中，请注意，若 $(\mathcal{L}ag(M)\ d_\gamma)$ 在 $M = D^*N$情形下是全有界的，那么单位余切丛中的恰当闭拉格朗日子流形空间在谱度量下的直径就有界（因为全有界蕴含有界）。这一猜想由 Viterbo 提出，并已由 Shelukhin [41],[42] 在某些情形下证明，但一般情形尚未解决。我们的下一个结果表明，一般而言，这些拉格朗日子流形空间并非全有界。

推论 1.1.3。 当 $M = D^*N$和 N赋予双曲度量且 $\mathcal{L}ag(M)$ 由闭精确拉格朗日子流形组成时，空间$(\mathcal{L}ag(M)\ d_\gamma)$ 并非全有界；当 $M = S^2$ 和 $\mathcal{L}ag(S^2)$ 由赤道组成时，同样如此。

空间$(\mathcal{L}ag(M)\ d_\gamma)$ 的度量完备化$(\mathcal{L}ag(M)\ d_\gamma)$ 被称为 Humilière 完备化，并已对此进行研究（例如参见 [3]）。因此，推论 1.1.3可以重新表述为：在所列情况下，该完备化并不紧致。

推论的证明 1.1.3 与范畴可逼近性的一项自然应用有关；这项应用本身就很有趣，值得在此指出。具体而言，可以利用 $(X, d) \subset (Y, d)$ 的范畴可逼近性，来定义和研究 X 以及其中各点的复杂度概念。虽然有几种不同的变体，但一般步骤相同。首先，需要

为三角范畴（尤其是有限生成的三角范畴）以及这类范畴中的对象选定某种复杂度概念。我们将在本文后文明确说明其中一些选择；对于范畴，这些概念包括 Rouquier维数、生成时间、三角生成元的最小数量；对于对象，则包括锥长（源自同伦论 [25] [17]）、Dimitrov-Haiden-Katzarkov-Kontsevich 意义下的复杂度[22]。假设 $c(-)$是为三角范畴中对象选定的此类复杂度概念，那么便可定义元素 ϵ的相应 $x \in X$ -复杂度：

$$\bar{c}(x;\epsilon) = \inf\{c(y) \mid y \in X_\epsilon \ , \ d(x,y) \leq \epsilon\}.$$

不涉及 ϵ 时， x 的复杂度可以通过考察 $\epsilon \to 0$ 时 $\bar{c}(x;\epsilon)$ 的渐近行为来分析。类似的构造也可应用于 X 本身，前提是先为 X_ϵ 定义某种复杂度。这些复杂度概念可用于研究自映射 $\phi\colon X \to X$ 的复杂度，方法是分析 $\bar{c}(\phi^k x;\epsilon)$ 随 k 的变化。

对于定理 A 陈述中的空间 $(\mathcal{L}ag(M)\ d)$，一种应用是用 y 的锥长度代替 $c(y)$。这里的锥长度是指：从零对象出发，得到 y 所需的、由 $\mathcal{F}_\epsilon$ 族中的元素构成的迭代正合三角的最小数量。由此得到的 ϵ-复杂度记作 $N(-;\mathcal{F}_\epsilon,\epsilon)$（为简化记号，本文将其记作 $N(-;\epsilon)$），称为 $\mathcal{F}_\epsilon$ 中带线性化的 ϵ-权重锥长，见定义 5.1.1。我们将 $N(-;\epsilon)$ 与某些 Floer 持久模的条形码中长度至少为 ϵ 的条的数量联系起来。利用这种联系，我们通过将所得的 ϵ-加权范畴熵——即 Dimitrov-Haiden-Katzarkov-Kontsevich [22] 引入的一种概念的加权版本——与 Çineli-Ginzburg-Gurel [15] 引入的条形码熵联系起来，分析辛微分同胚的熵。当 $M = D^*N$ 和 N 配备双曲度量时，对于精心选取的哈密顿微分同胚 $\phi\colon M \to M$，我们可以将 $N(\phi^k L;\epsilon)$、 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $L \in \mathcal{L}ag(M)$ 的增长，与 N 中长度递增的测地线数量的指数增长联系起来，并据此推出 $N(\phi^k L;\epsilon)$ 关于 k 的指数增长。作为附带结果，在这种情况下，我们得到 $\mathcal{L}ag(M)$ 中复杂度 $N(-;\epsilon)$ 任意高的拉格朗日子流形实例，这立即意味着空间 $(\mathcal{L}ag(M)\ d_\gamma)$ 并非全有界，正如推论 1.1.3 所述。通过类似的论证，利用适用于缩回可逼近性的复杂度变体 $N^r(-;\epsilon)$，也可证明在 $M = S^2$ 的情形下推论 1.1.3 成立。

在定理 A的三种情形中，依照构造，相应ϵ-逼近族中的拉格朗日子流形以某种均匀的方式分布在环境流形内部。事实上，当 $\mathcal{F}_\epsilon$ 足够小时，族 ϵ必须是一个 ϵ -逼近族。这一陈述的严格证明超出了本文的范围，但以下两个结果——推论1.1.4和1.1.5——揭示了这些族的一些几何性质，可帮助读者对此有所了解。

第一个这样的结果仅适用于 $M = D^*N$ 的情形，并且是关于 ϵ-逼近族 $\mathcal{F}_\epsilon$ 的准刚性性质。为表述这一性质，对于一个恰当拉格朗日子流形

$L \subset D^*N$，记 $h_L : L \to \mathbb{R}$ 为 Liouville 形式在 λ 上的限制的一个原函数 L （其余约定见 §2.6.2 ）。

推论 1.1.4。设 $M = D^*N$ 并假设 $\phi : D^*N \to D^*N$ 是一个恰当辛同胚，其支集包含于 D^*N 的内部。设 $\mathcal{F}_\epsilon$ 是 D^*N 的一个有限纤维族，且该族按照定理 ϵ的意义是 A *i*-逼近的。令

$$\chi(\phi; \mathcal{F}_\epsilon) = \max_{F \in \mathcal{F}_\epsilon} \{\max h_{\phi(F)} - \min h_{\phi(F)}\} .$$

那么，对于任意 $L \in \mathcal{L}ag(M)$，有

$$d_\gamma(L, \phi(L)) \leq 4(\epsilon + N(L; \mathcal{F}_\epsilon, \epsilon)\chi(\phi; \mathcal{F}_\epsilon)) .$$

特别地，若对所有 $F \in \mathcal{F}_\epsilon$ 都有 $\phi(F) = F$，则有 $d_\gamma(L, \phi(L)) \leq 4\epsilon$, $\forall L$ 闭恰当 $\subset D^*N$。

下一个结果是 [11] 中推论 6.13 的一个直接推论。为陈述该结果，回顾一下 [5] [7]相对于 L 中某个子集 K 的相对格罗莫夫宽度 M 是以下量的上确界： $\frac{\pi r^2}{2}$ 对所有嵌入 $e :$ — $B_r \to M$ 满足 $e^{-1}(L) = B_r \cap \mathbb{R}^n$、 $e^*\omega = \omega_0$以及 $e(B_r) \cap K = \emptyset$（本文此处及后文中，$B_r \subset \mathbb{R}^{2n}$ 表示半径为 r、以原点为中心的球，而 ω_0 是 $\mathbb{R}^{2n}$上的标准辛形式）。

假设 $(\mathcal{L}ag(M)\ d_\gamma)$ 是 TPC 收缩 ϵ-可逼近的，并且进一步假设存在 ϵ-逼近族 $\mathcal{F}_\epsilon$ ，它们在相关的 TPC 范畴 $\mathcal{C}$中是 Yoneda 模，因而具有几何意义。

推论 1.1.5. 在上述情形下，设 $L \in \mathcal{L}ag(M)$。相对于 $\mathcal{F}_\epsilon$ 中子流形的并集， L 的格罗莫夫宽度有上界 2ϵ。特别地，这一上界适用于定理 A 中的三类拉格朗日子流形。

这一推论的一个显然结论是，当 $\epsilon \to 0$ 时，集合 $\cup_{F \in \mathcal{F}_\epsilon} F$ 在 M 中变得稠密。

以不那么精确的形式来看，推论 1.1.5 和 1.1.4 可以独立于可逼近性及其证明所用的工具来理解。为聚焦于核心思想，只考虑情形$M = D^*N$。这些推论推出如下结论：对每个 $\epsilon > 0$，存在一个有限纤维族 $\mathcal{F}_\epsilon$，属于 D^*N ，且同时满足推论 *1.1.5* 和推论*1.1.4*中的性质。虽然这一结论看起来是新的，但 Egor Shelukhin 和 Mark Gudiev 曾指出——参见评注 5.5.3 ——其中某些部分可以利用 §3.3 中构造的函数类型，再辅以更直接的论证来证明，而无需借助 Fukaya范畴的工具。

注记 1.1.6. a. 此处引入的范畴可逼近性，与图灵在 1938 [48]中提出的一个概念有关。图灵的定义涉及一个度量群 $(G,\ d)$。若存在 ϵ-网 X_ϵ （对每个 $\epsilon > 0$），且这些网是有限群，其群结构与 G 的群结构 ϵ足够接近（参见 [46] ，其中概述了相关领域的最新进展）

（这些进展源于几何群论中的这一概念）。图灵证明，以这种意义可逼近的李群必为紧阿贝尔群。范畴度量可逼近性是图灵这一概念某种变体的范畴化。这里将该变体称为有限型可逼近，它不再要求 X_ϵ 是有限群，而是要求 X_ϵ是 Y的一个有限生成子群。例如， $\mathbb{R}^2$ 的任意子集，在将 $\mathbb{R}^2$ 视为群并赋予通常的欧几里得距离后，对每个 $m \in \mathbb{N}^*$都可由， (0)， $(0,\ 1/2m)$ $\in \mathbb{R}^2$ 这两个向量生成的格$L_{1/m} \subset \mathbb{R}^2$ 作 $1/m$-近似，因此它是有限型可逼近的。任意紧度量群都显然是有限型可逼近的。另一方面，不难找到在此意义下不可逼近的函数空间。例如，在 $[0,1]$ 上的连续函数空间中，以上确界 度量（以及显然的群结构）衡量时， $[0,1]$ 上的光滑实函数空间并非有限型可逼近。同样， $[0,1],$ 上只有有限个不连续点的阶梯函数空间，在赋予上确界 度量后，在自身中也不是有限型可逼近的。

b. 容易看出，若 (X,d) 按照定义 $\mathcal{C}$ 1.1.1 的意义，在 X 中范畴可逼近，那么 K 在 $\mathcal{C},\ K(\mathcal{C})$ 的 Grothendieck 群中的像是有限型 ¯ 可逼近的，其所依据的是由 d 在 $K(\mathcal{C})$ 上诱导的伪度量 d。换言之，范畴度量可逼近性是群的有限型可逼近性的一种范畴化。

c. 如上所述，采用可逼近性方法研究映射复杂度，可以避开直接为映射ϕ：$X \to X$定义熵等不变量时遇到的两个困难。第一个困难是，通常度量空间 $X = (\mathcal{L}ag(M)\ d_\gamma)$ 并非全有界（如推论 1.1.3 所示），因此无法直接定义类似于连续自映射 ϕ： $X \to X$ 的拓扑熵的不变量，其中这些连续自映射由 M 的辛微分同胚诱导。第二个困难是，一般而言，此类 ϕ 不保持ϵ-近似；也就是说，对于固定的 $\delta > 0$ ，任意给定 $0 < \epsilon \leq \delta$ ，总存在一些 X_ϵ 中的元素被映射到 X_δ之外，因此用看似更简单的映射 ϕ_ϵ： $X_\epsilon \to X_\epsilon$ 来近似 ϕ 并不实际。上述形式体系避免了第二个困难，因为只要 ϕ 保持 X（这正是我们的假设），那么对所有 $k \in \mathbb{Z}$、 $\epsilon > 0$、 $x \in X$ ，复杂度 $\bar{c}_\epsilon(\phi^k x)$都有良好定义。

d. 此处讨论的可逼近性概念相当强。再次考虑$M = D^*N$的情形。可逼近性不仅意味着任意 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}(D^*N)$都可以通过纤维的迭代锥，以所需的任意精度逼近；而且，对于固定的 ϵ，我们只需使用来自同一个固定有限族 $\mathcal{F}_\epsilon$的纤维，就能达到距任意 L ϵ以内的精度，且不依赖于 L。

我们对定理 A 的证明基于相关过滤 Fukaya 范畴的某些性质；我们论证中的主要要点将在下一小节概述。在继续之前，我们提及 Guillermou-Viterbo-Zhang 的一项近期结果 [27] ，该结果通过采用 Tamarkin 范畴作为接收范畴，以不同的方法证明了余切丛的可逼近性（定理 A的第 i 部分）。

1.2. **主要要点、技术工具与创新概述**。 本文大部分内容运用了 [13]所发展出的三角持久范畴理论。这一框架受到辛几何考量的启发，但并不依赖于辛几何；事实证明，它对于提出与可逼近性相关的正确定义和表述至关重要。本文进一步发展了这一框架，尤其是在 §5.1 中讨论的复杂度概念；该部分可独立于本文的应用来阅读和使用。

另一个重要工具是对 Fukaya 范畴及其导出版本的构造进行过滤化处理，其精确程度足以满足应用需求，并且能够自然地契合 TPC 形式体系。该构造以 Seidel 的框架 [39]为起点。过滤化版本采用了 [11], [13] 中的要素，并加入了 [2]中引入的扰动方法这一关键内容。本文在这一方向上提出了一些新颖之处。特别是，§2.6 以形式化的方式处理了如何选择精度逐步提高的扰动数据，这一做法很可能也适用于可逼近性之外的领域。更重要的是，本文在 §4中给出了 Abouzaid 分裂生成结果的一个持久化版本 [1], ，其中包括霍赫希尔德同调与上同调以及开闭映射和闭开映射的持久化版本。我们将看到，持久化分裂生成与收缩近似性密切相关（见命题4.2.1）。

研究第3节中余切丛可逼近性的第三个重要工具，涉及一些 Lefschetz 纤维化方面的考量。这部分的根源在于 Fukaya-Seidel-Smith方法 [28] ，并从拉格朗日协边的视角对其作了调整，见 [9] 和 [10]。这部分的一个关键要素由 Giroux 的工作 [26]提供，它使所需的定量估计能够达到足够的精度。

范畴可逼近性的定义足够灵活且自然，因此这一概念很可能适用于辛拓扑学以外的领域。尽管如此，本文主要关注辛拓扑学，而可逼近性似乎是辛刚性的一项深刻的新特征。此前提到的 [27] 中的近期结果也为这一方向提供了佐证。

1.3. **论文结构**。 在§2 中，我们建立必要的技术基础，以便在 Fukaya 范畴的 TPC 精化框架下分析可逼近性。本节回顾三角持久范畴所需的主要定义和性质。随后，我们讨论这一形式体系如何应用于 Fukaya 范畴。起点是 Ambrosioni 的构造 [2] ： 该构造利用 Seidel 的经典方案，并采用一套经过精心选择的特殊扰动系统 A_∞，从而得到过滤、严格含幺的 Fukaya 范畴。沿此思路继续探究，会遇到若干微妙之处，其中一些属于技术层面，另一些则更具概念性。其中一点是，构造滤过 Fukaya 范畴时所选用的扰动具有一定的“大小”。当然，可以选取大小任意小的扰动。尽管如此，一旦选定某个扰动，相应的范畴就只能用于研究大于该大小的 ϵ 可逼近性。这一点多少显而易见，就像测量工具的精度必须优于所研究现象的尺度一样

但它对所涉及的形式体系有重大影响。这意味着，我们需要尽可能紧密地联系大小递减的扰动系统所对应的各种范畴及其相关构造；同时，还需要针对 TPC 表述可逼近性及相关概念，并将这些大小因素纳入考虑。

在 §3 中，我们证明定理 A的第一点。证明用到了 Giroux 在余切丛上构造的一种卓越的 Lefschetz 纤维化结构 [26]。该构造的一些重要元素将在 §3.4中回顾。Giroux 构造使得我们能够对 [9] 中研究 Lefschetz 纤维化内拉格朗日协边的一些论证作出定量改进。这些内容将在 §3.5中回顾。最后，证明中的另一个重要要素是一种“软”构造，涉及构造某些变差很小、但几乎处处微分很大的莫尔斯函数；该构造将在 §3.3中介绍。各项要素将在 §3.6 中汇集起来。

第 4 节证明了定理 A中的 ii 和 iii 两点。关键步骤是建立 Abouzaid 分裂生成结果的持久化版本。为此，需要发展若干重要的代数理论，尤其是持久性霍赫希尔德同调与上同调。随后，我们利用持久化分裂生成结果，通过显式计算证明定理A 在 S^2 以及 $\mathbb{T}^2$的情形。

最后一节 §5着重讨论拉格朗日子流形的加权数值复杂度度量及其应用。具体而言，本节包含了推导推论 1.1.3 所需的论证。本节还包含推论1.1.4 和 1.1.5的证明。

致谢。我们感谢 Viktor Ginzburg，他建议第三作者研究 TPC 与 Dimitrov-Haiden-Katzarkov-Kontsevich 的范畴熵之间的关系，并就条形码熵及相关例子进行了多次有益讨论，另见注 5.2.4。我们感谢 Emmanuel Giroux 与我们进行了有益的讨论，并分享了其预印本的早期版本 [26]。我们感谢 Claude Viterbo 与我们分享预印本 [27] 的早期版本，并与我们三人进行了许多有益的讨论，尤其是关于持久性范畴的度量方面。我们感谢 Egor Shelukhin 和 Mark Gudiev 与我们分享了他们针对本文若干几何推论所采用的更直接方法，见注5.5.3。排名第一的作者感谢 Nick Sheridan 提供霍赫希尔德同调方面的参考资料，并感谢他和 Kenji Fukaya 进行的有益讨论。

本工作的部分内容是在团队成员受到多家研究机构热情接待、进行短期和中期研究访问期间完成的，这些机构包括：蒙特利尔的 CRM、苏黎世的 FIM、巴黎的 IHP、巴黎-萨克雷大学（奥赛）。我们感谢他们的支持。

2. Fukaya 范畴的三角化持久性精化

本节旨在确定处理三角持久范畴及其在 Fukaya 范畴中的应用所需的基本技术和记号。持久性范畴及其部分性质将在 §2.1 中讨论。这里提到的一个重要特征是，此类范畴的对象集合带有一类自然的伪距离，称为交错距离，见（1）。我们将在 §2.2简要回顾三角持久范畴，并在定义 2.2.1中引入 TPC 可逼近性。这是我们的主定理——定理 A——中所采用的可逼近性版本。在 §2.3 中，我们开始讨论滤过 A_∞ 范畴。就此而言，关键部分是 §2.4 ，其中讨论了与滤过 A_∞范畴相关联的导出范畴。第 2.5 节明确说明了范畴 A_∞ 系统（以及相关联的导出范畴）的形式性质；该系统通过选择越来越小的扰动而获得。在 §2.5.10 中，定义了一个更新且更精确的可逼近性版本，其中考虑了此前讨论的、精度不断提高的范畴系统。这是定义 2.2.1 的一个更强但技术性更高的版本；论文稍后将证明，在具有几何意义的情形下，该版本得到满足。最后，§2.6 包含构造滤过 Fukaya 范畴的主要步骤，从而可以应用本节前面所述的代数工具。关于本节滤过代数背景材料的进一步细节，请参阅 [13] 。

2.1. 持久性范畴。 简言之，持久范畴 $\mathcal{C}$ 是一个在持久模范畴上富化的范畴。下面我们固定记号并给出主要定义。

2.1.1. 持久模。 一个持久模

$$M = \left(\{M^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}},\ i_{\alpha,\beta} : M^\alpha \longrightarrow M^\beta,\ \forall\ \alpha \le \beta \right)$$

在环 R 上（对我们而言， R 通常是域或正Novikov环）是一个由 R-模 M^α 组成的集合，对每个 $\alpha \in \mathbb{R}$ 均有一个模，并配有态射 $i_{\alpha,\ \beta}$ ，使得 $i_{\beta,\ \gamma} \circ i_{\alpha,\ \beta} = i_{\alpha,\ \gamma}$ 只要$\alpha \le \beta \le \gamma$ 且 $i_{\alpha,\ \alpha} = id$ （根据需要，有时会对这些模施加额外约束）。令 $u,\ v \in M^\alpha$ 和 $r \ge 0$。我们用 $u \underset{r}{=} v$ 表示 $i_{\alpha,\ \alpha+r}(u) = i_{\alpha,\ \alpha+r}(v)$。我们将其记为

$$M_{\mathrm{tot}} := \coprod_{\alpha\in\mathbb{R}} M^\alpha$$

M 的底层集合，并且我们定义

$$M^\infty := \varinjlim_{\alpha\to\infty} M^\alpha,$$

其中余极限（或直接极限）是相对于结构映射 $i_{\alpha,\ \beta}$, $\alpha \le \beta$取的，并称其为 M 的 ∞-极限。

注记 2.1.1。设 C 是一个过滤链复形，其递增过滤为 $C^\alpha \subset C^\beta \subset C$,$\forall\ \alpha \le \beta$。有时我们会将 C 视为一个持久模，其中 $i_{\alpha,\ \beta} : C^\alpha \longrightarrow C^\beta$ 为包含映射。令 $u \in C^\alpha$ ，并考虑同一个元素 u ，但现在将其视为 C^β

其中某个 $\beta > \alpha$。在许多实际应用中，这两个元素被视为同一个元素，属于 C。然而，从持久模的角度来看， $u \in C^\alpha$ 及其像$i_{\alpha,\ \beta}(u) \in C^\beta$ 应被视为不同的元素。

2.1.2. 持久范畴。（简称 PC）是（小）范畴，其中对象之间的态射构成持久模，且态射的复合与持久性结构相容。持久性范畴的一般理论详见 [13, 第 2] 节，此处我们只回顾几个关键概念。

除非另有说明，从现在起，我们始终假设所有 PC 范畴都带有移位函子（更准确地说，是移位函子系统） $\Sigma = \{\Sigma^r\}_{r\in\mathbb{R}}$（定义见 [13, 第 2.2 节3] ），并且所有 PC 函子都与 Σ^r 对易，对每个 $r \in \mathbb{R}$ 都成立。移位函子结构的一部分是自然变换 $\eta_{r,\ s} : \Sigma^r \longrightarrow \Sigma^s$，$s$，$r \in \mathbb{R}$。特殊情形 $s = 0$ 将尤为重要，我们用 $\eta_r := \eta_{r,\ 0} : \Sigma^r \longrightarrow \mathrm{id}$ 表示它。此外，我们默认所有 PC 之间的持久函子 $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 都与这些范畴的移位函子相容，具体来说：对所有 $r \in \mathbb{R}$，均有 $\mathcal{F} \circ \Sigma^r = \Sigma^r \circ \mathcal{F}$；对所有 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 和 $r,\ s \in \mathbb{R}$，均有 $(\eta_{r,\ s})_{\mathcal{F}A} = \mathcal{F}((\eta_{r,\ s})_A)$。

设 $\mathcal{C}$ 是一个持久范畴。记 $\mathcal{C}^0$ 为与 $\mathcal{C}$ 相关联的 0 级范畴，记 $\mathcal{C}^\infty$ 为 $\mathcal{C}$ 的极限（或 ∞ 级）范畴。 $\mathcal{C}^0$ 中的同构称为 0- 同构，而 0- 同构这一性质有时记作 $\cong_0$。类似地， $\mathcal{C}^\infty$ 中存在同构记作 $\cong_\infty$。

大多数情况下，我们假设 PC $\mathcal{C}$ 是分次的，即持久模 $\hom_{\mathcal{C}}(A,\ B)$ 是 $\mathbb{Z}$-分次的。我们主要采用上同调分次约定，并将 $\hom_{\mathcal{C}}(A,\ B)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ 的次数-k 分支记作 $\hom_{\mathcal{C}}(A,\ B)$。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们将 $\hom^\alpha_{\mathcal{C}}(A,\ B)^k$ 记为 $\hom_{\mathcal{C}}(A,\ B)^k$ 的 α-持久性层级。我们假设态射的复合保持次数不变，且恒等态射的次数为 0。

我们的 PC $\mathcal{C}$ 通常会配备一个平移函子 $T :\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$。这是一个 PC 同构函子，具有如下性质：对于所有 $A,\ B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $k \in \mathbb{Z}$，我们都有 PC-自然同构

$$\hom_{\mathcal{C}}(TA, B)^k \cong \hom_{\mathcal{C}}(A, B)^{k-1}, \quad \hom_{\mathcal{C}}(A, TB)^k \cong \hom_{\mathcal{C}}(A, B)^{k+1}.$$

如前所述，由于 T 是一个 PC 函子，我们将默认假设 T 与移位函子可交换，即 $T \circ \Sigma^r = \Sigma^r \circ T$, $\forall\, r \in \mathbb{R}$。

2.1.3. 无环对象。设 $\mathcal{C}$ 是一个 PC， $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 且 $r \geq 0$。我们称 A 为 r-无环的，若态射 $\eta^A_r : \Sigma^r A \longrightarrow A$ 等于 0；或者等价地，若恒等态射 id_A 满足 $i_{0,\ r}(id_A) = 0$。这里，$\eta^A_r \in \hom_{\mathcal{C}^0}(\Sigma^r A,\ A)$由 $\eta^A_r = \eta_r(A)$给出。若对象 A 对某个 $r \geq 0$是r-无环的，则称其为无环对象。等价地， A 是无环对象，当且仅当 A 在极限范畴 $\mathcal{C}^\infty$中同构于 0。我们用 $A\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的全子范畴，其对象均为无环对象。

2.1.4. 与 *PC* 相关的伪度量。设 $\mathcal{C}$是一个带有移位函子 Σ 的 PC。对象集 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 上带有一个自然的伪度量 d_{int}，称为交错距离，

其定义如下。对于 X， $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，定义：

$$d_{\mathrm{int}}(X,Y) = \inf\Big\{ r \geq 0 \;\Big|\; \exists\, \varphi : \Sigma^r X \longrightarrow Y,\, \exists\, \psi : \Sigma^r Y \longrightarrow X \\ \text{such that } \psi \circ \Sigma^r \varphi = \eta^X_{2r},\ \varphi \circ \Sigma^r \psi = \eta^Y_{2r} \Big\}. \tag{1}$$

这里， $\eta^X_{2r} \in \hom_{\mathcal{C}^0}(\Sigma^{2r} X,\ X)$ 是与 $\mathcal{C}$ 的持久性结构及其移位函子相关联的标准映射；对于 η^Y_{2r} 也类似。

注意， d_{int} 通常并非真正的度量，而只是一种伪度量；此外，它可能取无穷值。事实上，若 X 和 Y 在子范畴 $\mathcal{C}^0$中同构，则$d_{\mathrm{int}}(X,\ Y) = 0$。类似地，若 X和 Y在 $\mathcal{C}^\infty$ 中不同构，则 $d_{\mathrm{int}}(X,\ Y) = \infty$。这与我们在式（$\inf \emptyset = \infty$ 1）中采用的约定相符。

还有另一种 d_{int} 变体，用于度量对象 R 距离成为另一个对象 X 的缩回对象有多远。更准确地说，对于 $R,\ X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，我们定义

$$d_{\text{r-int}}(R,X) = \inf\Big\{ r \geq 0 \;\Big|\; \exists\, \varphi : \Sigma^r R \longrightarrow X,\, \exists\, \psi : \Sigma^r X \longrightarrow R \text{ such that } \psi \circ \Sigma^r \varphi = \eta^R_{2r} \Big\}. \tag{2}$$

与 d_{int} 不同，度量 $d_{\text{r-int}}(-,\ -)$ 通常并不对称（这种结构有时称为拟伪度量）。

¯伪度量 d_{int}具有一个移位不变版本 d_{int} ，该版本将在后文中发挥重要作用：

$$\bar{d}_{\mathrm{int}}(X,Y) = \inf_{r,s} d_{\mathrm{int}}(\Sigma^r X, \Sigma^s Y) \tag{3}$$

容易看出，这同样是一个伪度量。类似的构造也适用于 $d_{\text{r-int}}{}^{\bar{}}$，并产生 $d_{\text{r-int}}$。

下面介绍本文后文将使用的另一种记号。设 Z 是赋予了一个（不一定对称的）伪度量 d 的集合，并且 $X,\ Y \subset Z$。我们记

$$d(X,Y) := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x,y)$$

X 中的点与 Y中的点之间的最长距离。注意，这在（$X,\ Y$）中并不对称。我们有时会将这一度量用于 $d = d_{\mathrm{int}}$ 和 $d = d_{\text{r-int}}$。

最后，在本小节结束时，我们在下面的引理中列出 PC 函子的若干基本度量性质，这些性质很容易得到。在该陈述中，同一记号 d_{int} 用于各种 PC 范畴中的交错距离。

引理 2.1.2。 设 $\mathcal{C}'$、$\mathcal{C}''$ 为 *PC*，且 $\mathcal{F}:\ \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ 为一个 *PC* 函子。

(1) 对于每个 $A, B \in \mathit{Obj}(\mathcal{C}')$，都有 $d_{int}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) \leq d_{int}(A,B)$。*(2)* 如果存在一个 *PC* 函子 $\mathcal{G}:\ \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C}'$，使得 $d_{int}(\mathcal{G} \circ \mathcal{F},\ \mathit{id}_{\mathcal{C}}) \leq s$，那么对于每个$A, B \in \mathit{Obj}(\mathcal{C}')$，都有 $|d_{int}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) - d_{int}(A,B)| \leq 2s$。*(3)* 如果存在一个 *PC*函子 $\mathcal{H}:\ \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C}'$，使得 $d_{int}(\mathcal{F} \circ \mathcal{H},\ \mathit{id}_{\mathcal{C}''}) \leq r$，那么

$$d_{int}(\mathcal{C}'', \operatorname{image} \mathcal{F}) \leq r.$$

2.2. 三角持久范畴与 TPC 可逼近性。我们在此讨论三角持久范畴背景下的可逼近性。

2.2.1. *TPC*。三角持久范畴（简称 *TPC*） $\mathcal{C}$ 是一个持久范畴，并带有使其0级范畴 $\mathcal{C}^0$ 成为三角范畴的附加结构。TPC 的精确定义还涉及若干其他公理，关于这一主题的详细论述，请参阅 [13]。

设 $\mathcal{C}$ 是一个 TPC，且 $S \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。我们将 $\langle S\rangle^{\Delta}$ 记为 $\mathcal{C}$ 的最小全子 TPC，它包含 S 的所有对象，并且在 0-同构下闭合。（特别要注意，$\mathcal{C}$ 的平移与平移函子分别限制为 $\langle S\rangle^{\Delta}$上的函子。）

2.2.2. *TPC* 可逼近性。本文的关键可逼近性定义如下。

定义 2.2.1。若存在一个常数 $A \geq 1$，使得对每个 $\epsilon > 0$，以下结构均存在，则称伪度量空间（X, d）可通过三角持久范畴逼近（简称 TPC-可逼近）。对每个 $0 < \eta < \epsilon$，存在一个 TPC，$\mathcal{Y}_{\epsilon,\,\eta}$，并满足以下两个性质：

i. 存在一个(A, η)-准等距嵌入（见注2.2.2）：

$$\Phi_{\epsilon,\eta} : (X, d) \to (\mathrm{Obj}(\mathcal{Y}_{\epsilon,\eta}), \bar{d}_{\mathrm{int}}^{\,\epsilon,\eta})$$

ii. 存在一个有限族 $\mathcal{F}_{\epsilon,\eta} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{Y}_{\epsilon,\eta})$，满足以下性质：

$$\bar{d}_{\mathrm{int}}^{\,\epsilon,\eta}(\Phi_\eta(x), \mathrm{Obj}(\langle \mathcal{F}_{\epsilon,\eta}\rangle^{\Delta})) < \epsilon,\ \forall x \in X$$

其中 $\bar{d}^{\,\epsilon,\eta}_{\text{整数是}}$ 与 $,\eta$ 相关联的平移不变交错伪度量（见（3））。

对于固定的 ϵ，若 $(\Phi, \mathcal{F})$ 满足 $\Phi = \{\Phi_{\epsilon,\eta}\}_{0<\eta<\epsilon}$，$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_{\epsilon,\eta}\}_{0<\eta<\epsilon}$，则称其为 (X, d) 的 TPC ϵ-逼近数据。因此，若对每个 $\epsilon > 0$，都存在 (X, d) 的 ϵ-TPC-逼近数据，则称 (X, d) 是 TPC-可逼近的。对于同一个 (X, d)，这样的数据可能有多种选择。当两个参数 ϵ 或 η 中的一个可由上下文明确时，我们会在记号中省略它。例如，固定 ϵ 时，我们将相关的拟等距嵌入记为 Φ_η，将相应的伪度量记为 $\bar{d}_{\eta\,\mathrm{int}}$，等等。

此定义是定义1.1.1的 TPC 版本。本文还将使用*TPC* 收缩可逼近性这一概念。TPC 收缩可逼近性的定义与上述相同，第 i 点无需作任何修改，而是采用 $d_{\text{r-int}}$ 作为第 ii 点的条件（我们强调，唯一的改动在于定义2.2.1中的第 ii 点）。如上所述，满足收缩对象Φ，$\mathcal{F}$) 可逼近性要求的配对（换言之，定义中条件 ii 使用 $d_{\text{r-int}}$ 而非 d_{int}）将称为TPC收缩对象 ϵ逼近数据。

下文备注2.2.4中的 c 点更准确地说明了刚刚定义的 TPC 可逼近性如何与定义1.1.1中引入的范畴度量可逼近性概念相契合。

备注2.2.2。 a. 回顾一下，(A, B)-准等距嵌入

$$(X, d) \to (Y, d')$$

两个度量空间之间的 Φ是一个映射 $X \to Y$，满足：

$$\frac{1}{A}\, d(x, y) - B \leq d'(\Phi(x), \Phi(y)) \leq A\, d(x, y) + B\ .$$

因此，定义2.2.1的第一点表明，当 ϵ 固定时，定义在 $\mathcal{Y}_\eta$的对象上的度量 $d^{\,\eta}{}_{\text{int}}$ 限制在 X 上时，会越来越接近一个与 d等价的（伪）度量，当 $\eta \to 0$时。更确切地说，对于每个 x, $y \in X$

$$\hat{d}(x, y) = \limsup_{\eta \to 0} \bar{d}^{\,\eta}_{\text{int}}(x, y)\ .$$

ˆ 这给出了定义在 X 上的一个伪度量，而定义中的第 i. 点意味着这个 d与 d等价，即 X上的原度量。

b. 一个 $(A,\ \eta)$-准等距嵌入也是一个 $(A,\ \eta')$-准等距嵌入，只要$\eta' \geq \eta$。因此，为了验证定义中的性质，只需证明存在 $\mathcal{Y}_\eta$、 Φ_η，以及在 η 足够小时的族 $\mathcal{F}_\epsilon = \{\mathcal{F}_{\epsilon,\eta}\}$ 。

c. 当 (X, d) 是赋予谱度量的拉格朗日子流形空间 $d = d_\gamma$ 且范畴 $\mathcal{Y}_\eta$ 是导出 Fukaya 范畴的 TPC 精化时，将应用此定义（我们再次假设 ϵ 在此处固定）。 η 的作用是记录定义这些 Fukaya 范畴所需的扰动的大小。虽然在非过滤情形下，此参数并不重要，但就近似而言，记录它至关重要，因为定义 Fukaya 范畴所需的任何扰动选择都会确定某个η ，而该参数会限制近似精度 ϵ 所能达到的程度。相对于不同大小的扰动数据选择，系统地控制 Fukaya 范畴的各种 TPC 精化，需要进行大量阐述；相关内容见第 2.5 节。特别地，上述ˆ ˆ 度量 d 是引理 d_{int} 2.5.3 中 的一个版本。在过滤 A_∞- 范畴族的这一框架下，从实际操作角度看，使用上述定义的一个更精细、更准确的变体是有益的。该变体在定义 2.5.7 中表述，其缩回对象对应版本见定义2.5.8。另请参见备注2.5.9，其中比较了这些概念。

d. 常数 A 将等于2，在拉格朗日拓扑学的应用中。该应用于拉格朗日拓扑学，是我们在定义 d_{int} 中选择平移不变度量2.2.1 (而非 d_{int} 原则上也同样可以使用的度量）的决定性因素。ˆ原因在于谱伪度量具有平移不变性，因此上文 a 点中的极限 d 也需要具有平移不变性（另见备注2.2.4 ）。

e. 在某些情形下，如果不需要选择扰动，且 ϵ 固定，则大概可以用单个 PC （或 TPC） $\mathcal{Y}_0$ 替换族 $\mathcal{Y}_\eta$ ——换言之，在上述定义中纳入$\eta = 0$ 。

f. 在定义 2.2.1中，我们没有对范畴$\mathcal{Y}_{\epsilon,\eta}$（当$\eta \to 0$时）施加任何关联条件，也没有假设相应的族$\mathcal{F}_{\epsilon,\eta}$之间存在任何关联。实际上，在 Fukaya 范畴的情形下，我们的构造会产生满足某种性质的范畴，而这项性质更

比定义 2.2.1中所述的性质更精确；也就是说，对于固定的 $\epsilon > 0$，范畴$\mathcal{Y}_{\epsilon,\eta}$（其中 $\eta \to 0$）之间存在某些比较函子，而相应的族$\mathcal{F}_{\epsilon,\eta}$ 则通过这些函子彼此对应。这一更精细的性质在表述上更具技术性，将在定义 2.5.7中给出。下文还将讨论我们的构造对 ϵ的依赖性。

我们还将使用一种简化的 TPC-可逼近性概念，它重新表述了定义 2.2.1.

定义 2.2.3。 固定一个三角持久范畴 $\mathcal{C}$ and $\mathcal{X} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。对于 $\epsilon > 0$，我们称 $\mathcal{X}$ 为 ϵ-在 $\mathcal{C}$ 中可逼近，如果存在一个有限族 $\mathcal{F}_\epsilon \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，称为$\epsilon$-逼近族，用于在 $\mathcal{C}$中逼近 $\mathcal{X}$，使得

$$d_{\mathrm{int}}\left(x, \mathrm{Obj}(\langle \mathcal{F}_\epsilon \rangle^{\Delta})\right) < \epsilon, \forall x \in \mathcal{X}.$$

如果集合 $\mathcal{X}$ 对每个 $\epsilon > 0$ 都是 ϵ-可逼近的，则称其在 $\mathcal{C}$ 中可逼近。若上述性质成立，但以 $d_{\text{r-int}}$ 代替 d_{int}，则称 $\mathcal{X}$ 为缩回 ϵ-在 $\mathcal{C}$ 中可逼近。

注 2.2.4。a. 回顾 §2.1.4， d_{int} 和 $d_{\text{r-int}}$ 都有平移不变版本。因此，在上述定义中，可以用这些平移不变度量 d_{int} 和 $d_{\text{r-int}}$ 代替 d_{int}，以及分别代替 $d_{\text{r-int}}$。然而，这不会影响所定义的概念。事实上，$\mathrm{Obj}(\langle \mathcal{S} \rangle^{\Delta})$ 中由 $\langle \mathcal{S} \rangle^{\Delta}$ 生成的最小子 TPC（其中包含 $\mathcal{S} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$）构成的集合在平移和位移下不变。因此，对于所有 $x \in Y$，有 $d_{\mathrm{int}}(x, \mathrm{Obj}(\langle \mathcal{F}_\epsilon \rangle^{\Delta})) = \bar{d}_{\mathrm{int}}(x, \mathrm{Obj}(\langle \mathcal{F}_\epsilon \rangle^{\Delta}))$，对 $d_{\text{r-int}}$ 也同样成立。因此，定义 2.2.3 意义下的常规定义与平移不变版本的可逼近性一致，缩回可逼近性也同样如此。

b. 请注意，根据定义2.2.3中的术语，定义2.2.1 中的第 ii 点等价于以下事实： $\mathcal{X} = \Phi_\eta(X)$ 在 $\mathcal{Y}_\eta$ 中是 ϵ-可逼近的；缩回可逼近性也同理（ϵ在此固定）。

c. 定义 ϵ2.2.3 中的 -可逼近性显然蕴含ϵ范畴的度量 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$中的可逼近性；这一概念在定义1.1.1 中引入（两个定义的区别在于，在2.2.3 中，范畴 $\mathcal{C}$ 中对象上的度量固定为与 $\mathcal{C}$ 上的持久性结构相关联的交错度量）。

d. 如上所述，假设 $\mathcal{C}$ 是一个 TPC。以下命题是关于在三角范畴 $\mathcal{C}^0$中处理正合三角的一道练习：

$$\bar{\text{对于}}\ x,\ y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\ \text{若}\ d_{\text{r-int}}(x,\ y) < \epsilon,\ \text{则存在}\ \exists\, k_x \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\ \text{使得}\ d_{\mathrm{int}}(\bar{x \oplus k_x},\ y) < 2\epsilon\,. \tag{4}$$

不难看出，对于所有 x、y、$k \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，都有 $d_{\text{r-int}}(x, y) \leq d_{\mathrm{int}}(x \oplus k, y)$。由 (4) 我们推得，若 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是可缩回的 ϵ-可逼近对象（即定义 2.2.3 所述的意义），那么它在范畴论意义下也是可缩回的 ϵ-可逼近对象（即 §1.1 所述的意义）。换言之，若 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是可缩回的 ϵ-可逼近对象，那么对于每个 $x \in \mathcal{X}$，都存在 $k_x \in \mathcal{C}$ 和 $y \in \mathrm{Obj}(\langle \mathcal{F}_\epsilon \rangle^{\Delta})$，使得 $d_{\mathrm{int}}(x \oplus k_x, y) < 2\epsilon$。

e. TPC 中的幂等元完备化是一个微妙的问题，远比其在三角范畴中的对应问题复杂。Miller 在 [33] 研究了这一主题，但本文不会引用其中的结果。

f. 在 [13] 中引入了一类所谓的碎片化伪度量 $d^{\mathcal{F}}(-,-)$，定义在 TPC 的对象上，并取决于族 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 的选择。这些伪度量与可逼近性密切相关。给定如上所述的 $\mathcal{C}$，$d^{\mathcal{F}_\epsilon}(0, Y) \leq \epsilon/4$ 意味着 $\mathcal{F}_\epsilon$ 是ϵ-可逼近的。反过来，如果 $\mathcal{F}_\epsilon$ 是 ϵ-可逼近的，则 $d^{\mathcal{F}_\epsilon}(0, Y) \leq \epsilon$。理解这些碎片化伪度量在族 $\mathcal{F}$ 发生变化时的行为，是促成本论文定义可逼近性的主要动机之一。

2.3. **PC 与过滤 A_∞ 范畴的约定**。

2.3.1. 过滤 A_∞-范畴。 本文中的大多数 PC 都是过滤 A_∞-范畴的持久同调范畴。除非另有说明，我们始终假设此类范畴，以及它们之间的 A_∞-函子，都具有严格含幺结构，并配备平移与平移函子。精确定义请参见第 §A节。

设 $\mathcal{A}$ 是一个过滤的 A_∞-范畴。我们有时将 $\mathcal{A}(X,Y) := \hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 简写为 $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ 时，$\alpha \in \mathbb{R}$，我们用 $\hom^\alpha_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 表示 $\subset \hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$，有时也简写为 $\mathcal{A}^\alpha(X,Y)$，即 $\hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 的 α-滤过层级。需要将其与（上同调）分次结合时，我们会将 $\hom^\alpha_{\mathcal{A}}(X,Y)^i$（或 $\mathcal{A}^\alpha(X,Y)^i$）记作 $\hom^\alpha_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 的次数为 i 的分支。对于同调分次，记号类似，只需将次数 i 置于下标位置。

接下来，我们将 $\mathcal{A}^0$ 记作 $\mathcal{A}$ 的 0 级范畴，即与 $\mathcal{A}$ 具有相同对象、且 $\hom_{\mathcal{A}^0}(X, Y) = \hom^0_{\mathcal{A}}(X, Y)$ 的（未过滤） A_∞- 范畴。

取同调后，我们将 $PH(\mathcal{A})$ 记作 $\mathcal{A}$ 的持久同调范畴。平移与平移函子分别在 $PH(\mathcal{A})$ 上诱导出函子。

与 PC 的情形一样，若对象 $A \in \mathcal{A}$ 在持久范畴 $PH(\mathcal{A})$ 中的 A 是 r-无圈的，我们就称其为 r-无圈；对于无环对象（不涉及特定的r），也有类似的定义。无环对象构成的满 A_∞-子范畴记为 $A\mathcal{A}$。

最后，我们也将交错距离（以及 r-交错距离）伪度量引入A_∞-范畴 $\mathcal{A}$中，并将二者分别定义为持久同调范畴中相应的距离（定义见 §2.1.4） $PH(\mathcal{A})$。

2.3.2. 各种完备化。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 PC。给定子集 S_1, S_2, $S_3 \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，我们分别定义它们关于移位、平移和 0-同构的完备化如下：

$$\begin{aligned} S_1^{\Sigma} &:= \{\Sigma^r(A) \mid A \in S_1,\, r \in \mathbb{R}\}, \quad S_2^{T} := \{T^j(A) \mid A \in S_2,\, j \in \mathbb{Z}\}, \\ S_3^{(\mathrm{iso},0)} &:= \{A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \mid A \text{ is isomorphic in } \mathcal{C}^0 \text{ to an object from } S_3\}. \end{aligned} \tag{5}$$

对于上述若干过程，例如 $S^{\Sigma,\,T} := (S^{\Sigma})^T$ 等，我们还需要对 $S \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 的子集进行完备化。

另一种重要的完备化是相对于交错距离而言的。给定一个子集$S_4 \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，我们定义

$$S_4^{\mathrm{int}} := \{A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \mid d_{\mathrm{int}}(A, B) < \infty \text{ for some } B \in S_4\}.$$

为简化记号，对于 $S \subset \mathrm{Obj}\mathcal{C}$，我们记作 $S^c := (S^T)^{\mathrm{int}}$。注意， S^c 对于平移和移位都自动完备。类似地，也可以定义 $S^{c,\ \text{r-int}}$，但将 d_{int} 替换为 $d_{\text{r-int}}$。

若 $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ 是一个满子 PC，我们定义它的各种完备化，例如 $\mathcal{D}^{\Sigma}$、 $\mathcal{D}^{T}$、 $\mathcal{D}^{(\mathrm{iso},0)}$、 $\mathcal{D}^{c}$ 等，方法是取 $\mathcal{C}$ 的满子 PC，其对象集合分别完备化为 $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})^{\Sigma}$、$\mathrm{Obj}(\mathcal{D})^{T}$、$\mathrm{Obj}(\mathcal{D})^{(\mathrm{iso},0)}$、$\mathrm{Obj}(\mathcal{D})^{c}$ 等。对于 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$，我们也以类似方式定义相应的完备化，即利用 $PH(\mathcal{A})$中的相应结构来完备对象子集。

2.4. 与过滤 A_∞-范畴相关的持久性导出范畴。下文将介绍 TPC 的三种变体，它们各自可视为将 $\mathcal{A}$的导出范畴推广到持久性范畴领域。不过，在此之前，我们需要简要准备一下滤过语境中的 A_∞-函子。

2.4.1. 过滤函子与具有线性偏差的函子。设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 是两个过滤的 A_∞范畴。一个过滤的 A_∞-函子 $\mathcal{F}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是一个 A_∞-函子，它在所有阶数上对态射的作用都保持过滤层级。更具体地说，对于任意 $d \geq 1$、 X_0、…、 $X_d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$以及 $\alpha \in \mathbb{R}$，其 d阶项 $\mathcal{F}_d: \mathcal{A}(X_0, \ldots, X_d) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_d)$满足：

$$\mathcal{F}_d\big(\mathcal{A}^{\alpha}(X_0, \ldots, X_d)\big) \subset \mathcal{B}^{\alpha}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_d).$$

除非另有说明，在下文中我们将默认 A_∞-函子是严格含幺的。

受来自 Fukaya 范畴的例子启发，我们还需要具有线性偏差的 A_∞-函子这一概念。其定义如下。给定一个来自 $\mathcal{A}$ 的对象元组 $\vec{X} = (X_0, \ldots, X_d)$，我们通过从 $\vec{X}$中省略后续（按循环次序）与前一个对象在移位意义下相等的对象，定义其约化元组 $\vec{X}_R := (X_{i_0}, \ldots, X_{i_{d_R}})$。构成 $\vec{X}_R$的对象仅在移位意义下确定，但 X_R、 $0 \leq d_R \leq d$的长度是确定的。我们称其为 $\vec{X}$ 的约化长度，并记为 d_R；当我们想强调它对 $\vec{X}$的依赖时，也记为 $d_R(\vec{X})$。注意，如果 $\vec{X}$ 中每两个相邻对象都不同（在移位意义下），则 $d_R(\vec{X}) = d$。在另一极端，如果 $\vec{X}$ 中的所有对象在移位意义下都相等，则 $d_R(\vec{X}) = 0$。

如果对于每个 $d \geq 1$、每个由 $\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ 中的对象组成的元组 $\vec{X} = (X_0, \ldots, X_d)$ 以及每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，都满足：则称 A_∞-函子 $\mathcal{F}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 具有线性偏差率 $s \geq 0$

$$\mathcal{F}_d\big(\mathcal{A}^{\alpha}(X_0, \ldots, X_d)\big) \subset \mathcal{B}^{\alpha + d_R(\vec{X})s}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_d).$$

我们常将此类函子称为 LD（线性偏差）函子。

2.4.2. 滤过模。 设 $\mathcal{A}$ 是一个滤过 A_∞-范畴。记 $F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$ 为滤过严格含幺（左） $\mathcal{A}$-模的范畴。这是一个滤过 A_∞-范畴。Yoneda 嵌入

$$\mathcal{Y} : \mathcal{A} \longrightarrow F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$$

是一个过滤的严格含幺 A_∞-函子，在同调意义上是满且忠实的。记 $\mathcal{Y}(\mathcal{A}) \subset F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{Y}$ 下的像范畴。记 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta \subset F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta$ 的三角完备化，即 $F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$ 的最小全子范畴，它对滤过层级为 ≤ 0 的态射所对应的映射锥以及滤过层级为 ≤ 0 的拟同构封闭（这些是非正滤过层级的映射，并且在 0 级同调范畴中诱导同构）。注意，由于我们对过滤 A_∞ 范畴 $\mathcal{A}$ 的假设，范畴 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$ 对移位和平移封闭，因此 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta$ 也具有相同性质。 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta$ 的构造可以通过迭代地对滤过层级为 ≤ 0 的态射取映射锥，并在每一步加入 0-拟同构的模来显式完成。所得的 A_∞-范畴 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta$ 是过滤且严格含幺的 A_∞，并带有一个平移函子和一个移位函子。 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta$ 的持久性同调范畴

$$PD(\mathcal{A}) := PH(\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta)$$

这是一个 TPC，我们称之为 $\mathcal{A}$ 的持久导出范畴。

设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 是两个过滤的 A_∞-范畴。设 $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是一个具有给定线性偏差率的 A_∞-函子（见 §2.4.1 和 §A.6）。那么，§A.8 中的推前运算给出一个过滤的 A_∞-函子 $\mathcal{F}_*\colon F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}} \longrightarrow F\mathrm{mod}_{\mathcal{B}}$。对我们而言更重要的是，它将 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta$ 发送到 $\mathcal{Y}(\mathcal{B})^\Delta$，因此给出一个过滤的 A_∞-函子

$$\mathcal{F}_* : \mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta \longrightarrow \mathcal{Y}(\mathcal{B})^\Delta.$$

取同调后，我们得到一个 TPC 函子

$$PD(\mathcal{F}) : PD(\mathcal{A}) \longrightarrow PD(\mathcal{B}).$$

2.4.3. 更大的导出范畴。 与前几节一样，设 $\mathcal{A}$ 是一个过滤的 A_∞-范畴。现在，我们将通过同时加入无环模，构造范畴 $PD(\mathcal{A})$ （来自 §2.4.2 ）的一个略大的版本。

记 $AF\mathrm{mod}_{\mathcal{A}} \subset F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$ 为无环模的满 A_∞-子范畴（无环子范畴的定义见 §2.3.1）。现在考虑 $F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$ 的最小 A_∞ 满子范畴，它既包含过滤 Yoneda 嵌入 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$ 的像，也包含 $AF\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$，并且在滤过层级为 ≤ 0 的态射的映射锥以及滤过层级为 ≤ 0 的拟同构下闭。将这个过滤的 A_∞-范畴记为 $\langle \mathcal{Y}(\mathcal{A}) \; AF\mathrm{mod}_{\mathcal{A}} \rangle^\Delta$。现在将 $\mathcal{A}$ 的完备持久性导出范畴定义为后者的持久同调范畴，即：

$$PD^c(\mathcal{A}) := PH\Big(\langle \mathcal{Y}(\mathcal{A}), AF\mathrm{mod}_{\mathcal{A}} \rangle^\Delta\Big).$$

关于函子的 §2.4.2 讨论同样适用于这种情形。更具体地说，如果 $\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$ 是过滤的 A_∞-范畴，并且 $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是一个 A_∞-函子，且具有线性偏差，那么我们得到

一个 TPC 函子：

$$PD^c(\mathcal{F}) : PD^c(\mathcal{A}) \longrightarrow PD^c(\mathcal{B})$$

由 $\mathcal{F}$ 诱导。

还有一种描述 $PD^c(\mathcal{A})$ 的方法：关于交错距离完备化 $PD(\mathcal{A})$，甚至对 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta$ 应用同类型的完备化，然后再转向持久同调。结果证明两者相同：

引理 2.4.1。 $PD^c(\mathcal{A}) = \big(PD(\mathcal{A})\big)^c = PH\Big((\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\Delta)^c\Big)$.

2.4.4. r-同构。 在 TPC 的背景下，有一个重要概念： r-同构，它能导出有趣的度量，也可用于得到相同的完备化$PD^c(\mathcal{A})$ ，其描述见 §2.4.3。

设 $\mathcal{C}$ 是一个 TPC， A， $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$， ϕ： $A \longrightarrow B$ 是 $\hom_{\mathcal{C}^0}(A, B)$ 中的一个态射，并且 $r \geq 0$。若 ϕ 能在（三角化）范畴 $\mathcal{C}^0$ 中补成一个正合三角，则称 ϕ 为一个 r-同构。

$$A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow K \longrightarrow TA$$

与 $K \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ r-无圈（见 §2.1.3）。例如，标准态射 η_r^A: $\Sigma^r A \longrightarrow A$总是一个 r-同构（这实际上是定义 TPC 的公理之一），当然还有许多其他例子。关于 [13] -同构的概念的更多细节，请参阅r。

相对于 r-同构进行完备化颇为微妙，原因如下。存在一个 r-同构 ϕ： $A \longrightarrow B$ 并不意味着存在一个 r-同构 $B \longrightarrow A$，因此这无法在对象对（A, B）上定义对称关系。这个“关系”也不具有传递性（若 ϕ： $A \longrightarrow B$ 是一个 r_1-同构，且r_2-同构 ψ： $B \longrightarrow C$ 是一个 r_2-同构，那么 $\psi \circ \phi$： $A \longrightarrow C$ 通常只是一个（$r_1 + r_2$）-同构）。然而，根据 [13], 的结果，若 ϕ： $A \longrightarrow B$ 是一个 r-同构，则存在一个 $2r$-同构 $\Sigma^r B \longrightarrow A$。由此得到如下定义：若对象 $A, B \in$ Obj(𝒞)之间存在一个 $r \geq 0$ 和 $s \in \mathbb{R}$ ，且有一个 r-同构 ϕ： $A \longrightarrow \Sigma^s B$，则称它们几乎同构。根据 [13], 的结果，“几乎同构”是一种等价关系。此外，我们有：

引理 2.4.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 *TPC*，并设 A、$B \in$ 属于 *Obj*$(\mathcal{C})$。那么 A 几乎同构于 B，当且仅当 $d_{int}(A, B) < \infty$。

由此可知，关于几乎同构对 $PD(\mathcal{A})$ 进行完备化，得到的范畴与 $PD^c(\mathcal{A})$ 完全相同。

最后，我们再提及一个有用的事实：关于交错距离对 TPC 进行完备化，始终会得到一个 TPC。更准确地说，

引理 2.4.3。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 *TPC*， $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$的一个全子 *TPC*。那么 $\mathcal{D}^c \subset \mathcal{C}$ 也是一个子 *TPC*。

2.4.5. 滤过扭曲复形。 设 $\mathcal{A}$ 是一个滤过 A_∞-范畴。与 $\mathcal{A}$ 相关联的 TPC 还有另一种变体，它基于扭曲复形（关于非滤过 [39, 范畴，见第一章第 3(l) 节]；关于滤过微分分次范畴的情形，见 A_∞第 2 节 [13, 。滤过5] -范畴的情形将在 §A.9中详细讨论。

粗略地说，首先按照 [39] 中的方式定义 $\mathcal{A}^\oplus$ $\mathcal{A}$ 的加性扩张（文中将其记作 $\Sigma\mathcal{A}$，但在我们的情形中， Σ 已有其他用途），并通过对 $\mathcal{A}$ 上的滤过作显然的扩展，在其上定义滤过结构。回想一下，根据假设，$\mathcal{A}$ 在平移和移位下封闭。接着构造一个新的过滤 A_∞-范畴 $FTw\mathcal{A}$，其对象是 $\mathcal{A}$ 上所有满足 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}^\oplus)$ 且微分 $q_X \in \hom^0_{\mathcal{A}^\oplus}(X,X)$ 位于滤过层级 ≤ 0 的扭曲复形 (X, q_X)。该范畴中的态射来自 $\mathcal{A}^\oplus$ ，因而也是过滤的。然后以标准方式定义 $FTw\mathcal{A}$ 上的 A_∞ 运算；由于 $\mathcal{A}$ 本身是过滤的，因此 $FTw\mathcal{A}$ 也是过滤的。最后请注意，由于 $\mathcal{A}$ 是严格含幺的， $FTw\mathcal{A}$ 也具有同样的性质。

过滤的 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$ 以显然的方式嵌入到 $Tw\mathcal{A}$ 中，该嵌入是一个过滤的 A_∞-函子，且在链级上满且忠实。此外， $Tw\mathcal{A}$ 在过滤意义下是预三角化的（这尤其意味着它对滤过映射锥的构造封闭）。我们用 $PH(FTw\mathcal{A})$ 表示 $FTw\mathcal{A}$的持久同调范畴。标准论证表明，$PH(FTw\mathcal{A})$ 是一个带平移和移位函子的 TPC，这些函子由 $\mathcal{A}$中的相应函子诱导。

$PH(FTw\mathcal{A})$ 的一个重要性质如下。设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$是两个过滤的 A_∞-范畴。设 $\mathcal{F}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是一个过滤的 A_∞-函子。则存在将 $\mathcal{F}$规范地延拓为过滤的、严格含幺的 A_∞-函子 $Tw\mathcal{F}\colon FTw\mathcal{A} \longrightarrow FTw\mathcal{B}$。此外， $Tw\mathcal{F}$诱导出一个同调函子

$$PH(Tw\mathcal{F}) : PH(FTw\mathcal{A}) \longrightarrow PH(FTw\mathcal{B})$$

它是一个 TPC 函子。

2.5. **精度递增的范畴系统**。接下来，我们将讨论 TPC 族，应将其视为某个（目前尚未定义的）极限三角持久范畴的近似。族中出现的 TPC 由一个空间参数化，该空间控制其近似的精度级别。在处理可由不同扰动数据选择参数化的 Fukaya 范畴时，自然会出现这种情形。以下的设定和定义是以 Fukaya 范畴为例构思的。尽管如此，我们相信，一般的公理化框架在其他情形下也可能有用。

下面我们将在三种不同的设定中对这些概念进行公理化，从最一般的情形——PC 系统——开始。

2.5.1. *PC* 的情形。 设 $(\mathcal{P}, \preceq)$ 是一个有向集（即预序集，满足 $\forall\, p', p'' \in \mathcal{P},\ \exists\, q \in \mathcal{P}$ 且 $p', p'' \preceq q$），并配有一个函数 $\nu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ，该函数具有以下性质：

(1) 对每个 $p \preceq q$，都有 $\nu(p) \geq \nu(q)$（即 ν 关于 $\preceq$ 是递减的）。(2) 对每个 $\delta > 0$，都存在 $p \in \mathcal{P}$，使得 $\nu(p) \leq \delta$。

我们将 $(\mathcal{P}, \preceq, \nu)$ 称为我们 PC 系统的参数空间。为简便起见，我们将在记号中省略 $\preceq$ 和 ν，并用 $\mathcal{P}$ 表示这个三元组。我们将 $\nu(p)$ 称为参数 $p \in \mathcal{P}$ 的范数或大小。

现在考虑一个族 $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 个以 $p \in \mathcal{P}$ 为参数的 PC $\mathcal{C}_p$。我们将所有 $\mathcal{C}_p$ 的平移与平移函子分别记作 Σ 和 T。进一步假设，对于每个 $p \preceq q$，我们给定两个集合 $\mathcal{J}_{p,q} = \mathcal{J}_{p,q}(\mathcal{C})$，$\mathcal{J}_{q,p} = \mathcal{J}_{q,p}(\mathcal{C})$，它们分别由 PC 函子 $\mathcal{C}_p \longrightarrow \mathcal{C}_q$、$\mathcal{C}_q \longrightarrow \mathcal{C}_p$ 组成，并满足以下性质：

(1) $\mathcal{J}_{p,p} = \{\mathrm{id}_{\mathcal{C}_p}\}$，对每个 $p \in \mathcal{P}$ 均成立。(2) 若 $p \preceq q$，则 $\mathcal{J}_{p、q}$ 中的所有函子彼此 0-同构。具体而言，对于任意两个函子 $\mathcal{F}、\mathcal{G} \in \mathcal{J}_{p、q}$，存在一个持久性层级为 0 的自然同构 $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$（换言之，$\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 在由 PC 函子构成的 PC 的 0 级范畴 $\text{pc-fun}^0(\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_q)$ 中同构，其中该 PC 记作 $\text{pc-fun}(\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_q)$）。此处及下文中，我们将其简记为 $\mathcal{F} \cong_0 \mathcal{G}$。此外，我们还要求 $\mathcal{J}_{q、p}$ 中的任意两个函子也满足同样的条件。(3) 若 $p \preceq q \preceq r$，则对于每个 $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_{p、q}$、$\mathcal{G} \in \mathcal{J}_{q、r}$、$\mathcal{H} \in \mathcal{J}_{p、r}$，都有 $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \cong_0 \mathcal{H}$。(4) 若 $p \preceq q$，则对于每个 $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_{p、q}$ 以及 $\mathcal{H} \in \mathcal{J}_{q、p}$，都有

$$d_{\mathrm{int}}(\mathcal{H} \circ \mathcal{F}, \mathrm{id}_{\mathcal{C}_p}),\ d_{\mathrm{int}}(\mathcal{F} \circ \mathcal{H}, \mathrm{id}_{\mathcal{C}_q}) \leq C|\nu(p) - \nu(q)|,$$

对于某个常数 C，该常数仅取决于整个族 $\mathcal{C}$，既不取决于 p，q 也不取决于 $\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$。这里的两个 d_{int} 表示 PC 函子 $\mathcal{C}_p \longrightarrow \mathcal{C}_p$ 和 $\mathcal{C}_q \longrightarrow \mathcal{C}_q$ 的 PC 上的交错距离。

下文中，我们将用 $\mathcal{C}$ 表示上述全部数据，即范畴族 $\{\mathcal{C}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 以及函子集合 $\mathcal{J}_{p,q}$，并将 $\mathcal{C}$ 称为“精度递增的 *PC* 系统”，有时简称为“*PC* 系统”。我们将 $\mathcal{J}_{p,q}$ 中的函子称为比较函子，并通常将这样的函子记为 $\mathcal{H}_{p,q} : \mathcal{C}_p \longrightarrow \mathcal{C}_q$。

注记 2.5.1。(1) 给定一个 $\mathcal{C}$ 精度递增的 PC 系统，系统 $\mathcal{C}$ 中与 PC $\mathcal{C}_p$ 对应的所有 ∞-级范畴 $\mathcal{C}_p^\infty$ 彼此等价。从持久性观点来看，随着 p（相对于 $\preceq$）“增大”，$\mathcal{C}_p$ 与 $\mathcal{C}_q$ 之间关于 $p \preceq q$ 的比较会变得越来越精确。(2) 单个 PC $\mathcal{C}$ 是上述定义的一个特殊情形。我们可以将其视为由一个单点参数空间 $\mathcal{P} = \{*\}$ 参数化的 PC 系统。在此情形下，我们将范数函数 ν 设为平凡函数，即 $\nu(*) = 0$。

2.5.2. *PC* 系统的函子。接下来，我们讨论具有精度递增的 PC 系统之间的函子。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个精度递增的 PC 系统。每当需要区分系统 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 各自的附加结构时，我们将根据记号上的方便，使用 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 下标或上标（例如，

$\widehat{\mathcal{C}}$ 的参数空间记为 $\mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{C}}}$，比较函子记为 $\mathcal{H}^{\widehat{\mathcal{C}}}_{p,\,q}$，等等；不过，我们将两个系统中的预序和参数大小分别记为 $\preceq$ 和 ν）。

函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 由以下结构组成：

(1) 一个映射 $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{C}}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{D}}}$，定义在 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 的参数空间之间（为简便起见，我们也将其记作 $\mathcal{F}$）。

(2) 一个 PC 函子族 $\left\{\mathcal{F}_p : \mathcal{C}_p \longrightarrow \mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{F}}(p)}\right\}_{p\in\mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{C}}}}$，由$\mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{C}}}$参数化。

这两个结构还须满足以下性质。上文 (1) 中的映射 $\mathcal{F}$ 应满足：对于每个满足 $p \preceq q$ 的 $p,q \in \mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{C}}}$，都有 $\mathcal{F}(p) \preceq \mathcal{F}(q)$。此外，我们要求对每个 $p \in \mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{C}}}$都有 $\nu(\mathcal{F}(p)) \leq \nu(p)$。这些函子 $\mathcal{F}_p$ 须满足以下两个条件。首先，对于 $\mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{C}}}$ 中的每个 $p \preceq q$，以及任意选取的比较函子 $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}_{p,q}$, $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),\widehat{\mathcal{F}}(q)}$，以下图表：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_p & \xrightarrow{\mathcal{F}_p} & \mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{F}}(p)} \\ {\scriptstyle \mathcal{H}^{\widehat{\mathcal{C}}}_{p,q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}^{\widehat{\mathcal{D}}}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),\widehat{\mathcal{F}}(q)}} \\ \mathcal{C}_q & \xrightarrow{\mathcal{F}_q} & \mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{F}}(q)} \end{array} \tag{6}$$

在由 PC函子 pc-fun($\mathcal{C}_p, \mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{F}}(q)}$) 构成的持久范畴的 0 级范畴 pc-fun^0($\mathcal{C}_p, \mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{F}}(q)}$) 中，交换到自然同构为止。类似地，我们还要求，对于每个 $p \preceq q$ in $\mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{C}}}$ 以及比较函子 $\mathcal{H}^{\mathcal{C}}_{q,p}$, $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{\widehat{\mathcal{F}}(q),\widehat{\mathcal{F}}(p)}$ 的每一种选择，图表：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_p & \xrightarrow{\mathcal{F}_p} & \mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{F}}(p)} \\ {\scriptstyle \mathcal{H}^{\widehat{\mathcal{C}}}_{p,q}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathcal{H}^{\widehat{\mathcal{D}}}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),\widehat{\mathcal{F}}(q)}} \\ \mathcal{C}_q & \xrightarrow{\mathcal{F}_q} & \mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{F}}(q)} \end{array} \tag{7}$$

在由 PC函子 pc-fun($\mathcal{C}_q, \mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{F}}(p)}$) 构成的持久范畴的 0 级范畴 pc-fun^0($\mathcal{C}_q, \mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{F}}(p)}$) 中，交换到自然同构为止。

接下来需要定义 PC 系统的函子之间的自然变换。设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是两个 PC 系统，$\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 是两个在参数空间上具有相同作用量的函子（即，两个映射 $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{C}}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{D}}}$ 重合）。一个平移量为 $s \in \mathbb{R}$ 的自然变换 $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ 由一族持久自然变换 $\theta_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ 组成，每个 $p \in \mathcal{P}$ 都对应一个平移量为 s 的自然变换。此外，要求 θ_p 与比较函子满足以下弱相容性：对于每个 $p \preceq q$ 以及每个$X \in$Obj($\mathcal{C}_p$)，存在 0-同构

$$\tau_{p,q} : \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),\widehat{\mathcal{F}}(q)}(\mathcal{F}_p(X)) \longrightarrow \mathcal{F}_q(\mathcal{H}_{p,q}(X)), \quad \sigma_{p,q} : \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),\widehat{\mathcal{F}}(q)}(\mathcal{G}_p(X)) \longrightarrow \mathcal{G}_q(\mathcal{H}_{p,q}(X)),$$

使得

$$\sigma_{p,q}\circ\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),\widehat{\mathcal{F}}(q)}(\theta_p(X))=\theta_q(\mathcal{H}_{p,q}(X))\circ\tau_{p,q}$$

在同态$\mathcal{D}_{\widehat{\mathcal{F}}(q)}\big(\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),\ \widehat{\mathcal{F}}(q)}(\mathcal{F}_p(X))\ \mathcal{G}_q(\mathcal{H}_{p,\ q}(X))\big)$中。最后，我们还要求与比较函子$\mathcal{H}_{q,\ p}$具有类似的相容性。

2.5.3. *TPC* 的情形。 一个具有精度递增的 TPC 系统，简单来说就是一个系统$\frown\mathcal{C}$，其中的 PC 如 §2.5.1 中所述，并满足以下附加假设。系统中的每个范畴 $\mathcal{C}_p$，$p\in\mathcal{P}$都假设为 TPC。此外，集合中的所有函子$\mathcal{J}_{p,\ q}$ 和 $\mathcal{J}_{q,\ p}$ 都假设为 TPC 函子。§2.5.2 中关于 PC 的函子（以及它们之间的自然变换）的概念，以直接的方式推广到 TPC 系统的情形，只需要求函子 $\mathcal{F}_p$ 为 TPC 函子即可。

$\widehat{\ }$还要注意，注记 2.5.1 中的第（1）点也适用于 TPC 系统，即 $\mathcal{C}=\{\mathcal{C}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ -层 ∞，$\mathcal{C}_p^\infty$彼此在三角等价意义下等价。 $p\in\mathcal{P}$

2.5.4. 过滤 A_∞-范畴的系统。过滤 A_∞-范畴的精度递增系统也有相应的概念。其定义与上文 §2.5.1 中给出的 PC 系统定义类似，但在比较 q阶范畴与 p阶范畴之间的比较函子方面有一项重要变化（当 $p\preceq q$时）。

在 A_∞-情形下，精度递增的范畴系统由以下内容构成。$\widehat{\ }$一个由过滤 A_∞-范畴 $\mathcal{A}_p$组成的族 $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$，其参数为 $p\in\mathcal{P}$。注意，我们不假设这些 A_∞-范畴是预三角化的。参数空间 $\mathcal{P}$ 赋有与 §2.5.3 中相同的结构 ν 和 $\preceq$。对于 $p,q\in\mathcal{P}$，若 $p\preceq q$，则有两组比较 A_∞-函子集合 $\mathcal{J}_{p,q}$ 和 $\mathcal{J}_{q,p}$，它们满足以下性质。第一组中的函子$\mathcal{H}_{p,q}\in\mathcal{J}_{p,q}$ 是过滤 A_∞-函子。第二组中的函子 $\mathcal{H}_{q,p}\in\mathcal{J}_{q,p}$ 假设为具有线性偏差率$\frown\leq C|\nu(p)-\nu(q)|$的 A_∞-函子 $\mathcal{H}_{q,p}:\mathcal{A}_q\longrightarrow\mathcal{A}_p$，其中常数 C 仅依赖于 $\mathcal{A}$（而不依赖于 p,q）。此外，假设来自 $\mathcal{J}_{p,q}$ 和 $\mathcal{J}_{q,p}$ 的函子满足 §2.5.3 第 21 页所列性质的 A_∞-类比形式，并作如下显然的修改。对于第 21 页第（2）点和第（3）点中提及的两个函子之间的 0-同构 $\cong_0$，现在要求过滤 A_∞-函子的持久同调范畴中的相应函子之间存在 0-同构 $PH(F函子_{A_\infty}(\mathcal{A}_p,\mathcal{A}_q))$；对于 $PH(函子^{\mathrm{LD}}(\mathcal{A}_q,\mathcal{A}_p))$ 中的比较函子，也作类似要求。第 21 页第（4）点中的假设现在替换为如下要求：对于 $PH(函子_{A_\infty}(\mathcal{A}_p,\mathcal{A}_p))$ 上的交错距离，有 $d_{\mathrm{int}}(\mathcal{F}\circ\mathcal{H},\mathrm{id})\leq C|\nu(p)-\nu(q)|$；对于 $d_{\mathrm{int}}(\mathcal{H}\circ\mathcal{F},\mathrm{id})$ 也作类似要求。

PC系统之间的函子（以及它们之间的自然变换）也有一个 A_∞-类比，这遵循前述原则。

$\widehat{\ }$2.5.5. 系统的模与 *Yoneda* 嵌入。 设 $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 是一个滤过A_∞-范畴系统。记 $F\ \mathrm{mod}_{\mathcal{A}_p}$ 为滤过 A_∞-模的 $\mathcal{A}_p$-范畴。回顾一下，这是一个滤过 A_∞-范畴（事实上是一个滤过微分分次范畴）。这些范畴构成一个系统

$$F\mathrm{mod}(\widehat{\mathcal{A}}):=\{F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}_p}\}_{p\in\mathcal{P}}$$

滤过 A_∞-范畴，其中对于 $p \preceq q$ 比较函子

$$(\mathcal{H}_{p,q})_* : F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}_p} \longrightarrow F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}_q}$$

正是由系统$\widehat{\mathcal{A}}$的比较函子$\mathcal{H}_{p,q}$ 诱导的推前函子，$(\mathcal{H}_{q,p})_*$也同样如此。由于对于 $p \preceq q$，比较函子$\mathcal{H}_{p,q}$是过滤的，$(\mathcal{H}_{p,q})_*$也具有相同性质。至于反方向的函子，有趣的是，推前函子$(\mathcal{H}_{q,p})_*$ 在某种意义上表现得比$\mathcal{H}_{q,p}$ 更好。虽然$\mathcal{H}_{q,p}$ 并非真正的过滤函子，而只是 LD 函子，但其诱导的比较函子$(\mathcal{H}_{q,p})_*$ 确实是过滤的。这是过滤推前构造的一个非常好的特点（见 §A.8）。不过请注意，$(\mathcal{H}_{p,q})_* \circ (\mathcal{H}_{q,p})_*$ 仍然只是与 id r-准同构，对于 $r = C|\nu(p) - \nu(q)|$，$(\mathcal{H}_{q,p})_* \circ (\mathcal{H}_{p,q})_*$也同样如此。

现在我们转而讨论过滤的 A_∞-范畴系统。记令

$$\mathcal{Y}_p : \mathcal{A}_p \longrightarrow F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}_p}$$

为过滤 Yoneda 嵌入（见 §A.3.1），并令 $(\mathcal{Y}_p(\mathcal{A}_p))^{(\text{q-iso},0)}$ 为 $F\mathrm{mod}^{\mathcal{A}_p}$ 的最小全子范畴，它包含对象 $\mathcal{Y}_p(\mathrm{Obj}(\mathcal{A}_p))$，且对 0-拟同构也闭。注意，比较函子 $(\mathcal{H}_{p,q})_*$ 和 $(\mathcal{H}_{q,p})_*$ 保持这些子范畴。这里的要点是，对于每个 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}_p)$ 和 $p \preceq q$，模 $(\mathcal{H}_{p,q})_*\mathcal{Y}_p(A)$ 与 $\mathcal{Y}_q(\mathcal{H}_{p,q}(A))$ 是 0- 拟同构的。同样，对于每个 $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}_q)$，模 $(\mathcal{H}_{q,p})_*(\mathcal{Y}_q(B))$ 与 $\Sigma^r\mathcal{Y}_p(\mathcal{H}_{q,p}(B))$ 是 0- 拟同构的，其中 $r \leq C|\nu(p) - \nu(q)|$ 是 LD 函子$\mathcal{H}_{q,p}$的偏差率。回想一下，我们的范畴 $\mathcal{A}_p$ 都带有移位函子 Σ，因此范畴 $\mathcal{Y}(A_p)$ 和 $(\mathcal{Y}_p(\mathcal{A}_p))^{(\text{q-iso},0)}$ 在移位下均封闭。

由此可知，范畴 $(\mathcal{Y}_p(\mathcal{A}_p))^{(\text{q-iso},0)}$, $p \in \mathcal{P}$ 连同推前比较函子 $(\mathcal{H}_{p,\ q})_*$、$(\mathcal{H}_{q,\ p})_*$ 在其上的限制，构成一个过滤的 A_∞-$\widehat{\ }$ 范畴系统（可视为 $F\mathrm{mod}(\mathcal{A})$ 的一个子系统）。我们将此系统记为 $\widehat{\ }\mathcal{Y}(\mathcal{A})$，并称其为 $\mathcal{A}$ 的 Yoneda 系统。

2.5.6. 与 A_∞-范畴系统相关联的 PC 系统。给定一个过滤的 $\widehat{\ }A_\infty$-范畴系统 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$，可以通过取持久同调得到一个 PC 系统。不过，这一过程有一个小小的微妙之处。相应的持久同调范畴系统 $\{PH(\mathcal{A}_p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ 并不是真正的 PC 系统，因为对于 $p \preceq q$，从 $\mathcal{J}_q$ 到 $_p$ 的 A_∞-函子并非过滤函子，而只是 LD 函子，因此不能诱导出 PC 函子 $PH(\mathcal{A}_q) \longrightarrow PH(\mathcal{A}_p)$。不过，通过转而采用 §2.5.5 中引入的 Yoneda 系统，可以解决这个问题。更确切地说，考虑 $\mathcal{A}$ 的 Yoneda 系统 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})\widehat{\ }$。回顾 §2.5.5，这是一个（真正的）过滤 A_∞-范畴系统。定义

$$PH(\widehat{\mathcal{A}}) := \{PH((\mathcal{Y}_p(\mathcal{A}_p))^{(\text{q-iso},0)})\}_{p\in\mathcal{P}}$$

成为由 $(\mathcal{Y}_p(\mathcal{A}_p))^{(\text{q-iso},0)}$ 的持久同调范畴构成的系统，形成 Yoneda 系统 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$。比较函子 $\mathcal{H}_{p,\ q}$ 定义为由 $(\mathcal{H}_{p,\ q})_*$诱导的持久同调函子，即 $\mathcal{H}_{p,\ q} := PH((\mathcal{H}_{p,\ q})_*)$，$\mathcal{H}_{q,\ p}$也类似。

^ ^赋值 $\mathcal{A} \longmapsto PH(\mathcal{A})$ 可扩展为函子 $\mathrm{SYS}_{FA_\infty} \longrightarrow \mathrm{SYS}_{\mathrm{PC}}$，其作用于过滤 A_∞-范畴系统范畴与 PC系统范畴之间。该函子
^ ^ ^ ^将系统过滤 A_∞-范畴之间的函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$映射为相应 PC系统之间的函子 $PH(\mathcal{F}) :\frown \frown PH(\mathcal{A}) \longrightarrow PH(\mathcal{B})$，并且这种对应在此类函子之间的自然变换上也符合预期。

^最后，我们指出，若 $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 是预三角化过滤 A_∞-^范畴的系统，则相应的 PC 系统 $PH(\mathcal{B})$ 实际上是一个 TPC 系统。在本文余下部分中，这一背景下最重要的例子如下。设^ ^
$\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 是一个过滤 A_∞范畴系统。考虑 §2.5.5 中定义的 Yoneda 系统 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$。对该系统中涉及的每个范畴应用 §2.4.2 中的构造，我们便得到一个新的过滤预三角范畴系统 $\mathcal{Y}(\widehat{\mathcal{A}})^\Delta = \{\mathcal{Y}(\mathcal{A}_p)^\Delta\}_{p\in\mathcal{P}}$。该系统的比较函子由 Yoneda 系统的比较函子诱导而来（见 §2.5.5）。这是可行的，因为过滤函子和 LD A_∞-函子会保留 §2.4.2 中定义的三角完备化。现在我们转向持久同调，并定义如下 TPC 系统：

$$PD(\widehat{\mathcal{A}}) := \{PH(\mathcal{Y}(\mathcal{A}_p)^\Delta)\}_{p\in\mathcal{P}}. \tag{8}$$

^我们将这个系统称为^的持久导出系统 $\mathcal{A}$。

^2.5.7. 具有相干对象基的系统。设 $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 是一个具有^精度递增的 PC 系统。对于 $\mathcal{C}$，相干对象基 $\{mathscr\}B$ 是一个由子集组成的族$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$，其中每个子集都是对象 $\mathcal{B}_p \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)$ 的子集，对每个 $p \in \mathcal{P}$均如此，并满足以下性质：

(1) 对每个 $p \preceq q$、任意两个比较函子 $\mathcal{H}'_{p,q},\mathcal{H}''_{p,q} \in \mathcal{J}_{p,q}$ 以及每个 $A \in \mathcal{B}_p$，我们都有 $\mathcal{H}'_{p,q}(A) = \mathcal{H}''_{p,q}(A)$ 和 $\mathcal{H}'_{p,q}(A) \in \mathcal{B}_q$。我们还要求任意两个比较函子 $\mathcal{H}'_{q,p},\mathcal{H}''_{q,p} \in \mathcal{J}_{q,p}$ 以及每个 $B \in \mathcal{B}_q$也满足相应的性质。(2) 对每个 $p \preceq q \preceq r$、任意两个比较函子 $\mathcal{H}_{p,q} \in \mathcal{J}_{p,q}$, $\mathcal{H}_{q,r} \in \mathcal{J}_{q,r}$ 以及每个$A \in \mathcal{B}_p$，我们都有 $\mathcal{H}_{q,r}(\mathcal{H}_{p,q}(A)) = \mathcal{H}_{p,r}(A)$。我们还要求所有方向相反的比较函子，即 $\mathcal{H}_{r,q},\mathcal{H}_{q,p}$, $\mathcal{H}_{r,p}$，以及每个对象 $B \in \mathcal{B}_r$也满足相应的性质。

(3) 对于每个 $p \preceq q$、每一组选定的比较函子 $\mathcal{H}_{p,q}$, $\mathcal{H}_{q,p}$ 以及每个 $A \in \mathcal{B}_p, B \in \mathcal{B}_q$，我们都有 $\mathcal{H}_{q,p}(\mathcal{H}_{p,q}(A)) = A$, $\mathcal{H}_{p,q}(\mathcal{H}_{q,p}(B)) = B$。

由上述定义可知，对于每个 $p', p'' \in \mathcal{P}$，我们都有一个典范双射$\mathcal{B}_{p'} \longrightarrow \mathcal{B}_{p''}$，即 $\mathcal{H}_{q,p''} \circ \mathcal{H}_{p',q}$，其中 $q \in \mathcal{P}$ 是满足 $q \succeq p', p''$的任意元素。

可以用直接明了的方式定义具有相干对象基的 PC系统之间的函子。

具有相干对象基的系统这一概念（以及此类系统之间的函子）无需任何修改，也适用于过滤 A_∞-范畴系统。

稍后将出现的、具有相干对象基的范畴系统（过滤 A_∞ 或 PC）的一个特殊情形是：对于每个 $p \in \mathcal{P}$，都有 $\mathcal{B}_p = \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)$。我们将这种情形称为<style id='5'>相容的对象满基。在下文中，我们还将遇到一种更简单的情形，即所有范畴 $\mathcal{C}_p$, $p \in \mathcal{P}$ 都具有相同的对象集合（即 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{p'}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{p''})$

对于每个 p', $p'' \in \mathcal{P}$)，所有比较函子在对象上都像恒等态射一样作用，即$\mathcal{H}_{p,\,q}(X) = X$ 对于每个 $p \preceq q$、每个比较函子 $\mathcal{H}_{p,\,q}$，以及 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)$。在这种情况下，我们将把相干基视为单个集合而非一个族，并对任意 $p \in \mathcal{P}$ 设 $\mathcal{B} = \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)$。我们将这类范畴系统称为<style id='22'>具有固定的满对象基的范畴系统（PC 或过滤 A_∞-范畴）。

注 2.5.2。考虑一个过滤 A_∞-范畴系统 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$，其对象具有固定的满基 $\mathcal{B}$。令 $F\mathrm{mod}(\mathcal{A})$ 为相应的、定义在各个 $\mathcal{A}_p$ 上的过滤模系统，并令 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的 Yoneda 系统（见 §2.5.5）。与 $\mathcal{A}$ 不同，另外这两个系统没有固定的（甚至也没有相干的）对象满基。原因在于，$F\mathrm{mod}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$ 的比较函子是“模推前”函子 $\mathcal{H}_*$，它们由 $\mathcal{A}$ 的比较函子 $\mathcal{H}$ 诱导而来，而这些函子不满足相干对象基所要求的条件。具体而言，对于 $p \preceq q \preceq r$，函子 $(\mathcal{H}_{q,r})_* \circ (\mathcal{H}_{p,q})_*$ 和 $(\mathcal{H}_{q,r})_*$ 在过滤模上的作用方式不同（尽管一个模在这两个函子下的像是 0-拟同构的）。类似地，Yoneda 模的推前 $(\mathcal{H}_{p,q})_*\mathcal{Y}(X)$ 不是 Yoneda 模，而只是与一个 Yoneda 模 0-拟同构。

2.5.8. 同伦系统。设 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 是一个过滤 A_∞-范畴系统，并带有相容的对象满基。若系统 $\mathcal{A}$ 满足以下条件，则称其为一个同伦系统：

(1) 对每个 $p \preceq q \in \mathcal{P}$，以及任意两个比较函子 $\mathcal{H}'_{p,q}, \mathcal{H}''_{p,q} \in \mathcal{J}_{p,q}$，存在一个同伦，将 $\mathcal{H}'_{p,q}$ 与 $\mathcal{H}''_{p,q}$ 联系起来，且不改变滤过。从现在起，我们将这类T称为 0-同伦，并称 $\mathcal{H}'_{p,q}$ 与 $\mathcal{H}''_{p,q}$ 是 0-同伦的；$T \in \hom^0_{\mathrm{fun}(\mathcal{A}_p,\mathcal{A}_q)}(\mathcal{H}'_{p,q}, \mathcal{H}''_{p,q})$ 中的上标表示滤过层级为 0 的预自然变换（即保持滤过不变）。未过滤情形下A_∞-函子之间的同伦定义，参见 [39, 第 (1h) 节]。(2) 对每个 $p \preceq q \in \mathcal{P}$，任意两个比较函子 $\mathcal{H}'_{q,p}, \mathcal{H}''_{q,p} \in \mathcal{J}_{q,p}$ 作为偏差率为 $C|\nu(p) - \nu(q)|$ 的 LD-函子是 0-同伦的，其中 C 是与在 §2.5.4 中过滤 A_∞-范畴系统定义里出现的族 $\mathcal{A}$ 相对应的常数。具体而言，这意味着存在一个 0 平移的同伦 T，连接这两个 LD-函子 $(\mathcal{H}'_{q,p}, C|\nu(p)-\nu(q)|)$ 和 $(\mathcal{H}''_{q,p}, C|\nu(p) - \nu(q)|)$；也就是说，其第 d 阶T_d 将滤过平移 $\leq dC|\nu(p) - \nu(q)|$。参见 §A.6。(3) 对每个 $p \preceq q \preceq r \in \mathcal{P}$，以及任意选取的比较函子 $\mathcal{H}_{p,q}, \mathcal{H}_{q,r}, \mathcal{H}_{p,r}$，都有 $\mathcal{H}_{q,r} \circ \mathcal{H}_{p,q}$ 与 $\mathcal{H}_{p,r}$ 是 0-同伦的。

2.5.9. 系统不变量。精度递增的范畴系统 $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 要求我们考虑其极限（或者更确切地说，余极限），其中参数 $p \in \mathcal{P}$ 趋于“无穷大”（或者等价地，精度级别 $\nu(p)$趋于 0）。换言之，若能定义一个余极限范畴 $\operatorname{colim}_{\longrightarrow p\in\mathcal{P}} \mathcal{C}_p$，使其具有相同的结构

（例如 PC 或 TPC 结构、过滤的 A_∞-结构等），如同构成族$\mathcal{C}$的范畴 $\mathcal{C}_p$ 一样。这似乎是一个非平凡的基础性问题，我们不会尝试在本文中解决它。相反，我们将证明，与范畴 $\mathcal{C}_p$ 相关联的一些代数不变量和度量即使在不存在余极限范畴的情况下也存在余极限。我们将着重讨论三种此类不变量（每一种都在不同的语境中定义）：PC 中对象集合上的交错（伪）距离、三角范畴的格罗滕迪克群 K_0，以及 A_∞-范畴的霍赫希尔德同调。

我们先在一个范畴系统的所有对象上定义一个有用的等价关系。设 $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 是一个精度递增的 PC 系统。考虑

$$\mathrm{Obj}^{\mathrm{tot}}(\widehat{\mathcal{C}}) := \coprod_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)$$

并将该集合的元素记为 (A,p)，其中 $p\in\mathcal{P}$ 且 $A\in\mathcal{C}_p$。在 $\mathrm{Obj}^{\mathrm{tot}}(\widehat{\mathcal{C}})$ 上定义等价关系 $\sim_{\widehat{\mathcal{C}}}$ 如下：若存在 $q\in\mathcal{P}$，满足 $p',p''\preceq q$，使得对于某些比较函子 $\mathcal{H}_{p',q}\in\mathcal{J}_{p',q}$ 和 $\mathcal{H}_{p'',q}\in\mathcal{J}_{p'',q}$，有 $\mathcal{H}_{p',q}(A')\cong_0\mathcal{H}_{p'',q}(A'')$。这里 $\cong_0$ 表示 $\mathcal{C}_q^0$ 中的一个同构。（由于 $\mathcal{J}_{p',q},\mathcal{J}_{p'',q}$ 中的所有函子都彼此 0-同构，要求对于某些 $\mathcal{H}_{p',q}\in\mathcal{J}_{p',q}$, $\mathcal{H}_{p'',q}\in\mathcal{J}_{p'',q}$，有 $\mathcal{H}_{p',q}(A')\cong_0\mathcal{H}_{p'',q}(A'')$，等同于要求该性质对所有 $\mathcal{H}_{p',q}\in\mathcal{J}_{p',q}$, $\mathcal{H}_{p'',q}\in\mathcal{J}_{p'',q}$ 都成立。）显然，若 $A',A''\in$ 是 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)$ 中 0- 同构的对象，则 $(A',p)\sim_{\widehat{\mathcal{C}}}(A'',p)$；但一般而言，等价关系 $\sim_{\widehat{\mathcal{C}}}$ 还可能关联属于由不同 p 参数化的范畴的对象。$\widetilde{\widehat{\ }}$将 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 记为 $\sim_{\widehat{\mathcal{C}}}$ 的等价类。给定 $\mathcal{S}\subset\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 和 $p\in\mathcal{P}$，我们记作

$$\mathcal{S}_p := \{A\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)\mid [A]_{\widehat{\mathcal{C}}}\in\mathcal{S}\},$$

$\widetilde{\widehat{\ }}$其中 $[A]_{\widehat{\mathcal{C}}}$ 表示 A 在 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 中的等价类。处理单个元素 $\mathcal{S}\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 时，我们也会使用相同的记号 $\mathcal{S}_p$$\widetilde{\widehat{\ }}$。

现在，我们定义 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 上由$\mathcal{C}_p$上的交错距离诱导的伪距离。用 $d^p_{\ \mathrm{int}}$ 表示 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)$ 上的交错（伪）距离。我们在元素对 $X,Y\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 上定义如下度量：

$$\widetilde{d}_{\mathrm{int}}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \inf\left\{d^p_{\mathrm{int}}(X',Y')\mid p\in\mathcal{P}, X'\in\widetilde{X}_p, Y'\in\widetilde{Y}_p\right\}, \tag{9}$$

并称其为极限交错距离（“极限”这一措辞的合理性将在下文的引理 2.5.3 中说明）。注意，出现在（9）中的项 $d^p_{\ \mathrm{int}}(X',Y')$ 仅取决于 $X',Y'\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)$ 的$\widetilde{\ }$0-同构类。显然，d_{int} 是一个伪-$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$距离。注意，由于（9）中的 inf，即使 $X\neq Y$，$d_{\mathrm{int}}(X,Y)$ 也可能为零。此外，如果 X 和 Y 在持久性$\sim\infty$-级范畴 $\mathcal{C}_p^\infty$ 中对于“足够大”的 p 并不表示同构对象，那么$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$也可能取值 ∞。伪度量 d_{int} 可视为备注2.2.2 中伪距离 d 的一个更稳健的˜版本。事实上，正如其名称所示，极限距离也可以通过 $d^p_{\ \mathrm{int}}$ 在 $\nu(p)\longrightarrow 0$ 时的极限来定义。更具体地说：

引理 2.5.3。设 $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{P}$ 中元素构成的一个序列，且 $\nu(p_k) \longrightarrow 0$ 当 $k \longrightarrow \infty$. $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 时成立。那么对于每个 $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$，我们有

$$\lim_{k\to\infty} d_{int}^{p_k}(X'_k, Y'_k) = \widetilde{d}_{int}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}),$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$其中 X'_k, Y'_k是任意序列，满足 $X'_k \in X_{p_k}$, $Y'_k \in Y_{p_k}$。

证明。这可由初等论证得出，利用第 21 页列出的比较函子的性质，以及引理 2.1.2。□

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$注记 2.5.4。设 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 是两个 PC 系统之间的函子（见 §2.5.2）。根据定义可直接得出，$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$诱导出一个定义良好的映射 $\widetilde{\mathcal{F}}$: $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$，满足 $\widetilde{\mathcal{F}}([A]_{\widehat{\mathcal{C}}}) = [\mathcal{F}_p(A)]_{\widehat{\mathcal{D}}}$，对每个 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)$，$p \in \mathcal{P}$均成立。此外，$\mathcal{F}$ 关于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 和 $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ 上的极限交错距离是非扩张的，也就是说，对于每个 $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Obj}(\widehat{\mathcal{C}})$，$\widetilde{d}^{\mathcal{D}}_{\mathrm{int}}(\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{X}), \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{Y})) \leq \widetilde{d}^{\mathcal{C}}_{\mathrm{int}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$。

$\widehat{\ }$现在我们转向 K-群。设 $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 是一个 TPC 系统（见 §2.5.3）。回顾一下，每个 $\mathcal{C}_p$ 的 0-持久性层级 $\mathcal{C}_p^0$ 都是一个三角范畴。用 $K_0(\mathcal{C}_p^0)$ 表示 $\mathcal{C}_p^0$ 的 Grothendieck 群（或 K-群）。设 $p \preceq q$。回顾一下，所有比较函子 $\mathcal{H}_{p,q}: \mathcal{C}_p \longrightarrow \mathcal{C}_q$ 都是 TPC 函子，因此它们限制为三角函子 $\mathcal{H}^0_{p,q}: \mathcal{C}_p^0 \longrightarrow \mathcal{C}_q^0$。由此我们得到一个诱导同态

$$\mathcal{H}^K_{p,q}: K_0(\mathcal{C}_p^0) \longrightarrow K_0(\mathcal{C}_q^0). \tag{10}$$

事实证明，这个同态与比较函子 $\mathcal{H}_{p,q}$ 的具体选取无关。为此，回顾一下，对于 $p \preceq q$，任意两个比较函子 $\mathcal{H}'_{p,q}$, $\mathcal{H}''_{p,q} \in \mathcal{J}_{p,q}$ 都是 0-同构；并且若三角范畴 $\mathcal{E}$ 中的两个对象 X, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{E})$ 同构，则它们在 $K_0(\mathcal{E})$ 中的类相等。

类似的论证表明，来自（10）的 K-群同态满足 $\mathcal{H}^K_{q,r} \circ \mathcal{H}^K_{p,q} = \mathcal{H}^K_{p,r}$ 对每个 $p \preceq q \preceq r$ 都成立，并且显然，对每个 p, $\mathcal{H}^K_{p,p} = \mathrm{id}$。由此可知，$\{K_0(\mathcal{C}_p^0)\}_{p\in\mathcal{P}}$ 与映射 $\mathcal{H}^K_{p,q}$ 构成一个阿贝尔群的有向系统。我们将 $\mathcal{C}$ 的 K_0-$\widehat{\ }$群定义为该系统的余极限：

$$K_0(\widehat{\mathcal{C}}^0) := \varinjlim_{p\in\mathcal{P}} K_0(\mathcal{C}_p^0). \tag{11}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$赋值 $\mathcal{C} \longmapsto K_0(\mathcal{C}^0)$ 具有函子性，具体而言，TPC 函子 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 从 TPC 的系统之间的2.5.2、§2.5.3，见 §，诱导出同态 $\widehat{\mathcal{F}}^K: K_0(\widehat{\mathcal{C}}^0) \longrightarrow K_0(\widehat{\mathcal{D}}^0)$。

注记 2.5.5。将 $\Lambda^P_{\mathbb{Z}}$ 记为系数取自 $\mathbb{Z}$的诺维科夫多项式环（即有限诺维科夫级数）。其中的元素可写成有限和 $\sum n_k t^{a_k}$，其中 $n_k \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{R}$（t表示形式上的 Novikov变量）。如 [12], 所述，TPC $\mathcal{C}$ 的0-持久性层级持久化层范畴 $\mathcal{C}^0$ 的格罗滕迪克群 $K_0(\mathcal{C}^0)$ 是一个 $\Lambda^P_{\mathbb{Z}}$-模，其中 t^a 在对象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^0)$ 的类 $[X]$ 上的作用定义为 $t^a[X] := [\Sigma^a X]$（这里的 Σ 是 $\mathcal{C}$的移位函子）。容易验证，同态 $\mathcal{H}^K_{p,q}$ 是 $\Lambda^P_{\mathbb{Z}}$-线性的，因此

余极限 $K_0(\widehat{\mathcal{C}})$ 继承了 $\Lambda_{\mathbb{Z}}^P$-模的结构。类似地，由 TPC-系统的函子 $\widehat{\mathcal{F}}$ 诱导的同态 $\widehat{\mathcal{F}}^K$是 $\Lambda_{\mathbb{Z}}^P$-模的映射。

最后，我们讨论系统的持久性霍赫希尔德不变量。设 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 是一个由以下对象组成的系统：A_∞具有精度递增的 - 范畴，并且具有相容的对象满基（见 §2.5.7）。进一步假设 $\mathcal{A}$ 是 §2.5.8中定义的同伦系统。

对于每个 $p \in \mathcal{P}$，我们都有其持久性霍赫希尔德同调 $PHH(\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_p)$，其中 $\mathcal{A}_p$的系数取为 $\mathcal{A}_p$ 的对角双模。令 $p, q \in \mathcal{P}$，其中 $p \preceq q$。每个比较函子 $\mathcal{H}_{p,q} : \mathcal{A}_p \longrightarrow \mathcal{A}_q$ 都会诱导一个持久模映射

$$\mathcal{H}^{\mathrm{PHH}}_{p,q} : PHH(\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_p) \longrightarrow PHH(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q).$$

由于从 $\mathcal{J}_{p,q}$ 出发的任意两个比较函子彼此同伦，由命题 A.6.1可知，$\mathcal{H}^{\mathrm{PHH}}_{p\,q}$,与 $\mathcal{H}_{p,q}$的具体选择无关。此外，对于每个 $p \preceq q \preceq r$，都有 $\mathcal{H}^{\mathrm{PHH}}_{q\quad,r} \circ \mathcal{H}^{\mathrm{PHH}}_{p\quad,q} = \mathcal{H}^{\mathrm{PHH}}_{p\,r}$,，并且对于每个 $p \in \mathcal{P}$，$\mathcal{H}^{\mathrm{PHH}}_{p\quad,p} = \mathrm{id}$。换言之，$\{PHH(\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ 连同映射 $\mathcal{H}^{\mathrm{PHH}}_{p\,q}$,, $p \preceq q$，构成一个以 $\mathcal{P}$为参数的持久模有向系统。我们将 $\mathcal{A}$ 的持久性霍赫希尔德同调定义为该系统的余极限：

$$PHH(\widehat{\mathcal{A}}) := \varinjlim_{p\in\mathcal{P}} PHH(\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_p). \tag{12}$$

注意，由于持久模的有向系统的余极限仍是持久模，$\backsim PHH(\mathcal{A})$也因此是一个持久模。

备注 2.5.6。设 $\mathcal{A}$ 是一个严格含幺的 A_∞-范畴，并用$D(\mathcal{A})$表示其导出范畴。存在一个典范映射

$$\kappa : K_0(D(\mathcal{A})) \longrightarrow HH_*(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \tag{13}$$

它对每个 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$都满足 $\kappa([X]) = [e_X]$。这里，$[X] \in K_0(D(\mathcal{A}))$表示$K_0$-类，$e_X \in \hom_{\mathcal{A}}(X, X)$是单位元，而 $[e_X] \in HH(\mathcal{A}, \mathcal{A})$是其霍赫希尔德同调类。映射 κ 是两个映射的复合，即 $\kappa = j^{-1} \circ \kappa'$，其中 $\kappa' : K_0(D(\mathcal{A})) \longrightarrow HH(\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\triangle, \mathcal{Y}(\mathcal{A})^\triangle)$，而 $j : HH(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \longrightarrow HH(\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\triangle, \mathcal{Y}(\mathcal{A})^\triangle)$。映射 κ' 定义为对每个 $X \in \mathrm{Obj}(D(\mathcal{A}))$，令 $\kappa([X]) = [e_X]$；其良定义性可由简单的考量得出（例如使用 [39, 命题 3.8]）。映射 j 是由 $\mathcal{A}$ 的霍赫希尔德复形到 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})^\triangle$的霍赫希尔德复形的链级包含所诱导的同调映射。霍赫希尔德同调的莫里塔不变性的一种形式表明 j 是一个同构，因此我们可以定义 $\kappa = j^{-1} \circ \kappa'$。（关于霍赫希尔德同调的莫里塔不变性，例如参见 [47] 在 $\mathcal{A}$ 为微分分次范畴时的情形，以及 [40, 第 5]节中的讨论；A_∞-范畴的情形见 [44]。另请参见 [9, 第 5.4] 节，了解映射 (13) 在某些几何情形中的意义。）

我们预期，同样的考量在我们的持久性情形中也仍然成立。更具体地，设 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 为一个由过滤的 A_∞-范畴组成的系统。我们预期，对每个 $p \in \mathcal{P}$，都存在一个同态 κ_p：$K_0(PD(\mathcal{A}_p)^0) \longrightarrow PHH^0(\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_p)$，其中左侧的上标 0

表示 $PD(\mathcal{A}_p)$ 的 0-持久性层级范畴，而右侧表示持久模 $PHH(\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_p)$ 的 0-持久性层级。映射 κ_p 预计与由 $p \in \mathcal{P}$ 参数化的相应有向系统相容，并诱导出一个映射

$$\widehat{\kappa} : K_0(PD(\widehat{\mathcal{A}})^0) \longrightarrow PHH^0(\widehat{\mathcal{A}}).$$

2.5.10. 可逼近性再探。 设 $\mathcal{C}$ 是一个精度递增的 TPC 系统，如上文所定义。此处我们将使用等价关系 $\sim_{\mathcal{C}}$ 在 $\mathrm{Obj}^{\mathrm{tot}}(\widehat{\mathcal{C}}) = \coprod_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p)$，其定义见第 2.5.9节第 27页，并采用该节中的记号。

定义 2.5.7。 设 $\mathcal{L} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，并设 $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_l \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 是一个有限集合（由对象的等价类构成），且 $\epsilon > 0$。我们称 $\mathcal{L}$ 可由 $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_l\}$ 以 ϵ- 精度逼近，当且仅当存在 $\delta > 0$ 和 $c_\epsilon > 0$，使得对于每个满足 $\nu(p) < \delta$ 的 $p \in \mathcal{P}$，都有

$$d_{\mathrm{int}}\Big(\mathcal{L}_p, \mathrm{Obj}\langle\{F_1, \dots, F_l\}_p\rangle^{\Delta}\Big) < \epsilon + c_\epsilon \nu(p).$$

令 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。如果对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个有限集合 $\mathcal{F}_1$，……，$\mathcal{F}_l \in \mathcal{F}$，使其 ϵ-逼近 $\mathcal{L}$，且常数 c_ϵ 有界，并且与 ϵ无关，则称 $\mathcal{L}$ 可由 $\mathcal{F}$ 逼近。

回顾一下，$\langle\mathcal{O}\rangle^{\Delta}$ 表示包含对象集合 $\mathcal{O}$的最小子 TPC $\mathcal{C}_p$。有时我们会使用“$\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_l\}$ ϵ-逼近 $\mathcal{L}$”和“$\mathcal{F}$逼近 $\mathcal{L}$”的说法。

类似地，我们也定义如下的缩回可逼近性。

定义 2.5.8。 令 $\mathcal{C}$， $\mathcal{L}$， $\mathcal{F}_1$，……，$\mathcal{F}_l$如定义 2.5.7 中所述，并令 $\epsilon > 0$。我们称$\mathcal{L}$是 ϵ 可由 $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_l\}$缩回逼近的，如果存在 $\delta > 0$， $c_\epsilon > 0$，使得对于每个$p \in \mathcal{P}$ 满足 $\nu(p) < \delta$，都有

$$d_{\text{r-int}}\Big(\mathcal{L}_p, \mathrm{Obj}\langle\{F_1, \dots, F_l\}_p\rangle^{\Delta}\Big) < \epsilon + c_\epsilon \nu(p).$$

设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。如果对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个有限集合 $\mathcal{F}_1$、……、$\mathcal{F}_l \in \mathcal{F}$，使其 ϵ-缩回逼近 $\mathcal{L}$，且常数 c_ϵ一致有界，则称 $\mathcal{L}$ 可由 $\mathcal{F}$ 缩回逼近。

注 2.5.9。此时，联系定义 2.2.1 和定义 2.5.7 中的两种可逼近性概念是有益的。在我们的几何应用中，集合 $\mathcal{L}$ 将是由拉格朗日子流形 $\mathcal{L}ag(M)$构成的集合，而范畴 $\mathcal{C}_p$ 将是与某个滤过福柯范畴相关联的特定 TPC，该范畴是利用由参数 p标识的扰动数据定义的。包含映射 $\mathcal{L}ag(M) \subset \mathcal{C}_p$ 是 Yoneda 嵌入。集合 $\mathcal{L}ag(M)$赋有谱度量 d_γ（稍后将回顾该度量），并且这一度量与式 (3) 中的稳定化¯交错度量 d_{int} 在 $\mathcal{L}ag(M)$上的限制密切相关。鉴于此，我们将看到，按照定义 2.5.7 的意义， ϵ -可逼近性意味着按照定义 2.2.1 的意义，对所有 $\epsilon' > \epsilon$ 均具有 ϵ'-可逼近性。参数 ϵ、 ϵ' 存在这种差异，是因为定义 2.5.7 中包含了项 $c_\epsilon\nu(p)$。鉴于这些性质应当

对所有 ϵ, $\epsilon' > 0$ 和 $\nu(p)$ 均成立，且 ϵ可以任意小，因此这种差异基本无关紧要。然而，对于固定的 ϵ，在定义 $c_\epsilon \nu(p)$ 的上界中加入项2.5.7 ，对于研究如何使集合$\{\mathcal{F}_i\}$ 在固定 ϵ的情况下的基数最小化，是有用的。对于收缩近似性，也有类似的说明。

2.5.11. 稳定化函子。设 $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ 是一个精度递增的 PC 系统，并设 $\widehat{\mathcal{F}} : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 是此类系统的一个自函子（见 §2.5.2）。令 $\mathcal{B} \subset \mathrm{Obj}^{\mathrm{tot}}(\widehat{\mathcal{C}})$。我们称 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{B}$-稳定化的，如果对每个 $p \in \mathcal{P}$，以下条件均成立：

(1) 对每个 $A \in \mathcal{B}_p$，都有 $(A, p) \sim_{\widehat{\mathcal{C}}} (\mathcal{F}_p(A)\ \mathcal{F}(p))$，其中 $\sim_{\widehat{\mathcal{C}}}$ 是 §2.5.9 中定义的等价关系，见第 27 页。(2) 对每个 $A', A'' \in \mathcal{B}_p$，都存在 $q \in \mathcal{P}$，使得 $p, \mathcal{F}(p) \preceq q$，并且存在两个 0-同构$\sigma_{A'} : \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),q}\mathcal{F}_p A' \longrightarrow \mathcal{H}_{p,q}A'$, $\sigma_{A''} : \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),q}\mathcal{F}_p A'' \longrightarrow \mathcal{H}_{p,q}A''$ ，使得对每个$u \in \hom_{\mathcal{C}_p}(A', A'')$，都有：

$$\sigma_{A''} \circ \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),q} \circ \mathcal{F}_p(u) = \mathcal{H}_{p,q}(u) \circ \sigma_{A'}. \tag{14}$$

注记2.5.10. 条件（1）等价于要求映射 $\mathcal{F} : \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Obj}}(\mathcal{C})$ （见注记 2.5.4）稳定 $\mathcal{B}$（即 $\mathcal{F}$ 将 $\mathcal{B}$映到自身，并限制为恒等映射 $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$）。

条件（2）可改述如下。稍微滥用一下记号，对每个$p \in \mathcal{P}$ 记作 $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{C}_p$ 以对象 $\mathcal{B}_p$构成的满持久子范畴。我们要求，对于给定的$p \in \mathcal{P}$，当（相对于 $\preceq$）充分大时， $q \in \mathcal{P}$ 两个受限的 PC 函子

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}(p),q} \circ \mathcal{F}_p|_{\mathcal{B}_p}, \mathcal{H}_{p,q}|_{\mathcal{B}_p} : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$$

are 在持久函子范畴 $\mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ 中自然地 0-同构 .

在 TPC 中存在逼近族时，稳定化函子具有显著的度量性质。

命题 *2.5.11.* 设 $\mathcal{C}$ 是一个 *TPC* 系统，$\mathcal{L} \subset \mathit{Obj}(\mathcal{C})$，且 $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_l \in \mathit{Obj}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个ϵ-逼近族，如定义 *2.5.7* 所述。设 $\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是系统的一个 *TPC* 自函子，并假设 Φ 是 $\{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_l\}$-稳定的。那么对每个 $L \in \mathcal{L}$，都有$d_{int}(L, \Phi(L)) \leq \epsilon$。

2.6. **过滤导出福柯范畴与持久性导出福柯范畴**。设 $(X,\ \omega)$ 是下列类型之一的辛流形：

(1) X 是闭的。(2) (X, ω) 在无穷远处辛凸。(3) $(X, \omega = d\lambda)$ 是一个带有预先指定的辛结构 ω的原函数 λ 的 Liouville 流形，并且 X 相对于这些结构在无穷远处辛凸。(4) $(X, \omega = d\lambda)$ 是一个紧致 Liouville 区域。

下文中，我们将使用 X的若干种 Fukaya 范畴变体，并将在每种情况下具体说明为此目的允许的拉格朗日子流形类别。在每种情况下，我们都采用以下约定。除非另有说明，只要 X 是带边界流形，就默认闭拉格朗日子流形 $L\subset X$ 位于其内部 。

2.6.1. 精确情形。 这里我们假设 X 是 Liouville 流形（带有给定的 Liouville 形式 λ）。为了得到分次理论，我们加入以下假设： $2c_1(X) = 0$，其中$c_1(X)$表示 X的切丛的第一陈类，将 X赋予任意与 X 相容的几乎复结构后，视为复向量丛。我们还固定一个处处不为零的二次复 n-形式（其中 $n = \dim_{\mathbb{C}} X$），即丛 $\Omega^n(X, J)^{\otimes 2}$的一个处处不为零截面$\Theta$。

用 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}$ 表示闭、分次、带标记的精确拉格朗日子流形$L = (L, h_L, \theta_L)$的集合。这里， $L \subset X$ 是一个闭的 λ-恰当拉格朗日子流形，我们称其为 L的底层拉格朗日子流形； $h_L : L \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 $\lambda|_L$ 的原函数，而 $\theta_L : L \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 L的分次，更多细节见例如[38], [13, 第 3.2.2 节。 2] 有时我们会写作 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}(X)$ 或$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}_{\lambda}(X)$，而非简单地写作 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}$，以便标明附加数据 X 或 λ。

现在我们可以构造 X中恰当拉格朗日子流形的 Fukaya 范畴。这里我们将采用 Ambrosioni [2] 提出的、对 [39] 中标准构造的一种变体（另见 [13] ，其中给出了一个特殊情形下稍简单的实现），它产生一个过滤的 A_∞-范畴。我们的 Fukaya 范畴的对象是 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}$中的元素。要定义态射和高阶结构，我们需要扰动数据。可容许扰动数据 $\mathcal{P}$ 的空间在 [2] 中有详细描述。一旦固定 $p \in \mathcal{P}$，我们便可按照 [2] 定义 Fukaya 范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}; p)$。（有时我们会写作 $\mathcal{F}uk(X, \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}; p)$，以强调环境流形$X$。）对于 $L_0, L_1 \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}$，我们有时将 $\hom_{\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})};p)}(L_0, L_1)$ 记作 $CF(L_0, L_1; p)$ 或 $\hom(L_0, L_1; p)$。这里我们使用 $\mathbb{Z}_2$ 作为这些 hom 的系数。$CF(L_0, L_1; p)$ 上的分次由给定的分次函数 $\theta_{L_0}, \theta_{L_1}$ 定义，它们分别赋予了 L_0，L_1。

2.6.2. 精确情形下的滤过*Fukaya*范畴。 给定两个几何上不同的元素$L_0, L_1 \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}$（即 $L_0 \neq L_1$）与 $p \in \mathcal{P}$，用 $H^{L_0,L_1}_p : [0, 1] \times X \longrightarrow \mathbb{R}$表示由 p 为 (L_0, L_1) 的 Floer 数据所规定的 Hamilton 函数。设 $x \in CF(L_0, L_1; p)$ 为一个生成元（即一条端点位于 L_0, L_1 上的 H^{L_0,L_1}_p-Hamilton 弦）。其作用量定义为

$$\mathcal{A}(x) := \int_0^1 H^{L_0,L_1}_p(t, x(t))dt - \int_0^1 \lambda(\dot{x}(t))dt + h_{L_1}(x(1)) - h_{L_0}(x(0)). \tag{15}$$

我们用作用量来过滤链复形 $CF(L_0, L_1; p)$， $L_0, L_1 \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}$。 $CF(L_0, L_1; p)$ 上的分次遵循标准方法 [38], ，并使用分次函数 $\theta_{L_0}, \theta_{L_1}$。

若 $L_0 = L_1$ Floer 复形 $CF(L_0, L_1; p)$ 与 L 的莫尔斯复形重合（分次相差一个平移），则将所有（非零）元素 $x \in CF(L_0, L_1; p)$ 的作用量层级 $\mathcal{A}(x)$ 设为 $h_{L_1} - h_{L_0}$（注意，后者是一个常数，因为 $L_0 = L_1$）。生成元 $x \in CF(L_0, L_1; p)$ 的（上同调）分次定义为 $|x| = (n - \mathrm{ind} f(x)) + \kappa$,

其中 $f:\overline{L}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 L 上由 p 规定的莫尔斯函数，ind$f(x)$ 是临界点 x 的莫尔斯指数，$n:=\dim L$，而 $\kappa=\theta_{L_1}-\overline{\theta}_{L_0}$（同样是一个整数）。

[2] 引入了一类特殊的 $\mathcal{P}$ 扰动数据，使得对于每个 $p\in\mathcal{P}$，Fukaya范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})};p)$ 都是一个真正的过滤严格含幺 A_∞-范畴。我们为范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})};p)$ 赋予如下平移函子和移位函子。令$L=(L,h_L,\theta_L)\in\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}$。我们分别在对象上定义平移函子和移位函子如下：

$$TL:=(\overline{L},h_L,\theta_L+1),\quad \Sigma^rL:=(\overline{L},h_L+r,\theta_L),\ \forall r\in\mathbb{R}. \tag{16}$$

这些显然可扩展为 hom$_{\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})};p)}$上的映射，并且进一步扩展为过滤$A_\infty$-函子 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})};p)\longrightarrow\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})};p)$，其高阶项为零。根据这些定义，我们有自然同构：

$$\begin{aligned}&CF(T^kL_0,T^lL_1;p)^i\cong CF(L_0,L_1;p)^{i-k+l},\ \forall\,k,l\in\mathbb{Z},\\&CF^\alpha(\Sigma^rL_0,\Sigma^sL_1;p)\cong CF^{\alpha+r-s}(L_0,L_1;p),\ \forall\,\alpha,r,s\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{17}$$

第一行中的上标 $i,i-k+l$ 表示次数，第二行中的上标 $\alpha,\alpha+r-s$表示作用量层级。第一行采用了上同调分次约定。在同调分次约定下，第一行中的同构形式如下：$CF(T^kL_0,T^lL_1;p)_j\cong CF(L_0,L_1;p)^{j+k-l},\ \forall\,k,l\in\mathbb{Z}$。若分次与作用量层级之间不会引起混淆，我们有时也将 $CF^i(L_0,L_1;p)$写作 $CF(L_0,L_1;p)^i$，同调中也类似。

在继续之前，我们先说明，滤过福柯范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})};p)$ 以两种方式依赖于 λ 的选择。首先，对象集合 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}$ 取决于 λ；其次，态射空间上的滤过取决于 λ。每当需要强调对 λ 的依赖时，我们将对象集合写作 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}_\lambda$，并将该范畴记作 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}_\lambda,\ \lambda;p)$。（记号中的第二个 λ 表示作用量是相对于 λ 测量的。）注意，若 $\lambda'=\lambda+dG$，其中 $G:X\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个支集紧含于 X 内部的光滑函数，则存在一个滤过 A_∞- 范畴之间的典范同构

$$\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}_\lambda,\lambda;p)\longrightarrow\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}_{\lambda'},\lambda';p). \tag{18}$$

它在对象上的作用由 $(L,\ h,\ \theta)\longmapsto(L,\ h+G|_L,\ \theta)$ 给出。它在态射上的作用由恒等映射诱导，且没有高阶项。我们常将所有范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}_{\lambda'},\ \lambda';p)$ 与上述的 λ' 等同起来。

然而，如果 λ' 与 λ 相差一个非恰当闭形式，那么集合 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}$ 会完全改变，因此在这种情况下，$\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}_\lambda,\ \lambda;p)$和 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}_{\lambda'},\ \lambda';p)$的对象完全不同，也不存在比较这些范畴的一般方法。

我们将在下文 §2.6.6中进一步讨论范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})};p)$ 的重要性质。

2.6.3. 单调情形。 若 X 是闭流形，或在无穷远处辛凸，我们将考虑单调拉格朗日子流形。（注意，单调拉格朗日子流形是否存在

于 X 中并非显而易见，因为存在全局障碍，例如环境流形 X 本身是单调的。）

为得到分次 Floer 理论，我们沿用 Seidel 针对分次拉格朗日子流形的方法 [38]。固定 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，使得 $2c_1(X)$ 在 $H^2(X;\mathbb{Z}_N)$ 中的像为零（我们假设这样的 N 确实存在）。固定一个 N 重 Maslov 覆盖 $Gr^N_{\mathrm{Lag}}(X,\omega) \longrightarrow Gr_{\mathrm{Lag}}(X,\omega)$，它是 $(T(X)\ \omega)$ 的拉格朗日 Grassmann 丛的覆盖。

用 Λ 表示系数取自 $\mathbb{Z}_2$ 的诺维科夫域，即：

$$\Lambda = \Big\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^{\lambda_k} \mid a_k \in \mathbb{Z}_2, \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty \Big\}, \tag{19}$$

并令 $\Lambda_0 \subset \Lambda$ 为正Novikov环：

$$\Lambda_0 = \Big\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^{\lambda_k} \mid a_k \in \mathbb{Z}_2, \lambda_k \geq 0, \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty \Big\}. \tag{20}$$

用 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 表示由闭的、分次的、单调拉格朗日子流形构成的集合，其 Maslov-2 伪全纯圆盘计数（穿过一般点，并针对一般的 J，它与 ω 相容；定义参见例如 [11] §3.5 第 66 页）为 $\mathbf{d} \in \Lambda_0$。我们将这些元素写成三元组 $L = (L, a_L, s_L)$，其中：

- $\overline{L} \subset X$ 是一个单调拉格朗日子流形，其马斯洛夫指数 2 圆盘计数为 $\mathbf{d}$。
- s_L 是 L 的一个 $Gr^N_{\mathrm{Lag}}(X,\ \omega)$-分次。更具体地说，$s_L \colon L \longrightarrow Gr^N_{\mathrm{Lag}}(X,\ \omega)$ 是典范截面 $L \longrightarrow Gr_{\mathrm{Lag}}(X,\ \omega)$ 的一个提升。更多细节参见 [38] 。
- $a_L \in \mathbb{R}$ 是一个实数，将在下文 §2.6.4 中用于作用过滤。

2.6.4. 单调情形下的滤过 *Fukaya* 范畴。设 $L_0 = (L_0,\ a_{L_0},\ s_{L_0})$、$L_1 = (L_1,\ a_{L_1},\ s_{L_1})$ 是 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 中几何上不同的两个元素。设 $p \in \mathcal{P}$，并设 $H^{L_0,\ L_1}_p \colon [0,1] \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 p 为 Floer 数据 $(L_0,\ L_1)$ 所规定的 Hamilton 函数。回忆一下，Floer 复形 $CF(L_0,\ L_1;\ p)$ 是一个自由 Λ-模，由端点位于 $L_0,\ L_1$ 上的 $H^{L_0,\ L_1}_p$-Hamilton 弦 x 生成。

设 $0 \neq P(T) \in \Lambda$ 和 x 是如上所述的 $H^{L_0,\ L_1}_p$-哈密顿弦。我们将 $P(T)x$ 的作用量定义为：

$$\mathcal{A}\big(P(T)x\big) := -\lambda_0 + \int_0^1 H_p^{L_0,L_1}(t,x(t))dt + a_{L_1} - a_{L_0}, \tag{21}$$

其中 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 是 $P(T) \in \Lambda$的形式幂级数中出现的最小指数，即 $P(T) = a_0 T^{\lambda_0} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i T^{\lambda_i}$，其中 $a_0 \neq 0$，且对每个 $i \geq 1$都有 $\lambda_i > \lambda_0$。现在我们将 $\mathcal{A}$扩展到$CF(L_0, L_1;\ p)$，定义如下。对于一个非平凡元素 $c = P_1(T)x_1 + \cdots + P_l(T)x_l \in CF(L_0, L_1;\ p)$，我们定义

$$\mathcal{A}(c) = \max\{\mathcal{A}(P_k(T)x_k) \mid 1 \leq k \leq l\},$$

并且最终因此我们令 $\mathcal{A}(0) = -\infty$。$CF(L_0, L_1;\ p)$ 上的滤过定义如下：

$$CF^{\alpha}(L_0, L_1; p) := \{c \in CF(L_0, L_1; p) \mid \mathcal{A}(c) < \alpha\}.$$

标准论证表明，Floer 微分 μ_1 保持此滤过。但需要注意的是，$CF(L_0, L_1; p)$ 的滤过层级 $CF^\alpha(L_0, L_1; p)$ 并非 Λ-模，而是 Λ_0-模。

当 $CF(L_0, L_1; p)$上的分次在 $L_0 \neq L_1$时，利用 N重 Maslov 覆盖$Gr^N_{\mathrm{Lag}}(X, \omega)$ 以及分次 s_{L_0}, s_{L_1}，按照 [38] 中的步骤定义。与 §2.6.2 中描述的情形不同，此处我们只能得到 $\mathbb{Z}_N$-分次。

与精确情形一样，按照 [2]，存在一类扰动数据 $\mathcal{P}$，使得对每个 $p \in \mathcal{P}$，Fukaya 范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}; p)$ 都是一个真正的过滤且严格含幺的A_∞-范畴。不过，总范畴是 Λ-线性的；但将其视为过滤 A_∞-范畴时，$\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}; p)$ 仅为 Λ_0-线性的。

与精确情形类似，这里也有平移函子和移位函子。对于平移函子，回忆 [38]，N 重 Maslov 覆盖 $Gr^N_{\mathrm{Lag}}(X, \omega) \longrightarrow Gr_{\mathrm{Lag}}(X, \omega)$ 带有一个 $\mathbb{Z}_N$-作用 $\rho\colon \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathrm{Aut}\Big(Gr^N_{\mathrm{Lag}}(X, \omega) \longrightarrow \underline{Gr}_{\mathrm{Lag}}(X, \omega)\Big)$。现在我们为 $L = (L, a_L, s_L) \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 定义：

$$TL := (\overline{L}, a_L, \rho(1) \circ s_L), \quad \Sigma^r L := (\overline{L}, a_L + r, s_L), \ \forall r \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

二者都 T和 Σ^r都可延拓为过滤 A_∞-函子 $\mathcal{F}uk\,(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})};\ p) \longrightarrow \mathcal{F}uk\,(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})};\ p)$，并且（17）中的恒等式仍然成立（其中分次取模 N）。

2.6.5. 弱精确情形。假设 X 是闭的，或在无穷远处辛凸。在此情形下，我们还将考虑弱精确的闭拉格朗日子流形 $L \subset X$。所谓弱精确，是指对于所有类 $A \in \mathrm{image}(\pi_2(\overline{X}, L) \longrightarrow H_2(X, L))$，都有 $\langle [\omega]。 A\rangle = 0$ 这类拉格朗日子流形存在的一个必要条件是 X 为辛非球面的，即对于所有球面类 $A \in \mathrm{image}(\pi_2(X) \longrightarrow H_2(X))$，都有 $\langle [\omega], A\rangle = 0$。还需注意，如果（$X, \omega$）是恰当的，那么每个恰当拉格朗日子流形都会自动是弱精确的，而与所选取的原函数 λ of ω无关。）

记 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}$ 为三元组 $L = (L, a_L, \theta_L)$ 的集合，其中 $L \subset X$ 是闭的弱恰当拉格朗日子流形，$a_L \in \mathbb{R}$ 且 $\theta_L : L \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 L 的分次，定义同 §2.6.1。与单调情形类似，在此我们使用 Novikov 环 Λ及其正版本 Λ_0作为系数。Floer 复形 $CF(L_0, L_1; p)$ 的定义与单调情形 §2.6.4 中完全相同。对于作用过滤，我们遵循单调情形中的构造；而对于分次，则使用精确情形中所述的构造。更具体地说，作用过滤由（21）定义，分次则按照 §2.6.2 定义。平移函子的定义与（16）相同，而移位函子 Σ^r 按照（22）定义。（17）中的恒等式仍然成立。

2.6.6. *Fukaya* 范畴的系统及其 *TPC*。设 (X, ω) 是 §2.6 开头所述的辛流形，并令 $\mathcal{L}\mathrm{ag}$ 是以下某个集合中的子集：$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}$，$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 或$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}$（具体取决于 X 的类型）。我们假设 $\mathcal{L}\mathrm{ag}$ 在所有平移和所有移位下均封闭。

令 $\mathcal{P}$ 为扰动数据空间，如 §2.6.2 和 §2.6.4 中所述；对每个 $p \in \mathcal{P}$，记 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag};\, p)$ 为相应 Fukaya 范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})};\, p)$、$\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})};\, p)$ 或 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})};\, p)$ 的满 A_∞-子范畴，其对象为 $\mathcal{L}\mathrm{ag}$。范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag};\, p)$ 从其环境范畴继承过滤 A_∞-范畴的结构。

我们将进一步限制扰动数据 $\mathcal{P}$ 的空间，使其满足以下条件。固定一个常数 $B > 0$，并且只考虑满足如下条件的扰动数据 $p \in \mathcal{P}$：对于每一对几何上不同的对象 L_0，$L_1 \in \mathcal{L}\mathrm{ag}$ with (i. e. $L_0 \neq L_1$) 我们都有

$$H_p^{L_0,L_1}(t,x) \leq B,\ \forall\, t \in [0,1], x \in X. \tag{23}$$

回顾 [2]，对于每个 $p \in \mathcal{P}$ 和 L_0，L_1 如上所述，函数 $H^{L_0,}{}_p{}^{L_1}$严格为正。正如我们稍后将看到的，常数 B 的具体取值对于我们的讨论并不重要（直观地说，它应该是一个较小的数），其主要目的是对扰动数据中出现的所有哈密顿函数给出统一的上界。稍微滥用一下记号，我们也用 23) 所满足的附加条件的扰动数据空间记作 $\mathcal{P}$。

现在定义 $\nu : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 如下：

$$\nu(p) := \sup\Big\{ H_p^{L_0,L_1}(t,x) \;\Big|\; L_0, L_1 \in \mathcal{L}\mathrm{ag} \text{ are geometrically distinct}, (t,x) \in [0,1] \times X \Big\}. \tag{24}$$

接下来，在 $\mathcal{P}$上定义一个预序。对于 p，$q \in \mathcal{P}$ 若对任意两个几何上不同的 L_0，$L_1 \in \mathcal{L}$ ag 都有以下关系，我们就定义 $p \preceq q$

$$H_q^{L_0,L_1}(t,x) \leq H_p^{L_0,L_1}(t,x),\ \forall\, (t,x) \in [0,1] \times X.$$

注意，赋予 $\preceq$后，集合 $\mathcal{P}$ 成为有向的（也就是说，除了满足预序条件外，还有 $\forall\, p'$，$p'' \in \mathcal{P}$，$\exists\, q \in \mathcal{P}$ 且 p'，$p'' \preceq q$）。

设 $p, q \in \mathcal{P}$ 满足 $p \preceq q$。由 [2], 可知，存在一类特殊的过滤、严格含幺延拓 A_∞-函子 $\mathcal{H}_{p,q}$：$\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag};\, p) \longrightarrow \mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag};\, q)$。这一类中的不同函子彼此 0-同伦。此外，我们还有一类特殊的严格含幺延拓A_∞-函子 $\mathcal{H}_{q,p}$：$\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag};\, q) \longrightarrow \mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag};\, p)$，其线性偏差率为 $\leq 2(\nu(p) - \nu(q))$（精确定义见 §A.6）。这里同样，这一类中的任意两个函子都彼此 0-同伦（该同伦是具有给定偏差率的 LD-函子之间的同伦；见 §A.6.1）。

由 [2] 函子 $\mathcal{H}_{p,q}$ 满足 §2.5.4 中列出的条件，因此范畴族$\{\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag};\, p)\}_{p\in\mathcal{P}}$连同比较函子 $\mathcal{H}_{p,q}$, $\mathcal{H}_{q,p}$, $p \preceq q$，构成一个过滤 A_∞-范畴系统$\widehat{\ }$，记作 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag})$。

该系统$\widehat{\ }$ $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag})$ 实际上还有两个重要的附加性质。第一，所有范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag};\, p)$ 都有相同的对象集合 $\mathcal{L}\mathrm{ag}$，且比较函子在此集合上的作用$\widehat{\ }$如同恒等态射。在 §2.5.7 的术语中，系统 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag})$ 具有一个固定的$\widehat{\ }$对象的满基。第二个性质是，根据 §2.5.8 中的定义，($\mathcal{L}$ ag) 实际上是一个同伦系统。这直接源于上文关于比较函子同伦性质的讨论。

不过请注意，尽管$\widehat{\ }$ $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag})$ 有固定的满对象基，但对于相关的滤过模系统 $F\mathrm{mod}(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}))$ 或 Yoneda 系统而言，这一点不再成立$\widehat{\ }$

$\mathcal{Y}(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}))$（特别是，它们甚至不能被视为同伦系统）。这与 Fukaya 范畴无关，原因纯粹是代数上的——参见注2.5.2。尽管如此，$\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag})$ 是一个同伦系统这一事实仍然很有用，因为它使得我们能够定义 §2.5.9中引入的一些极限不变量，例如该系统的持久性 Hochschild 同调 $PHH(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}))$，其定义见式（12）。

回到 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag})$，我们将把它转化为一个精度递增的真正 TPC 系统。实现这一点有两种方式，各自会导出略有不同的系统。第一种方式是使用 §2.4.2 中所述、基于滤过模的持久性导出 Fukaya 范畴；第二种方式则是使用 §2.4.3 中的构造。

我们先介绍第一种实现。我们使用参数空间 $\mathcal{P}$、大小函数$\nu: \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 以及上文讨论的预序 $\preceq$。TPC 系统中的范畴将是持久性导出范畴 $PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}; p))$，$p \in \mathcal{P}$。$p \preceq q$ 的比较函子定义为

$$\mathcal{H}_{p,q} := PD(\mathcal{H}_{p,q}) : PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}; p)) \longrightarrow PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}; q)),$$

这里我们使用 §2.4.2 中的记号和构造。对于 $p \preceq q$，我们以同样的方式定义 $\mathcal{H}_{q,p}$:$PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}; q)) \longrightarrow PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}; p))$。注意，尽管 $\mathcal{H}_{q,p}$ 具有线性偏差，它在持久性导出范畴上诱导的函子仍然是一个 TPC 函子。更多细节见 §2.4.2。我们将这个 TPC 系统记为 $PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}))$。

第二种实现非常相似，只是它采用了 §2.4.3 中的构造。系统中的范畴现在是 $PD^c(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}; p))$、$p \in \mathcal{P}$，而比较函子为 $\mathcal{H}^c_{p,q} := PD^c(\mathcal{H}_{p,q})$，$\mathcal{H}^c_{q,p}$ 也类似。我们将这个 TPC 系统记作 $PD^c(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}))$。

最后，我们指出，尽管 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag})$ 是一个具有固定的满对象基（甚至还是一个同伦系统）的系统，但 $PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}))$ 和 $PD^c(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}))$ 都没有相容的对象满基。

2.6.7. **与辛同胚相关的函子。**设 (X, ω) 是 §2.6 开头所列类型之一的辛流形，且 $\mathcal{L}\mathrm{ag}$ 是 §2.6.6开头所述的 X 中拉格朗日子流形集合的一个子集。记 $\mathcal{P}$ 。

令 $\phi: X \longrightarrow X$ 为一个支集包含在 X 内部的辛微分同胚。我们将在下文定义由 ϕ 诱导的每个 TPC 系统上的自函子，分别作用于 $PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}))$ 和 $PD^c(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}))$。

为了定义这样的函子，我们需要对 ϕ 作出若干额外假设。首先，我们假设 ϕ 保持由 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}$ 所关联的底层拉格朗日子流形集合 L 。对 ϕ 的其他假设取决于 $\mathcal{L}\mathrm{ag}$ 所关联的拉格朗日子流形集合（恰当、单调或弱恰当）。

我们先讨论恰当拉格朗日子流形的情形。这里首先需要记住 Liouville 形式 λ。令 $\mathcal{L}\mathrm{ag}_\lambda \subset \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}_\lambda$ 为一个在平移和移位下封闭的子集。我们还将作出以下额外假设：假设 ϕ 是恰当的，即 $\phi^*\lambda = \lambda + dF$

对某个光滑函数 $F\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$，其支集紧支撑于 X 的内部。我们还假设 ϕ 保持二次复形 n-形式 Θ 的同伦类（在此类非消失形式中，并在将 $(T(X)\ J)$ 与 $(T(X)\ \phi^*J)$ 认同之后）。我们还假设 ϕ 是分次的（分次辛同胚的定义见 [38] ），并将其在分次拉格朗日子流形上的作用记为 $(L,\theta) \longmapsto (\phi(L)\ \phi_*(\theta))$。

在上述假设下，我们得到一个双射，

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag},\lambda;p)) \longrightarrow \mathrm{Obj}(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag},\lambda';q)),\quad (\overline{L},h,\theta)\longmapsto (\phi(\overline{L}),h\circ\phi^{-1}|_{\phi(\overline{L})},\phi_*(\theta)), \tag{25}$$

其中 $\lambda' := (\phi^{-1})^*\lambda$。这里，$p$，$q$ 是扰动数据的任意两种选择（事实上，下面我们需要处理 $p\neq q$）。

根据关于 ϕ 的假设，我们有 $\lambda' = \lambda - d(F\circ\phi^{-1})$，因此将前面的映射与典范同构（18）复合后，我们得到一个双射

$$\begin{aligned}&\phi : \mathrm{Obj}(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag},\lambda;p)) \longrightarrow \mathrm{Obj}(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag},\lambda;q)),\\ &(\overline{L},h,\theta)\longmapsto (\phi(\overline{L}),h\circ\phi^{-1}|_{\phi(\overline{L})} - F|_{\overline{L}}\circ\phi^{-1}|_{\phi(\overline{L})},\phi_*(\theta)),\end{aligned} \tag{26}$$

为简便起见，我们仍将其记作 ϕ。

接下来，我们通过推前扰动数据中的结构来定义映射 $\phi_*\colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$。具体而言，设 $p\in\mathcal{P}$ 为扰动数据。回顾一下，p 为 $\mathcal{L}\mathrm{ag}$ 中的每个拉格朗日子流形元组赋予一些辅助结构。在最简单的情形下，当该元组 $\vec{L}=(L_0,\dots,L_d)$ 不存在底层拉格朗日子流形相同的连续项（按循环意义）时，扰动 p 为 $\vec{L}$ 指定一个元组 (K^p, J^p)，它包含两个分支：第一分支是一个族 $K^p = \{K^p_S \in \Omega^1(S; C^\infty_0(X))\}_{S\in\mathcal{S}}$，由边界带 puncture 的圆盘空间 $\mathcal{S}$ 参数化，其中 puncture 的数量 ≥ 2 可以任意。该族的每个成员 K^p 都是定义在带 puncture 的圆盘 S 上的 1-形式 K^p_S，其取值于 X 上的紧支撑光滑函数空间（这些函数应视为哈密顿函数）。第二分支 J^p 是一个（依赖于定义域的）几乎复结构族；更准确地说，每个 J^p_S 本身都是一个由 S 参数化的族 $\{J^p_{S,z}\}_{z\in S}$，其元素是 X 上与 ω 相容的几乎复结构，并且在无穷远处也与 (X,ω) 的辛凸性相容（若 X 不是闭的）。p 经 ϕ 推前得到的 $\phi_*(p)$，为 $\phi(\vec{L}):=(\phi(L_0)\dots,\phi(L_d))$ 指定扰动数据 $\phi_*(p) = (\phi_*K^p, \phi_*J^p)$，其中

$$(\phi_*K^p)_S(\xi) := K^p_S(\xi)\circ\phi^{-1},\ \forall \xi\in T(S),\quad (\phi_*J^p)_{S,z} := D\phi\circ J_{S,z}\circ D\phi^{-1},\ \forall S\in\mathcal{S}, z\in S. \tag{27}$$

至此，我们完成了在 $\vec{L}$ 不包含底层拉格朗日子流形相同的连续条目时 $\phi_*(p)$ 的定义。

当拉格朗日子流形元组中确实包含底层拉格朗日子流形相同的连续项时，扰动数据 p 定义在空间簇上（见 [2], 以及 [13,第 3 节。3] 其中这些对象称为带装饰的穿孔圆盘簇）。本质上，这些对象由穿孔圆盘以及附着在穿孔圆盘某些边界弧上的树组成。在簇中的每个穿孔圆盘上，扰动数据与之前相同（即由一对 $(K^p,\ J^p)$ 组成，如上所述）。在每棵树上，扰动

数据由莫尔斯数据组成，其中包括一组依赖于参数的莫尔斯函数和黎曼度量，分配给图的每条边（并依赖于沿每条边变化的参数）。将树部分簇中的莫尔斯数据通过 ϕ 推前，只需将莫尔斯函数与 ϕ^{-1} 复合即可；黎曼度量的处理方式类似。最后，在簇中的每个穿孔圆盘上，我们使用与（27）相同的构造。

可容许扰动数据的空间在 ϕ 的作用下是闭的，即对于每个 $p \in \mathcal{P}$，我们都有 $\phi_*(p) \in \mathcal{P}$。这由 [2] 中 $\mathcal{P}$ 的定义可知。此外，由 (24) 可知，对于每个 $p \in \mathcal{P}$，我们都有 $\nu(\phi_*(p)) = \nu(p)$，并且对于每个 $p \preceq q$，我们都有 $\phi_*(p) \preceq \phi_*(q)$。

微分同胚 ϕ 还诱导出显然的链同构；对于每个 L_0，$L_1 \in \mathcal{L}\mathrm{ag}_\lambda$ 和 $p \in \mathcal{P}$，它们定义如下：

$$\phi^{CF} : CF(L_0, L_1; \lambda; p) \longrightarrow CF(\phi(L_0), \phi(L_1); \lambda; \phi_*(p)). \tag{28}$$

注意，这里我们在 λ 的定义域和值域中使用的是同一个 Liouville 形式 ϕ^{CF}，正如我们在 (26) 中所做的那样。由于 $(\phi^{-1})^*\lambda = \lambda - d(F \circ \phi^{-1})$，因此 链映射$\phi^{CF}$ 保持作用量过滤。

映射 ϕ^{CF} 延拓为一个过滤的 A_∞-函子（事实上是一个 A_∞-同构）

$$\phi_p^{\mathcal{F}uk} : \mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}, \lambda; p) \longrightarrow \mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}, \lambda; \phi_*(p)) \tag{29}$$

其一阶项为 ϕ^{CF}，且高阶项均为零。这些函子结合成一个过滤的 A_∞-范畴系统的函子，

$$\widehat{\phi}^{\mathcal{F}uk} : \widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}, \lambda) \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}, \lambda),$$

如 §2.5.4 末尾所定义（另见 §2.5.2）。

转到持久性导出层次后，根据 §2.4，我们得到 TPC 函子：

$$PD(\phi_p^{\mathcal{F}uk}) : PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}, \lambda, p)) \longrightarrow PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}, \lambda, \phi_*(p))). \tag{30}$$

函子的集合 $PD(\phi_p^{\mathcal{F}uk})$、$p \in \mathcal{P}$，以及推前映射 $\phi_* : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$，根据 §2.5.3中的定义，共同构成一个 TPC 系统的函子：

$$PD(\widehat{\phi}^{\mathcal{F}uk}) : PD(\widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}, \lambda)) \longrightarrow PD(\widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}, \lambda)). \tag{31}$$

关于比较函子的相容性（图表及（7）所要求的相容性），由标准论证可得。 (6)

此外，还有一个类似的函子 $PD^c(\widehat{\phi}^{\mathcal{F}uk})$：$PD^c(\widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}\ \lambda)) \longrightarrow PD^c(\widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}\ \lambda))$，其定义方式与（31）类似，只需在（30）中将 PD 处处替换为 PD^c。

$\phi_p^{\mathcal{F}uk}$的定义为，$\widehat{\phi}^{\mathcal{F}uk}$及其持久性导出版本 $PD(\phi_p^{\mathcal{F}uk})$、$\widehat{PD}(\phi^{\mathcal{F}uk})$ 在单调情形和弱精确情形中与上述情况非常相似。在这些情形下，作用于扰动数据 $p \mapsto \phi_*(p)$ 的作用与上述精确情形中的作用完全相同。作用于 ϕ 在弱精确情形下的分次与精确情形相同，而在单调情形下则遵循 [38, 第2.b节]中的方案。最后，作用

于 ϕ 在对象 $L = (L, a_L, -)$ 的中间参数 $a_L \in \mathbb{R}$ 上的作用，在单调情形和弱精确情形中都是恒等态射。

2.7. **无分次情形。** 有时，考虑不带任何分次的 Fukaya 范畴会更方便。在 §2.6.1 -§2.6.5所述的每种情形中，都可以通过从对象 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}$ 中省略分次分量，并将同态视为无分次链复形来实现。在无分次背景下，每当涉及三角结构时，我们都令平移函子为 id。另请注意，§2.6.6中的所有讨论都可以直接推广到无分次情形。

3. 近邻可逼近性

本节旨在证明一个可逼近性结果，即定理 3.2.1，其表述见 §3.2。在最后一个小节 §3.7中，我们将看到，定理 A的第一点可由定理 3.2.1轻易推出。

3.1. **设定。** 我们先介绍一些必要的记号和背景。

设 (N^n, g) 是一个带有黎曼度量 g 的闭 n-流形。我们用 $D^*_r N$ 表示 N 的闭 r 圆盘余切丛，其中度量取为与 g 对应的度量（在由 g 诱导的识别 $T^*N \cong TN$ 下）。

$$D^*_r(N) \subset T^*N \ .$$

我们赋予 T^*N 典范辛形式 $\omega = d\lambda$，其中 λ 是 T^*N 上的 Liouville 1-形式。

我们考虑类 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}(D^*_r N)$，它由 $D^*_r N$ 内部所有闭的恰当拉格朗日子流形组成，参见 §2.6.1。对于 $r = 1$，为简化记号，我们省略下标 r。存在一些滤过 Fukaya 范畴，其对象为 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}(D^*_r N)$ 中的元素，记为 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}(D^*_r N); p)$，其中 $p \in \mathcal{P}$ 是一组选定的扰动，如 §2.6.2 所述。与各种扰动选取相关的范畴通过比较函子相联系，如 §2.6.6 所述。为简化下文中的各种构造，我们将 $\mathcal{A}_p(r) = \mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}(D^*_r N); p)$ 记为。若参数 p 固定且不会引起混淆，我们会在记号中省略它；若 $r = 1$，则用 $\mathcal{A}_p$ 代替 $\mathcal{A}_p(r)$。

以下考量与 r 无关，因此我们固定 $r = 1$。Yoneda函子将 $\mathcal{A}_p$ 嵌入过滤 A_∞ 模的范畴中，$F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}_p}$（参见 2.4.2），

$$\mathcal{Y}_p : \mathcal{A}_p \hookrightarrow F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}_p} \ .$$

对于一点 $x \in N$，令 $\overline{F}_x$ 为经过 x 的余切纤维，

$$\overline{F}_x = \pi^{-1}(x)$$

其中 $\pi : T^*N \to N$ 是余切丛的投影。这样的纤维也允许带有标记，我们用 $F_x = (F_x, h_{F_x}, \theta_{F_x})$ 表示一个带标记纤维，其底层拉格朗日子流形

子流形 F_x （此处 h_{F_x} 是一个常数函数）。每个 F_x 都定义了一个过滤的 A_∞-模，仍记作

$$F_x \in F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}_p} .$$

为此，有必要定义所需的扰动，以定义涉及闭拉格朗日子流形元组和一个 F_x 副本的 μ_d 运算。用相同符号表示标记拉格朗日子流形及其关联的 Yoneda 模可以简化记号，通常也不会造成问题；不过，务必留意确切的上下文，也就是底层的 A_∞-范畴。采用这些约定后，我们将 $F_x(L) = CF(L, F_x; p)$ 视为滤过链复形。

我们用 $\mathcal{A}_p^F$ 表示 $F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}_r}$ 的过滤满子范畴，其中包含 $\mathcal{Y}_p$ 的像以及所有模 F_x、$x \in N$ （纤维 F_x 上所有可能的标记）。与之前一样，若要明确写出扰动参数 p 和圆盘丛 D_r^*N 的半径，则记为 $\mathcal{A}_p^F(r)$。

下一步是将每个范畴 $\mathcal{A}_p^F$ 完备化：对滤过层级为 ≤ 0 的态射取映射锥，并对滤过层级为 ≤ 0 的拟同构取映射锥；将所得结果记为 $[\mathcal{A}_p^F]^\Delta$。最后，令 $\mathcal{C}_p$ 为关联的 TPC，记作 $\mathcal{C}_p = PH([\mathcal{A}_p^F]^\Delta)$。范畴 $\mathcal{A}_p^F$ 随 p 变化构成一个过滤范畴系统，如 §2.5.4 所述。因此，我们有函子 $\mathcal{H}_{p、q}$: $\mathcal{A}_p^F \to \mathcal{A}_q^F$，它们由过滤模的推前构造定义。具体而言，回顾对于 $p \preceq q$ ，我们有延拓函子 $\mathcal{H}_{p\,q}^{\mathrm{cont}}$,: $\mathcal{A}_p \longrightarrow \mathcal{A}_q$。函子 $\mathcal{H}_{p,q}$ 定义为 $\mathcal{H}_{p,q}$:=($\mathcal{H}_{p\,q}^{\mathrm{cont}}$,)$_*$，即模的诱导推前。只要 $p \preceq q$，函子 $\mathcal{H}_{p\,q}^{\mathrm{cont}}$ 就保留滤过。我们还有函子 $\mathcal{H}_{q\,p}^{\mathrm{cont}}$,，不过这些是 A_∞-函子，并且可能具有非零的线性偏差（见 §2.5.4）。

综上，我们得到比较函子，仍记作 $\mathcal{H}_{p,\ q}$: $\mathcal{C}_p \to \mathcal{C}_q$。范畴$[\mathcal{A}_p^F]^\Delta$ 是预三角化的，并且如§2.6.6所述，因此系统 $\widehat{\mathcal{C}}$（D^*N） $=$（$\mathcal{C}_p$, $\mathcal{H}_{p,\ q}$） 按照§2.5的含义构成一个精度递增的 TPC 系统。

$\widehat{\ }$3.2. **主要结论及证明思路**。 现在利用 TPC 系统 $\mathcal{C}(D^*(N))$，我们可以表述本节的主要结果。

继续之前，回顾§2.5.9 中定义在

$$\mathrm{Obj}^{\mathrm{tot}}(\widehat{\mathcal{C}}(D^*N)) := \coprod_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p) .$$

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$相关等价类的集合记为 Obj($\mathcal{C}(D^*N)$)。所有恰当带标记拉格朗日子流形 $L \in \mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$ 在 $\widetilde{\ }$Obj($\widehat{\mathcal{C}}(D^*N)$) 中都对应于良定义的等价类，因为 $\mathcal{H}_{p,\ q}$ 会在$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }p \preceq q$时将 Yoneda 模映射为与 Yoneda 模 0-等价的模。我们将 $\mathcal{L}(D^*N) \subset$ Obj($\mathcal{C}(D^*N)$) 记为所有此类闭的恰当带标记 L 的等价类集合。对于一族带标记纤维$\mathcal{F} = \{F_{x_1}, \ldots, F_{x_i}, \ldots\}$ of D^*N，我们提出类似的性质。若族 $\mathcal{F}$满足性质（$*$），则称其满足：

$(*)$ </style}对于所有，对于每个带标记纤维，我们有，$_q(F_x) \cong_0 F_x$，其中右侧的 F_x *of*$\cong_0$ 表示 *Obj*$(\mathcal{C}_q)$ 中与 F_x 对应的模。
如果族 $\mathcal{F}$ 满足这一性质，那么每个带标记纤维 $F_x \in \mathcal{F}$ 都对应一个定义良好的等价类 $\mathcal{F}_x \in$ Obj($\mathcal{C}(D^*N)$)。

定理 3.2.1。固定 $\epsilon > 0$。可以构造系统 $\mathcal{C}(D^*(N))$，使得存在一个有限的带标记纤维族 $\mathcal{F}_\epsilon = \{F_{x_1}, \dots, F_{x_l}\}$ 满足性质 $(*)$，并且集合 $\mathcal{L}(D^*N)$ 按照定义 *ϵ2.5.7* 的意义，能够被 -逼近 $\{\mathcal{F}_{x_1}, \dots, \mathcal{F}_{x_l}\}$。

换言之，对于某个 $\beta = \beta(\epsilon) > 0$，对于每个 $L \in \mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$，以及每个满足 $\nu(p) \leq \beta$_的 p，存在一个位于 $\mathcal{C}_p$ 内的迭代锥 C，它由带标记纤维（F_{x_i}，α_{x_i}）构造而成；对于某些常数 $\alpha_{x_i} \in \mathbb{R}$（以及某种分次选择），$C$ 与 L 在 $\mathcal{C}_p$ 中的交错距离至多为 ϵ。当然，这里我们将拉格朗日子流形L 与其对应的 Yoneda 模等同。此外，将范畴 $\mathcal{C}_p$ 纳入系统$\mathcal{C}(D^*N)$ 后，只要 $\nu(p)$ 足够小，相关构造就不再依赖于 p 的选择。

我们将在 §3.7 看到，这一结果立即蕴含了定义 2.2.1 意义下的可逼近性，因此定理 A 的第 i 点得以确立。

注 3.2.2。该陈述对 ϵ 的依赖性颇为微妙。可以构造系统 (D^*N)，使得每个范畴 $\mathcal{C}_p$ 都独立于 ϵ（当 $\nu(p)$ 足够小时），并且所有圆盘丛纤维，尤其是 $\mathcal{F}_\epsilon$ 的所有元素，对于所有 ϵ，都表示为 $\mathcal{C}_p$ 中的模。然而，系统 $\mathcal{C}(D^*N)$ 也依赖于函子 $\mathcal{H}_p$、$_q$，而这些函子必须满足相对于纤维族 $\mathcal{F}_\epsilon$ 的性质（$*$）。在我们的论证中，这一性质源于一个几何构造，它是证明的核心部分，并且该构造 需要一个固定的 ϵ 作为起点。因此，当 ϵ 变化时，先验地说，系统 $\mathcal{C}(D^*N)$ 也会随之变化，纤维族 $\mathcal{F}_\epsilon$ 亦然；当 ϵ 趋于 0 时，该族的元素数量会增加。另见注 3.7.5。

3.2.1. 定理 3.2.1 的证明概要。证明大致如下。首先，我们证明存在一些特殊莫尔斯函数，使其变差很小，并且在远离其临界点的地方梯度很大。更确切地，记 $B_\eta(x)$为 N 中（相对于度量 g）半径为 η、中心为 $x \in N$的圆盘。对于任意取定的值 K、$\delta > 0$ 以及充分小的 $\eta > 0$，存在一个莫尔斯函数 $f\colon N \to [0, K]$，使得对所有点 $x \in N \setminus (\cup_{z \in Crit(f)} B_\eta(z))$ 都有 $||df_x|| \geq \delta$。然后，我们考虑T^*N上的一个勒夫谢茨纤维化结构 $p\colon T^*N \to \mathbb{C}$，该结构由 Giroux [26], 构造而成，使得投影 p 的实部与一个莫尔斯函数 f 重合，并具有上述性质，其中 $1 > \delta > 0$ 固定且K 很小。接着，我们使用 [9] 中引入的方法，对每个恰当拉格朗日子流形进行手术：沿着经过 $Crit(f)$ 的若干个纤维的（紧化），并使用哈密顿同伦将所得结果推离 D^*N。这一部分构造发生在

总空间 E 中的一个修正的勒夫谢茨纤维化上，该纤维化按照 [9]中的方法构造。代数上，这一过程将拉格朗日子流形表示为由纤维和一个 s- 无圈项构成的迭代锥，其中 s 至多等于产生先前哈密顿位移所需的霍弗能量。关键在于控制这一能量。这正是 K 很小（而 δ 相对较大）这一事实发挥作用的地方：通过 Giroux 构造中出现的一些精确估计，我们证明该能量可以与投影到 $\mathbb{C}$ 上的 D^*N所对应的某个平面区域的面积联系起来，因此，它被一个与 L无关的常数乘以 K一致地界定。

定理 3.2.1 证明所需的各个步骤分别包含在以下小节中。§3.3 概述了特殊莫尔斯函数的构造：这些函数的变差很小，但在临界点之外微分很大。这是一个较为柔性的结果，但并非完全平凡。§3.4 回顾 Giroux 构造的主要要素。接着，§3.5 回顾 [9] 中的方法，并将其调整为适用于 Giroux 的设定。证明的大部分内容——从 §3.3、§3.4、§3.5到 §3.6中 §3.6.3之前——完全是几何性的，其目的在于确立命题 3.6.3 中的论断；该命题实质上声称：

给定 $\epsilon > 0$，存在一个 ***Lefschetz*** 纤维化 $p : E \to \mathbb{C}$，它包含 D^*N，并且^ ^存在恰当拉格朗日球面 S_1、.. .、 S_l，位于 E 中，每个球面都沿着 D^*N 的一个（彼此不同的）纤维与 D^*N 相交，并具有如下性质：对于任意恰当闭拉格朗日子流形 $L \subset D^*N$，迭代德恩扭转 $\tau_{\hat{S}_l}(\tau_{\hat{S}_{l-1}}(\cdots \tau_{\hat{S}_1}(L))..)$ 都可以通过一个霍弗范数至多为 ϵ 的哈密顿微分同胚与 D^*N 分离。

定理3.2.1在 §3.6.3中的证明最后一部分，将这一几何结果转化为一个^适当的系统 $\mathcal{C}(D^*N)$。

3.3. **特殊莫尔斯函数。**

命题 3.3.1。 设(N^n, g) 是一个光滑闭黎曼流形。对于任意 $K > 0,1 > \delta > 0$ 和 $\eta > 0$，存在一个莫尔斯函数 $\varphi = \varphi_{N,\ K,\ \delta}$： $N \to [0, K]$，满足性质 $||d\varphi(x)|| \geq \delta$，对所有 $x \in N \backslash (\cup_{z \in Crit(\varphi_{N,K,\delta})} B_{\eta_z}(z))$均成立，其中 $0 < \eta_z \leq \eta, \forall z \in Crit(\varphi_{N,\ K,\ \delta})$。

注意，这里我们假设球 $B_{\eta_z}(z)$ 的半径 η_z （该球以 f 的临界点集z 为中心）取决于临界点。我们还假设这些球 B_{η_z} 两两不相交。

证明。为开始证明，我们固定一个莫尔斯函数 $f_0 : N \to \mathbb{R}$ 以及一个小量$\alpha > 0$。我们假设函数 f_0 和度量 g 在每个 $z \in Crit(f_0)$ 的邻域 $B_\alpha(z)$ 内的 $B_\alpha(z)$ 中均为标准形式。这两个条件对论证并非必不可少，只是简化证明中的一些计算。在这些假设下，梯度（相对于 g 计算） ∇f_0 具有标准形式，即在每个 $B_\alpha(z)$ 内，关于坐标 $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$，其形式为 $k(\ldots, \pm x_i \partial/\partial x_i, \ldots)$； k 是一个依赖于 z 的常数。我们还假设 f_0 有 m 个临界点 $z_0, \ldots, z_{m-1}$，并且对于某个正常数 B， $f_0(z_j) = jB$。将 f_0 乘以一个足够大的正常数后，我们可以假设在所有球 $B_\alpha(z)$ 的并集之外， $||df_0|| \geq \delta$。我们用 $V = (m-1)B$ 表示 f_0 的最大值。令 $U_z(\mu) = f_0^{-1}([f_0(z) - \mu, f_0(z) + \mu])$，并令 $U'_z(\mu) = f_0^{-1}([f_0(z) -$

$\mu/2,\ f_0(z)+\mu/2]$，并假设 $B_\alpha(z)$ 包含于 $U'_z(\mu)$ 中。我们固定 $\mu>0$，使得所有这些集合 $U_z(\mu)$ 两两不交；为简化下文的记号，我们记 $U_z=U_z(\mu), U'_z=U'_z(\mu)$。

我们将修改 f_0，目标有二：尽可能减小变差 V，并尽可能减小邻域 $B_z(\alpha)$ 的大小。在这两种情况下，所需程度均视情况而定。当然，这样做的代价是，我们将在 f_0 的临界点之外增添许多新的临界点。论证采用关于 N 维数的归纳法。因此，我们假设命题已对所有维数至多为 $n-1$ 的流形成立（证明一维情形的结果是一个简单练习）。

对函数 f_0 的修改有两种类型。

第一种是在 f_0 的每个临界点 z 的一个小邻域内进行改变。我们稍后将这一步称为“收缩”。为简化记号，我们固定这样一个临界点及其临界值 $v=f(z)$。我们考虑 $\eta<\alpha/2$ 和一个球 $B_\eta(z)$，以及更大的球 $B_{2\eta}$。随后，我们考虑一个微分同胚 $\psi_z:\ U'_z\to U_z$，其具有以下性质：

- $\psi_z(f_0^{-1}(v\pm\mu/2))=f_0^{-1}(v\pm\mu)$。- ψ_z 保持 $f^{-1}(v)$不变。- ψ_z 将 $B_{2\eta}(z)$映射到 $B_\alpha(z)$，同时固定 z，并且在 $B_\eta(z)$上作用为 $x\to rx$，其中$r>1$ 由$r^2=\frac{\delta}{\eta k}$ 给出（这显然假设 η 足够小，另见下一点）。- 我们假设 η 足够小，使得 $2r\eta=2\sqrt{\frac{\delta\eta}{k}}<\alpha$。- ψ_z沿着 $-\nabla f_0$的流传送$f_0^{-1}(v-\mu/2)$，将其映射到$f_0^{-1}(v-\mu)$；并沿着 $+\nabla f_0$的流传送$f_0^{-1}(v+\mu/2)$，将其映射到$f_0^{-1}(v+\mu)$。

构造这样的微分同胚很容易，见图 1。

我们现在定义一个新函数 f_1 如下：在集合 U'_z 上，它由 $f_0\circ\psi_z$给出；在集合$f_0^{-1}(-\infty, v-\mu/2]$上，它等于 $f_0-\mu/2$；在集合$f_0^{-1}[v+\mu/2,\infty)$上，它等于 $f_0+\mu/2$。注意，该函数是连续的，全变差为 $V+\mu$，但沿着这两个超曲面 $f_0^{-1}(v\pm\mu/2)$并不光滑。不过，可以沿着这两个超曲面对它进行平滑，而这一平滑后的函数仍记为 f_1，不会引入任何新的临界点，并且对于$B_{2\eta}(z)$之外的所有点 x，都有 $||df_1(x)||\geq\delta$。

通过将平滑取得足够小，扰动函数 f_1 的全变差小于 $V+2\mu$。现在我们讨论 ψ_z 的两项性质的作用。第三项性质的作用是确保 $||df_1(x)||\leq\delta$ 对于 $x\in B_\eta(z)$ 成立（这项性质将在后面的命题证明中发挥重要作用）。这一点显而易见，因为 $||\nabla f_0(x)||=k||x||$ 位于 $B_\alpha(z)$ 内，因此 $||\nabla f_1(x)||=rk||rx||=r^2k||x||=\delta\frac{||x||}{\eta}$ 对于 $x\in B_\eta(z)$ 成立。第四项性质的作用是留出足够的“空间”，从而使 $||df_1(x)||\geq\delta$ 对于点 $x\in B_{2\eta}(z)\backslash B_\eta(z)$ 成立。

我们对 f_0 的每个临界点都应用这一过程，并仍将所得函数记作f_1。它的变差为 $<V+2m\mu$。给函数f_1 加上适当的常数，使其极小值点为 0，这很有用。采用这一约定后，我们注意到，函数 f_1 的临界值依次为（只要平滑处理足够小，就可以任意接近）0，

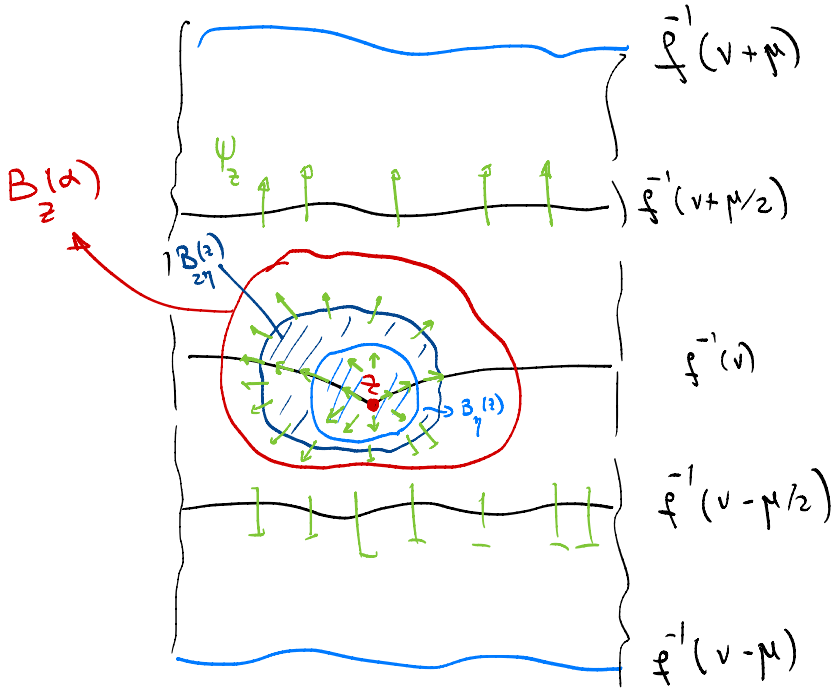


图 1. 微分同胚 ψ_z。

$B+\mu/2, 2B+3\mu/2$ 等等。特别是，这些临界值彼此相距 $\approx B+\mu$。为明确起见，我们还假设 $\mu << B$。

我们记 $C = V + 2m\mu$，并注意到这个常数与 η 无关。因此，如果后续论证要求我们减小 η，这不会影响 f_1 变差的这个上界，也不会影响相邻临界值之差，该差仍为 $\approx B + \mu$。我们用 V_1 表示 f_1 的最大值。总之，函数 f_1 是莫尔斯函数，并满足：

$$||df_1(x)|| \geq \delta,\ \forall x \notin \cup_{z\in \mathrm{Crit}(f_1)} B_\eta(z) \ \text{ and } \ \min(f_1) = 0,\ \ \max(f_1) = V_1 < C\ . \tag{32}$$

此外，正如前面所解释的，我们还有：

$$||df_1(x)|| \leq \delta\ \ \forall x \in \cup_{z\in \mathrm{Crit}(f_1)} B_\eta(z)\ , B \leq f(z_{i+1}) - f(z_i) \leq B + 3\mu/2\ . \tag{33}$$

性质（33）的一个重要推论是，f_1 在每个球B_η（z）上的变差有 $2\eta\delta$这个上界，因此可以通过令 η 足够小，按需将其减小。

第二步是在形如 $f_1^{-1}(a)$ 的正则超曲面周围进行“折叠”操作。此操作会产生一个变差很小的函数，但会增加许多新的临界点。

我们首先说明这种折叠构造的原型及其对函数变差的影响。折叠的描述如下。选取一个值 $a \in [C/2, C)$。为描述折叠，我们假设 a 是 f_1 的正则值，并且 $W_1 = f_1^{-1}(a)$ 不与任何球 $B_\eta(z)$ 相交。

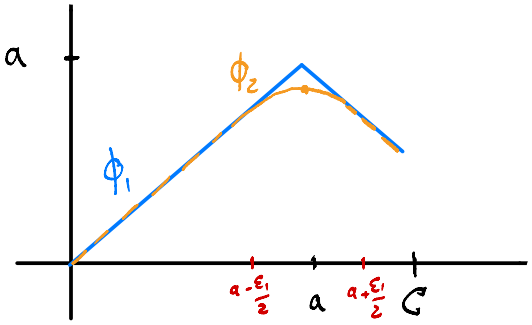


图 2. 函数 ϕ_1 和 ϕ_2的图像。

我们考虑如下函数 $\phi_1 :\ [0,C] \to [0,a]$，其定义为

$$\phi_1(t) = t \ \text{ when } t \le a \ , \ \phi_1(t) = a - t \ \text{ when } t \ge a \ .$$

显然，这个函数是连续的，但并不光滑。尽管如此，我们定义 $f_2' = \phi_1 \circ f_1$。我们注意到， f_2'的变差为 a，并且在球 $B_\eta(z)$ 之外，除了沿着 W_1之外，我们仍有 $||df_2'|| \ge \delta$；在 W_1上， f_2' 不可微。

我们的目标是扰动函数 f_2'，以得到一个莫尔斯函数 f_2，使得对于固定的$\xi > 0$，我们有：

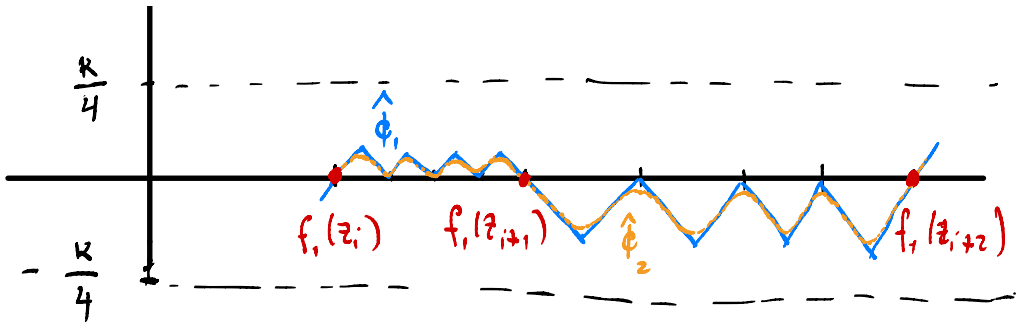
$$||df_2(x)|| \ge \delta, \ \forall x \notin \cup_{z \in \mathrm{Crit}(f_2)} B_{\eta_z}(z) \ , \ \min(f_2) = 0, \ \max(f_2) = V_2 < \xi + a \ . \tag{34}$$

首先，对于 $\epsilon > 0$，令 $K_{\epsilon,\ a} = f_1^{-1}([a-\epsilon, a+\epsilon])$。我们选取足够小的 $\epsilon_1 > 0$，使得$K_{\epsilon_1,\ a} \cap B_\eta(z) = \emptyset$ 对 f_1的所有临界点 z 都成立。函数 f_2 具有以下形式：

$$f_2 = \phi_2 \circ f_1 + (\beta \circ f_1) \cdot f_{W_1} \ . \tag{35}$$

此处 $\phi_2 :\ [0,C] \to [0,a]$光滑，并且在区间$(a-\epsilon_1/2,\ a+\epsilon_1/2)$之外与 ϕ_1一致，ϕ_2 是莫尔斯函数，且在 a处有唯一的极大值点，而 $\phi_2 \le \phi_1$ ——参见图2。

函数 β 是一个光滑的鼓包函数 $\beta :\ \mathbb{R} \to [0,1]$，它在 $(a-\epsilon_1, a+\epsilon_1)$ 之外为零，在 $(a-\epsilon_1, a)$ 上递增，在 $(a, a+\epsilon_1)$ 上递减，并且 $\beta(a) = 1$。函数$f_{W_1} : W_1 \to \mathbb{R}$ 是通过归纳假设，对W_1应用命题得到的。更具体地说，我们在 W_1 上固定由 g 诱导的度量，并构造函数 f_{W_1}，使其为莫尔斯函数，最小值为 0，最大值为 $C_1 < \xi$，且 $\hat{}$ 满足 $||df_{W_1}(z)|| \ge 2\delta$；除去球 $B_{\eta_z}(z)$，$\eta_z \le \eta$ 的并集后，对 $\hat{}f_{W_1}$ 的每个临界点 z 都成立。记号 $B_-(-)$ 表示相应的球位于 W_1 中。容易看出，通过恰当调整函数 ϕ_2 和 β 的轮廓，我们可以确保 f_2 具有所需性质。注意，函数 f_2 的临界点有两类： f_1 的临界点，以及 f_{W_1} 的临界点；当视为 f_2 的临界点时，后一类的莫尔斯指数增加 1。



^^图 3. 函数 ϕ_1 和 ϕ_2的图像。

现在，我们将把这种折叠构造同时应用于多个超曲面，而不再像之前那样只应用于一个超曲面，例如 W_1。首先，回顾命题陈述中的常数 K，并固定一个自然数 l，使得 $\frac{B+3\mu/2}{2^l} < K/4$。

我们考虑收缩过程中所用的函数 f_0，并将该构造应用于$\eta < \frac{B}{2^{l+1}\delta}$。我们将所得函数记为 f_1。

考虑区间 $J_i = [f_1(z_i)\ f_1(z_{i+1})]$, $0 \le i < m-1$，并将其等分为 2^l 份，记为 $I_{k,i} = (f_1(z_i) + \frac{kS_i}{2^l}$, $f_1(z_i) + (k+1)_{2^l}{}^{S_i})$，其中 $S_i = f_1(z_{i+1}) - f_1(z_i)$。~~考虑~~一个连续函数： $\varphi_i : J_i \to [0,\infty)$，它具有以下性质：

- φ_i在区间 $I_{k,i}$上光滑，其中 $k = 0,1,\dots 2^l-1$；当 k 为偶数时，它在$I_{k,i}$ 上的斜率为常数 $+1$，当 k 为奇数时，斜率为 -1。- 令 $a_{k,i} = \frac{kS_i}{2^l}$, $0 < k \le 2^l - 1$。 φ_i 的最小值为 0，并在点$\overline{a}_{k,i}$ 处取得，其中 k 为偶数。 φ_i 的最大值为 $\frac{S_i}{2^l}$，并在点$a_{k,i}$ 处取得，其中 k 为奇数。

鉴于 $S_i \ge B$ 我们有 $S_i/2^l \ge B/2^l > 2\eta\delta$。由（33）可知，所有值 $a_{k,i}$都是 f_1 的正则值，并且超曲面 $W_{k,i} = f^{-1}(a_{k,i})$ 与 $B_\eta(z_i)$ ^和 $B_\eta(z_{i+1})$ 不相交。我们将函数 φ_i 拼接成一个新的连续函数 ϕ_1，定义如下：在每个区间 J_i（i为偶数）上， ϕ_1 等于 φ_i；在区间 ^J_i（i 为奇数）上， ϕ_1 等于 $-\varphi_i$。这意味着函数 ϕ_1 在每个值 $f(z_i)$ 处都是光滑的，其斜率根据 i的奇偶性在 $+1$和 -1之间交替。此外，超曲面 ^$W_{k,i}$ 与球 $B_\eta(z)$、$z \in Crit(f_1)$ 均不相交。最后， ϕ_1 的变差至多为 $2\max\frac{S_i}{2^l} \le 2^{\frac{B+3\mu/2}{2^l}} < K/2$，见图 3。

^^^接下来，我们考虑对 $\phi_1 \circ f_1$ 进行的莫尔斯光滑化 f_2，它除在集合 $K_{\epsilon_2, a_k, i} = f_1^{-1}([a_{k,i}-\epsilon_2, a_{k,i}+\epsilon_2])$ 上外，与 $\phi_1 \circ f_1$ 一致。更准确地说，^ f_2 由一个类似于公式 (35) 的公式给出，只需作一些直接的修改：用 ϕ_1 的莫尔斯光滑化 ^^ϕ_2 取代 ϕ_2，该光滑化在 $a_{k,i}$ 处（当 ki 为奇数时）取极大值点，在 $a_{k,i}$ 处（当 ki 为偶数时）取极小值点；在每个 $K_{\epsilon_2, a_k, i}$ 上，用相应的函数 $f_{W_{a_k, i}} : W_{a_k, i} \to \mathbb{R}$ 取代函数 f_{W_1}，其变差小于 $\frac{S_i}{2^{l+1}}$；鼓包函数 $\beta : \mathbb{R} \to [-1,1]$ 的支集包含于区间 $(a_{k,i} - \epsilon_2, ~~a_k~~, i + \epsilon_2)$ 的并集上，并且在区间 $(a_{k,i} - \epsilon_2, a_{k,i})$ 和 $(a_{k,i}, a_{k,i} + \epsilon_2)$ 上分别单调，

当 ki 为奇数时，它在点 $a_{k,\,i}$ 处取得等于 1 的极大值点；当 ki 为偶数时，它在点 $a_{k,\,i}$ 处取得等于 -1 的极小值点（$0 < k \leq 2^l - 1$、$0 \leq i < m - 1$）。

经过所有这些选择，函数 $\hat{f}_2$ 和陈述中的函数 $\varphi_{N,K,\delta}$ 则通过给 f_2 加上一个常数来定义，使所得函数（记为 $\varphi_{N,K,\delta}$）为正，最小值等于 0，且极大值点小于 K。此函数满足陈述中所声称的其他性质。□

备注3.3.2。 在本文后续论证中，除命题3.3.1中的性质外，还需要假设范数 $||d\varphi_{N,K,\delta}|| \leq 1$ 在整个 N 上都满足相关条件。固定度量 g 的同时要做到这一点并不容易。不过，对我们而言，只需存在一个定义在 N 上、与 g 共形的度量 $^{-}\mathrm{g}$，使得 $^{-}\mathrm{g} = \alpha\mathrm{g}$，且 α：$N \to [1, \infty)$，从而相对于 $^{-}\mathrm{g}$，命题中所声称的其余性质仍然成立，并且还满足 $||d\varphi_{N,K,\delta}||_{\bar{\mathrm{g}}} \leq 1$。这一点很容易看出：只需在邻域 $B_{\eta_z}(z)$ 之外，对那些范数 $||d\varphi_{N,K,\delta}(x)||$（相对于度量 g）大于 1 的点 $x \in N$ 调整度量 g 即可。

3.4. **回顾 Giroux 构造**。 我们将在此回顾 [26] 中与后续定理3.2.1证明相关的部分。所考虑的 Lefschetz 纤维化类型（定义 1，见 [26]）是一个赋有光滑映射的 Liouville 流形 $(W, d\lambda)$

$$h \colon W \to \mathbb{C}$$

使得 h 具有以下性质：

1. h的奇点具有如下形式

$$h(z) = h(0) + \sum_j z_j^2$$

在以该奇点为中心的坐标 $(z_1, \ldots, z_n)$ 中，且其中 $\omega = d\lambda$ 在 0 处是正的 (1,1) 形式。

2. 分布 ker $dh \subset TW$由辛子空间构成，其辛正交补所给出的奇异联络是完备的。

3. 流形 W由 Liouville 域 $(W_k, \lambda|_{W_k})$ 穷尽，使得对每个$w \in \mathbb{C}$ 以及所有充分大的 $k \geq k_w$，纤维 $F_w = h^{-1}(w)$都与 ∂W_k横截相交于 ∂W_k的一个正接触子流形上，并且与$\lambda|_{F_w}$ 对偶的F_w 上的 Liouville 向量场是完备的。

Giroux 论文中的主要结果如下。

定理 3.4.1。 *[Giroux [26]]* 设 N 为一个闭流形，$\varphi : N \to \mathbb{R}$ 为一个莫尔斯函数，ν 为 φ 的一个适配梯度，且满足 *Morse-Smale*条件。则 φ 可扩展为一个 *Lefschetz* 纤维化（按上述意义） $h = f + ig \colon T^*N \to \mathbb{C}$其虚部为函数：

$$g \colon T^*N \to \mathbb{R}\ ,\ (q,p) \mapsto\ g(q,p) := \langle p, \nu(q) \rangle$$

且其实部 f 在 0-截面上与 φ 重合，并且在无穷远处关于变量 p是 *1* 次齐次的。

若向量场 ν 满足：在 φ 的临界点之外， $d\varphi(\nu) > 0$ ；且在每个临界点 a 附近，都存在一个局部坐标图，使得 φ 可表示为莫 Morse 形式，$\varphi(x) = \varphi(a) + \sum_j \epsilon_j x_j^2$，而 ν 可表示为线性形式， $\nu(x) = 2\sum_j \epsilon_j x_j \partial_{x_j}$, $\epsilon_j \in \{-1, +1\}$，则称其适配于 φ 。

在我们的情形中，方便起见，假设 ν 是 φ 关于 M 上黎曼度量 g 的实际梯度向量场，

$$\nu = grad_{\mathrm{g}}(\varphi) \ . \tag{36}$$

我们还假设 φ 的每个临界点在其临界层上都是唯一的。

Giroux 构造的若干性质对我们的证明很重要，下面我们将回顾这些性质。

i. 函数 $f\colon T^*N \to \mathbb{R}$ 具有如下形式 $f = f_0 + f_1$:

$$f_0(q,p) = \varphi(q) - \frac{1}{2}\nabla^2\varphi(q)(p,p) \ . \tag{37}$$

这里 $\nabla^2\varphi(q)$ 是 φ 在 q 处的协变二阶导数，视为定义在T^*N上的双线性映射。函数 $f_1\colon T^*N \to \mathbb{R}$的支集远离0截面 $N \subset T^*N$。这个扰动项 f_1 的精确构造需要耗费 [26]中的大量精力。我们的记号与 Giroux 的记号略有不同。为便于对照两篇论文，我们在此说明这些差异：我们的函数 f_0 在f^0 中记作 [26] ，而这里的函数 f_1 具有如下形式:

$$f_1 = \tau_1 f^1 - (1 - \tau_0) f^0$$

其中，等号右侧使用的是 [26] 中的记号。也就是说， τ_i 是仅依赖于到零截面的径向距离 r 的函数；当 r 较小时， τ_1为零，而当 r 足够大时， τ_1等于一个较大的正常数 C ；当 r 较小时， τ_0 等于 1，而远离零截面时则为零。函数 f^1 的形式为 $f^1 = rf^\infty$，而 f^∞是定义在球余切丛 f^∞ 上的一个经过精心选取的函数：$ST^*N \to \mathbb{R}$。

ii. h 的临界点仅位于零截面上，且与 φ的临界点重合。

iii. 对于每个临界点 $a \in Crit(\varphi)$，沿着从 $h(a)$出发并指向上方的垂直直线半射线的垂直 thimble，与哈密顿向量场 X^f 在 a处的不稳定流形重合。

iv. 泊松括号 $\{f, g\}$ 在每个点 $x \in T^*(N)\backslash Crit(\varphi)$处均为正

我们的论证需要对性质 iv 作定量补充，现陈述如下:

v. 假设 $d\varphi(\nu) \geq \delta$ 位于 $\cup_{a\in Crit(\varphi)} B_\epsilon(a)$之外，对于某个足够小的 ϵ ，使得球$B_\epsilon(a)$、 $B_\epsilon(b) \subset N$ 对于所有 $a \neq b \in Crit(\varphi)$均互不相交。在这一假设下，

f 的构造可以做到

$$\{f,g\}(x) \geq \delta,\ \forall x \in T^*N \setminus \cup_{a\in Crit(\varphi)} B'_\epsilon(a)$$

其中，我们用 $B'_\epsilon(-)$ 表示 T^*N 中半径为 ϵ 的相应球。

性质 v 的一种改写将在我们的论证中发挥重要作用。

推论 3.4.2. 在上述性质 v 的假设下，对于每个不属于任意一个球 $B'_\epsilon(a)$的 $x \in T^*N$，都有 $dh(X^f)$ 是纯虚数，且 $Im(dh(X^f(x))) \geq \delta$， $a \in Crit(h)$。

性质 i、ii、iii 和 iv 在 [26] 中有明确表述。性质 v 可由 §E [26] 中给出的性质 iv 的证明轻易推出。为补充一些细节，以下是我们的约定：$\omega(Y, X^f) = df(Y)$， $\{f,g\} = \omega(X^f, X^g) = dg(X^f) = -df(X^g)$。[26] 中的论证使用了向量场 $\tilde{\nu} = -X^g$，显然它是 ν 到 T^*N 的一个提升。文中证明了，在所有不同于 h 临界点的点上，量 $df(\tilde{\nu}) = \{f,g\}$ 为正，这正是 iv 中的断言。该正性的证明依赖于扰动项 f_1 的构造，并采用了上文 i 中出现的常数 $C > 0$ 的某个取值。当这个常数取得足够大时，可以看出 $df(\tilde{\nu})$ 非负，且仅在 h的临界点处为零。若将 C 取得更大，同样的论证表明性质 v 也成立。

由性质 v 可立即得到推论中的结论。事实上， $\{f,g\} = dg(X^f) = d(p_2 \circ h)(X^f) = dp_2 \circ (dh(X^f)) = dh(X^f)$，其中 $p_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$是到第二个坐标的投影。我们用到了如下事实：对于每个点 x， $dh(X^f(x))$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个竖直向量。这是因为 $X^f(x)$ 与水平超曲面 $f^{-1}(c) = (p_1 \circ h)^{-1}(c) = h^{-1}(\{(c,\ y) \colon\ y \in \mathbb{R}\})$ 相切，其中 $c = f(x)$，而 $p_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 是到第一个坐标的投影。

3.5. 通过 Dehn 扭转实现不相交。本节中，我们考察 §3.4 中回顾的 Giroux 的 Lefschetz 纤维化 [26], ，并对其应用 [9], 中的构造，尤其是该文第 4.4 节中的论证。 [9] 中的方法（如命题 2.3.1 所示；关于相关构造的更多细节，另见 §2.3 [8] ），再加上 §4.4.2 [9] 中的奇点加倍（见该文图 17），应用于 §3.4 中的 Lefschetz 纤维化 $h \colon T^*N \to \mathbb{C}^-$，得到一个新的 Lefschetz 纤维化 $h : E \to \mathbb{C}$，其示意图见图4。以下是 h 的主要相关性质。我们采用定理 3.4.1 中的设定。特别地，我们有莫尔斯函数 $\varphi : N \to \mathbb{R}$，它在每个临界层上有唯一的临界点，并且满足 ($\varphi$, g) 是 Morse-Smale，其中 g 是 N 上一个固定的黎曼度量，且 §3.4 中的性质 i.-v. 均成立。此外，我们还有：

a. 莫尔斯函数 $\varphi : N \to \mathbb{R}$ 的取值在 $[0, K]$中，且 0 是其最小值， K是其最大值。
b. 记 $U_r = h(D^*_r N)$ 其中圆盘余切丛 $D^*_r N$是相对于度量 g定义的，类似地 $U_{r'} = h(D^*_{r'} N)$ ——这两个集合都绘于图 4。

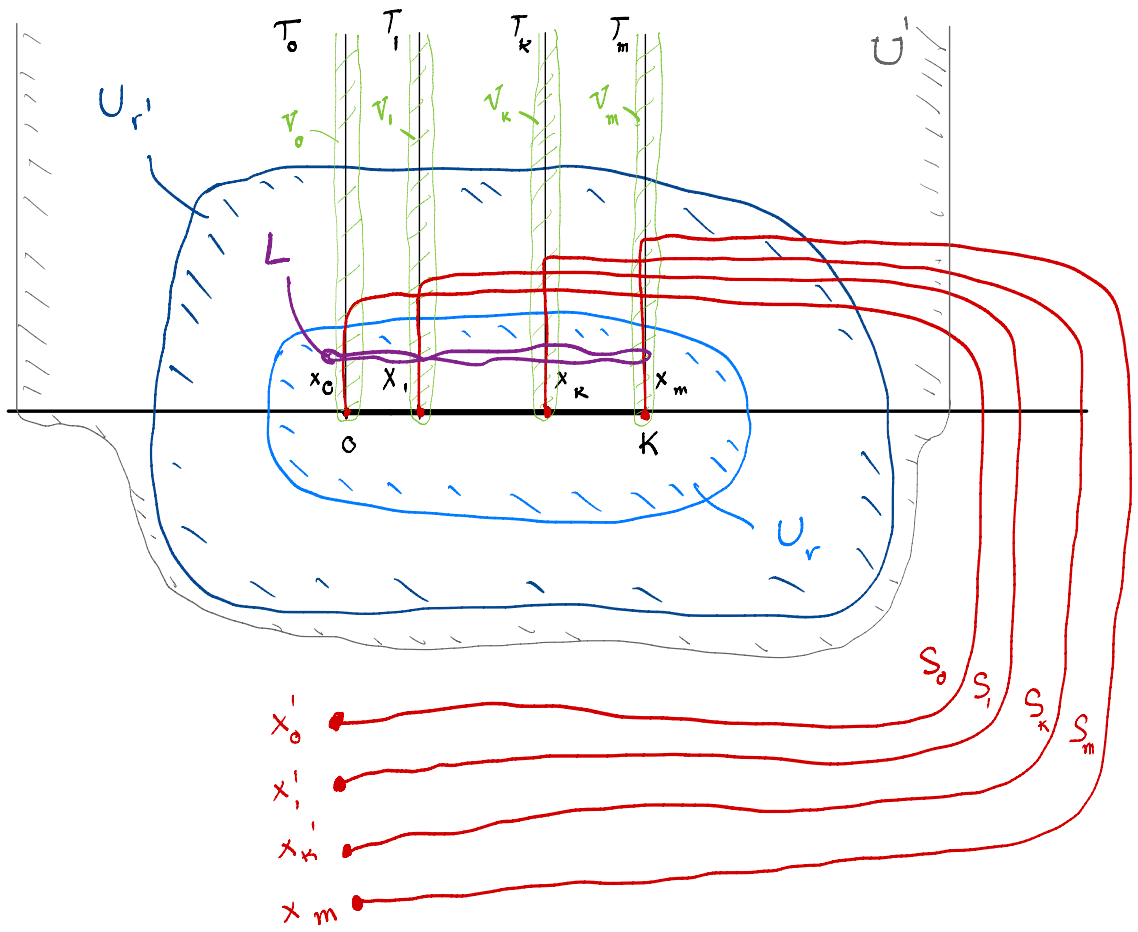


图4。纤维化 $h : E \to \mathbb{C}$。

c. 固定一个足够大的常数 $R > 0$，使得 $U_{r'} \subset [-R, R] \times \mathbb{R}$。存在 $U' \subset \mathbb{C}$ 的一个邻域 $U_{r'} \cup ([-R, R] \times [0, \infty))$，使得 h 和 $\bar{h}$ 在 $h^{-1}(U')$ 上一致。d. 纤维化 h 对每个 h 的临界点 x_i 都有一个额外的临界点 x_i'。对于这类临界点的每一对 x_i、x_i'，x_i 和 x_i' 通过匹配环 $S_i \subset E$ 相关联（它是一个拉格朗日球面），其在 $\mathbb{C}$ 上的像如图 4 所示。e. 从临界点 x_i 出发向上延伸的竖直 thimble 记为 τ_i。它们是在每个临界点处哈密顿向量场 $X^{\bar{f}}$ 的不稳定流形，其中 x_i 满足 $f = Re(h)$（回顾 iii. 中，$f = f$ 位于 U' 上方）。f. 固定某个 $\delta > 0$，并假设 $h = f + ig$ 在点 x 处（除小球 $B'_\epsilon(x_i)$、$x_i \in Crit(\varphi)$ 外）满足 $\{f, g\}(x) \geq \delta$，如 §3.4 中 v. 点所述。在此假设下，我们为每个截面 τ_i 固定小邻域 $V_i \subset E$，使得 $V_i \supset B'_\epsilon(x_i)$。$V_i$ 的投影到 $\mathbb{C}$ 上后如图所示。

在我们的论证中，常数 $\delta > 0$、$K > 0$ 预先固定为 $\delta < 1$，函数$\varphi = \varphi_{N、K、\delta}$ 由命题 3.3.1 给出。下文将用到的关键性质是

证明由推论 3.4.2给出：

$$d\bar{h}(X^{\bar{f}}(x)) \in i[\delta, +\infty) \subset i\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad , \forall\, x \in \bar{h}^{-1}(U')\backslash(\cup_i V_i)\ . \tag{38}$$

我们还假设，在必要时按照注3.3.2中的做法对度量作共形变换，将任意度量 g变为与之共形等价的度量 $\bar{\mathrm{g}} = \alpha \mathrm{g}$，其中 $\alpha: \quad N \to [1, \infty)$，使得 $||d\varphi|| \leq 1$。从此处起，我们将始终使用此度量 $\bar{\mathrm{g}}$，并在下文 §3.6.4中进一步讨论这一修改。这意味着 $||\nu|| \leq 1$ ——见式（36）——并且根据定理 g 中对3.4.1 的描述，还可进一步推出：

$$U_r \subset \mathbb{R} \times [-r, r], \quad \forall r \in \mathbb{R} \tag{39}$$

§ f_0 中从点 i 出发的3.4 描述表明，对于 r 充分小的情形，有

$$U_r \subset [-C_\varphi r, K + C_\varphi r] \times [-r, r] \tag{40}$$

其中 C_φ 是一个正常数，取决于 φ的 C^2 范数。

在此背景下，我们需要的关于 [9] 的主要结果如下。

命题 3.5.1 ([9])。 对于任意拉格朗日子流形 $L \subset D_r^* N$，以及匹配环 S_i 的任意小邻域 N_i，都存在德恩扭转 τ_{S_i} 的模型，其支集包含于 N_i，并且 $\tau_{S_m} \circ \ldots \circ \tau_{S_2} \circ \tau_{S_1} \circ \tau_{S_0}(L)$ 与任何截面 τ_i 都不相交。

3.6. **定理 3.2.1的证明**。 定理的证明分为四个步骤。在 §3.6.1 中，我们从 §3.5 的设定出发，并利用（38）、（40）以及命题 3.5.1 证明，若 r 足够小，则迭代德恩扭转

$$\tau_{m,\ldots,1,0} L = \tau_{S_m} \circ \ldots \circ \tau_{S_2} \circ \tau_{S_1} \circ \tau_{S_0}(L)$$

可以通过能量至多为 $8Kr/\delta$ 的哈密顿同伦，与 $D_r^*(N)$ 分离。在 §3.6.2 中，我们用限制到纤维 $F_{x_i} \subset D_r^*(N)$ 的拉格朗日球面来重新表述引理 3.6.1 中的分离结果。在 §3.6.3 中，我们在命题 3.6.4 中证明一个可逼近性类型的结果，其中仍涉及常数 K、 r、 δ。最后，证明在 §3.6.4 中收尾：我们去掉 r 足够小这一限制，证明度量 g 的共形变换不会影响论证，并且可以按需要选取命题 3.6.4 中的常数 K、 δ，从而推出定理 3.2.1 的结论。

3.6.1. 受控能量下的析取。 本小节旨在证明以下引理。为陈述该引理，我们固定常数 $0 < \delta < 1$, $K > 0$ 以及函数 $\varphi = \varphi_{N,\ K,\ \delta}$ 它们由命题 3.3.1给出，正如 §3.5 中所讨论的。我们还假设 a. - f. 中的条件均成立，并且满足 (38) 和 (40) 中的包含关系。

引理 3.6.1。 当 r 充分小时，对于任意（带标记的）恰当拉格朗日子流形 $L \subset D_r^* N$，迭代德恩扭转 $\tau_{m,\ldots,1,0} L$ 可在 E 内与 $D_{2r}^*(N)$ 分离，且所需能量小于 $8Kr/\delta$。

证明。 为简化记号，记 $L' = \tau_{m,\dots,1,0} L$。回顾一下， C_φ 中（40）的常数仅取决于 φ。我们先选取 $r > 0$ 使得 $rC_\phi < K/4$。我们还选取常数r' 使得 $r' = 2r$。因此，由（40）可得

$$U_r \subset [-K/4, 5K/4] \times [-r, r]$$

并且类似地

$$U_{2r} \subset [-K/2, 3K/2] \times [-2r, 2r] \ .$$

暂且假设

$$L' \subset [\bar{h}^{-1}(U') \setminus (\cup_i V_i)] \cup (\cup_i N_i') \tag{41}$$

其中 $N_i' \supset N_i$ 是匹配环 S_i的邻域，可能略大于 N_i。在这种情况下，观察图 4 并利用（38），我们看到哈密顿流 $-X^{\bar{f}}$在小于 $4r/\delta$的时间内将 L' 移出 $W_{K,\,r} = \bar{h}^{-1}($ $[-K/2, 3K/2] \times [-2r, \infty))$。与此同时， f 在 $W_{K,\,r}$ 上的变差至多为 $2K$。由此可知， L' 相对于 $W_{K,\,r}$的霍弗位移能量，尤其是相对于 $D^*_{2r}(N) \subset W_{K,\,r}$ 的霍弗位移能量，小于 $8Kr/\delta$。

现在我们打算证明，对于某个拉格朗日子流形 $L'' = \psi(L')$，假设 (41) 成立；这里的 L' 由某个哈密顿微分同胚 ψ 给出，后者将在下文描述。为此，我们注意到，缠绳 τ_i 的邻域 V_i 的闭包包含在$W_{K,r}$的内部。对于每条缠绳 τ_i ，我们都可以找到一个哈密顿同伦 ψ_i ，其支集位于稍大的邻域 $V_i' \subset W_{K,r}$ 中，并且具有“排斥”作用，使物体远离缠绳 τ_i ；同时，ψ_i 保持缠绳 τ_i 不变（作为一个集合），并将交点 $L' \cap V_i$ 移出 V_i ，而不会与 V_i产生任何新的交点。对于不同的 i，这些哈密顿同伦的支集互不相交，因此可以将它们合并为一个同伦，其时间一映射 ψ具有这样的性质： $L'' = \psi(L')$ 满足 (41)。

接下来，我们将关于相对于$W_{K,r}$的位移霍弗能量的估计应用于 L'' 。因此，存在一个能量小于 $8Kr/\delta$ 的哈密顿同伦 ϕ ，使得 $\phi(L') \cap W_{K,r} = \emptyset$。由于 ψ 的支集位于$W_{K,r}$ 内部，我们推出 $\psi^{-1}\phi\psi(L') \cap W_{K,r} = \emptyset$ ；并且根据霍弗范数的双不变性，我们还有 $||\psi^{-1}\phi\psi||_H = ||\phi||_H < 8Kr/\delta$ ，这就完成了引理的证明。

□

备注 3.6.2。 注意，与命题 3.5.1中一样，德恩扭转的支集可以ˆ假设包含在任意小的 S_i 的邻域内。

3.6.2. 用限制为纤维的拉格朗日球面替换匹配环。 本小节中，我们将引理 3.6.1 中的分离能量估计改写为德恩扭转的形式ˆ ˆ，其中匹配环 S_i 被扰动 S_i 替换，使得 S_i与 $D^*_r(N)$的交集与余切纤维 F_{x_i}重合。

我们假设 r 足够小，使得对于每个纤维 $F_{x_i} \subset D^*_r(N)$（回顾一下 $\{x_i\}_i = Crit(\varphi)$），像 $h(F_{x_i})$ 包含在 V_i 中，见（37）；并回顾定理 3.4.1 中 $g = Im(h)$ 的表达式。特别地，这些像两两不相交。接着，我们考虑一个哈密顿微分同胚 η，其支集位于 $D^*_{\frac{3}{2}r}(N)$ 中，并且它将 $S_i \cap D^*_r(N)$ 变形为

到 F_{x_i}。我们假设图 S_i4 中的“弯曲” 发生在 $D^*_{\frac{3}{2}r}(N)$ 之外。我们用 $S_i = \eta(S_i)$ 表示。我们还可以假设 η 的构造满足 $S_i \cap D^*_r(N) = F_{x_i}$，且 $\eta(D^*_r(N)) = D^*_r(N)$。通过比较纤维 $\bar{x}_i$ 与截面 τ_i 的局部表达式，构造这样的 η 是一道简单的练习。显然，子流形 S_i 也是拉格朗日球面；我们选取相对于 S_i 的德恩扭转模型，使得 $\tau_{\hat{S}_i} = \eta \circ \tau_{S_i} \circ \eta^{-1}$。这尤其意味着，对于任意拉格朗日子流形 $L \subset D^*_r(N)$，我们可以写成：

$$\tau_{\hat{S}_i}(L) = \eta(\tau_{S_i}(\eta^{-1}(L))) \ .$$

通过迭代这一关系，我们推得迭代德恩扭转

$$\hat{\tau}_{m,\dots,1,0}(L) = \tau_{\hat{S}_m} \circ \dots \circ \tau_{\hat{S}_1} \circ \tau_{\hat{S}_0}(L)$$

满足

$$\hat{\tau}_{m,\dots,1,0}(L) = \eta(\tau_{m,\dots,1,0}(\eta^{-1}(L)) \ .$$

由引理 3.6.1 的证明可知，存在一个哈密顿微分同胚 ϕ'，对于任意拉格朗日子流形 L''（属于我们的类别），它都将 $\tau_{m,\dots,1,0}(L'')$ 从 $W_{K,r}$ 中移开，且其能量小于 $8Kr/\delta$。对于一个固定的拉格朗日子流形 L，我们将这一性质应用于 $L'' = \eta^{-1}(L)$，并利用 η 的支集包含于 $W_{K,r}$这一事实，推得 $\eta \circ \phi' \circ \eta^{-1}$ 将 $\hat{}\tau_{m,\dots,1,0}(L)$ 从 $W_{K,r}$中移开。 $\eta \circ \phi' \circ \eta^{-1}$ 的霍弗范数等于 ϕ' 的霍弗范数，因此小于 $8Kr/\delta$。总之：

命题 3.6.3。 采用上述记号，当 r 足够小时，引理 *3.6.1* 的结论同样适用于迭代德恩扭转 $\hat{}\tau_{m,\dots,1,0}(L)$，其中每个德恩扭转 $\hat{}\tau_{\hat{S}_i}$ 的 $\hat{}$ 支集都位于 S_i 的一个邻域中，并且该邻域可以假定为任意小。

3.6.3. 将几何转化为代数。 本节将命题 $\hat{}$中的几何不相交3.6.3结果转化为 Fukaya TPC系统 $\mathcal{C}(D^*_r(N))$ 中的同调语言。这里的目的是以同调方式表述命题 3.6.3 中的结论。这里我们将用到两个相关的 Fukaya 范畴系统，其分支与如下的扰动选择 $p \in \mathcal{P}$ 相关：

$$\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*_r N), p) \hookrightarrow \mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)} E, p) \ . \tag{42}$$

左侧的范畴是 §3.1 中出现的范畴，右侧的范畴则按照 §2.6.2中的方式构造。其对象是 E中的带标记的恰当闭拉格朗日子流形； E是 §3.5中 Lefschetz 纤维化的全空间 E 。一个重要之处涉及扰动 p的选择：先在$D^*_r N$ 上选取，再延拓到 E。因此，存在一个连接两侧的 A_∞-范畴嵌入。这些范畴组成 §2.5.4中所述的滤过 A_∞-范畴系统。此外，按照 §2.6.6中的方式，我们得到 TPC 系统$\widehat{PD}(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)}(E)))$。我们还有 §3.1中的 TPC 系统， $\widehat{\mathcal{C}}(D^*_r N) = (\mathcal{C}_p(r)$ $\mathcal{H}_{p,q})$。请注意，我们在记号中纳入了相关圆盘丛的半径 r 。这些范畴

$\mathcal{C}_p(r)$是滤过模在滤过福柯范畴 $\mathcal{A}_p(r) = \mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{ex})}(D_r^*N);\ p)$上的同伦范畴，并且我们有一个 TPC 嵌入：

$$J_{p,r} : \mathcal{C}_p(r) \hookrightarrow H(F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}_p(r)}) \ .$$

由于 E上的扰动延拓了 D_r^*N上的扰动，包含映射 (42) 诱导出拉回三角范畴函子：

$$\xi_p : PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)}(E), p)) \to H(F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}_p(r)}) \ .$$

如果我们选择用于定义比较函子 $\mathcal{H}_{p,q}$ 的扰动，使其由用于定义相应函子 E 的扰动限制而来，那么这些函子就与比较函子 $\mathcal{H}_{p,q}$ 交换。还要注意，由于 §3.6.2 中的拉格朗日球面 S_i 沿纤维 F_{x_i} 与 D_r^*N 相交，因此对应于纤维 F_{x_i} （见 §3.1）的模 F_{x_i} 是 Yoneda 模 $\mathcal{Y}(S_i)$ 的拉回。特别地，该模属于 $J_{p,r}$ 的像。在 E 中，比较函子 $\mathcal{H}_{p,q}$ 保持与 $p \preceq q$ 对应的（Yoneda）模 S_i ，因此我们推得，采用这些扰动的选择后，族 $\mathcal{F} = \{F_{x_i}\}_i$ 满足定理 3.2.1 陈述中的性质 $(*)$。下面的结果使我们离该定理的陈述更近了一步。

命题 3.6.4。 假设以上的设定和记号成立，对于 r 充分小的情形，以及选取满足 $\nu(p)$ 充分小的扰动 p ，任意精确带标记拉格朗日子流形$L \subset D_r^*(N)$都满足 $\mathcal{C}_p(r)$中的条件：

$$d_{int}\left(L, Obj\ \langle\{F_{x_0}, \ldots, F_{x_m}\}\rangle^{\Delta}\right) \leq 48Kr/\delta \ .$$

证明。 为简化记号，在本证明中记 $c = 8Kr/\delta$，并且

$$\mathcal{D}_p(E) := PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)}(E), p)) \ . \tag{43}$$

我们首先注意到，要证明该断言，只需证明：

引理 3.6.5。 在 $\mathcal{D}_p(E)$中存在如下形式的严格恰当带权三角形：

$$\Delta_i \ : \ Z_i \longrightarrow X_i \longrightarrow X_{i+1} \ , \ 0 \leq i \leq m-1 \tag{44}$$

使得 X_0 是一个与 D_r^*N、 $X_m = L$ 不相交的拉格朗日子流形的 *Yoneda* 模，并且其Z_i 具有如下形式： $\Sigma^{p(i)}\hat{}S_{x_{q(i)}}$，其中 $p(i)$ $q(i)$为整数；或者也可能是 $Z_i = 0$，且总权重不超过 $3c$。

事实上，在这种情况下，根据 [13] 中的引理 2.87 所给出的构造，我们可得存在一个类似的三角形序列

$$\Delta_i' \ : \ Z_i' \longrightarrow X_i' \longrightarrow X_{i+1}'$$

其中 Z_j' 仍具有 $\Sigma^{l(j)}\hat{}S_{x_{s(j)}}$ 或 $= 0$ 的形式，每个 Δ_i' 在 $(\mathcal{D}_p(E))^0$, 中都是恰当的，其中 $X_0' = X_0$, 且最后一项 X_m' 携带一个 $6c$-同构 $X_m' \to L$。根据引理 2.85[13]，这意味着 $d^{\mathcal{D}_p(E)\,int}(L,\ X_m') \leq 6c$。现在我们将这些三角形 Δ_i' 拉回到 $H(F$ 模 $_{\mathcal{A}_p(r)})$。由此得到以下三角形：

$$\Delta_i'' \ : \ Z_i'' \longrightarrow X_i'' \longrightarrow X_{i+1}''$$

这些三角形在 $(H(F$模$\mathcal{A}_p(r)))^0$，中是恰当的，其中 $X_0'' = \xi_p(X_0') = 0$， Z_j'' 具有 $\Sigma^{l(j)}F_{x_{s(j)}}$ （或 $= 0$）的形式，且 $d_{\mathrm{int}}(X_m''$， $L) \leq 6c$。鉴于 $\mathcal{C}_p(r)$ 包含所有纤维模 F_{x_i} 的三角完备化，我们推得，对所有 i， $X_i'' \in$Obj$(\mathcal{C}_p(r))$，至此，除了证明引理 3.6.5 外，命题 3.6.4 的证明就完成了。□

注记 3.6.6。需要强调的是，拉回 ξ_p 不一定是全忠实的。尤其是， ξ_p： $HF(S_{x_i}$， $S_{x_j}) \to$ hom$_{\mathcal{C}_{p(r)}}(F_{x_i}$， $F_{x_j})$ 不一定是单射或满射。

引理 3.6.5 的证明。为了构造所需的严格正合三角序列，我们首先固定记号 $L_{m+1} = L$, $L_{m-i} = \tau_{\hat{S}_i}(L_{m-i+1})$，使得 $L_0 = \hat{}\tau_m$,...,1,0(L)。命题 3.6.3 表明，可以通过一个霍弗范数为 $||\Phi||_H < c = \frac{8Kr}{\delta}$ 的哈密顿同伦 Φ，使 L_0 与 $D_r^*(N)$ 不相交。取 p 使得 $\nu(p) \ll c - ||\Phi||_H$，由此可知，用 TPC 的术语来说，在 $\mathcal{D}_p(E)$ 中存在一个带权严格正合三角形：

$$0 \longrightarrow L_0' \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \tag{45}$$

权重为 $2c$，其中 L_0'是一个与 $D_r^*(N)$ 不相交的拉格朗日子流形 $L_0' \subset E$的 Yoneda 模。我们将其作为序列中的第一个三角形（换言之，我们取 $X_0 = L_0'$）。

为了构造接下来的三角形，我们考虑德恩扭转的同调解释，如 Seidel 的工作中所述 [39]，但我们希望在持久性范畴中表达其结果。具体而言，我们声称在 $\mathcal{D}_p$（E）中 我们有带权严格正合三角

$$\hat{S}_{x_{m-i}} \otimes HF(\hat{S}_{x_{m-i}}, L_i) \longrightarrow L_{i-1} \longrightarrow L_i \ . \tag{46}$$

$\hat{}$ 这里的 Floer 同调群 $HF(S_{x_{m-i}}$， $L_i)$ 是一个持久模，而张量积是在持久性范畴中的张量积。此外，为避免使记号复杂化，我们将拉格朗日子流形 L_i 与其相应的滤过 Yoneda 模等同起来。

三角形（46）是 Seidel 经典 Dehn 扭转正合三角的持久性细化。按照 TPC 的术语，这一细化是一个严格正合三角，其权重记为 ϵ_i （见 [13]），此外， ϵ_i 还取决于德恩扭转支集的大小 $\tau_{\hat{S}_i}$，因而可以使其任意小。（46）的这一特征，通过 Mak-Wu 提出的德恩扭转协边方法可以最清楚地看出 [32] 该方法与 [11], 中的拉格朗日协边结果相结合，为三角形的权重提供了一个上界，该上界由 [32]中所构造协边的阴影决定。这个阴影可以通过缩小包含 $\hat{}$的邻域 S_i （该邻域包含 $\tau_{\hat{S}_i}$的支集）而尽可能接近 0 。

为继续下去，我们选取支集足够小的德恩扭转 $\tau_{\hat{S}_i}$，使得三角形（46）的权重ϵ_i 之和小于 c。现在注意到，持久模 $\hat{}HF(S_{x_{m-i}}, L_i)$ 可以看作直和 S 的同调，其中各项是初等过滤复形 $E_2(a,b) =$ k$(a,b$： $da = 0, db = a)$ 和 $E_1(c) =$ k$(c$： $dc = 0)$ 的（平移），两种情形中的生成元 x 分别以 $v(x) \in \mathbb{R}$ 和 $v(b) > v(a)$ 的值过滤。这些生成元的次数分别为： a 和 c 为 0， b 为 1。第一类滤过模可以写成一个锥

$$E_2(a,b) = Cone\,(E_1(b)[-1] \to E_1(a))$$

ˆ关于显然同构， $b \to a$。利用这一分解 HF（$S_{x_{m-i}}$， L_i），三角形（46）可以细化为 （$\mathcal{D}_p$（E））^{0} 中的一列正合三角，形式如下

$$\Delta_{i,j} \quad : \quad \hat{S}_{x_i} \otimes E_1(d_j) \to L_{i,j} \to L_{i,j+1} \tag{47}$$

对于 $0 \le j \le m(i)$，其中 $L_{i,\,0} = L_i$ 和 d_j 是类型为 a， b， c 的生成元之一，它们出现在和 S 中，后面接一个权重为 ϵ_i 、形式如下的严格正合三角形

$$0 \longrightarrow L_{i,m(i)} \longrightarrow L_{i+1} \ .$$

这一细化是八面体公理的直接推论。

注意 $\hat{S}_{x_i}$ 将所有这些构造三角形依次拼接起来，先从（45）开始，然后依次接上 $\Delta_{0,\,j}$, $0 \le j \le m(0)$，再接上$\Delta_{1,\,j}$， $0 \le j \le m(1)$，以此类推，我们便得到所需形式的一列正合三角形，其总权重不超过 $3c$ ，由此完成引理的证明。□

3.6.4. 证明的结尾。 定理 3.2.1是针对单位圆盘丛D^*N 相对于某个度量 g 表述的，而命题 3.6.4 则是针对圆盘丛 D^*_rN在 r 足够小且相对于度量 g 与 g共形等价的条件下证明的，正如 §3.5的结尾所述。

要证明定理 3.2.1 ，只需证明对于 任意 r，以及 任意 度量 g 和任意 $L \subset D^*_r(N)$，我们有

$$d_{int}(L, \mathrm{Obj}\langle \mathcal{F}_\epsilon \rangle^{\Delta})) < \epsilon + c_\epsilon \nu(p)$$

其中 $\mathcal{F}_\epsilon$ 是一个有限族（由模纤维组成），依赖于 ϵ 和 r。交错距离 $d_{int}(-)$ 是在三角持久范畴 $\mathcal{C}_p(r)$ 上针对扰动参数 p定义的，条件是 $\nu(p)$ 足够小。此外，这些扰动参数及相应的 TPC 都应构成一个相容的 TPC 族，如定义 2.5.7中所述，并且应满足定理 $*$中的假设（$*$），定理 3.2.1。

我们固定 $\epsilon > 0$以及度量 g。我们沿用前几个小节中的常数 $0 < \delta < 1$ 。我们打算使用命题 3.6.4。我们需要处理以下几点：

i. 该命题适用于度量 $\bar{\mathrm{g}} = \alpha \mathrm{g}$ ，其中 $\alpha : \ N \to [1, \infty)$ （选取时满足 $||d\varphi|| \le 1$，见备注 3.3.2），而不能直接用于 g。ii. 该命题仅适用于 r 足够小的取值。

对于 i.，我们分别用 $||-||_{\mathrm{g}}$ 和 $||-||_{\bar{\mathrm{g}}}$ 表示相对于这两种度量的范数，并注意到对于 $a \in T^*(N)$，有 $||a||_{\bar{\mathrm{g}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} ||a||_{\mathrm{g}}$。因此， $D^*_{r,\,\mathrm{g}}(N) \subset D^*_{r,\,\bar{\mathrm{g}}}(N)$（其中我们在相应圆盘丛的记号中加入度量）。因此，关于度量 $\bar{\mathrm{g}}$ 的陈述会自动推出关于度量 g的相应结论。

接下来讨论第 ii 点。我们要证明该陈述对任意取值$R > 0$都成立。我们选取 $K > 0$ 使得 $48KR/\delta \le \epsilon$，并取一个莫尔斯函数$\varphi = \varphi_{N,\,K,\,\delta}$，如命题3.3.1中所述。这确定了纤维 $\mathcal{F}_\epsilon$ 的族 F_{x_i}， 每个临界点 x_i 对应一个

φ。我们还考虑度量 $\bar{\mathrm{g}} = \alpha \mathrm{g}$，它由 g 按照备注3.3.2 中的方式缩放得到，其中$\alpha : N \to [0, \infty)$ 使得相对于 $\bar{\mathrm{g}}$，我们有 $||d\varphi|| \leq 1$。

若 R 足够小，则命题 3.6.4的表述可直接适用，无需进一步证明。假设情况并非如此，取一个充分小的 r，使得命题 3.6.4

$$d_{int}(L,\ \mathrm{Obj}\langle\{F_{x_0}, \ldots, F_{x_m}\}\rangle^{\Delta}) \leq 48Kr/\delta \leq \epsilon\frac{r}{R} \tag{48}$$

在 $\mathcal{C}_p(r)$ 中成立——这是与 $D^*_{r,\ \bar{\mathrm{g}}}(N)$ 中的精确带标记拉格朗日子流形相关的 TPC，相对于扰动数据 p，其中 $\nu(p)$ 充分小。

我们考虑如下重标度映射 $\psi_{R,r}$： $T^*N \to T^*N$, $\psi_{R,r}(q,p) = (q, \frac{r}{R}p)$。显然，$\psi_{R,r}$通过辛同胚 $(D^*_{R,\bar{\mathrm{g}}}(N)\ \frac{r}{R}\omega)$ 将其映射到 $(D^*_{r,\bar{\mathrm{g}}}(N)\ \omega)$（其中 ω是标准形式）。映射 $\psi_{R,r}$ 保持纤维 F_{x_i}。利用重标度 $\psi_{R,r}$，估计式（48）同样适用于 $(D^*_{R,\bar{\mathrm{g}}}(N)\ \frac{r}{R}\omega)$。我们强调，这个单位圆盘丛被视为带有非典范辛形式 $\frac{r}{R}\omega$ 的辛流形。相应的 TPC 记为 $\mathcal{C}_{\bar{p}}(R; \frac{r}{R}\omega)$，其中扰动数据 $\bar{p}$ 也通过重标度映射的拉回得到。在此 TPC 中，我们有不等式：

$$d_{int}(L,\ \mathrm{Obj}\langle\{F_{x_0}, \ldots, F_{x_m}\}\rangle^{\Delta}) \leq \epsilon\frac{r}{R}\ . \tag{49}$$

我们关注的 TPC 是 $\mathcal{C}_q(R)$，它与辛流形 $(D^*_{R,\bar{\mathrm{g}}}(N)\ \omega)$ 以及扰动数据 q 相关，且满足 $\nu(q)$ 足够小。容易看出，存在范畴同构（但不存在 TPC 的同构）：

$$\Phi : \mathcal{C}_{\bar{p}}\left(R; \frac{r}{R}\omega\right) \longrightarrow \mathcal{C}_{\bar{p}}(R)$$

也就是说，对于几何对象，Φ 对相关原函数进行重新缩放，

$$\Phi((L, f_L)) = \left(L, \frac{R}{r}f_L\right)$$

对于态射，它将 $\mathrm{hom}^{\alpha}_{\mathcal{C}_{\bar{p}}(R; \frac{r}{R}\omega)}(X,Y)$ 与 $\mathrm{hom}^{\alpha\frac{R}{r}}_{\mathcal{C}_{\bar{p}}(R)}(\Phi(X)\ \Phi(Y))$ 对应起来。简言之，Φ保留了所有代数结构，唯一的区别是它将所有作用量值和平移按 $\frac{R}{r}$ 进行重新缩放。因此，交错距离也按 $\frac{R}{r}$ 进行重新缩放。于是，不等式（49）在转到 $\mathcal{C}_{\bar{p}}(R)$ 时也会乘以同一个常数。因此我们得到：

$$d_{int}(L,\ \mathrm{Obj}\langle\{F_{x_0}, \ldots, F_{x_m}\}\rangle^{\Delta}) \leq \epsilon$$

在 $\mathcal{C}_{\bar{p}}(R)$ 中。现在我们考虑随 p 变化的 TPC 系统 $\mathcal{C}_{\bar{p}}(R)$，并注意到，通过$\widehat{\ }$将比较函子也从 $\mathcal{C}(D^*_{r,\bar{\mathrm{g}}}(N))$ 向前推送，这些范畴构成一个$\widehat{\ }$系统 $\mathcal{C}(D^*_R N)$，使得性质（$*$）相对于同一个族 $\mathcal{F}_\epsilon$ 得以满足。最后，$\widehat{\ }$定理 3.2.1 的结论在 $\mathcal{C}(D^*_R N)$ 中对 $R = 1$ 得以满足。

注记 3.6.7。我们在该定理的证明中得到的不等式并非最优，因为在论证中我们没有尝试将纤维 F_{x_0}，……，F_{x_m} 的数量降至最少，也没有尝试优化构造中的其他选择。因此，在结尾处

我们得到一个不等式，声称在我们的选择下且当 $\nu(p)$ 足够小时，相关的交错距离不大于 ϵ；而在最优选择下，预期的不等式应为：交错距离以上界 $\epsilon + c_\epsilon \nu(p)$ 为界（其中某个通用常数为 c_ϵ，且当 $\nu(p)$ 足够小时）。

3.7. **定理 3.2.1 推出了定理 A i. 以及更多结论。** 定理 A i. 声称，（伪）度量空间 $(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N)\ d_\gamma)$ 按照定义 2.2.1的意义是 TPC-可逼近的。这里 d_γ 是谱度量，其定义将在下文的注 3.7.1中回顾。

为了证明这一结论，我们需要证明，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 ϵ-TPC-逼近数据 $\Phi = \{\Phi\}_\eta$, $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_{\epsilon,\eta}\}$ 如定义 2.2.1所述。根据注 2.2.2 b，只需证明这一结论对 $\eta < \epsilon$ 充分小时成立。当然，我们将利用定理3.2.1推导出这类数据的存在性。实际上，我们将给出两种这样的数据，各有其优点。

注记 3.7.1。 为完整起见，我们简要描述定义在d_γ上的谱伪度量 $\mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$。对于 L, $L' \in \mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$ 我们考虑持久模$HF(L,\ L';\ H^{L,\ L'})$ 其中 $H^{L,\ L'}:\quad [0,1] \times D^*N \to \mathbb{R}$ 是标准 Floer 理论意义下的容许哈密顿函数（另见 §2.6.2）。我们定义

$$v(L, L'; H^{L,L'}) = b_{max}(HF(L, L'; H^{L,L'})) - b_{min}(HF(L, L'; H^{L,L'}))\ .$$

这里，若 $\mathcal{M}$ 是一个只有有限条条形的持久模，且满足 $\mathcal{M} = \oplus_{i\in I}[a_i, b_i)\oplus_{j\in J}[c_j, \infty)$（其中 $a_i,\ b_i,\ c_j \in \mathbb{R},\ a_i < b_i$），则令 $b_{max}(\mathcal{M}) = \max_{j\in J} c_j$，并令 $b_{min}(\mathcal{M}) = \min_{j\in J} c_j$。谱度量的定义如下：

$$d_\gamma(L, L') = \limsup_{||H^{L,L'}||_{C^0}\to 0} v(L, L'; H^{L,L'})\ .$$

众所周知，证明其有限且满足伪度量的性质并非易事。$\mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$ 中的对象是标记拉格朗日子流形，它们带有固定的原函数和分次。谱度量不会“感知”分次和原函数的选择；用本文的记号来说，对于所有 $r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{R}$，都有 $d_\gamma(T^r\Sigma^s L,\ L') = d_\gamma(L,\ L')$（这里 T 表示分次的平移，Σ 表示“作用量”的平移）。因此，这个伪度量可下降到 D^*N 中恰当闭拉格朗日子流形构成的实际空间，而无需附加任何结构；值得注意的是，它在这个空间上是非退化的。

3.7.1. 局部 ϵ-*TPC*-逼近数据。我们在此旨在运用定理3.2.1 证明我们可以获得逼近数据$(\Phi,\ \mathcal{F})$，使其满足定义$(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N)\ d_\gamma)$2.2.1 的要求，其中范畴 $\mathcal{Y}_\eta$ 具有 $\mathcal{C}_p$ 的形式，从而完成定理A i 的证明。

定理3.2.1 陈述中使用的可逼近性类型（即定义2.5.7）与定理2.2.1 中使用的定义A所采用的类型之间存在一些差异。

首先，定理 3.2.1 使用的是 $\mathcal{C}_p^\epsilon$ 上的交错伪度量，而不是平移不变伪度量。不过，根据备注 2.2.4，定理 3.2.1 中所声称的不等式

对于平移不变交错伪度量 $d_{int}^{\mathcal{C}_p^\epsilon}$ 同样成立，该伪度量定义于方程（3）中。

第二个区别是，定义 2.5.7 中包含一个形如 $d_{\mathrm{int}}(-,-) < \epsilon + c_\epsilon \nu(p)$ 的不等式，而定义 2.2.1 中则没有 $c_\epsilon \nu(p)$ 这一项。为处理这一点，取某个正的 $\epsilon' < \epsilon$，并回顾注 3.2.2：定理 3.2.1 中的 TPC 系统 $\mathcal{C}(D^*N) = \{\mathcal{C}_p\}$，可以通过构造 Lefschetz 纤维化 $h\colon E \to \mathbb{C}$，为这个 ϵ' 定义，见 §3.5（另见注 3.7.5）。为避免混淆，我们会在记号中加入 ϵ'，因此写作 $\mathcal{C}_p^{\epsilon'}$ 和 $\widehat{\mathcal{C}}^{\epsilon'}(D^*N)$。我们将 Yoneda 嵌入在对象上的作用记为

$$\mathcal{Y}_{\epsilon',p} : \mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p^{\epsilon'}) \ .$$

定理 3.2.1 表明，对于该 ϵ'，存在一个有限纤维族 $\{F_{x_1}, \dots F_{x_l}\}$，使得对于任意 δ 充分小的集合 $\mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$ 都是 ϵ'-可逼近的；按照定义2.5.7，即由模族 $\mathcal{F}_{x_i}$ 逼近，该模族对应于每个三角持久范畴中的 F_{x_i}，且 $\mathcal{C}_p^{\epsilon'}$ 满足 $\nu(p) \leq \delta$。在此情况下，令：

$$\Phi_{\epsilon,\eta} = \mathcal{Y}_{\epsilon',p_\eta}$$

对于依赖于 η 的 p_η，并选择 ν 使得 $\nu(p_\eta) < \eta/4$，记 $\mathcal{F}_{\epsilon,\ \eta} = \{F_{x_1}, \dots, F_{x_l}\}$，则该系统

$$(\Phi, \mathcal{F}) = (\Phi_{\epsilon,\eta}, \mathcal{F}_{\epsilon,\eta})$$

相对于 ϵ，当 η 足够小时（使得 $\eta/4 < (\epsilon - \epsilon')/c_{\epsilon'}$），满足定义 2.2.1 中的第二点。

第三个也是最后一个区别在于，定义 2.2.1中的第一点并未出现在定义2.5.7中。这与映射 Φ 的定义域上的谱度量和这些映射的目标上的交错伪度量之间的比较有关。因此，为了证明如上所述的 $(\Phi,\ \mathcal{F})$ 是 ϵ的 TPC 逼近数据

$$(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N), d_\gamma) \ ,$$

采用 §2.2.2 中的术语，接下来需要证明$\mathcal{Y}_{\epsilon',p}$ 也满足定义 2.2.1中的第一条，即 $\mathcal{Y}_{\epsilon',p}$ 是一个 (A,η)-准等距嵌入，其中 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p^{\epsilon'})$ 上的伪度量是交错度量，定义域上的伪度量是 d_γ，且常数 $A > 0$ 可以选取得与其他所有选择无关。

我们将看到，该结论对 $A = 2$成立。我们先重新考察方程（1）中的交错距离定义。一个等价的定义是

$$d_{int}(X,Y) = \inf\{r \geq 0 \mid \exists\ \phi \in \hom^r(X,Y), \psi \in \hom^r(Y,X) \\ \text{such that } \psi \circ \phi = i_{0,2r}(id_X),\ \phi \circ \psi = i_{0,2r}(id_Y)\} \ ,$$

其中 我们回顾一下 X，$Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，$\mathcal{C}$ 是一个持久范畴（参见 §2.1.2），并且

$$i_{\alpha,\beta} : \hom^\alpha(X,Y) \to \hom^\beta(X,Y)$$

是持久性结构映射。交错类型伪度量的另一种定义如下：

$$D_{int}(X,Y) = \inf\{a+b \mid \exists\ \phi \in \hom^a(X,Y), a \geq 0, \psi \in \hom^b(Y,X), b \geq 0 \\ \text{such that } \psi \circ \phi = i_{0,a+b}(id_X),\ \phi \circ \psi = i_{0,a+b}(id_Y)\} \tag{50}$$

立即可见：

$$\frac{1}{2} D_{int}(X,Y) \leq d_{int}(X,Y) \leq D_{int}(X,Y)\ . \tag{51}$$

显然，这是一个 也可以将距离稳定化 D_{int}，正如公式（3）中所示，从而将 g

$$\bar{D}_{int}(X,Y) = \inf_{r,s\in\mathbb{R}} D_{int}(\Sigma^r X, \Sigma^s Y)$$

并且我们再次得到 $\frac{1}{2}\bar{D}_{int} \leq \bar{d}_{int} \leq \bar{D}_{int}$。相应的交错型伪度量 $\bar{D}^{\mathcal{C}_p^\epsilon}$ 定义在各个范畴 $\mathcal{C}_p^\epsilon$ 上；对于所有 $L,\ L' \in \mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$，我们可以考虑极限：

$$\hat{D}_{int}(L,L') = \limsup_{\nu(p)\to 0} \bar{D}_{int}^{\mathcal{C}_p^\epsilon}(L,L')\ .$$

ˆ 其中，极限取于范畴系统 $\mathcal{C}_p^\epsilon(D^*N)$ 中。这再次是定义在 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N)$ 上的伪度量。我们断言：

$$\hat{D}_{int}(L,L') = d_\gamma(L,L')\ \ \forall\ L,L' \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N) \tag{52}$$

这一恒等式在该领域广为人知，其论证可见 [13]中的 3.4.1.2.(i)（另见其中的注释 3.26）。

考虑到 $\nu(p_\eta) < \eta/4$ 以及 $\nu(p)$ 由 (24) 给出的定义，显然可知，(52) 蕴含映射 $\mathcal{Y}_{\epsilon',\ p_\eta}$ 是 $(2,\eta)$-准等距嵌入，只要 η 足够小。因此定理Ai的证明至此完成。

注释 3.7.2. 从上述论证可以清楚看出，与伪度量相比，定义D_{int} 50 中的交错型伪度量 d_{int} 与谱度量的联系更为直接，该伪度量见定义 1。另一方面，将 d_{int}应用于过滤链复形的同伦范畴时，它与持久性理论中的瓶颈距离一致——例如，可通过 §2 中的等距定理看出。2 [36] 因此，从某种意义上说，它是更“标准”的概念。

3.7.2. 环境 ϵ-*TPC*-逼近数据。 我们将在此看到，定理3.2.1的证明还提供了另一种 ϵ-逼近数据（沿用第 §2.2.2节的术语），适用于空间 $(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D_r^*N)\ d_\gamma)$。首先要注意的是，与 §3.7.1不同，此处我们得到的是 缩回对象 逼近数据——见推论 3.7.4。

对于固定的 $\epsilon > 0$，考虑某个正的 $\epsilon' < \epsilon$。回顾（43）中的持久性导出 Fukaya 范畴

$$\mathcal{D}_p(E) = PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)}(E),p))$$

以及引理 $\hat{}S_{x_i} \in \mathcal{L}ag^{(ex)}(E)$（$E$）中出现的拉格朗日球面，它们可按引理 3.6.5 中所述为 ϵ'（对于某个较小的 r）构造。相应的 Yoneda 嵌入给出映射：

$$\mathcal{Y}'_{\epsilon',p} : \mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*_r N) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{D}_p(E)) \ .$$

$\hat{}\hat{}$ 我们定义族 $\mathcal{F}'_\epsilon = \{\dots, S_{x_i}, \dots\}$，其中 S_{x_i} 表示相应拉格朗日球面的 Yoneda 模（这些对象在比较函子 $\mathcal{H}_p$、$_q$、 $p \preceq q$作用下保持不变）。我们令 Φ'_ϵ、$_\eta = \mathcal{Y}'_{\epsilon'}$、$_{p_\eta}$，其中 ν (p_η) $\leq \eta/4$，与 §3.7.1 中一样。这里，扰动系统 p是相对于 $\mathcal{L}$ag$^{(ex)}$(E)定义的，因此 ν(–)是针对定义在 E上的哈密顿量计算的。证明 Φ'_η 是一个 (2, η)-准等距嵌入的方法与 §3.7.1 中相同，因为即使交错型距离 D_{int} 是在较大的范畴 $\mathcal{D}_p(E)$中而不是在 $\mathcal{C}_p(r)$中计算，恒等式 (52) 仍然成立（这同样归因于 [13] 中 3.4.1.2 (i) 的论证）。

仍需证明，对于足够小的 η，在每个 $\mathcal{D}_{p_\eta}(E)$ 中， $\mathcal{F}'_\epsilon$是 $\mathcal{L}$ag$^{(ex)}(D^*_r N)$ 的一个 ϵ-逼近族的缩回对象。

为证明这一点，我们按照命题 3.6.4的证明进行。由该命题的证明可知，存在一个序列（3.6.3），其中的恰当三角形位于 $\mathcal{D}_p(E)$中：

$$\Delta'_i \ : \ Z'_i \longrightarrow X'_i \longrightarrow X'_{i+1} \ , \ 0 \leq i < m \tag{53}$$

其中 Z'_j 的形式为 $\Sigma^{l(j)}\hat{}S_{x_{s(j)}}$ 或 $= 0$，且每个 Δ'_i 在 $(\mathcal{D}_p(E))^0$，中恰当，其中 X'_0 是一个与 $D^*_r N$ 不相交的拉格朗日子流形的 Yoneda 模，并且存在一个 $6c$-同构

$$f : X'_m \to L \ .$$

我们通过在过滤 A_∞-模的预三角范畴中附加锥，来表示（53）中的所有迭代锥（这是可行的，因为序列（$(\mathcal{D}_p(E))^0$ ）位于其中），并考虑显然的复合 u_j : $X'_0 \to X'_j$。序列（53）诱导出一个新的迭代锥序列（在同一范畴中）：

$$\tilde{\Delta}_i \ : \ Z'_i \longrightarrow \tilde{X}_i \longrightarrow \tilde{X}_{i+1} \ , \ 0 \leq i < m \tag{54}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$与 X_i = 锥（u_i）。我们首先指出，由于 X'_0 是一个 Yoneda 模，所有 X_i 都是 $\mathcal{D}_p$(E) 中的对象。现在我们来考虑锥附加

$$X'_0 \xrightarrow{u_m} X'_m \longrightarrow \tilde{X}_m \ .$$

由于 X'_0 是一个与 $D^*_r N$ 不相交的拉格朗日子流形的 Yoneda 模，因此复合 $f \circ u_m$ 链同伦于零映射。因此，映射 f 诱导出$\tilde{}$ $\tilde{}$另一个 $6c$-同构 f: $X_m \to L \oplus TX'_0$。这意味着

$$d^{\mathcal{D}_p(E)}_{\text{r-int}}(L, \tilde{X}_m) \leq 6c$$

而且，在 $(\mathcal{D}_p(E))^0$ 中，我们有 $\tilde{X}_0 \cong 0$。

因此，与命题 3.6.4类似，我们得到：

推论 3.7.3。 使用上述记号，当 r 充分小时，并且选择的扰动 p满足 $\nu(p)$充分小时，任意精确带标记拉格朗日子流形 $L \subset D_r^*(N)$都满足 $in\mathcal{D}_p(E))$:

$$d_{r\text{-}int}(\ L\ , Obj\ \langle\{\hat{S}_{x_0},\ldots,\hat{S}_{x_m}\}\rangle^{\Delta}\ ) \leq 48Kr/\delta\ .$$

随后，可以在这个略有不同的情形下，沿用定理 3.2.1 的证明中 3.6.4 节所述的论证，从而消除对 r、 K、 δ 的依赖，并得出与 $(\Phi$、 $\mathcal{F})$ 的类似陈述相呼应的结论:

推论 3.7.4。 在上述情形下，对于固定的 $\epsilon > 0$ ， 我们有:

a. 存在一个如前所述的 *Lefschetz* 纤维化 h : $E \to \mathbb{C}$ ，使得拉格朗日球面 $\{S_{x_0},\ldots,S_{x_m}\}$ 的 *Yoneda* 模族 $\mathcal{F}'_\epsilon$ ˆ ˆ 是适用于 $(\mathcal{L}ag^{(ex)}(D_r^*N)\ d_\gamma)$ 的 ϵ-逼近族，在 $\mathcal{D}_p(E)$ 中对每个充分小的 p （满足 $\nu(p)$）均成立。此外，$(\Phi', \mathcal{F}'_\epsilon)$ 是适用于 $(\mathcal{L}ag^{(ex)}(D_r^*N)\ d_\gamma)$ 的 *TPC* 缩回对象 ϵ-逼近。

b. 对于每个 $L \in \mathcal{L}ag^{(ex)}(D_r^*N)$，都存在一个与 D_r^*N 不相交的 $X_L \subset \mathcal{L}ag^{(ex)}(E)$，使得

$$d_{int}(L \oplus X_L, Obj\ \langle\{\hat{S}_{x_0},\ldots,\hat{S}_{x_m}\}\rangle^{\Delta}) < \epsilon + c_\epsilon\nu(p)$$

在范畴 $\mathcal{D}_p(E)$ 中，并且当 $\nu(p)$ 足够小时。

尽管上述结果是在 r 较小时得到的，但鉴于我们可以适当地构造 Lefschetz 纤维化，同样的结果也可推得适用于 r 的所有取值。

注 3.7.5. a. §3.7.1 中的逼近数据（$\Phi, \mathcal{F}_\epsilon$）有以下优点：首先，相对于余切圆盘丛 D^*N 而言，它更具内在性；其次，它不涉及缩回对象。关于第一点，固定某个 $\epsilon > 0$。范畴 $\mathcal{C}_p$ 以及 Yoneda 嵌入 $\mathcal{Y}_p$: $\mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N) \to$ Obj($\mathcal{C}_p$) 在对象层面的部分所构成的族 Φ ，如 §3.1 中那样，是针对某个容许的扰动数据选择 p 构造的，并且独立于 ϵ 及任何其他辅助构造。当我们固定一组纤维 $\mathcal{F}_\epsilon$ ，并要求相应的模由比较映射 $\mathcal{H}_{p,q,p} \preceq q$ 保持时，才会涉及 ϵ ——这就是我们的假设（$*$）。定理 3.2.1 的证明表明，可以找到保持与 $\mathcal{F}_\epsilon$ 相关联的有限族模的比较映射，但尚不清楚是否存在一种比较映射的选择，能保持每个纤维模 F_x, $\forall x \in N$（另见注 3.2.2）。

b. 当前小节中描述的逼近数据（Φ'， $\mathcal{F}'_\epsilon$）高度依赖于 Lefschetz 纤维化 $h : E \to \mathbb{C}$ 的选择，并且也仅是缩回逼近。另一方面，该范畴

$$\mathcal{D}_p(E) = PD\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\text{ag}^{(ex)}(E), p)$$

具有这样的性质：其所有对象都可以写成闭拉格朗日子流形的 Yoneda 模的有限迭代锥，因此，对于所有 $X, Y \in$Obj($\mathcal{D}_p(E)$)，每个 hom$_{\mathcal{D}_p(E)}(X, Y)$ 都是有限型持久模（也就是说，相应的条形码只包含有限条条）。此外，缩回 ϵ-逼近族 $\mathcal{F}'_\epsilon$ 由拉格朗日球面 $S_{x_i} \subset E$的 Yoneda 模 ˆ 组成。相比之下，对于族 $\mathcal{F}_\epsilon$ 中定义为范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\text{ag}^{(ex)}(D^*N)\ p)$ 上的模、对应于纤维的元素，这一点可能并不成立

此外，对于两个纤维 F_{x_1}, F_{x_2}，$\hom^{\mathcal{C}_P}(F_{x_1}, F_{x_2})$ 并不等同于 Floer 同调 $HF(F_{x_1}, F_{x_2})$ 的某种变体；事实上，它不一定是有限型的。

4. 过滤情形下的 Abouzaid 分裂原理与可逼近性

本节证明定理 A中的第二点和第三点。为此，我们建立 Abouzaid 提出的分裂生成判据的持久化版本 [1] （关于闭单调情形，参见 [43]）。关键在于，通过开闭映射在环境辛流形的量子同调中到达单位元所需的能量代价，可以直接用缩回可逼近性来诠释，后者定义见 §2.2.2。我们给出两个计算示例，从而完成定理 A的证明。在此过程中，我们将 Abouzaid 结果中的各项要素调整到这一持久性情形，包括开闭映射、闭开映射及其与霍赫希尔德同调持久化版本之间的关系。

4.1. 结果。设 (X,ω) 是一个单调辛流形。我们在 §2.6.3 所述的情形下进行讨论。回顾一下，给定一个诺维科夫元素 $\mathbf{d} \in \Lambda_0$，则 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 是闭、分次且单调的拉格朗日子流形 $L = (L, a_L, s_L)$ 的集合，其马斯洛夫指数 2 圆盘计数等于 $\mathbf{d}$。对于本章余下部分，我们固定一个 $\mathbf{d} \in \Lambda_0$ 的选择。回忆 §2.6.6 中，我们将一个由扰动数据空间 $\mathcal{P}$ 索引的 A_∞-范畴同伦系统（定义见 §2.5.8） $\widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})})$ 与 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 联系起来，使得每个过滤且严格含幺的 A_∞-范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}; p)$，$p \in \mathcal{P}$，都以 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 作为对象集合。我们常将该系统简写为 $\widehat{\mathcal{A}} := \widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})})$，并将每个分支写作

$$\mathcal{A}_p := \mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}; p) \ .$$

我们省略流 fo形 X 函rom the notati数 it is also fixed for th余 inder of th下 ti 的部分。子集 $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 对任意扰动数据⌢ ⌢$p \in \mathcal{P}$ 都会诱导出 $\mathcal{A}_p$ 的一个全 A_∞子范畴 $\mathcal{B}_p$。最终，这将导出 $\mathcal{A}$ 的一个子系统 $\mathcal{B}$。

以下是根据定义2.5.8中 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})} \subset \mathrm{Obj}(\widehat{\mathcal{A}})$意义下，关于缩回可逼近性的几何判据，是本节的主要结果。

定理 4.1.1. 设 $\epsilon > 0$。若存在有限子集 $\mathcal{F}_\epsilon \subset \mathcal{L}ag^{(mon,\mathbf{d})}$，使得余极限持久开闭映射

$$\widehat{OC}\colon PHH_*(\widehat{\mathcal{F}_\epsilon}) \to QH^{*+n}(X,\Lambda)_{\mathbf{d}}$$

满足

$$i_{0,\epsilon}(u_{\mathbf{d}}) \in image\left(PHH^\epsilon(\widehat{\mathcal{F}_\epsilon}) \to QH^\epsilon(X,\Lambda)_{\mathbf{d}}\right)$$

其中 $u_{\mathbf{d}} \in QH^0(X,\Lambda)_{\mathbf{d}}$ 是量子上同调单位元 $u \in QH(X,\Lambda)$到 $QH(X,\Lambda)_{\mathbf{d}}$ 的投影，而 $i_{0,\epsilon}$ 是量子上同调持久模结构映射的一部分，则 $\mathcal{L}ag^{(mon,\mathbf{d})}$可由 $\mathcal{F}_\epsilon$在 $PD(\widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}ag^{(mon,\mathbf{d})}))$ 中作 $\frac{\epsilon}{2}$-缩回逼近。

开闭映射 OC、我们取余极限的方式，以及定理4.1.1的陈述中出现的其他各种概念，包括持久性 Hochschild 同调 $PHH(-)$，都将在下文明确说明。现在，我们将定理 (ii)和 (iii) 中的要点重述为定理 A 的推论：4.1.1。

推论 4.1.2。 类 $\mathcal{L}ag^{(mon,\mathbf{0})}(S^2)$ 和 $\mathcal{L}ag^{(wex)}(\mathbb{T}^2)$ 是 *TPC* 缩回可逼近的。

定理的证明4.1.1见 §4.2。推论的证明4.1.2 见 §4.3。定理 A 最后两点的证明直接由此推论得出，并在 §4.4中完成。

4.2. **定理 4.1.1的证明**。 我们将定理 4.1.1 的证明分成若干步骤。§4.2.1介绍 Abouzaid 代数分裂生成判据的一个持久化版本。命题 4.2.1表明，缩回可逼近性自然地存在于这一情形中。§4.2.2 回顾滤过Fukaya范畴定义中的一些主要技术要素 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})};\ p)$，并遵循 [2]，详尽介绍这些内容，以便我们能在接下来的章节 4.2.3 、 4.2.4 、 4.2.5 中，在持久性情形下建立分裂生成判据所需的主要几何构造。最后，在 §4.2.6 中，我们将这些构造整合起来，并证明定理 4.1.1。

4.2.1. 缩回可逼近性。设 $\mathcal{A}$ 是定义在 Λ 上的一个过滤 A_∞-范畴，例如 §4 开头处的某个滤过 Fukaya 范畴 $\mathcal{A}_p$，并设 $\mathcal{B} \subset\in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$。我们将 $\mathcal{B}$ 视为 $\mathcal{A}$ 的一个满 A_∞-子范畴。与通常约定不同，此处我们不假设 $\mathcal{B}$ 在平移或平移变换下闭。我们定义一个过滤的 $(\mathcal{A},\mathcal{A})$-双模 $\mathcal{B}$，称为 $\mathcal{B}$-条形双模。对于 $\mathcal{A}$ 中的两个对象 A 和 B，采用附录 A 中的记号，我们定义

$$\overline{\mathcal{B}}(A,B) := \mathcal{Y}^r(A) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{Y}^l(B) = \bigoplus_{d\geq 0} \bigoplus_{L_0,\dots,L_d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})} \mathcal{A}(A, L_0, \dots, L_d, B)\ .$$

这里 $\mathcal{Y}^l$ 和 $\mathcal{Y}^r$ 分别表示左、右过滤 Yoneda 嵌入，定义见附录 A.3.1；我们默认将 $\mathcal{Y}^r(A)$ 和 $\mathcal{Y}^l(B)$ 视为 $\mathcal{B}$ 上的 A_∞-模。张量积 $\otimes_{\mathcal{B}}$ 是关于 $\mathcal{B}$ 的通常导出张量积。注意，$\_\,\mathcal{A}(A,B)$ 并非 $\mathcal{B}(A,B)$ 中的一个直和项。我们常将纯张量 $\gamma_1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_d \otimes \gamma_2 \in \mathcal{A}(A, L_0, \dots, L_d, B)$ 写作 $\vec{\gamma}$。巴微分 $\mu^{\mathrm{bar}}_{0|1|0}$ （我们也记作 d_{bar}）定义如下

$$\begin{aligned}\mu^{\mathrm{bar}}_{0|1|0}(\vec{\gamma}) :=& \sum_{i=0}^{d} \mu_{1+i}(\gamma_1, a_1, \dots, a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_d \otimes \gamma_2 \\ &+ \sum_{i\leq j} \gamma_1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \mu_{j-i}(a_i, \dots, a_j) \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_d \otimes \gamma_2 \\ &+ \sum_{i=1}^{d+1} \gamma_1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \mu_{d-i+2}(a_i, \dots, a_d, \gamma_2)\end{aligned}$$

而高阶运算 $\mu^{\mathrm{bar}}_{l|1|r}$ 则通过以下方式定义

- 对于 $l \geq 1$ 和 $r = 0$:

$$\mu^{\mathrm{bar}}_{l|1|0}(x_1, \dots, x_l, \vec{\gamma}) := \sum_{i=0}^{d} \mu_{l+i+1}(x_1, \dots, x_l, \gamma_1, a_1, \dots, a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_d \otimes \gamma_2$$

- for $l = 0$ and $r \geq 1$:

$$\mu^{\mathrm{bar}}_{0|1|r}(\vec{\gamma}, y_1, \ldots, y_r) := \sum_{i=1}^{d+1} \gamma_1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \mu_{d+r-i+2}(a_i, \ldots, a_d, \gamma_2, y_1, \ldots, y_r)$$

- for $l, r \geq 1$: $\mu^{\mathrm{bar}}_{l|1|r} = 0$

不难看出， $\mathcal{B}$ 是过滤的，因为 $\overline{\mathcal{A}}$ 是。显然存在一个长度过滤

$$F^N\overline{\mathcal{B}}(A, B) = \bigoplus_{d=0}^{N} \bigoplus_{L_0,\ldots,L_d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})} \mathcal{A}(A, L_0, \ldots, L_d, B), \quad N \geq 0, \tag{55}$$

它诱导出 A_∞-双模 $F^N\mathcal{B}$。 $\mathcal{A}$ 上的 A_∞-结构映射以显然的方式诱导出一个 $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$-双模的过滤态射

$$\mu := \mu^{\overline{\mathcal{B}}} \colon \overline{\mathcal{B}} \to \Delta_{\mathcal{A}}$$

其中 $\Delta_{\mathcal{A}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的对角双模。

现在令 $K \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$，并考虑过滤链映射

$$\mu^{\overline{\mathcal{B}}}(K) := \mu^{\overline{\mathcal{B}}}_{0|1|0} \colon \overline{\mathcal{B}}(K, K) \to \mathcal{A}(K, K)\ . \tag{56}$$

记

$$[\mu^{\overline{\mathcal{B}}}(K)] \colon H(\overline{\mathcal{B}}(K, K)) \to H(\mathcal{A}(K, K))$$

由 $\mu^{\mathcal{B}}(K)$。诱导的持久模态射。

在上述语境中，给定 $\mathcal{A}$ 的一个对象 K，我们用 $e_K \in \mathcal{A}^{\leq 0}(K, K)$ 表示它的严格单位元，并用 $[e_K] \in \hom^0_{PD(\mathcal{A})}(K, K)$ 表示它在 TPC $PD(\mathcal{A})$ 中的同调类。

最后，在陈述主要结果之前，我们还需要引入一个概念。设 V 和 W 为持久模，且 $f \colon V \to W$ 为一个持久化态射。我们将使用一种度量，用以估计将 W 中的元素与 f 的像分隔开的能量间隙。更确切地说，对于 $w \in W_r$，我们定义：

$$R(w, f) := \inf\left\{ s \geq r \mid \exists v \in V_s,\ f_s(v) = i^W_{r,s}(w) \right\} \tag{57}$$

其中 $i^W_{r,s} \colon W_r \to W_s$ 表示 W 的持久性结构映射。若对所有 $s \geq r$，都有 $i^W_{r,s}(w) \notin \mathrm{image}(f_s)$，则定义 $R(w, f) = \infty$。

下文中，我们用 $\mathcal{F}\mathbf{Ch}$ 表示滤过 dg-范畴，其对象为滤过链复形 Λ上的滤过链复形，并用 $H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})$ 表示其上同调次数 0处的持久同调范畴，该范畴是一个 TPC（见 [13, 第 2.5 节。2]）。回顾一下，按照我们的约定，定义在 Λ 上的滤过链复形是一个定义在 Λ上的链复形，并由实数轴索引的递增Λ_0子复形序列进行过滤（见附录A.1）。

命题 4.2.1. 设 K 为 $\mathcal{A}$中的一个对象， $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 的有限满 A_∞子范畴，且$\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。以下陈述等价：

(1) 估计 $R([e_K], [\mu^{\mathcal{B}}(K)]) \leq \alpha$ 成立。*(2)* 映射 $\mu^{\mathcal{B}}(K) \in \hom_{(H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}))^0}(\mathcal{B}(K, K)\ \mathcal{A}(K, K))$ 是 α 同构于 $H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})$。

(3) 对象 K 在 $\frac{\alpha}{2}$-可由收缩逼近于 $PD(\mathcal{A})$ 由族 $Obj(\mathcal{B})$ 按照定义 2.2.3的意义。

此外，上述每个陈述对 K 的 $\mathcal{A}$ 的所有对象成立，当且仅当将$\mu^{\mathcal{B}}(K)$ 视为一个态射时，其锥在$(\mathcal{A},\mathcal{A})$-双模中是 α-无圈的，且属于 $H^0(\mathcal{F}bimod_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$。

关于 r-同构的概念适用于 $r \geq 0$，并在 [13] 中引入，且在 §2.4.4中回顾；r-无圈性则在 §2.1.3中回顾。

注 4.2.2。 请注意，根据 [13, 引理 2。85], ，如果命题4.2.1中的某个陈述成立，那么 $H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})$ 中 $\mathcal{B}(K,K)$ 与 $\mathcal{A}(K,K)$ 之间的交错距离为 $\leq \alpha$。

在证明命题 4.2.1之前，我们先给出两个简单的辅助结果，它们将在证明中使用。设 $\mathcal{C}$ 为一个持久范畴，并考虑对象 R 和 X 属于 $\mathcal{C}$。度量$d_{\text{r-int}}(R,X)$ 已在（2）中定义。我们通过以下方式定义一个类似的度量 $d'_{\text{r-int}}$：

$$d'_{\text{r-int}}(R,X) := \frac{1}{2}\inf\Big\{r_1+r_2 \,\Big|\, r_1,r_2\geq 0,\, \exists\varphi:\Sigma^{r_1}R\longrightarrow X,\, \exists\psi:\Sigma^{r_2}X\longrightarrow R \\ \text{such that } \psi\circ\Sigma^{r_2}\varphi = \eta^R_{r_1+r_2}\Big\}.$$

当然，我们有

$$d'_{\text{r-int}}(R,X) \leq d_{\text{r-int}}(R,X) \leq 2d'_{\text{r-int}}(R,X).$$

在命题 4.2.1 的证明中，使用 $d'_{\text{r-int}}$ 代替 $d_{\text{r-int}}$更为方便。这是可行的，因为它们的平移不变版本相同：

引理 4.2.3。 对于 $\mathcal{C}$ 的任意对象 R 和 X，我们有

$$\bar{d}_{r\text{-}int}(R,X) = \bar{d}'_{r\text{-}int}(R,X)$$

其中 $d'_{r\text{-}int}$ 的定义与（3）中的相同，只需将 $d_{r\text{-}int}$ 替换为 $d'_{r\text{-}int}$（R，X）。

证明。 设 $d'_{\text{r-int}}(R,X) < r$。令 $\varphi:\Sigma^{r_1}R\longrightarrow X$，且 $\psi:\Sigma^{r_2}X\longrightarrow R$，使得 $\psi\circ\Sigma^{r_2}\varphi = \eta^R_{r_1+r_2}$且 $r_1+r_2 = 2r$。不妨设 $r_1\geq r_2$，并定义 $\alpha := \frac{r_1-r_2}{2}$。注意到 $r-\alpha = r_2$，于是 $\Sigma^{-\alpha}\varphi$: $\Sigma^r R\to\Sigma^{-\alpha}X$ 且 ψ: $\Sigma^{-\alpha+r}X\to R$ 表明 $d_{\text{r-int}}(R,X) < r$。反向不等式显然成立。□

命题的证明4.2.1。 我们首先假设（1）并证明（3）。我们构造附录 A 中图 A.4 的 TPC 版本 [1, 附录 A]。我们将此图称为（过滤的）Abouzaid 的代数分裂生成图。

设 K 是 $\mathcal{A}$ 的一个对象，且 $\vec{L} = (L_0, \ldots\ldots, L_d)$ 是全子范畴 $\mathcal{B}$ 的对象元组，$N\geq 1$ 满足单位元 $[e_K]$ 属于 $\mu^{\mathcal{B}} = \mu^{\mathcal{B}}(K)$ 的像（此处省略 K 以简化记号），并将其限制到 $F^N\mathcal{B}^{\leq\alpha}(K,K)$。回顾一下，此处 F^N 表示 $\mathcal{B}$ 的长度过滤中的第 N 项（如 55 中所述），而指数 $\leq\alpha$ 表示实过滤级。

考虑滤过扭曲复形

$$T_{\vec{L}}K := T_{L_0}\cdots T_{L_d}K$$

$\vec{}$通过复合元组中的对象所产生的扭曲得到 L，如第A.9.3 节所述，并考虑包含映射

$$i_{\vec{L},K}\colon K \to T_{\vec{L}}K$$

它是由严格单位元诱导的扭曲复形态射的复合（见 §A.9.3）。令 $N \geq 1$。我们将 i_K^N 定义为对所有映射 $i_{\vec{L},K}$ 取直和，其中 $\vec{L}$ 遍历 $\mathcal{B}$ 中长度为 $\leq N+1$的所有对象元组。我们定义滤过扭曲复形

$$U_K^N := \mathrm{Cone}(i_K^N)$$

及其像

$$\mathcal{U}_K^N := \widetilde{\mathcal{Y}}_{U_K^N}$$

$\widetilde{}$在滤扩展 Yoneda 嵌入 $\mathcal{Y}\colon FTw\mathcal{A} \to F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$下，该嵌入在 §A.9.2中构造。根据构造，链复形 $\mathcal{U}_K^N$ 作用于对象Q 时，该对象属于 $\mathcal{A}$，其底层向量空间具有如下形式

$$\bigoplus_{d\leq N}\ \bigoplus_{\vec{L}=(L_0,\dots,L_d)\subset\mathcal{B}} \mathcal{A}(Q,L_0)\otimes\mathcal{A}(\vec{L})\otimes\mathcal{A}(L_d,K).$$

它是一个由 $\mathcal{B}$中的对象构造而成的迭代滤过映射锥。

我们有以下结果。

引理 4.2.4。 存在一个交换持久化图表

$$\begin{array}{ccc} H_*(F^N\overline{\mathcal{B}}(K,K)) & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \hom_{PD(\mathcal{A})}(K,U_K^N) \\ \downarrow{\scriptstyle [\mu^{\overline{\mathcal{B}}}]} & & \downarrow{\scriptstyle \xi\circ -} \\ \hom_{PH(\mathcal{A})}(K,K) & \xrightarrow{\lambda} & \hom_{PD(\mathcal{A})}(K,K) \end{array} \tag{58}$$

其中 $PH(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ （§2.3.1）的持久同调范畴，而 $PD(\mathcal{A})$ 是使用 A_∞-模构造的持久导出范畴（§2.4.2）。

引理 4.2.4的证明。 我们定义图表（58）的链级版本。

$$\begin{array}{ccc} F^N\overline{\mathcal{B}}(K,K) & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}_K^l,\mathcal{U}_K^N) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu^{\overline{\mathcal{B}}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_2^{\mathrm{mod}}(-,\xi)} \\ \mathcal{A}(K,K) & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}_K^l,\mathcal{Y}_K^l) \end{array} \tag{59}$$

它将在过滤链同伦意义下满足交换性 $H\colon\ F^N\mathcal{B}(K,\ K) \to$模$_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}_K^l,\ \mathcal{Y}_K^l)$。现在定义图（59）中出现的映射以及链同伦 H。映射λ 是 Yoneda 嵌入的一种变差形式，定义见 §A.3.2。映射 μ_2^{mod}是过滤 dg-范畴中，过滤 A_∞-模上的复合，其中底环为 $\mathcal{A}$。我们将在下文定义 λ，ξ和 H。

设 $\vec{\gamma} = \gamma_1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_d \otimes \gamma_2 \in F^N\overline{\mathcal{B}}(K, K)$。

i. 我们定义

$$\overline{\lambda}(\vec{\gamma}) =: \overline{\lambda}_{\vec{\gamma}} \in \mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}_K^l, \mathcal{U}_K^N)$$

为 A_∞-模之间的态射

$$\overline{\lambda}_{\vec{\gamma}} = \sum_{j=0}^{d} \mathcal{Y}_{j+1}(\gamma_1, a_1, \ldots, a_j) \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_d \otimes \gamma_2$$

其中 $\mathcal{Y}_{j+1}$ 是 $(j+1)$-分支，对应于（左）Yoneda 嵌入 $\mathcal{Y}$（见 §A.3.1）。更明确地说，我们可以将该分支写为

$$(\overline{\lambda}_{\vec{\gamma}})_{l|1} \colon \mathcal{A}(X_0, X_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}(X_l, K) \to \mathcal{U}_K^N(X_0)$$

as

$$(\overline{\lambda}_{\vec{\gamma}})_{l|1}(x_1, \ldots, x_l, y) = \sum_{j=0}^{d} \mu_{j+l+2}(x_1, \ldots, x_l, y, \gamma_1, a_1, \ldots, a_j) \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_d \otimes \gamma_2.$$

ii. 映射 $\xi \in \mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}_K^N, \mathcal{Y}_K^l)$ 是完全收缩映射，也就是说，

$$\xi_{l|1} \colon \mathcal{A}(X_0, X_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}(X_{l-1}, X_l) \otimes \mathcal{U}_K^N(X_l) \to \mathcal{A}(X_0, K)$$

将来自 $\mathcal{U}_K^N$ 中长度为 $d \leq N$ 的直和项的输入通过 μ_{l+d+1} 进行收缩。

iii. 映射 $H\colon F^N\mathcal{B}(K, K) \to \mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}_K^l, \mathcal{Y}_K^l)$ 也由一个完全收缩诱导，但方式如下：我们定义

$$H(\vec{\gamma}) =: H_{\vec{\gamma}} \in \mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}_K^l, \mathcal{Y}_K^l)$$

为 A_∞-模的态射，其 $l|1$ 分支由下式给出

$$(H_{\vec{\gamma}})_{l|1}(x_1, \ldots, x_l, y) := \mu_{l+d+3}(x_1, \ldots, x_l, y, \gamma_1, a_1 \ldots, a_d, \gamma_2).$$

显然，ξ 是 A_∞-模之间的过滤态射（即，它属于 $\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}_K^N, \mathcal{Y}_K^l)^{\leq 0}$），并且图（59）中出现的五个映射都是滤过链映射。

我们证明该图在 H 意义下交换，即

$$\lambda \circ \mu^{\overline{\mathcal{B}}}(\vec{\gamma}) + \mu_2^{\mathrm{mod}}(\overline{\lambda}_{\vec{\gamma}}, \xi) = \mu_1^{\mathrm{mod}}(H_{\vec{\gamma}}) + H_{\mu_{0|1|0}^{bar}(\vec{\gamma})}$$

对于所有 $\vec{\gamma} \in \overline{F^N\mathcal{B}}(K, K)$。设 $l \geq 0$ 和 $\vec{X} = (X_0, \ldots, X_l)$ 是 $\mathcal{A}$ 的对象元组。考虑如上所述的 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_l \in \mathcal{A}(\vec{X})$、$y \in \mathcal{A}(X_l, K)$ 和 $\vec{\gamma} \in \overline{F^N\mathcal{B}}(K, K)$。将上面的等式应用于如上的可复合元素 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_l \otimes y$，计算其中的四项：

$$\mu_2^{\mathrm{mod}}\left(\overline{\lambda}_{\vec{\gamma}}, \xi\right)_{l|1}(x_1, \ldots, x_l, y) = \sum_{j=0}^{l} \sum_{i=0}^{d} \mu_{j+d-i+2}\big(x_1, \ldots, x_j, \mu_{l-j+i+2}(x_{j+1}, \ldots, x_l, y, \gamma_1, a_1, \ldots, a_i),$$
$$a_{i+1}, \ldots, a_d, \gamma_2\big)$$

and

$$\left(\lambda \circ \mu^{\overline{\mathcal{B}}}(\vec{\gamma})\right)_{l|1}(x_1,\dots,x_l,y) := \mu_{l+2}(x_1,\dots,x_l,y,\mu_{d+2}(\gamma_1,a_1,\dots,a_d,\gamma_2))$$

and

$$\begin{aligned}\left(H_{\mu^{\mathrm{bar}}_{0|1|0}(\vec{\gamma})}\right)_{l|1}(x_1,\dots,x_l,y) =& \sum_{i=0}^{d}\mu_{l+d-i+3}(x_1,\dots,x_l,y,\mu_{1+i}(\gamma_1,a_1,\dots,a_i),a_{i+1},\dots,a_d,\gamma_2)\\ &+\sum_{i\le j}\mu_{l+i+d-j+3}(x_1,\dots,x_l,y,\gamma_1,a_1,\dots,a_{i-1},\mu_{j-i+1}(a_i,\dots,a_j),\\ &\qquad a_{j+1},\dots,a_d,\gamma_2)\\ &+\sum_{i=1}^{d+1}\mu_{l+i+2}(x_1,\dots,x_l,y,\gamma_1,a_1,\dots,a_{i-1},\mu_{d-i+2}(a_i,\dots,a_d,\gamma_2))\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mu_1^{\mathrm{mod}}(H_{\vec{\gamma}})_{l|1}(x_1,\dots,x_l,y) =& \sum_{i=0}^{l}\mu_{i+1}(x_1,\dots,x_i,(H_{\vec{\gamma}})_{l-i|1}(x_{i+1},\dots,x_l,y))\\ &+\sum_{i=0}^{l}(H_{\vec{\gamma}})_{i|1}(x_1,\dots,x_i,\mu_{l-i+1}(x_{i+1},\dots,x_l,y))\\ &+\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=i+1}^{l}(H_{\vec{\gamma}})_{l-j+i|1}(x_1,\dots,x_i,\mu_{j-i}(x_{i+1},\dots,x_j),x_{j+1},\dots,x_l,y)\\ =&\sum_{i=0}^{l}\mu_{i+1}(x_1,\dots,x_i,\mu_{l-i+d+3}(x_{i+1},\dots,x_l,y,\gamma_1,a_1\dots,a_d,\gamma_2))\\ &+\sum_{i=0}^{l}\mu_{i+d+3}(x_1,\dots,x_i,\mu_{l-i+1}(x_{i+1},\dots,x_l,y),\gamma_1,a_1\dots,a_d,\gamma_2)\\ &+\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=i+1}^{l}\mu_{l-j+i+d+3}(x_1,\dots,x_i,\mu_{j-i}(x_{i+1},\dots,x_j),x_{j+1},\dots,x_l,y,\\ &\qquad\gamma_1,a_1\dots,a_d,\gamma_2)\end{aligned}$$

上述各项之和是 $\mathcal{A}$ 的 A_∞-方程中的第 $(d+l+2)$ 项，因此为零。这就证明了断言 □

考虑恒等态射 $id_K \in$ 同态$^0_{PD(\mathcal{A})}(K,\ K)$。不难看出，按照引理 4.2.4

$$\bar{d}'_{\text{r-int}}(K,U_K^N) \le \frac{1}{2}R(id_K,\xi\circ -).$$

这一事实 于是，由以下简单结果可知，(1) 蕴含 (3)。

引理 4.2.5。 考虑一个由持久模和映射构成的交换方块

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{h^V} & V \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W' & \xrightarrow{h^W} & W \end{array} \tag{60}$$

那么对于任意 $w \in W_r$，我们有

$$R(w,f) \leq \inf\left\{R(w',f') \mid r' \geq r,\ w' \in W'_{r'} \text{ such that } h^W_{r'}(w') = i^W_{r,r'}(w)\right\}.$$

事实上，由于图表（58）可交换，且 $\lambda([e_K]) = id_K$，我们得到

$$\bar{d}'_{\text{r-int}}(K, U^N_K) \leq \frac{1}{2}R(id_K, \xi \circ -) \leq \frac{1}{2}R\left([e_K], [\mu^{\overline{\mathcal{B}}}(K)]\right) \leq \frac{\alpha}{2}$$

这就是命题陈述中的第（3）点。

我们证明陈述 (1) 蕴含 (2)。考虑映射 $\mu^{\mathcal{B}}\colon\ \mathcal{B} \to \Delta_{\mathcal{A}}$，将其视为 $(\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$-双模之间的映射。考虑 $(\mathcal{A},\mathcal{A})$-双模 $C_{\mathcal{B}} := \mathsf{Cone}(\mu^{\mathcal{B}})$。将 $C_{\mathcal{B}}$ 的 A_∞-双模映射记为 $\bar{\mu}^{C_{\mathcal{B}}}_{l|1|r}$，其中 $l, r \geq 0$。令 X_0, X_1 和 X_2 为 $\mathcal{A}$ 中的对象，并考虑 $\vec{a} = a_1 \otimes \cdots \otimes a_d \in C_{\mathcal{B}}(X_0, X_1)$ 和 $b = b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \in C_{\mathcal{B}}(X_1, X_2)$。我们定义

$$\vec{a} \star \vec{b} := \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{d-1} a_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes \mu_{d-k+j}(a_{k+1}, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_j) \otimes b_{j+1} \otimes \cdots \otimes b_n \in C_{\mathcal{B}}(X_0, X_2).$$

显然，$\star$ 满足关于 $\mu^{C_{\mathcal{B}}}_{0|1|0}$的莱布尼茨法则。

我们考虑 $C_{\mathcal{B}}(K, K)$，它是 $\mu^{\mathcal{B}}(K)\colon \mathcal{B}(K, \bar{} K) \to \overline{\mathcal{A}}(K, K)$ 的锥。由于 $R(e_K, [\mu^{\mathcal{B}}]) \bar{\leq} \alpha$，存在一个循环 $\vec{h} \in \mathcal{B}^{\leq\alpha}(K, \overline{K})$，使得 $\mu^{\mathcal{B}}(\vec{h})$ 是对象 $\bar{} K$ 在 $\mathcal{A}^{\leq 0}(K, K)$ 中的单位元的一个代表。更明确地，我们写作

$$\mu^{\overline{\mathcal{B}}}(\vec{h}) = e_K + da_K$$

对于某个 $a_K \in \mathcal{A}^{\leq 0}(K, K)$。不失一般性，我们假设 $\vec{h} = h_1 \otimes \cdots \otimes h_n$, $n \geq 1$ 是一个纯张量。我们定义一个映射 $H\colon C_{\mathcal{B}}(K, K) \to C_{\mathcal{B}}(K, K)$，并证明它是一个缩合同伦。对于一个纯元素 $\vec{x} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_d \in \mathsf{Cone}(\mu^{\mathcal{B}})$，其中 $d \geq 1$，我们定义

$$H(\vec{x}) := \vec{x} \star (\vec{h} + a_K)$$

Then

$$\begin{aligned} \mu^{C_{\mathcal{B}}}_{0|1|0}(H(\vec{x}) + H(\mu^{C_{\mathcal{B}}}_{0|1|0}\vec{x}) =& \mu^{C_{\mathcal{B}}}_{0|1|0}(\vec{x} \star (\vec{h} + a_K)) + \mu^{C_{\mathcal{B}}}_{0|1|0}(\vec{x}) \star (\vec{h} + a_K) \\ =& \vec{x} \star \mu^{C_{\mathcal{B}}}_{0|1|0}(\vec{h} + a_K) = \vec{x} \star e_K = \vec{x} \end{aligned}$$

也就是说，H 确实是一个缩合同伦。由此可知，$C_{\mathcal{B}}(K, K)$ 在 α-无圈的 $H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})$ 中，或者等价地，$\mu^{\mathcal{B}}(K)$ 是一个 α-同构，即命题2中的陈述（4.2.1）。

由（2）推出（1）是相当直接的：根据 命题 2.28(i)，在 [13], 中存在一个右 α-逆

$$\psi \in \hom_{(H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}))^0}(\Sigma^\alpha \mathcal{A}(K,K), \overline{\mathcal{B}}(K,K))$$

$\mu^{\mathcal{B}}$的，即一个满足 $\mu^{\mathcal{B}} \circ \psi = \eta_\alpha^{\mathcal{A}(K,K)}$ 的映射，而后者又等于视为平移 α映射的恒等态射，因此结论得证。

我们证明（3）蕴含（1）。假设存在一个迭代锥 C_K，其上方为 $\mathcal{B}$，属于 $PD(\mathcal{A})^0$，使得 $\bar{d}_{\text{r-int}}(K, C_K) \leq \alpha$。取映射 $\varphi \in \hom^0_{PD(\mathcal{A})}(\Sigma^{r_1}K, C_K)$ 和 $\psi \in \hom_{PD(\mathcal{A})^0}(\Sigma^{r_2}C_K, K)$，使得

$$r_1 + r_2 = \alpha, \quad \text{and} \quad \psi \circ \Sigma^{r_2}\varphi = \eta_\alpha^K.$$

我们用一个滤过扭曲复形表示 C_K

$$\left(\bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{\beta_i} X_i[d_i], (q_{ij})_{ij} \right)$$

其中，对于所有 i， X_i 都是 $\mathcal{B}$ 的一个元素。令 $f \in FTw^{\leq 0}(\Sigma^{r_1}K, C_K)$ 为 φ 的一个代表元，并令 $g \in FTw^{\leq 0}(\Sigma^{r_2}C_K, K)$ 为 ψ 的一个代表元。于是 f 可写成矩阵 $(f_1, \ldots, f_n)$，其中 $f_i \in FTW^{\leq r_1 - \beta_i}(K, X_i)[d_i]$。类似地， g 可写成矩阵 $(g_1, \ldots, g_n)^T$，其中 $g_i \in FTW^{\leq r_2 + \beta_i}(X_i, K)[-d_i]$。由于我们的 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$ 是严格含幺的，我们有

$$e_K = \mu_2^{FTw}(f, g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i<i_1<\ldots<i_k<j} \mu_{2+k}(f_i, q_{ii_1}, \ldots, q_{i_kj}, g_j).$$

注意，每个张量 $f_i \otimes q_{ii_1} \otimes \ldots \otimes q_{i_kj} \otimes g_j$ 都是 $\mathcal{B}^{\leq \alpha}(K,K)$中的一个元素。这就证明了（1）。至此，命题 4.2.1 的证明完成。□

4.2.2. 导出过滤 A_∞-*Fukaya* 范畴的扰动数据。 这里回顾 [2] 中引入的扰动数据的选取。

Seidel 的著作中所呈现的 Fukaya范畴构造， [39], 通常并不会产生一个过滤范畴。事实上，设 p 是 Seidel 意义下的扰动数据。设 $\vec{L} := (L_0, \ldots, L_d)$ 是 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 中由拉格朗日子流形组成的一个元组，其中任意两个相邻的拉格朗日子流形（按循环次序排列）在几何上均不相同。设 $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in CF(\vec{L};\, p)$ 是一个由 Floer 复形的生成元组成的元组（这些复形是相对于 p规定的哈密顿扰动来定义的），再设 $\gamma_+ \in CF(L_0, L_d;\, p)$ 是另一个生成元。设 u 是一个经扰动的 J-全纯多边形，定义在某个带 puncture 的圆盘 S 上，该圆盘有 d 个输入和一个输出，并且此多边形对 $\mu_d(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ 表达式中的 γ_+ 系数有贡献。根据定义，该 u 满足一个带扰动项的伪全纯方程，其中扰动项对应于一个 1-形式 K^p （见 [39] 第 8 节）。标准计算表明，

能量 $E(u)$ 满足

$$0 \leq E(u) \leq \omega(u) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^1 H_p^{L_{i-1},L_i} \circ \gamma_i \, dt - \int_0^1 H_p^{L_0,L_d} \circ \gamma_+ \, dt + \int_S R^p \circ u$$

其中，$R^p \in \Omega^2(S, C^\infty(M))$ 是所谓的扰动数据 K^p 在带 puncture 的圆盘 S 上由 p 诱导的曲率形式。在 S 上的共形坐标 (s, t) 中，我们可以局部地写成

$$K^p = F ds + G dt$$

于是，曲率项具有如下形式

$$R^p = \left(\partial_s G - \partial_t F + \omega\left(X^F, X^G\right)\right) ds \wedge dt$$

其中，X^F，X^G 是由 F 和 G 诱导的哈密顿向量场。记 $\mathbb{A}_p$ 为关于 p 定义的作用泛函，则可以将上述作用量-能量估计改写为

$$\mathbb{A}_p(T^{\omega(u)}\gamma_+) \leq \sum_{i=1}^{d} \mathbb{A}_p(\gamma_i) + C^p(u)$$

其中，$C^p(u) := \int_S R^p \circ u$ 被称为与扰动数据 p 的选择相关联的多边形 u 的曲率项。我们将这一计算的结论形式化如下。

负曲率要求：

$$\begin{array}{l} \text{To 构造保滤过映射，这些映射由计数定义} \\ \qquad \text{个受扰动的 } J- \text{全纯曲线便足以证明我们可以选取} \\ \text{p扰动数据，使曲率项具有严格负的} \qquad\qquad \text{e} \\ \qquad\qquad \text{常数作为 } apriori \text{ 一致上界。} \end{array} \tag{61}$$

对严格负上界的要求源于这样一个事实：出于横截性方面的考虑，我们可能需要引入任意小的进一步扰动。

现在我们将概述 [2], 满足 (61) 的扰动数据的构造 $\mathcal{P}$ $\frac{1}{2} < \delta < 1$，该构造依赖于一个参数，我们现在将其固定。

我们将说明为 $p \in \mathcal{P}$ 以及如上所述的一组 L 循环几何上各不相同的拉格朗日子流形所作的选择。首先，考虑$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$中的两个不同的拉格朗日子流形 L_0、L_1。分配给这对拉格朗日子流形的哈密顿扰动函数 H^{L_0, L_1}_p是扰动数据 p的一部分，并须满足以下条件

$$\delta\nu(p) < H_p^{L_0,L_1}(t,x) < \nu(p)$$

其中 ν 在方程（24）中定义。现在考虑 $\vec{L} =$（L_0、L_1、L_2）这一组三个拉格朗日子流形，它们位于 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$中。令 S 为带有三个穿孔且配备条带状端的圆盘的唯一等价类（两个输入和一个输出，见 [39, 第（8d）节], [2, 第 2 节。1]）。

要求哈密顿扰动 $K_p^S \in \Omega^1(S,\ C_c^\infty(X \times [0,1]))$ 在 S 上于穿孔附近的条带状端处具有受控行为，而且在条带状端之外基本消失。更确切地说：

- 在第 i 个负条带状端上，$i = 1,\ 2,\ K_p^S$限制为从哈密顿弗洛尔数据到零映射的单调同伦，即

$$K_p^S = (1 + \beta_p^{L_{i-1},L_i}(s+1))H^{L_{i-1},L_i}dt$$

带有条带状端坐标 $(t,\ s) \in [0,1] \times (-\infty,\ 0]$，其中 $\beta^{L_{i-1},\ p\ L_i}\colon\ \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个光滑、递增且满射的函数，其导数的支集包含于 $[0,1]$ 中；
- 在正条带状端上，哈密顿部分 K_p^S限制为从零映射到哈密顿弗洛尔数据的单调同伦，即

$$K_p^S = \beta_p^{L_0,L_2}(s)H^{L_0,L_2}dt$$

带有条带状端坐标 $(t,\ s) \in [0,1] \times [0,\infty)$，其中 $\beta^{L_0,\ p\ L_2}\colon\ \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个光滑、递增且满射的函数，其导数的支集包含于 $[0,1]$ 中；- K_p^S 在条带状端之外处处为零。

暂且假设如上所述的 K_p^S 横截性，并考虑一个 K_p^S-弗洛尔多边形 u，它将弗洛尔生成元 $\gamma_1 \in CF(L_0,\ L_1;\ p)$和 $\gamma_2 \in CF(L_1,\ L_2;\ p)$连接到 $\gamma_+ \in CF(L_0,\ L_2;\ p)$。那么，$u$ 的曲率项 $C^p(S,\ u)$仅支集于条带状端中，且简单计算可得

$$C^p(S,u) < \nu(p)(1-2\delta) < 0$$

因为根据假设，$\frac{1}{2} < \delta < 1$。由此可知，通过 K_p^S 定义在 $\vec{L}$ 上的映射 μ_2 是过滤的。循环不同的拉格朗日子流形的更长元组的扰动数据，通过拼接低阶选择得到（见 [2, 第3节2]）。按照 [39]中的方法可以实现横截性。鉴于 $\nu(p)(1-2\delta)$为负（而不仅仅是非正），通过考虑足够小的额外扰动，我们可以同时实现横截性和保滤过映射 μ_d（见 [2, 第 479]页）。将这一扰动系统扩展到任意拉格朗日子流形元组（而不仅仅是循环不同的拉格朗日子流形元组），则通过使用簇型模空间来实现；这些模空间混合了弗洛尔多边形和莫尔斯珍珠轨迹（例如，在 [7], 或 [19], [43]中的珍珠同调构造里）。这一构造的完整细节见 [2]。我们指出，为了在消失过滤层级实现（严格的）单位元，我们使用 $CF(L,L)$的量子模型（参见 [2, 第3节3]）。

注记 4.2.6。在上述构造中，还可以额外要求：如果$L_0 \pitchfork L_1$ 横截相交，那么 $H^{L_0,\ p\ L_1} = H^{L_1,\ p\ L_0}$均为常数。这并非必要的假设，但能使计算更简单。不过请注意，我们不能要求横截相交的拉格朗日子流形对应的哈密顿弗洛尔数据恒等于零。

4.2.3. 余乘积。回顾一下，给定一个 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$，我们用 $\Delta_{\mathcal{A}}$ 表示其对角 A_∞-双模。我们固定 $\mathcal{L}$ 中的一族有限拉格朗日子流形 $\mathcal{B}$，使得其中任意两个不同元素都横截相交。回顾一下，$\mathcal{B}$ 诱导出一个有限的满 A_∞-子范畴

$\mathcal{B}_p$ 关于 $\mathcal{A}_p = \mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})};\ p)$ 对于任意选取的扰动数据 $p \in \mathcal{P}$，如第 65 页所述。我们还固定一个对象 $K \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$。这里的目的是进一步细化上一节所述的扰动选取，并证明以下结果。

命题 4.2.7。 对于任意 $p \in \mathcal{P}$ 以及任意对象 $K \in \mathcal{L}ag^{(mon,\mathbf{d})}$，存在一个非空的扰动数据空间 $\mathcal{P}(p, \mathcal{B}, K)$，使得对每个 $q \in \mathcal{P}(p, \mathcal{B}, K)$，都存在一个$(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)$-双模态射

$$\Delta = \Delta_q^{\mathcal{B},K} \colon \Delta_{\mathcal{B}_p} \to \mathcal{Y}_p^l(K) \otimes \mathcal{Y}_p^r(K)$$

它将滤过平移 $\leq 2\nu(p)$，并扩展通常的余乘映射。此外，当 $\mathcal{B} = \{L\}$ 由单个拉格朗日子流形组成时，$\Delta_q^{\mathcal{B}}$ 是过滤的。

我们常常在余乘积的记号中省略 q, $\mathcal{B}$ 和 K，在不会引起混淆时，简记为 Δ。本小节余下部分将概述命题 4.2.7 的证明。

注 4.2.8。 a. 类 $\mathcal{P}(p, \mathcal{B}, K)$ 中的扰动专用于余乘映射 Δ的定义。

b. 正如证明中将会显现的那样，可以对有限族 $\mathcal{B}$ 中元素的 Floer 数据和扰动数据进行更精细的选择，从而得到一个 A_∞-双模映射 Δ，使滤过平移任意小的量。由于这对于本文的目的并不是特别有用，我们不在此解释细节。

c. 我们指出，Δ 将滤过平移 $\leq 2\nu(p)$ 这一事实，等价于说映射 $\eta_{2\nu(p)} \circ \Delta \colon \Delta_{\mathcal{B}_p} \to \Sigma^{-2\nu(p)}(\mathcal{Y}_p^l(K) \otimes \mathcal{Y}_p^r(K))$ 是过滤的。这里，$\Sigma^{-2\nu(p)}(\mathcal{Y}_p^l(K) \otimes \mathcal{Y}_p^r(K))$ 是满足 $(\Sigma^{-2\nu(p)}(\mathcal{Y}_p^l(K) \otimes \mathcal{Y}_p^r(K)))^{\leq\alpha} = (\mathcal{Y}_p^l(K) \otimes \mathcal{Y}_p^r(K))^{\leq\alpha+2\nu(p)}$ 且 $\eta_{2\nu(p)}$ 为结构映射的过滤双模，该结构映射来自 §2.1.2（另见 [13, 第 2.2 节 3]）。

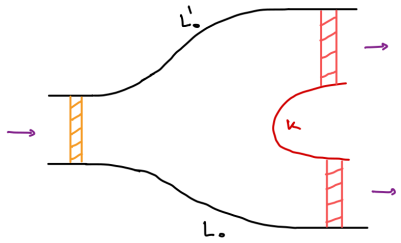
证明。构造 Δ 依赖于某些模空间的构造，这些模空间的定义已广为人知（见 [1], [43]）。因此，我们只概述这一构造，并着重说明为确保 Δ 在作用滤过中具有受控的平移所需的调整。图5 概述了一些簇构型，它们对 Δ的定义有所贡献。

令 $\epsilon > 0$，并固定一个大小为 ν（p）$= \epsilon$的正则滤过扰动数据 $p \in \mathcal{P}$。Δ 将由一族线性映射组成

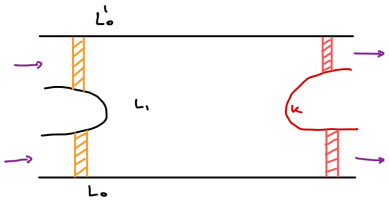
$$\Delta_{l|1|r} \colon CF(L_0, \ldots, L_l) \otimes CF(L_l, L_0') \otimes CF(L_0', \ldots, L_r') \to CF(L_0, K) \otimes CF(K, L_r')$$

对任意 l, $r \geq 0$ 以及任意两个元组 $\vec{L} = (L_0, \ldots\ldots, L_l)$ 和 $\vec{L'} = (L_0', \ldots\ldots, L_r')$，其中的拉格朗日子流形属于 $\mathcal{B}$，且所有 Floer 链复形均相对于 p定义。的源空间由簇模空间参数化（沿用 [2]）$\mathcal{R}^{l}$中的术语），$_{C}^{r\,2}$，$(\vec{L}, \vec{L'}, K)^{\rightarrow}$ $^{\rightarrow}$labelled by L, L' and K defined as follows:

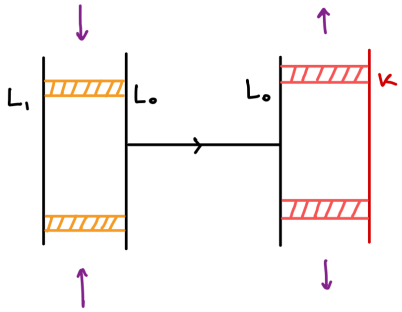
(1) 我们从模空间 $\mathcal{R}^{l,r}(\vec{L}, \vec{L'}, K) := \mathcal{R}^{l+r+3}(\vec{L} \cup \vec{L'} \cup K)$ 开始，该空间由带有$l + r + 3$ 个标记点的圆盘构成，并按如下方式由我们固定的拉格朗日子流形标记：我们选择一个



(a) 对于$\Delta_{0|1|0}$计数的一种可能构型： $CF(L_0, L_0')$ $\to CF(L_0, K) \otimes CF(K, L_0')$.



(b) 对于 $\Delta_{1|1|0}$ 计数的一个可能构型： $CF(L_0, L_1)$ $\otimes$ $CF(L_1, L_0') \to CF(L_0, K) \otimes CF(K, L_0')$。



(c) 对于 $\Delta_{1|1|0}$ 计数的一个可能构型： $CF(L_0, L_1) \otimes$ $CF(L_1, L_0) \to CF(L_0, K)$ $\otimes$ $CF(K, L_0)$。 水平线段表示 L_0 上的一条有限莫尔斯流线。

图 5. 对余乘积$\Delta^{\mathcal{B},\ q}{}^{K}$作出贡献的构型示例：$\Delta_{\mathcal{B}_p} \to \mathcal{Y}_p^l(K) \otimes \mathcal{Y}_p^r(K)$。彩色条带表示哈密顿扰动数据的非平凡部分的支集。

标记点，并将 K 标记为从该点开始按顺时针方向的第一条弧，然后$\vec{\ }$ $\vec{\ }$ 继续按顺时针方向依次为各条弧标记，先使用 L，再使用 L'。

（2）在 $\mathcal{R}^{l,\ r}(\vec{L},\ \vec{L'},\ K)$ 上，我们有一个丛

$$\pi^{l,r}(\vec{L}, \vec{L'}, K) \colon \mathcal{S}^{l,r}(\vec{L}, \vec{L'}, K) \to \mathcal{R}^{l,r}(\vec{L}, \vec{L'}, K)$$

使得对于给定的 $r \in \mathcal{R}^{l,\,r}(\vec{L},\ \vec{L}',\ K)$，其原像是带有标签和预先指定的标记点的标准单位圆盘，但将两条对应于几何上不同的拉格朗日子流形且相交于标记点的弧替换为一个穿孔。

(3) 按照通常的方式，我们为 $\mathcal{R}^{l,\,r}(\vec{L},\ \vec{L}',\ K)$ 配备条带状端：在与标记为 K 的弧相邻的标记点附近，我们选取正条带状端；在其余的 $l+r+1$ 标记点处，则选取负条带状端（按照惯例，这一选择须与圆盘的粘合和断裂保持一致）。

(4) 我们考虑 $\mathcal{R}^{l,\,r}(\vec{L},\ \vec{L}',\ K)$ 的紧化 $\overline{\mathcal{R}^{l,\,r}(\vec{L},\ \vec{L}',\ K)}$，其具有维数为 $l+r+1$的带角流形结构，并为某些边界分支添加领形邻域，如 [2, p. 14] 所示，从而得到所需的模空间 $\mathcal{R}^{l,\,r}_{C}(\vec{L},\ \vec{L}',\ K)$ (5) 在此模空间上，我们定义丛

$$\pi^{l,r}_C(\vec{L},\vec{L}',K)\colon \mathcal{S}^{l,r}_C(\vec{L},\vec{L}',K)\to\mathcal{R}^{l,r}_C(\vec{L},\vec{L}',K)$$

其中，纤维是带有 $l+r+1$ 个输入和两个（相邻）输出的穿孔标记圆盘簇。

与过滤 A_∞-范畴的情形类似（概述见 §4.2.2，详见 [2]），存在一个空间 $\mathcal{P}^{\Delta}(p,\ \mathcal{B},\ K)$，其中包含在簇丛族 $\pi^{l,\,r}_{C}(\vec{L},\ \vec{L}',\ K)$ 上对扰动数据的普适选择（固定 K），以及与固定的扰动数据选择 $p\in\mathcal{P}$ 相关联的相容性要求。

给定一个 对 $q\in\mathcal{P}^{\Delta}(p,\ \mathcal{B},\ K)$ 的选择、如上所述的元组 $\vec{L}$ 和 $\vec{L}'$，以及生成元的选择

$$\gamma_0\otimes\cdots\otimes\gamma_l\otimes\gamma\otimes\gamma'_0\otimes\cdots\otimes\gamma'_r\in CF(L_0,\ \ldots\ldots,\ L_l)\ \otimes CF(L_l,\ L'_0)\ \otimes CF(L'_0,\ \ldots\ldots,\ L'_r)$$

and

$$\gamma^+_1\otimes\gamma^+_2\in CF(L_0,K)\otimes CF(K,L'_r)$$

我们有模空间

$$\mathcal{M}^{l+r+1}_{\vec{L},\vec{L}',K}(\gamma_0,\ldots,\gamma_l;\gamma;\gamma'_1,\ldots,\gamma_r;\gamma^+_1,\gamma^+_2;q)$$

的 Morse–Floer 簇 u，它们是针对扰动数据 q定义的，并连接这类生成元。随后，通过对这些模空间中的刚性簇 u 计数来定义 $\Delta_{l|1|r}$，并以其辛面积作为权重（乘以 $T^{\omega(u)}$，其中 T 是 Novikov 环的变量）。标准的紧致性与横截性论证表明，对于 $q\in\mathcal{P}^{\Delta}(p,\ \mathcal{B},\ K)$ 的泛选取，这些映射共同构成一个 A_∞-双模的态射

$$\Delta\colon \Delta_{\mathcal{B}_p}\to\mathcal{Y}^l_p(K)\otimes\mathcal{Y}^r_p(K)$$

当然，这取决于扰动数据 q 的选择。最重要的是，Δ 的过滤性质强烈依赖于 q 的选择：对于任意选择的 q，都无法指望相应的态射 Δ 在滤过中具有可控的平移。不过，这里可以重复 [2] 中为 μ_d-映射情形提出（并在 §4.2.2 中概述）的同一思路，以控制映射 Δ 的平移。注意，项 $\Delta_{0|1|0}\colon CF(L,L)\to CF(L,K)\otimes CF(K,L)$ 计算的是带有一个莫尔斯输入（回顾一下，我们使用珍珠模型定义了 $CF(L,L)$）和两个 Floer 输出（根据假设，$K\notin\mathcal{B}$）的 Floer 曲线，

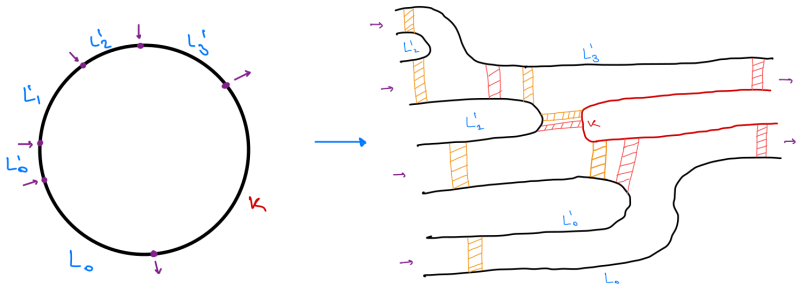


图 6. 一条为 $\Delta_{0|1|3}$： $CF(L_0,\ L_0',\ L_1',\ L_2',\ L_3') \to CF(L_0,\ K)\ \otimes\ CF(K,\ L_3')$ 作出贡献的曲线，其源空间位于 $\mathcal{R}^{0,\ C}{}^{3}(\vec{L},\ \vec{L'},\ K)$中的某个角点附近。橙色条带表示扰动数据对曲率产生负贡献的区域，红色条带则表示其产生正贡献的区域。因此，总曲率的上界为 $2\nu(p)$。

从过滤视角来看，这些都不会造成任何问题。另一方面，在处理两个不同的拉格朗日子流形 $L_0 \neq L_0'$ 以及映射 $\Delta_{0|1|0}\colon CF(L_0, L_0') \to CF(L_0, K) \otimes CF(K, L_0')$ 时，我们遇到了一些相较于此前所述构造而言的新问题。在这种情况下，[2] 中的方法给出一个平移量为 $\leq 2\nu(p) - \delta\nu(p) \leq 2\nu(p)$ 的映射。由于 Δ 的高阶分量 $\Delta_{l|1|r}$ 的扰动数据是按照 [2] 的方法归纳构造的，这种平移会传播。值得指出的是，鉴于定义 $\Delta_{l|1|r}$ 的模空间的结构，这种平移不会随阶数成比例增长，而是保持为 $\leq 2\nu(p)$。事实上，在 $\mathcal{R}^l$ 的角点附近，$C^{r}(\vec{L}, \vec{L'}, K)$，归纳构造的扰动数据来自与带有 ≤ 3 个标记点的构型相关联的扰动数据的粘合；其中至多有一个构型带有一个输入和两个输出（也就是说，$\Delta_{0|1|0}$ 是以此为模型的），并且对曲率有正贡献（如上所述，该贡献的上界为 $2\nu(p)$）；粘合中涉及的所有其他构型都只有一个输出，不会对曲率作出贡献（见图 6）。□

注 4.2.9。 从命题 4.2.7 的证明中可以清楚地看出，对于我们所选的扰动，映射 $\leq 2\nu(p)$ 的平移 Δ 并非最优（事实上，$2\nu(p) - \delta\nu(p)$ 可以作为上界）。不过，为了记号简便，我们决定仍采用 $2\nu(p)$ 。由于在定理 4.1.1 中，我们使用由 A_∞-范畴构成的系统，这一区别无关紧要。

4.2.4. 环境量子上同调。这里简要回顾的内容广为人知（可能的参考文献见[43] ）。设(X, ω)为闭且单调的辛流形。我们考虑一个莫尔斯函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$，它有唯一的极大值点 $u \in X$，并在 X 上取一个黎曼度量g，使得(f, g)构成 Morse-Smale 对。我们将与该对(f, g)相关、以 Λ 为系数的量子上链复形$CQ^*(f, g;\ \Lambda)$定义为其在 Λ上的 Morse 上链复形，即按莫尔斯指数反向分次。微分 d计数连接

莫尔斯指数之差为一的临界点的负梯度流线。下文中，当具体的莫尔斯-斯梅尔数据选择对讨论并不重要时，我们将用 $CQ(X;\Lambda)$表示 $CQ(f,\ g;\Lambda)$。我们将每个生成元都置于零作用量层级，并采用 Λ上的标准滤过来滤过此复形。此复形的同调记作$QH(X;\Lambda)$，称为 X的量子上同调。注意， $QH(X;\Lambda)$的向量空间和持久性结构均不依赖于莫尔斯–斯梅尔对的选择。我们赋予 QH(X， Λ)标准的 $\mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ 分次，其中 Novikov变量的次数为 0。

向量空间 $QH(X;\Lambda)$ 配备了一个乘积，它是通常的莫尔斯乘积的一种变形，记作 $*$，并称为量子乘积。该乘积在链级上通过计数（并在诺维科夫系数中按辛面积加权）带有三个标记点的 J-全纯球面来定义；这些球面位于莫尔斯函数 f^M 的扰动的稳定流形与不稳定流形中。这与滤过福柯范畴定义中，对于相同拉格朗日子流形元组的 A_∞-映射的定义颇为相似。与第一陈类 $c_1(X)$ 的量子乘积定义了 $QH(X;\Lambda)$ 的一个自同态，因此我们有如下分解

$$QH^*(X;\Lambda) = \bigoplus_{\mathbf{d}} QH^*(X;\Lambda)_{\mathbf{d}}$$

其中，下标对应于该自同态的特征值$\mathbf{d}\ \in \Lambda$，而 $QH(X,\Lambda)_{\mathbf{d}}$是与特征值$\mathbf{d}\ \in \Lambda$相关联的特征子空间。众所周知，当且仅当$\mathbf{d}$ 是上述映射的一个特征值时，与类 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 相关联的 Fukaya 范畴才是非平凡的。此外，所有特征值$\mathbf{d}$ 实际上都属于 Λ_0。

4.2.5. 持久性开闭映射与闭开映射。 本节首先定义开闭映射的持久性版本 OC，它将 Fukaya 范畴与环境量子上同调联系起来。这遵循该领域的标准构造（参见 [1, 43]），因此我们只给出足以说明持久性方面的细节。

令 $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 为有限子集。令 $\epsilon > 0$，并固定大小为 $\nu(p)$ 的正则滤过扰动数据 $p \in \mathcal{P}\ = \epsilon$。

现在我们概述持久性开闭映射的构造

$$OC = OC_p^{\mathcal{B}} \colon PHH(\mathcal{B}_p) \to QH(X,\Lambda) \tag{62}$$

其中 $\mathcal{B}_p$是由 $\mathcal{B}$ 诱导的 $\mathcal{F}uk$（$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$; p）的全子范畴，而 PHH（$\mathcal{B}_p$）表示 $\mathcal{B}_p$ 的霍赫希尔德同调，其系数取为 $\mathcal{B}_p$ 的对角双模（见附录A.4）。

回想一下， OC 将次数上移 n 模 2。在链级上， OC 由一族线性映射构成

$$OC_d \colon CF(L_0,L_1) \otimes \cdots \otimes CF(L_{d-1},L_d) \otimes CF(L_d,L_0) \to CQ(X,\Lambda)$$

对每个元组 $\vec{L}=(L_0,\dots,L_d)$ 中的拉格朗日子流形 $\mathcal{B}$，其中所有 Floer 链复形均相对于扰动数据 p定义。这些映射的构造基于模空间，以及相应的扰动数据选择；其遵循定义过滤 A_∞ 运算 μ_d 时所用的方案（见 §4.2.2 ），但有一些修改，现概述如下。

- 用于定义 OC_d 的受扰动 J-全纯多边形 u 在穿孔附近只有负的类条带端（相比之下，在 μ_d 情形中，有一个正的类条带端）。- 在 u 的定义域内部有一个内部标记点 x_u。- 在 X 上有一个固定的莫尔斯-斯梅尔对 $(f^X,\ g^X)$，如定义 $QH(X,\ \Lambda)$ 中所述；并且在 X 上有一个ω-相容的几乎复结构 J，以便在 $QH(X,\ \Lambda)$ 上定义量子乘积。u 满足的方程在 x_u 的一个小邻域内是 J-全纯的（没有哈密顿扰动）。- 给定

$$\gamma_1\otimes\cdots\otimes\gamma_{d+1}\in CF(L_0,L_1)\otimes\cdots\otimes CF(L_d,L_0)$$

以及 f^X 的一个临界点 x，存在模空间

$$\mathcal{M}^{d+1,1}_{\vec{L}}(\gamma_1,\dots,\gamma_{d+1};x;q)$$

其定义方式与 μ_d 的定义完全相同，只是将输出条件替换为如下要求：$u(x_u)$ 沿着 $-\nabla_{g^X}f^X$ 的一条轨线到达 x。

- OC_d 通过对上述模空间中的刚性曲线计数来定义。当然，这些模空间是相对于正则扰动数据定义的，并且这些数据以显然的方式与 p 相容。

在这种情况下（因为不存在正条带状端），证明A_∞ §4.2.2 中的运算是过滤的论证可以直接应用。因此，上文所述的 OC 映射如（62）中那样诱导出一个持久模的态射。此外，我们还有以下结果，其证明与 [43, 推论 211]完全类似。

引理 4.2.10. 对于任意 $\mathcal{B}$ 和任意 $p\in\mathcal{P}$，有像$(OC_p^{\mathcal{B}})\subset QH(X,\Lambda)_{\mathbf{d}}$，其中$\mathbf{d}\in\Lambda_0$ 是用于规定我们所考虑的单调拉格朗日子流形类别的参数。

本节最后，我们简要回顾 [7]中闭开映射线性部分的定义。设 $p\in\mathcal{P}$，并考虑由 p为 $CF(K,\ K)$ 指定的 ω- 相容几乎复结构 J_p^K。那么，$CO_p^K\colon CQ(X,\ \Lambda)\to CF(K,\ K)$ 定义为对从 f_p^X的临界点出发、终止于 f_p^K的临界点的刚性 J_p^K-珍珠轨线进行计数（见 [6,图 3]及 $x=e_K$）。由于其中不涉及哈密顿扰动，显然 CO_p^K诱导出一个持久性映射

$$CO=CO_p^K\colon QH(X,\Lambda)\to HF(K,K). \tag{63}$$

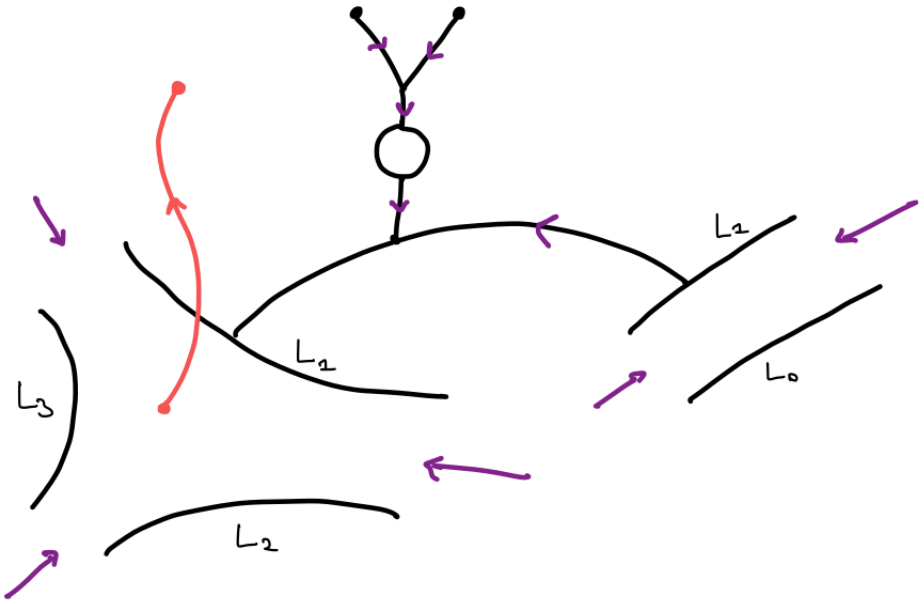


图 7. 在为元组 $L=(L_0, L_1, L_1, L_1, L_3, L_2, L_1, L_0)$ 定义 OC_7 时所计数的一条曲线。

回顾一下（见 [43, 命题 2。9]）：CO 限制在 $QH(X,\Lambda)_{\mathbf{d}'}$ 时，除非 $\mathbf{d}'=\mathbf{d}$，否则为零。我们回顾一下，CO 是幺元的，意即它将单位元在 $QH(X,\Lambda)_{\mathbf{d}}$ 中的投影映射到 $HF(K,K)$ 中的单位元。

注记 4.2.11. 可以定义一个更丰富、更一般的（非线性）闭开映射版本，即一个持久性映射

$$CO_p^{\mathcal{B}}\colon QH^*(X;\Lambda)\to PHH^*(\mathcal{B}_p),$$

其中 $PHH^*(\mathcal{B}_p)$ 表示 A_∞-范畴 $\mathcal{B}_p$ 的持久性 Hochschild 上同调，但这超出了本文的讨论范围。

4.2.6. 固定扰动选择下的 Abouzaid 收缩可逼近性判据。考虑一个由拉格朗日子流形 $\mathcal{B}\subset\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 构成的有限族以及一个元素 $\mathcal{K}\in\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}\setminus\mathcal{B}$。我们回顾一下 §4.2.3 中定义的、适配于 $\mathcal{B}$ 的扰动类 $\mathcal{P}(\mathcal{B})\subset\mathcal{P}$。令 $p\in\mathcal{P}(\mathcal{B})$。按 §4.2.3 构造的余乘积 $\Delta_p\colon\Delta_{\mathcal{B}_p}\to\mathcal{Y}_p^l(K)\otimes\mathcal{Y}_p^r(K)$（其中我们常省略记号中的下标 p）诱导出一个滤过链映射，我们仍将其记为 Δ_p，

$$\Delta_p\colon CC_*(\mathcal{B}_p)\to\Sigma^{-2\nu(p)}CC_*(\mathcal{B}_p,\mathcal{Y}^l(K)\otimes\mathcal{Y}^r(K))$$

（见 [24, 方程 2。178]）定义为

$$\Delta_p(\gamma_1\otimes\cdots\otimes\gamma_{d+1}):=\sum_{i=0}^{d+1}\sum_{j=i}^{d+1}(\Delta_p)_{d-j|1|i}(\gamma_{j+1},\ldots,\gamma_{d+1},\gamma_1,\ldots,\gamma_i)\otimes\gamma_{i+1}\otimes\cdots\otimes\gamma_j.$$

考虑由纯张量向左旋转一次定义的滤过链同构 $\varphi\colon CC_*(\mathcal{B}_p, \mathcal{Y}^l(K) \otimes \mathcal{Y}^r(K)) \cong \mathcal{B}_p(K,K)$。它定义在一个纯张量上

$$a \otimes b \otimes \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n \in CC_*(\mathcal{B}_p, \mathcal{Y}^l(K) \otimes \mathcal{Y}^r(K))$$

as

$$\varphi(a \otimes b \otimes \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n) := b \otimes \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n \otimes a.$$

接下来我们将考虑复合映射

$$(\Sigma^{-2\nu(p)}\varphi) \circ \Delta_p \colon CC_*(\mathcal{B}_p) \to \Sigma^{-2\nu(p)}\overline{\mathcal{B}_p}(K,K),$$

并稍微滥用一下记号，仍将其记为 Δ_p。

命题 4.2.12. 设 $p \in \mathcal{P}$。那么存在一个由持久模及映射组成的交换图

$$\begin{array}{ccc} PHH(\mathcal{B}_p) & \xrightarrow{\Delta_p} & \Sigma^{-2\nu(p)} H(\overline{\mathcal{B}_p}(K,K)) \\ \downarrow{\scriptstyle OC_p^{\mathcal{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma^{-2\nu(p)}\mu^{\overline{\mathcal{B}_p}}} \\ QH(X,\Lambda) & \xrightarrow{\eta_{2\nu(p)} \circ CO_p^K} & \Sigma^{-2\nu(p)} HF(K,K) \end{array} \tag{64}$$

其中 $\eta_{2\nu(p)}\colon HF(K,K) \to \Sigma^{-2\nu(p)}HF(K,K)$ 是由持久模 $HF(K,K)$ 的结构映射诱导的标准映射，见 [13, 第 2.2 节。4].

考虑在 $R(-,-)$ 中引入的度量（57），并用 $u_{\mathbf{d}}$ 表示单位元在 $QH(X,\Lambda)$ 到 $QH(X,\Lambda)_{\mathbf{d}}$ 的投影。

推论 4.2.13。 设 $p \in \mathcal{P}$。若 $R(u_{\mathbf{d}}, OC_p^{\mathcal{B}}) \leq \alpha$，则 $\mathcal{L}ag^{(mon,\mathbf{d})}$ 可由族 $\mathcal{B}$ 在 $PD(\mathcal{A}_p)$ 中作 $\frac{\alpha}{2} + \nu(p)$-缩回逼近。

推论的证明将用到以下简单结果。

引理 4.2.14。 设 $f\colon V \to W$ 是一个持久模映射，并考虑 $w \in W_r$。给定 $\delta > 0$，我们有

$$R(w,f) \leq R(i_{r,r+\delta}(w), \Sigma^{-\delta} f) + \delta.$$

证明。考虑 $\Sigma^{-\delta} f\colon \Sigma^{-\delta}V \to \Sigma^{-\delta}W$ 和 $i^W_{r,r+\delta}(w) \in (\Sigma^{-\delta}W)_r$。设 $s \geq r$ 满足存在 $v \in (\Sigma^{-\delta}V)_s$，使得 $(\Sigma^{-\delta} f)_s(v) = i^{\Sigma^{-\delta}W}_{r\,s}(i^W_{r,r+\delta}(w))$。由于 $i^{\Sigma^{-\delta}W}_{r,s} = i^W_{r+\delta,s+\delta}$ 且 $(\Sigma^{-\delta}V)_s = V_{s+\delta}$，上述内容等价于 $f_{s+\delta}(v) = i^W_{r,s+\delta}(w)$。特别地，$s + \delta \geq R(w,f)$。□

推论的证明 *4.2.13*。假设 $R(u, OC_p^{\mathcal{B}}) \leq \alpha$。由引理 4.2.5、命题 4.2.12、引理 4.2.14 以及 CO 是含单位元的这一事实，可直接得到 $R([e_K], [\mu^{\mathcal{B}}]) \leq \alpha + \nu(p)$ 对所有 $K \in \overline{\mathcal{L}\mathrm{ag}}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 成立。利用命题 4.2.1 即可推出所述结论。□

命题 *4.2.12* 的证明。证明基本上结合了 [6] 中的定理 8.1.1 证明与 [43] 中的引理 2.15 证明，同时跟踪滤过的变化。

我们概述链同伦的构造 $H\colon\ CC_*(\mathcal{B}_p) \to \Sigma^{-2\nu(p)}CF(K,\ K)$ 使图表 (64) 可交换。给定一个元组 $\vec{L}\colon =(L_0,\ \ldots,\ L_d)$ 其元素选自族 $\mathcal{B}$，我们打算定义

$$H\colon CF(L_0,\ldots,L_d,L_0)\to\Sigma^{-2\nu(p)}CF(K,K).$$

这同样包含三个步骤：选取正确的模空间（文献中已有这部分内容）；适当调整扰动空间，使构造与滤过相容（遵循 [2]中的方法）；确保能量界确实满足要求，从而使所得的链同伦保持滤过。

此 H 的源空间由一个模空间参数化，记作 $\mathcal{R}^{d}{}_{,C}{}^{A}(\vec{L},K)$（上标 A 表示定义域中出现环带），其边界上标记为 $\vec{L}$和 K，定义如下：

(1) 考虑模空间 $\mathcal{R}^{d,A}(\vec{L},K)$，其中包含环带构型：每个构型由一个内半径为单位元、外半径为 $\rho\in(1,\infty)$ 的环带 $S^1\times[1,\rho]\subset\mathbb{C}$ 构成。固定标记点 $z_0=1$、$z_1=-\rho$ 以及另外 $d-1$ 个标记点 $z_2,\ldots,z_d$,$|z_i|=\rho,\ 1\le i\le d$，它们沿环带的外边界排列，从 z_1 开始按顺时针方向排序。我们从 x_1 开始，沿顺时针方向为外圆上的弧标记为 L，并将内圆标记为 K。

(2) 在 $\mathcal{R}^{d,A}(\vec{L},K)$ 上有一个丛

$$\pi^{d,A}(\vec{L},K)\colon \mathcal{S}^{d,A}(\vec{L},K)\to\mathcal{R}^{d,A}(\vec{L},K)$$

使得 $\mathcal{R}^{d,A}(\vec{L},K)$ 中一点的纤维是一个带边界穿孔的环带，其内部圆的半径为一，外圆的半径为某个 $\rho\in(1,\infty)$，并且外圆上与两个几何上不同的拉格朗日标签相邻的标记点都被替换为穿孔。

(3) 我们在 $\pi^{d,A}(\vec{L},K)$ 上赋予一个相容的条带状端选择，这些端全为负型，并与上一点中的每个穿孔相关联。

(4) 我们考虑 $\mathcal{R}^{d}{}_{,C}{}^{A}(\vec{L},K)$ 的紧化 $\overline{\mathcal{R}^{d}{}_{,C}{}^{A}(\vec{L},K)}$。这个簇模空间混合了流线、圆盘和多边形，正如 §$\mu_d$ 4.2.2 中运算的定义所述，但它还包含一个环带分支。在 $\underline{\mathcal{R}^{d}{}_{,C}{}^{A}(\vec{L},K)}$ 的情形下，$d=1$ 其边界绘于图 8。

(5) 每个标记点和穿孔都对应关联条件。穿孔对应于相应 Floer 复形的生成元 $CF(L_i,\ L_{i+1};\ p)$(其中包含 p 扰动数据）；外圆上的标记点（其设置方式使相邻的边具有相同的标签，L_j，对于某个 j）被映射到 L_j 上的固定莫尔斯函数的临界点，该函数是 p的一部分；标记点 z_o 被映射到 K上的固定莫尔斯函数的临界点，该函数是扰动数据的一部分 p。所有这些对象的扰动数据均选取得与 $p\in\mathcal{P}$相容，并按照 [2]中的方式构造。

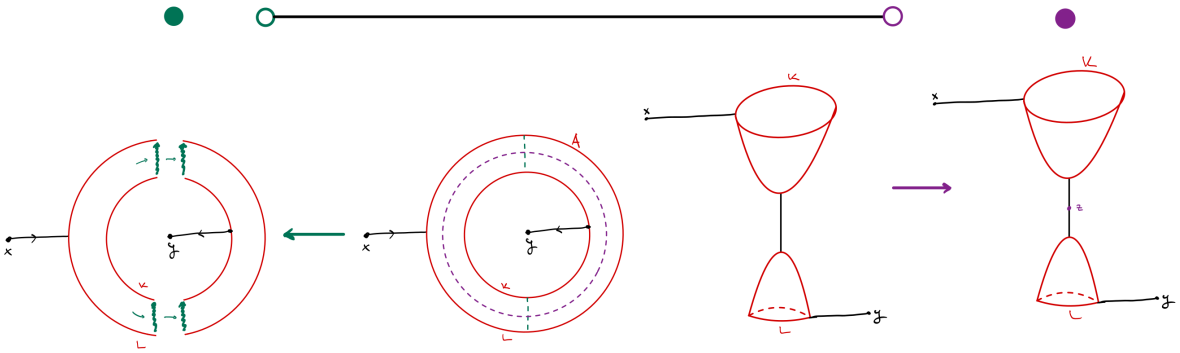


图 8。 $\mathcal{R}^{1,\ {}^{A}_{C}}(L,\ K)$ 内部及其上纤维的示意图，该内部同构于一个闭区间。在中间，给定拉格朗日子流形 L 和K，我们看到对 y-求和项有贡献的构型（其中 $y \in$ 临界点集(f_K)），属于 $H(x)$（其中 $x \in$临界点集(f_L)）。左侧（绿色点）显示了对 $\mu_2 \circ \Delta$ 有贡献的构型；右侧（紫色点）则显示了对 $OC \circ CO$ 有贡献的构型（在临界点 z 处发生断裂，该临界点属于 f_X）。

上述勾勒的构造此前已出现在文献中——见 [43] 以及 [6] ——而紧化的结构 $\mathcal{R}^{d,\ {}^{A}_{C}}(\vec{L},\ K)$ 表明它正如所需是一个链同伦。从本文的角度来看，唯一额外值得关注的一点是，无需进一步修改即可确保该同伦作为到 $\Sigma^{-2\nu(p)}CF(K,\ K)$ 的映射保过滤（也就是说，作为到 $CF(K,\ K)$ 的映射，它将滤过平移 $\leq 2\nu(p)$）。

□

注 4.2.15。 a. 命题 4.2.12 的表述具有内在局限性：对于固定的扰动 p，它所允许讨论的收缩近似性的精度下界为某个常数乘以 $\nu(p)$。要充分控制与某个 p 相关的结构，使其发生变化，从而使精度水平低于某个固定的 ϵ，这是第 §2.5 节提出精度递增的范畴系统这一概念的主要动机。

b. 我们可以细化命题 4.2.12 的表述，并避免在图示（ $\Sigma^{-2\nu(p)}$ 64）右下角的平移。为此，可以为图示中出现的映射选择更复杂的扰动数据。这样，在给定扰动数据 p的情况下，可以获得稍好的近似精度，但上面的说明仍然适用。

b. 注意，当 $\mathcal{B}$ 由单个拉格朗日子流形 L组成时，$R(u_{\mathbf{d}},\ OC_p^{\mathcal{B}}) \leq \alpha$ 意味着$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 在 $\frac{\alpha}{2}$中是经 PD-$(\mathcal{A}_p)$ 由族 $\mathcal{B}$近似的缩回对象。也就是说，在这种情况下，不会出现 $\nu(p)$ 项，这与推论4.2.13中的一般表述不同。其

原因在于，在这种情况下，映射 Δ 是过滤的（见命题 4.2.7）；证明使用了命题 4.2.6 的一个版本，其中没有移位函子 $\Sigma^{-2\nu(p)}$ 出现。唯一会用到这一改进之处的地方是命题 4.3.1。

4.2.7. 开闭映射的余极限。 本节将证明开闭映射与延拓函子相容，并定义定理 4.1.1 中陈述的余极限开闭映射。

考虑如下系统

$$\widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}) = \left\{ \left\{ \mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}; p) \right\}_{p\in\mathcal{P}}, \{\mathcal{H}_{p,q}, \mathcal{H}_{q,p}\}_{p\preceq q} \right\}$$

与 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$相关联的滤过Fukaya 范畴。正如 §2.6.6 中所解释的，这实际上是 §2.5.8 意义下的同伦系统。因此，通过命题 A.6.1，我们得到一个有向系统

$$\left\{ \left\{ PHH(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}; p)) \right\}_{p\in\mathcal{P}}, \left\{ \mathcal{H}^{PHH}_{p,q} \right\}_{p\preceq q} \right\}$$

由持久模构成，其中 $\mathcal{H}^{PHH}_{p\,q}$，是由延拓函子（族）$\mathcal{H}_p$所诱导的持久性映射，作用于持久性 *Hochschild* 同调上，$_q$（$\mathcal{H}^{PHH}_{p\,q}$，由命题A.6.1唯一确定）。特别地，余极限

$$PHH(\widehat{\mathcal{F}uk}) := \varinjlim_{p\in\mathcal{P}} PHH(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}; p))$$

是良定义的，且为一个持久模，正如 §2.5.9 中所解释的。此外，由于系统$\widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})})$ 尤其具有固定的满对象基（见 §2.5.7），因此以下结论成立：给定一个子族 $\mathcal{B}\subset\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$，我们得到一个余极限

$$PHH(\widehat{\mathcal{B}}) := \varinjlim_{p\in\mathcal{P}} PHH(\mathcal{B}_p)$$

其中，$\mathcal{B}_p$是由 $\mathcal{B}$诱导的 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})};\, p)$的满 A_∞子范畴，而 $\widehat{\mathcal{B}}$是由 $\{\mathcal{B}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$诱导的 A_∞范畴子系统。

对于任意 $N\geq 1$，我们用 $F^N PHH(\mathcal{B}_p)$表示 $F^N CC(\mathcal{B})$的持久同调，也就是 N阶 Hochschild 链复形长度过滤中的层级（见 §A.4）。
令 $p\preceq q$，并考虑限制在 $\mathcal{B}_q$ 上的延拓 A_∞-函子 $\mathcal{H}_{q,p}\colon \mathcal{B}_q\to\mathcal{B}_p$。我们回顾（见 §2.6.6, [2]），这些函子具有线性偏差率 $\leq 2(\nu(p)-\nu(q))$。记 $s(q,p) := 2(\nu(p)-\nu(q))$。特别地，$\mathcal{H}_{q,p}$ 不会在持久性 Hochschild 同调上诱导出映射，因为链级上的滤过平移会随着 $N\to\infty$ 而发散。为克服这一问题，我们在 $CC(\mathcal{B}_q)$ 上使用长度过滤。注意，在链级上，$\mathcal{H}_{q,p}$ 对任意 $N\geq 1$ 诱导出一个链映射 $F^N CC(\mathcal{B}_q)\to F^N CC(\mathcal{B}_q)$，其平移为 $\leq Ns(q,p)$。特别地，通过与移位函子相关的结构映射 η（见 §2.1）进行前复合和后复合，$\mathcal{H}_{q,p}$ 诱导出一个持久性映射

$$\mathcal{H}^{F^N PHH}_{q,p}\colon \Sigma^{-2N\nu(q)} F^N PHH(\mathcal{B}_q)\to \Sigma^{-2N\nu(p)} F^N PHH(\mathcal{B}_p).$$

下一个引理直接由延拓函子的性质得出。

引理 4.2.16。 令 $p \in \mathcal{P}$。该族

$$\left\{\mathcal{H}^{F^N PHH}_{q,p} \colon \Sigma^{-2N\nu(q)} F^N PHH(\mathcal{B}_q) \to \Sigma^{-2N\nu(p)} F^N PHH(\mathcal{B}_p)\right\}_{q\in\mathcal{P},\ p\preceq q}$$

定义了持久模有向系统之间的同态。

再次利用长度过滤在由 A_∞-函子诱导的霍赫希尔德链映射下保持不变这一事实，我们定义

$$F^N PHH(\widehat{\mathcal{B}}) := \varinjlim_{p\in\mathcal{P}} F^N PHH(\mathcal{B}_p)$$

对于任意 $N \geq 1$。

作为 L 的结果 emma 4.2.16 以及这一事实 $\nu(q) \to 0$ 作为 $q \to \infty$，我们得到一个唯一的 ma p

$$H^{F^N PHH}_{\infty,p} \colon F^N PHH(\widehat{\mathcal{B}}) \to \Sigma^{-2N\nu(p)} F^N PHH(\mathcal{B}_p)$$

对于任意 $p \in \mathcal{P}$，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{-2N\nu(q)} PHH(\mathcal{B}_q) & \longrightarrow & F^N PHH(\ \widehat{\mathcal{B}}) \\ & {\scriptstyle \mathcal{H}^{F^N PHH}_{q,p}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathcal{H}^{F^N PHH}_{\infty,p}} & \\ & \Sigma^{-2N\nu(p)} F^N PHH(\mathcal{B}_p) & \end{array} \tag{65}$$

对所有带有 $p \preceq q$ 的 $q \in \mathcal{P}$ 都成立。

到目前为止，我们证明的是同伦系统的内在性质，并未涉及任何几何考量。现在我们转向几何，并引入开闭映射。

我们将量子上同调 $QH(X,\ \Lambda)$ 视为由 $\mathcal{P}$参数化的持久模的平凡有向系统。

引理 4.2.17。 持久性映射族

$$\left\{OC^{\mathcal{B}}_p \colon PHH(\mathcal{B}_p) \to QH(X,\Lambda)\right\}_{p\in\mathcal{P}}$$

定义了持久模有向系统的同态。

证明。 为证明 $\{OC^{\mathcal{B}}_p\}_p$ 是有向系统的同态，我们必须证明$OC^{\mathcal{B}}_q \circ \mathcal{H}^{PHH}_{p,\ q} = OC^{\mathcal{B}}_p$。为此，在链级上定义两个映射之间的链同伦；这两个映射是滤过链映射，并证明该链同伦也是滤过的。这与命题 4.2.12 的证明非常相似，故此处略去。 □

根据引理4.2.17，我们得到一个唯一的持久化态射

$$\widehat{OC}^{\mathcal{B}} := \varinjlim_{p\in\mathcal{P}} OC^{\mathcal{B}}_p \colon PHH(\widehat{\mathcal{B}}) \to QH(X,\Lambda)$$

使得该图表

$$\begin{array}{ccc} PHH(\mathcal{B}_p) & \longrightarrow & PHH(\widehat{\mathcal{B}}) \\ & {\scriptstyle OC_p^{\mathcal{B}}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \widehat{OC}^{\mathcal{B}}} & \\ & QH(X,\ \Lambda) & \end{array} \tag{66}$$

对所有 $p \in \mathcal{P}$均成立。态射 $\widehat{OC}^{\mathcal{B}}$ 称为 余极限开闭映射，对应于 $\mathcal{B}$，并且是定理陈述中出现的持久性映射4.1.1。

事实上，我们将证明更强的结论。

引理 4.2.18。 设 $p \in \mathcal{P}$。持久性图

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{-2N\nu(p)} F^N PHH(\mathcal{B}_p) & \xleftarrow[\Sigma^{-2N\nu(p)}\mathcal{H}^{F^N PHH}_{\infty,p}]{} & F^N PHH(\widehat{\mathcal{B}}) \\ \downarrow {\scriptstyle \Sigma^{-2N\nu(p)} OC_p^{\mathcal{B}}} & & \downarrow {\scriptstyle \widehat{OC}^{\mathcal{B}}} \\ \Sigma^{-2N\nu(p)} QH(X,\Lambda) & \longleftarrow & QH(X,\Lambda) \end{array} \tag{67}$$

可交换，其中底部映射由持久模$QH(X,\Lambda)$的结构映射所诱导。

证明。 设 p, q 属于 $\mathcal{P}$，使得 $p \preceq q$。考虑持久性图

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{-2N\nu(p)} F^N PHH(\mathcal{B}_p) & \xleftarrow[\mathcal{H}^{F^N PHH}_{q,p}]{} & F^N PHH(\mathcal{B}_q) \\ \downarrow {\scriptstyle OC_p^{\mathcal{B}}} & & \downarrow {\scriptstyle OC_q^{\mathcal{B}}} \\ \Sigma^{-2N\nu(p)} QH(X,\Lambda) & \longleftarrow & QH(X,\Lambda) \end{array} \tag{68}$$

该图可交换，证明思路与引理4.2.17的证明相同，只是需要稍加注意，跟踪滤过中的平移。对于变化的 q，使得 $p \preceq q$，上述图诱导出一个由持久模正向系统构成的交换图。注意，$\Sigma^{Ns(q,p)} QH(X,\Lambda)$ 在该族上的余极限等于$\Sigma^{-2N\nu(p)} QH(X,\Lambda)$。这就证明了该结论。 □

4.2.8. 定理 4.1.1 的证明。众所周知，无穷层开闭映射给出一个向量空间同构 $PHH^\infty(\mathcal{B}_p) \cong QH^\infty(X,\Lambda)$ [24]，并且单位元 $u \in QH^0(X,\Lambda)$ 会延续至 $QH^\infty(X,\Lambda)$。$PHH^\infty(\mathcal{B}_p)$ 中的任意元素都可以由某个长度为 $\leq N_p$ 的霍赫希尔德链表示，其中 $N_p \geq 0$。此外，我们可以选择 N_p，使得 $F^{N_p} PHH(\mathcal{B}_p)$ 的谱不变量是最优的，也就是说，对于在两个持久模中都延续至无穷的同调类，它们与 $PHH(\mathcal{B}_p)$ 的谱不变量一致。我们声称，N_p 与 $p \in \mathcal{P}$ 无关。这是由以下事实得出的：遗忘滤过后，

函子 $\mathcal{H}_{q,\ p}$ 诱导出唯一映射 $PHH^\infty(\mathcal{B}_q) \to PHH^\infty(\mathcal{B}_p)$，该映射是一个同构（因为遗忘滤过后，连续函子是 A_∞-范畴之间的拟等价），因此保持长度过滤（注意，当然，这一切对于由 $\mathcal{H}_{p,\ q}$ 在 PHH^∞ 上诱导的映射也成立）。我们记 $N_{\mathcal{B}} := N_p$。

此时，定理 4.1.1 的证明便成为一项记账工作。

设 $\mathcal{F}^\epsilon \subset \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ as in the statement。我们在情形 $\curvearrowright\mathcal{B} = \mathcal{F}^\epsilon$ 下使用上述记号。考虑上文引入的常数 $N_{\mathcal{F}^\epsilon}$。现在令 $a \in PHH^\epsilon(\mathcal{F}^\epsilon)$ 满足 $\widehat{OC}(a) = i_{o,\epsilon}(u_{\mathbf{d}})$，其中 $u_{\mathbf{d}} \in QH^0(X,\Lambda)_{\mathbf{d}}$ 是 $QH(X,\Lambda)$ 中上同调单位元的投影。由上文可知，a 可视为 $F^{N_{\mathcal{F}^\epsilon}} PHH(\widehat{\mathcal{F}^\epsilon})$ 中的一个元素。由此以及图表（67）的交换性，我们得到

$$R(u, OC_p^{\mathcal{F}^\epsilon}) \leq \epsilon + 2N_{\mathcal{F}^\epsilon}\nu(p)$$

对所有 $p \in \mathcal{P}$。利用命题 4.2.12，我们得出 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$ 是 $\frac{\epsilon}{2}$-可由 $\mathcal{F}^\epsilon$ 在系统 $\widehat{\mathcal{F}uk}$（$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{d})}$）中 按照定义 2.5.8 的意义 $\square$可缩回逼近。

备注 4.2.19。 定理 4.1.1 证明中的复形形式主义源于缺乏过滤 A_∞-范畴的同伦系统的余极限概念。事实上，定理 4.1.1 陈述中出现的开闭映射，应被理解为与一个极限 Fukaya 范畴相关联的开闭映射（参见 §2.5.9 开头的讨论）。

4.3. **推论 4.1.2的证明。** 我们将把这两个几何情形的证明分别安排在不同的小节中。基本思路相同：将环境流形切分成越来越多、间距相等的直切片。按照第 $\mathcal{A}_p$ 所示，我们将继续把 Fukaya 范畴记作$\widehat{\ }$，并把 Fukaya 范畴的系统记作 $\mathcal{A}$，如第 4 节开头所示。

4.3.1. *2*-球面上赤道的可逼近性。 下文中，我们将把一个闭的单调拉格朗日子流形 $L \subset S^2$ 称为“赤道”。注意，这些拉格朗日子流形恰好是 S^2 中将其分成两个面积相等区域的嵌入曲线。

S^2 的第一陈类在 $H^2(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 中消失，因此与零特征值对应的量子同调 $QH(S^2,\ \Lambda)$ 的特征子空间就是整个空间。在本小节中，我们只考虑满足以下两个条件的扰动数据 $p \in \mathcal{P}$（不失一般性）：

(1) 设 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2)$ 是 S^2 上的一条赤道，并考虑 L的 p-Floer 数据中的莫尔斯函数 $f_p^L\colon L \to \mathbb{R}$。我们假设 f_p^L有唯一的极大值点 $e_L \in L$ 和唯一的极小值点 $\mathrm{pt}_L \in L$。我们始终假设 e_L 和 pt_L 都不是 S^2的北极或南极。(2) 考虑 S^2对应的 p-Floer 数据中的莫尔斯函数 $f_p^{S^2}\colon S^2 \to \mathbb{R}$。我们假设 $f_p^{S^2}$ 有唯一的极大值点 $u_{S^2} \in S^2$ 和唯一的极小值点 $\mathrm{pt}_{S^2} \in S^2$，且没有其他临界点。我们进一步假设 u_{S^2} 和 pt_{S^2} 均不与 S^2的北极或南极重合，

我们将滥用记号，把 $\mathcal{P}$ 的这个“限制”再次记作 $\mathcal{P}$，并将 A_∞-范畴的同伦系统 $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2))$ 视为由这个受限的 $\mathcal{P}$ 参数化。

命题 4.3.1。 设 $L \in \mathcal{L}ag^{(mon,\mathbf{0})}(S^2)$ 是 S^2 上的一个赤道。那么 $\mathcal{L}ag^{(mon,\mathbf{0})}(S^2)$可由 L 作 Γ_4-可缩回逼近。

证明。 设 $p \in \mathcal{P}$。显然，在链级上我们有

$$OC_p^L(\mathrm{pt}_L \otimes \mathrm{pt}_L) = T^{\frac{1}{2}} u_{S^2}.$$

此外，由于 d_{CC} 是循环的，$\mathrm{pt}_L \otimes \mathrm{pt}_L$ 是 $CC_*(L,L)$中的一个循环。注意，持久性 Hochschild 同调 $PHH_*(L_p)$ 不依赖于 $p \in \mathcal{P}$。由定理4.1.1即可得证。 □

注 4.3.2。 a. 我们实际上证明了，对于单个赤道，定义 $\delta > 0$ 2.5.8中出现的常数可以任意取大。这是因为，对于 L 的自弗洛尔同调，我们不需要任何哈密顿扰动。

b. 在我们的设定中，开闭映射的线性分量 $HF(L,L) \to QH(S^2)$ 不会命中单位元：事实上，$OC(e_L) = 0$ 可由次数论证得出，而 $OC(\mathrm{pt}_L) = \mathrm{pt}_{S^2} + T^{\frac{1}{2}} u_{S^2}$。不过请注意，如果我们使用实数上的诺维科夫域作为系数，那么情况就会有所不同，因为 $T^{-1\frac{1}{2}}\mathrm{pt}_{S^2} + u_{S^2}$是量子同调中 $\mathcal{C}P^1$ 在此系数域上的零特征值分量里的单位元投影。

注意到，由于 $\mathrm{pt}_{S^2} + T^{\frac{1}{2}} u_{S^2}$ 和 u_{S^2} 是 $CQ(S^2)$ 中的非同调循环，因此 pt_L和 $[\mathrm{pt}_L \otimes \mathrm{pt}_L]$ 生成 $HH(L)$。

c. 由于我们知道 OC^L： $HH(L) \to QH(S^2)$ 是一个同构，由上述计算可知，$e_L \in PHH^\infty(L, L)$ 必须是一个边界。事实上，它等于 $T^{-\frac{1}{2}} d_{CC}(a_L \otimes a_L \otimes a_L)$，其中 $a_L = \mathrm{pt}_L + T^{\frac{1}{4}} e_L$；确实，注意到 $a_L \in CF(L, L)$ 是一个满足以下条件的循环

$$\mu_k(a_L, \dots, a_L) = T^{\frac{1}{2}} e_L \text{ for any } k \geq 2.$$

因此，$[e_L]$ 在 $PHH(L)$ 中具有Γ_2的边界深度。注意到 $[e_L \otimes \mathrm{pt}_L]$ 也具有等于Γ_2的边界深度。事实上 -

$$d_{CC}(a_L^{\otimes 4}) = T^{\frac{1}{2}}(e_L \otimes \mathrm{pt}_L + \mathrm{pt}_L \otimes e_L)$$

以及 $\mathrm{pt}_L \otimes e_L = d_{CC}(\mathrm{pt}_L \otimes e_L \otimes e_L)$。

现在我们将证明，通过考虑更大的逼近族，可以以更高的精度逼近 S^2 的 Fukaya范畴。固定一个赤道 $S^1 \subset S^2$ 作为参考，并考虑集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}ag^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2)$ 条经过北 $n \in S^2$ 极和南极 $s \in S^2$的大圆。当然， $\mathcal{E}$ 中的任意两个拉格朗日子流形都横截相交。回顾我们所处的情形，给定扰动数据 $p \in \mathcal{P}$，与一对横截相交的拉格朗日子流形 (L_0, L_1) 相关联的 p-Floer 数据的哈密顿部分被假定为常数（见第 74 页），根据定义，该常数为 $< \nu(p)$，即 p 的大小。此外，我们要求$H_p^{L_0 \quad L_1} = H^{L_1 p \quad L_0}$。因此，Floer 复形 $CF(L_0, L_1; p)$ 和 $CF(L_1, L_0; p)$ 由 $L_0 \cap L_1$中的（有限多个）交点生成，并且这些交点处于相同的滤过层级。设 $L_1 \in \mathcal{E}$ 由另一个赤道 $L_0 \in \mathcal{E}$ 旋转小于 π的角度得到。当然， $L_0 \cap L_1$ 仅由北极和南极组成：我们约定，在复形 $CF(L_0, L_1; p)$ 中，北极 $n_0 \in CF(L_0, L_1; p)$ 的分次为 1，而南

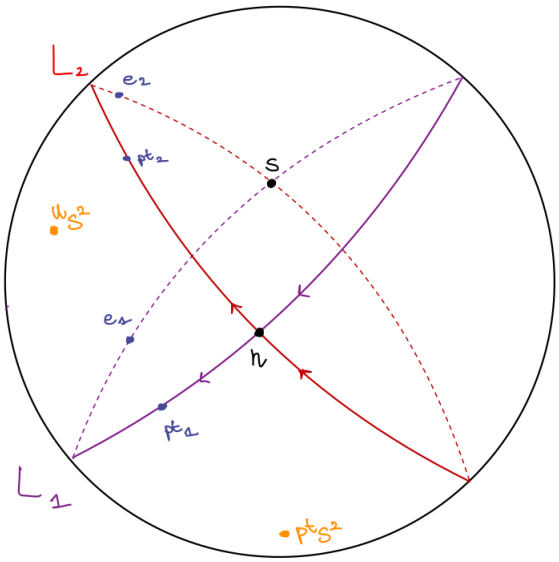


图 9。 命题 4.3.3中描述的几何情形，在$N = 2$的情况下。

极 $s_0 \in CF(L_0, L_1; p)$ 的分次为 0；而在复形 $CF(L_1, L_0; p)$ 中则相反（在该复形中，这两个极点分别记为 n_1 和 s_1 ）。

下一个结果所涉及的可逼近性概念是定义2.2.3的收缩版本。

命题 4.3.3。 设 $p \in \mathcal{P}$和 $N \geq 2$。考虑有限族大圆 $\mathcal{E}(N) = \{L_1, \ldots, L_N\} \subset \mathcal{E}$，它们位于 S^2上，均通过南北极，且 L_i与 L_{i+1}之间的角度差为 $\frac{\pi}{2N}$。那么， $\mathcal{L}ag^{(mon,\mathbf{0})}(S^2)$ 在 $\mathcal{A}_p$ 中可由族 $\mathcal{E}(N)$以精度 $\frac{1}{4N} + 2\nu(p)$逼近。

注记 4.3.4。证明。 我们对赤道编号，使得从北极看去，它们从 L_1开始按顺时针方向排列。我们省略记号中的 p，并对任意 $i = 1, \ldots, N$[1]，记作 $C_i := CF(L_i, L_{i+1})$ 和 $C_i' := CF(L_{i+1}, L_i)$。对于任意 i，分别用 $n_i, s_i \in C_i$和 $n_i', s_i' \in C_i'$ 表示北极和南极。为简化证明后续部分的计算，我们对每条赤道 L_i 的 p-Floer 数据中的函数 $f_p^{L_i}$施加以下额外限制：要求从北极流向南极时，先经过 pt_i ，再经过 e_i，然后才到达南极。我们还要求，环境流形 $f_p^{S^2}$：$S^2 \to \mathbb{R}$ 的 p-Floer 数据中的莫尔斯函数 $f_p^{S^2}$ 的临界点 u_{S^2} 和 pt_{S^2} 都位于 L_1 与 L_2 之间的区域内，但不在 L_1或 L_2上。

[1]按照约定 $L_{N+1} = L_1$。

我们声称

$$\vec{\gamma} := \sum_{i=1}^{N} n_i \otimes s_i' \in \bigoplus_{i=1}^{N} C_i \otimes C_i' \subset CC_*(\mathcal{E}(N))$$

是一个霍赫希尔德循环，而且

$$OC_p^{\mathcal{E}(N)}\left(\sum_{i=1}^{N} n_i \otimes s_i'\right) = T^{\frac{1}{2N}} u_M.$$

这将证明该命题，因为

$$\mathbb{A}_{CC}\left(\sum_{i=1}^{N} n_i \otimes s_i'\right) = \mathbb{A}_{CC}(n_i \otimes s_i') = \mathbb{A}(n_i) + \mathbb{A}(s_i') \leq 2\nu(p)$$

根据霍赫希尔德复形上滤过的定义。

We 首先证明 $\vec{\gamma}$ 是一个霍赫希尔德循环。令 $i \in \{1, \dots, N\}$。我们计算

$$\mu_2(n_i, s_i') = T^{\frac{1}{2N}} e_i \text{ and } \mu_2(s_i', n_i) = T^{\frac{1}{2N}} e_{i+1}$$

只需像图中那样计算球面的切片数 9。根据霍赫希尔德微分的定义，我们得到

$$d_{CC}(n_i \otimes s_i') = T^{\frac{1}{2N}}(e_i + e_{i+1}),$$

因此

$$d_{CC}(\vec{\gamma}) = T^{\frac{1}{2N}} \sum_{i=1}^{N} (e_i + e_{i+1}) = 0$$

a因此我们使用 $\mathbb{Z}_2$ 系数。这表明 $\vec{\gamma}$ 是一个霍赫希尔德循环。

在这种情况下，计算 $OC_p^{\mathcal{B}}(\vec{\gamma})$ 很容易。由于 $f_p^{S^2}$ 的选取，我们有

$$OC_p^{\mathcal{B}}(\vec{\gamma}) = OC_p^{\mathcal{B}}(n_1 \otimes s_1') = T^{\frac{1}{2N}} u_{S^2}$$

由次数原因可知。 □

证明上述命题的另一种方法是证明元素 $\vec{\gamma}$ 在 $CC(\mathcal{E}(N))$ 中与 $T^{-\frac{N-1}{2N}} \mathbf{pt}_{L_i} \otimes \mathbf{pt}_{L_i} \in CF(L_i, L_i) \otimes CF(L_i, \overline{L_i})$ 同调，其中任意 i 均成立。

4.3.2. *2*-环面上非可缩圆周的可逼近性。考虑带有单位体积的标准辛 2-环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$。我们关注非可缩拉格朗日子流形 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2)$ 的类。我们在 $\mathbb{T}^2$ 上使用坐标 (x, y)，并用 (n, m) 表示 $\mathbb{Z}^2$ 上的格点坐标。我们提醒读者，对我们而言，弱精确情形是单调情形的一个特例。

我们引入以下记号：

$$L_y := \{x = 0\} \subset \mathbb{T}^2 \text{ and } L_x^\theta := \{y = \theta\} \subset \mathbb{T}^2 \text{ for any } \theta \in S^1$$

并将 L_y 与 L_x^θ 之间唯一的交点记为 $a^\theta \in L_x^\theta \pitchfork L_y$。我们记$L_x := L_x^0$ 和 $a := a^0$。在本节中，我们将使用这一族

$$\mathcal{N} := \{L_y\} \cup \{L_x^\theta \mid \theta \in S^1\} \subset \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2).$$

我们将 a^θ 视为 Floer 复形的生成元，并记作

$$a^\theta_{xy} \in CF(L^\theta_x, L_y) \text{ and } a^\theta_{yx} \in CF(L_y, L^\theta_x)$$

对于任意选取的扰动数据 $p \in \mathcal{P}$，我们在记号中省略不写。本节中，我们只考虑满足以下条件的扰动数据 $p \in \mathcal{P}$ （不失一般性）：

(1) 考虑 $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ 中 p-Floer 数据的莫尔斯函数 $f_p^{\mathbb{T}^2}$。我们假设 $f_p^{\mathbb{T}^2}$ 恰有四个临界点：唯一的极大值点 $u_{\mathbb{T}^2} \in \mathbb{T}^2$、两个鞍点 s_1，$s_2 \in \mathbb{T}^2$ 以及唯一的极小值点 $\mathrm{pt}_{\mathbb{T}^2} \in \mathbb{T}^2$。我们进一步假设，这些临界点都不在上文引入的拉格朗日子流形 L_y 上。

(2) 令 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2)$，并考虑 p-Floer 数据中 L 的莫尔斯函数 $f_p^L\colon L \to \mathbb{R}$。我们假设 f_p^L 有唯一的极大值点 $e_L \in L$ 和唯一的极小值点 $\mathrm{pt}_L \in L$。我们始终假设 e_L 和 pt_L 都不在上文引入的拉格朗日子流形L_y 上。在 L 是 $\mathcal{N}$ 中的拉格朗日子流形 L_y 或 L^θ_x 的特殊情形下，我们将这些临界点记为 e_y、pt_y 或 e^θ_x、pt^θ_y。

备注 4.3.5。 x 和 y 的作用可以互换。此外，我们可以使用包含 L_y 的可数子族 $\mathcal{N}_c$，并且对所有 $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$都包含 L^θ_x。

与上一小节中的 2-球面情形一样，我们先证明一个精度较低的预备性缩回逼近结果，然后再讨论更一般的情况。在下面的命题中，我们将使用拉格朗日子流形 L_x，但相同的结果对所有 L^θ_x都成立。

命题4.3.6。 设 $p \in \mathcal{P}$。那么 $\mathcal{L}ag^{(wex)}(\mathbb{T}^2)$ 在 $\mathcal{A}_p$ 中可由 $\mathcal{B}_{xy} := \{L_x, L_y\}$ 以精度$\frac{1}{2} + 3\nu(p)$作缩回逼近。

证明。 考虑霍赫希尔德链 $\vec{a} = a_{xy} \otimes a_{yx} \otimes a_{xy} \otimes a_{yx} \in CC_*(\mathcal{B}_{xy})$。我们证明它是一个循环。为此，我们计算所有可能的循环部分收缩。

(1) 首先，$\mu_2(a_{xy}, a_{yx}) \in CF(L_x, L_x)$ 和 $\mu_2(a_{yx}, a_{xy}) \in CF(L_y, L_y)$ 都为零，因为唯一允许的贡献分别是通向 pt_x 和 pt_y 的莫尔斯轨线，而这些轨线都是成对出现的。

(2) 项 $\mu_3(a_{xy}, a_{yx}, a_{xy}) \in CF(L_x, L_y)$ 和 $\mu_3(a_{yx}, a_{xy}, a_{yx})$ 也为零。例如，

$$\mu_3(a_{xy}, a_{yx}, a_{xy}) = 2 \sum_{n,m>0} T^{nm} a_{xy}$$

因为我们可以看到，在 $\mathbb{T}^2$ 的基本正方形中，“两个相反的” a_{xy} 以两种不同的方式作为输出出现（对每个格多边形 (n, m) 而言）。

(3) 项 $\mu_4(a_{xy}, a_{yx}, a_{xy}, a_{yx}) \in CF(L_x, L_x)$ 和 $\mu_4(a_{yx}, a_{xy}, a_{yx}, a_{x,\,y}) \in CF(L_y, L_y)$ 都为零。例如

$$\mu_4(a_{xy}, a_{yx}, a_{xy}, a_{yx}) = 2 \sum_{n,m>0} nT^{nm} e_x$$

因为在一个 1 宽度为 n 的格点多边形可以有 e_x，并且有 $2n$ 种不同的输出方式。

由此可知， $\vec{a} \in CC_*(B_{xy})$ 是一个循环。我们计算

$$OC^{\mathcal{B}_{xy}}(\vec{a}) = \sum_{n,m>0} nmT^{nm} u_{\mathbb{T}^2}$$

因为在每个 (n,m) 格多边形中，我们都可以将 u 看作位于 nm 个不同位置的输出（多边形中每个嵌入的基本正方形对应一个）。由于我们是在 $\mathbb{Z}_2$ 上工作，因此

$$OC^{\mathcal{B}_{xy}}(\vec{a}) = \sum_{n>0} n^2 T^{n^2} u_{\mathbb{T}^2} = \sum_{n\geq 0} T^{(2n+1)^2} u_{\mathbb{T}^2}.$$

注意，这个表达式中的最小诺维科夫指数为 1。根据定义，交点位于滤过层级 $\leq \nu(p)$，故结论成立。□

注记 4.3.7。 更正式地说，给定诺维科夫元素

$$f(T) = \sum_{n\geq 0} T^{(2n+1)^2}$$

我们有

$$f^{-1}(T) = T^{-1} \sum_{n\geq 0} g_n T^n$$

其中 $g_0 = 1$ 和

$$g_n = \sum_{e\in E\setminus\{0\},\ e\leq n} g_{n-e}$$

其中 $E = \{(2n+1)^2 - 1 :\ n \geq 0\}$. 事实上，写作 $\overline{f_{(T)}}_T = \sum_{n\geq 0} f_n T^n$ 其中 $f_n = 1$ 当且仅当 $n \in E$，我们有 $f_0 \cdot g_0 = 1$ 而 T^n 在 $f \cdot f^{-1}$ 中对应于 $n \geq 1$ 的系数为

$$\sum_{j=1}^{n} f_j g_{n-j} = \sum_{j\in E,\ j\leq n} g_{n-j} = g_n + \sum_{j\in E\setminus\{0\},\ j\leq n} g_{n-j} = 0$$

根据我们对 Λ 上作用过滤的定义，可直接得出 $f^{-1} \in \Lambda$ 位于滤过层级 ≤ 1。

利用 theta 函数的形式体系，我们可以写成

$$\sum_{n\geq 0} T^{(2n+1)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T^{(4n+1)^2} = \theta_{\frac{1}{4},0}(16,0).$$

但也请注意,

$$\sum_{n\geq 0} n^2 T^{n^2} = T\theta'_{0,0}(1,0)$$

命题 4.3.8. 设 $p \in \mathcal{P}$ 且 $N \geq 1$。考虑族 $\mathcal{N}(N) = \{L_y, L_1, \ldots, L_N\} \subset \mathcal{N}$，其中

$$L_j = L_x^{\frac{j-1}{N}}$$

对于 $j = 1, \ldots, N$， $\mathcal{L}ag^{(wex)}(\mathbb{T}^2)$ 在 $\mathcal{A}_p$ 中可通过 $\mathcal{N}(N)$ 以精度 $\frac{1}{2N} + 3\nu(p)$ 进行可缩回逼近。

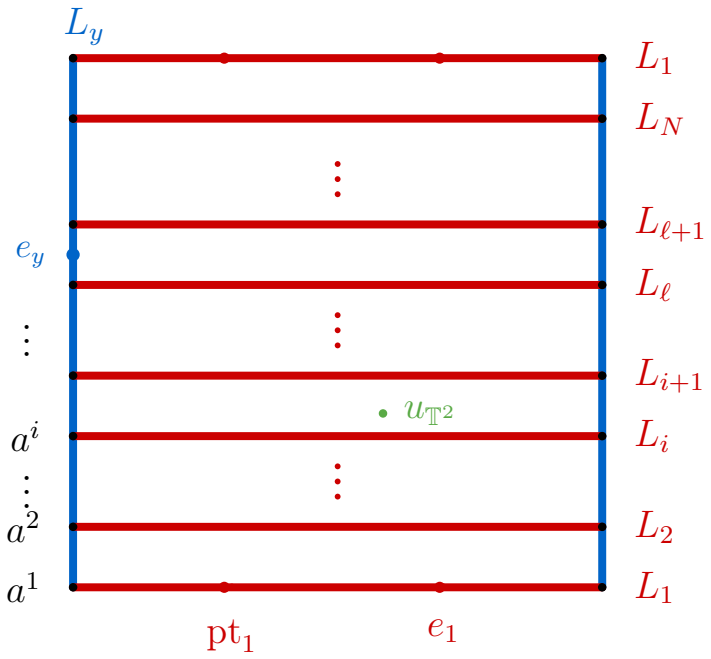


图10. $\mathbb{T}^2$ 及其拉格朗日子流形逼近族 $\mathcal{N}(N)$，见命题 4.3.8。

证明。我们假设临界点 $u_{\mathbb{T}^2}$ 不位于 $\mathcal{N}(N)$ 中的任何拉格朗日子流形上。对于任意 $j = 1, \ldots, N$，我们用 $e_j \in CF(L_j, L_j)$ 和 $\mathrm{pt}_j \in CF(L_j, L_j)$ 分别表示莫尔斯函数 $f_p^{L_j}$ 的极大值点和极小值点。此外，对于任意 j，我们用 $a_{xy}^j \in CF(L_j, L_y)$ 和 $a_{yx}^j \in CF(L_y, L_j)$ 表示交点 a，将其视为 Floer 复形的生成元。我们用 $i \in \{1, \ldots, N\}$ 表示唯一的指标，使得 $u_{\mathbb{T}^2}$ 位于 L_i 与 L_{i+1}之间的面积区域内。类似地，我们用 l 表示唯一的指标，使得 $e_y \in CF(L_y, L_y)$ 位于 L_l 与 L_{l+1}之间的 L_y-线段上。图10示意性地展示了该几何构型。

对于任意 $j = 1, \ldots, N$，考虑霍赫希尔德链[2]

$$\gamma^j := a_{xy}^j \otimes a_{yx}^{j+1} \otimes a_{xy}^{j+1} \otimes a_{yx}^j \in CC_*(\mathcal{N}(N)).$$

给定实数 $A \in \mathbb{R}$，令[3]

$$q_A^h(T) := \sum_{n,m>0} n(T^{n(m-1+A)} + T^{n(m-A)}) \text{ and } \tilde{q}_{\frac{1}{N}}^h(T) : ‘ = \sum_{n,m>0} T^{n(m-1+A)} + T^{n(m-A)}$$

以及

$$q_A^v(T) := \sum_{n,m>0} m(T^{n(m-A)} + T^{n(m+A)}) \text{ and } \tilde{q}_A^v(T) := \sum_{n,m>0} T^{n(m-A)} + T^{n(m+A)}$$

[2]这里 $N + 1 = 1$。[3]这里 h 表示水平，而 v 表示垂直。

是诺维科夫域 Λ 的元素。我们通过计算所有可能的收缩来计算 γ^j 的霍赫希尔德微分。

(1) 我们有

$$\mu_4(a^j_{xy}, a^{j+1}_{yx}, a^{j+1}_{xy}, a^j_{yx}) = q^h_{\frac{1}{N}}(T)e_j \text{ and } \mu_4(a^{j+1}_{xy}, a^j_{yx}, a^j_{xy}, a^{j+1}_{yx}) = q^h_{\frac{1}{N}}(T)e_{j+1},$$

而

$$\mu_4(a^j_{yx}, a^j_{xy}, a^{j+1}_{yx}, a^{j+1}_{xy}) = \mu_4(a^{j+1}_{yx}, a^{j+1}_{xy}, a^j_{yx}, a^j_{xy}) = \begin{cases} q^v_{\frac{1}{N}}(T)e_y, \text{ if } j \neq l \\ q^v_{1-\frac{1}{N}}(T)e_y, \text{ if } j = l. \end{cases}$$

(2) 我们有

$$\mu_3(a^j_{xy}, a^{j+1}_{yx}, a^{j+1}_{xy}) = \tilde{q}^h_{\frac{1}{N}}(T)a^j_{xy} \text{ and } \mu_3(a^{j+1}_{yx}, a^{j+1}_{xy}, a^j_{yx}) = \tilde{q}^h_{\frac{1}{N}}(T)a^j_{yx}$$

而

$$\mu_3(a^j_{yx}, a^j_{xy}, a^{j+1}_{yx}) = \tilde{q}^h_{\frac{1}{N}}(T)a^{j+1}_{yx} \text{ and } \mu_3(a^{j+1}_{xy}, a^j_{yx}, a^j_{xy}) = \tilde{q}^h_{\frac{1}{N}}(T)a^{j+1}_{xy}$$

现在我们计算相关的 μ_3。由此可得

$$\begin{aligned} d_{CC}(\gamma^j) &= q^h_{\frac{1}{N}}(T)(e_j + e_{j+1}) + 2q^v_{c_j}(T)e_y + \tilde{q}^h_{\frac{1}{N}}(T)(2a^j_{xy} \otimes a^j_{yx} + a^{j+1}_{xy} \otimes a^{j+1}_{yx} + a^{j+1}_{yx} \otimes a^{j+1}_{xy}) \\ &= q^h_{\frac{1}{N}}(T)(e_j + e_{j+1}) + \tilde{q}^h_{\frac{1}{N}}(T)(a^{j+1}_{xy} \otimes a^{j+1}_{yx} + a^{j+1}_{yx} \otimes a^{j+1}_{xy}) \end{aligned}$$

其中，当 $j \neq l$ 时 $c_j = \frac{1}{N}$，否则为 $c_j = 1 - \frac{1}{N}$。因此

$$d_{CC}\left(\sum_{j=1}^N \gamma^j\right) = \tilde{q}^h_{\frac{1}{N}}(T)\sum_{j=1}^N (a^j_{xy} \otimes a^j_{yx} + a^j_{yx} \otimes a^j_{xy})$$

因为对 j 求和时，形如 e_j 的项会两两抵消。特别地，$\sum_{j=1}^N \gamma^j$ 不是一个循环。不过，我们断言

$$\vec{\gamma} = \sum_{j=1}^N \gamma^j + \tilde{q}^h_{\frac{1}{N}}(T)\ e_j \otimes a^j_{xy} \otimes a^j_{yx} \in CC_*(\mathcal{N}(N))$$

是一个循环。事实上:

$$d_{CC}(e_j \otimes a^j_{xy} \otimes a^j_{yx}) = \mu_2(e_j, a^j_{xy}) \otimes a^j_{yx} + \mu_2(a^j_{yx}, e_j) \otimes a^j_{xy} = a^j_{xy} \otimes a^j_{yx} + a^j_{yx} \otimes a^j_{xy},$$

因为 e_j 是严格单位元，且点与自身的乘积为零。

现在我们计算 $OC^{\mathcal{N}(N)}(\vec{\gamma}) \in CQ(\mathbb{T}^2)$。回忆一下，$i \in \{1, \dots, N\}$ 被定义为唯一的指标，使得用于定义 $QH_*(M)$ 的莫尔斯函数 $f^{\mathbb{T}^2}_p$ 的临界点 $u = u_{\mathbb{T}^2}$ 位于 L_i 与 L_{i+1} 之间的面积内。令 $j \in \{1, \dots, N\}$，则

$$OC(\gamma^j) = \begin{cases} \sum_{n,m>0} nm(T^{n(m-\frac{1}{N})} + T^{n(m+\frac{1}{N})})u, \text{ if } j \neq i \\ \sum_{n,m>0} nm(T^{n(m-1+\frac{1}{N})} + T^{n(m+1-\frac{1}{N})})u, \text{ if } j = i \end{cases}$$

另一方面，对于所有 $j \in \{1, \dots, N\}$，很容易看出我们有

$$OC(e_j \otimes a_{xy}^j \otimes a_{yx}^j) = 0.$$

若 N 为奇数，则有

$$OC(\vec{\gamma}) = OC(\gamma^i) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{d=\pm 1 \ (2N) \\ d|2k+1}} T^{\frac{2k+1}{N}}$$

而若 N 为偶数，则对于某个 $j \neq i$，有:

$$OC(\vec{\gamma}) = OC(\gamma^i) + OC(\gamma^j) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{d=\pm 1, \pm 1+N \ (2N) \\ d|2k+1}} T^{\frac{2k+1}{N}}$$

在所有情况下，最低阶项都是 $T^{\frac{1}{N}} u_{\mathbb{T}^2}$。结论得证。

□

在命题 4.3.8 中，我们只研究了 y 方向上的一个拉格朗日子流形。我们可以将结果推广到包含 $N+M$ 个圆的族，在 N 方向上有 x 个，在 M 方向上有y个，从而得到阶数为 $\frac{1}{NM}$的缩回逼近。下面我们对 $N = M$证明这一点。

命题 4.3.9。 令 $p \in \mathcal{P}$ 和 $N \geq 1$。考虑如下族

$$\mathcal{N}(N) = \{L_y^1, \dots, L_y^N, L_x^1, \dots, L_x^N\} \subset \mathcal{N},$$

其中

$$L_y^j := L_y^{\frac{j-1}{N}} \ and \ L_x^j = L_x^{\frac{j-1}{N}}$$

对于 $j = 1$、.....、 N。然后， $\mathcal{N}$（N）将 $\mathcal{L}^{we}$（$\mathbb{T}^2$）缩回对象近似为精度为 $\frac{1}{2N^2} + 3\nu$（p）的 $\mathcal{A}_p$。

证明。 基本上，证明与命题 4.3.8相同。我们用 $a^{j,k}$ 表示 $L_x^j \cap L_y^k$ 中唯一的交点；将其视为 $CF(L_x^j, L_y^k)$ 的生成元时，记作 $a^{j,k}_{,xy}$；将其视为 $CF(L_y^k, L_x^j)$ 的生成元时，记作 $a^{j,}{}_{,y}{}^{k}{}_{,x}$。设 i_x 和 i_y 是仅有的指标，使得定义 $QH(\mathbb{T}^2)$ 的莫尔斯函数的临界点 $u = u_{\mathbb{T}^2}$ 位于由拉格朗日子流形 $L_x^{i_x}$、 $L_x^{i_x+1}$、 $L_y^{i_y}$ 和 $L_y^{i_y+1}$ 围成的正方形内。关键事实是

$$\begin{aligned}
OC(a_{xy}^{i_x,i_y} \otimes a_{yx}^{i_y,i_x+1} \otimes a_{xy}^{i_x+1,i_y+1} \otimes a_{yx}^{i_y+1,i_x}) &= \sum_{n,m>0} nm(T^{(n-1+\frac{1}{N})(m-1+\frac{1}{N}} + T^{(n+1-\frac{1}{N})(m+1-\frac{1}{N})}u \\
&= \sum_{n>0} n^2(T^{(n-1+\frac{1}{N})^2} + T^{(n+1-\frac{1}{N})^2})u \\
&= \sum_{n\geq 0} T^{(2n+\frac{1}{N})^2} + T^{(2n+2-\frac{1}{N})^2}u \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} T^{(2n+\frac{1}{N})^2}u = \theta_{\frac{1}{2N},0}(4,0)u
\end{aligned}$$

特别地，该级数中的最小指数为 $\frac{1}{N^2}$。最后，只需证明，将交点张量的所有可能循环组合与一些变形项相加——这些变形项涉及拉格朗日弗洛尔复形中的单位元，且如命题 4.3.8的证明中所示——所得结果是一个霍赫希尔德循环。□

4.3.3. 推论的证明结束 *4.1.2*。 推论 4.1.2的证明现在只需综合前两节的结果即可。

推论 4.1.2 的证明。先考虑球面的情形。令 $\varepsilon_0 > 0$，并考虑上文引入的经过北极和南极的直赤道族 $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2)$。令 $N_0 \geq 1$ 使得 $\frac{1}{4N_0} < \varepsilon_0$，并如命题 4.3.3 中所述，选取一个基数为 N_0 的子集 $\mathcal{E}(N_0) \subset \mathcal{E}$。令 $\delta_0 := \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 - \frac{1}{4N_0}\right)$。那么，对于任意大小为 $\nu(p) < \delta_0$ 的扰动数据 p，如命题 4.3.3 的证明中所述，族 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2)$ 可由 $\mathcal{E}(N_0)$ 在 $PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2); p))$ 中以 ε_0- 缩回逼近。由此可知，$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2)$ 可按照定义 2.5.8 的意义由 $\mathcal{E}$ 缩回逼近。

令 $\varepsilon_1 > 0$，并考虑上文引入的族 $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2)$。令 $N_1 \geq 1$ 满足 $\frac{1}{2N_1} < \varepsilon_1$，并按照命题 4.3.8 选取一个基数为 $N_1 + 1$ 且包含 L_y 的族 $\mathcal{N}(N_1)$。令 $\delta_1 := \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - \frac{1}{2N_1})$。那么，对于任意大小为 $\nu(p) < \delta_1$、如命题 4.3.8 的证明中所述的扰动数据，族 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2)$ 可由 $\mathcal{N}(N_1)$ 在 $PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2); p))$ 中作 ε_1-缩回逼近。由此可知，按照定义 2.5.8 的含义，$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2)$ 可由 $\mathcal{N}$ 作缩回逼近。□

4.4. **定理 A ii 和 iii 的证明。** 推论 4.1.2 断言，对于定义 2.5.8 中拉格朗日子流形各类的含义，以下对象具有缩回可逼近性：$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2)$和$\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2)$，它们出现在定理 A 的 ii 和 iii 两点。为完成该定理的证明，我们需要指出，按照定义 2.5.8 的含义，缩回可逼近性蕴含按照定义 2.2.1 的含义，缩回可逼近性。关于这一点的论证已在定理 A 的 i 点证明中，即 §3.7.1 中讨论过，但我们会在此重新说明。

首先，请注意，逼近数据 $(\Phi, \mathcal{F})$ 可从推论 4.1.2的证明中清楚看出。例如，对于 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(mon,\mathbf{0})}(S^2)$ 映射

$$\Phi_\eta : \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(mon,\mathbf{0})}(S^2) \longrightarrow \mathrm{Obj}(PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2); p)))$$

是 Yoneda 嵌入（其中 $\nu(p) < \eta$足够小），而 $\mathcal{F}_\epsilon$ 是在 S^2上通过南北极的充分多条大圆所构成的族，如命题 4.3.3所述。

唯一尚待澄清的一点，是定义域上的谱度量与 Φ映射 Φ值域上的交错度量之间的关系。这种关系类似于 §3.7.1 中所述的关系，但有一些调整。首先，我们需要给出谱度量 d_γ 的定义，该定义既适用于单调拉格朗日子流形，也适用于弱恰当拉格朗日子流形，而不只是 §3.7.1中所述的恰当拉格朗日子流形。文献中对此早有介绍，但为求完备，我们在此重述该定义。考虑两个哈密顿同伦的拉格朗日子流形 L，L'（属于定理

A）以及一个哈密顿量 $H\colon [0,1]\times M\to\mathbb{R}$，使得 Floer 同调 $HF(L,L';H)$ 有定义。由于 L 和 L' 哈密顿同伦，PSS 映射 $QH(L)\to HF(L,L';H)$ 定义良好，我们将 $\gamma([L];H)\in\mathbb{R}$ 定义为基本类 $[L]\in QH(L)$ 的 PSS 像在（持久模）$HF(L,L';H)$ 中的谱不变量。于是，定义如下，参见例如 [29]:

$$d_\gamma(L,L')=\limsup_{||H||_H\to 0}\ \gamma([L];H)+\gamma([L];\overline{H})$$

其中 $\overline{H}$是逆哈密顿量 $H(t,x)=-\overline{H}(1-t,x)$。对于恰当拉格朗日子流形，这一定义等价于 §3.7.1中的定义。此外，§3.7.1 中的论证——尤其是恒等式（52）以及 [13]中证明该恒等式成立的论证——在此情形下仍然成立，并表明映射 Φ限制在一个哈密顿同伦类上时是准等距嵌入。因此，鉴于该空间中的所有拉格朗日子流形都与标准赤道哈密顿同伦，这就完成了 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2)$情形下的论证。

最后，我们考虑空间 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2)$。如上所述，谱距离对于两个彼此并非哈密顿同伦的 L 和 L' 并无定义。然而，§ˆ $D_{int}(-,-)$ 3.7.1 中的交错型距离在整个 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2)$ 上都有定义，而且如前所述，它在每个哈密顿同伦类上都与谱距离一致。因此，令

$$d_\gamma(L,L'):=\hat{D}_{int}(L,L'),\forall\ \ L,L'\in\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{wex})}(\mathbb{T}^2)$$

定理 A 的证明已完备。

5. 可逼近性推论与加权复杂度

本节旨在证明推论 1.1.3、1.1.4和 1.1.5，并讨论一些随后用于推导推论 1.1.3 的复杂度概念。这类复杂度本身也很有研究价值，因此我们在本节首先讨论这一主题，其性质纯属代数，详见 §5.1。接着，我们在 §1.1.3 中证明推论 5.2。在 §5.4 和 §5.5中，我们分别证明另外两个推论。

5.1. **TPC 中的复杂度**。本小节的大部分内容纯属代数范畴，可以独立于辛拓扑、Fukaya 范畴等相关考量来阅读。在 §5.1.1 中，我们引入所关注的复杂度概念，其中最重要的是加权锥长度。我们还陈述了本小节的主要结果——命题 5.1.3，它根据某个条形码中的条数，为加权锥长度给出一个下界。本小节余下部分将用于证明该命题。在 §5.1.2 中，我们建立了一些代数性质，由此得到推论5.1.9中的不等式，将命题的陈述归结为滤过链复形的同伦范畴中加权锥长度的若干性质。这些性质将在 §5.1.3中建立。在 §5.1.4中，我们将各种论证结合起来，证明命题 5.1.3。在 §5.1.5中，我们引入加权范畴熵的概念，它是 Dimitrov-Haiden-Katzarkov-Kontsevich 引入的类似概念的加权版本 [22]；此外，作为命题 5.1.3的推论，我们用 Çineli-Ginzburg-Gurel 定义的条形码熵为这一加权熵给出下界 [15]。最后，在 §5.1.6 中，我们回到余切丛中的拉格朗日子流形，并初步讨论它们的复杂度。

本小节所处的背景是一个三角化持久性范畴 $\mathcal{C}$，它配备了交错伪度量 d_{int}，如公式（1）所示。

5.1.1. 加权生成秩与锥长。在上述背景下，考虑 $X \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，并定义 ϵ-生成秩 X 如下：

$$g_{\mathcal{C}}(X;\epsilon) = \inf\big\{\#(\mathcal{F}_\epsilon) \mid \mathcal{F}_\epsilon \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\ \forall x \in X,\ d_{int}\big(x, \mathrm{Obj}(\langle \mathcal{F}_\epsilon \rangle^{\Delta})\big) \leq \epsilon\big\}. \tag{69}$$

这里，$\#(\mathcal{S})$表示集合 $\mathcal{S}$的基数，而 $\langle \mathcal{S} \rangle^{\Delta}$ 定义见 §2.2.1。

-生成秩 $X \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 有限，当且仅当 ϵ-可逼近 X于 $\mathcal{C}$中；这一点可通过考察定义2.2.3得知。

另一种更重要且与可逼近性相关的复杂度度量，是同伦论中拓扑空间经典概念“锥长”的加权版本 [25]，[17]，[18]。先引入一些预备记号。设 $\mathcal{C}'$ 是一个三角范畴，并设$\mathcal{F} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$。考虑 $\mathcal{C}'$ 中的一列形如以下形式的正合三角 $\eta = (\Delta_0, \dots, \Delta_m)$：

$$\Delta_i \quad : \quad F_i \longrightarrow A_i \longrightarrow A_{i+1} \longrightarrow TF_i \quad , \ 0 \leq i \leq m \tag{70}$$

其中 $F_i \in \mathcal{F}$ 且 $A_{m+1} = A$。我们用符号表示这样一个序列：

$$\eta : A_0 \overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} A$$

并令 $\#(\eta) = m+1$ 表示该序列中的三角形数量。我们称有序族 $(F_0, \dots, F_m)$ 为 η 的线性化，并记作 $\ell(\eta)$。类比经典拓扑学，我们将 (70) 中的每个正合三角称为 在 F_i上的锥附加。现在假设 $\mathcal{C}$ 是一个 TPC。在这种情况下，我们使用以下记法

$$\eta : A_0 \overset{\mathcal{F}^{\Sigma,T}}{\rightsquigarrow} A$$

来表示与 (70) 类似的序列，其中每个三角形 Δ_i 现在在 中是严格正合的 $\mathcal{C}$。更具体地说，这意味着每个三角形 Δ_i 现在都被替换为一个严格正合三角形（按 [13, 定义 2。42]）

$$\Delta_i' \quad : \quad F_i \longrightarrow A_i \longrightarrow A_{i+1} \longrightarrow \Sigma^{-w_i} T F_i,$$

对于某个权重 $w_i \geq 0, i = 0, \dots, m$。

我们强调，在这种情况下， F_i's 被视为集合 $\mathcal{F}^{\Sigma,T} \coloneqq \{T^i \Sigma^\alpha F \mid F \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ 中的元素。分解 η 的权重 $w(\eta)$ 定义为 η, $w(\eta)$ 中每个三角形 Δ_i' 的权重之和 $= w_0 + \cdots + w_m$（关于 TPC 的基础知识，见 [13]）。如果 η 的权重为 0（后文大多如此），那么 η 中的每个严格正合三角都是通常三角范畴 $\mathcal{C}^0$ 中的正合三角。

定义 5.1.1。固定如上所述的 $\mathcal{C}$ 一个 TPC、一个 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 族，以及 $\epsilon \in [0, \infty)$。对于任意两个对象 A, B 其 $\mathcal{C}$ ϵ-权重锥长度 A 相对于 B 并以 $\mathcal{F}$中的线性化给出为：

$$N_{\mathcal{C}}(A, B; \mathcal{F}, \epsilon) := \inf \left\{ \#(\eta) \mid \eta : B \overset{\mathcal{F}^{\Sigma,T}}{\rightsquigarrow} A', \ w(\eta) = 0, \ d_{\mathrm{int}}(A, A') \leq \epsilon \right\}. \tag{71}$$

当范畴 $\mathcal{C}$由上下文明确时，我们改写为 $N(A, B; \mathcal{F}, \epsilon)$。此外，当 $B = 0$ 时，我们记作 $N(A; \mathcal{F}, \epsilon)$,

$$N(A; \mathcal{F}, \epsilon) := N(A, 0; \mathcal{F}, \epsilon) \ .$$

简言之， $N(A, B; \mathcal{F}, \epsilon)$ 告诉我们：从 B 出发，通过对形如 $T^i \Sigma^\alpha F$、 $F \in \mathcal{F}$、 $\alpha \in \mathbb{R}$、 $i \in \mathbb{Z}$ 的对象附加锥，需要多少个迭代的正合三角，才能在交错伪距离中达到与 A 的 ϵ-接近，其中范畴 $\mathcal{C}^0$ 为通常的三角范畴。

加权锥长度与可逼近性之间的关系是：如果 $\mathcal{F}$ 是有限的，并且$N_{\mathcal{C}}(A; \mathcal{F}, \epsilon) < \infty$, $\forall\, A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，那么 $\mathcal{F}$是一个 ϵ逼近族，其含义见定义2.2.3，并且 $g_{\mathcal{C}}(X; \epsilon) \leq \#(\mathcal{F})$。

注记 5.1.2. a. 上述 $N(A, B; \mathcal{F}, \epsilon)$的定义在某种意义上是最简单的，因为它不需要任何 TPC 机制。事实上， η 在（71）中由通常意义下的恰当三角形构成，位于 $\mathcal{C}^0$中，而 $d_{\mathrm{int}}(-)$ 是交错伪度量，它已在

持久范畴中定义，见（1）。从 TPC 视角来看，更自然的另一种度量可以定义为

$$N'(A,B;\mathcal{F},\epsilon)=\inf\{\ \#(\eta)\ \mid\ \eta: B \overset{\mathcal{F}^{\Sigma,T}}{\rightsquigarrow} A\ ,\ \ w(\eta)\le\epsilon\}\ .$$

这并未带来任何实质性的新信息，因为基本的 TPC 代数——参见 [13] 中引理 2.87 的证明——推出：

$$N(A;\mathcal{F},2\epsilon)\le N'(A;\mathcal{F},\epsilon)\le N(A;\mathcal{F},\frac{\epsilon}{4})\ .$$

b. 加权锥长度满足一些与分解细化相关的简单分裂不等式。对于 $N'(-,-)$，这些不等式通常比对于 $N(-,-)$ 的表达式更简单。例如，我们有

$$N'(A,A'';\mathcal{F},\epsilon'+\epsilon'')\le N'(A,A';\mathcal{F},\epsilon')+N'(A',A'';\mathcal{F},\epsilon'')$$

这导出了 Obj($\mathcal{C}$) 上碎片化度量的定义（参见 [13]）。

c. 上述锥长的定义非常灵活。通过改变附加锥所依据的对象族，可以得到其他几种同样值得关注的变体。其中一种选择会使所得锥长的取值更小，即将 $\mathcal{F}^{\Sigma,T}$ 替换为

$$\mathcal{F}^{\otimes}=\{F\otimes V\mid F\in\mathcal{F},\quad V\text{ 是一个有限维、分次的、过滤向量空间}\qquad\}$$

约定 $F\otimes\mathbf{k}[a]=\Sigma^{v(a)}T^{|a|}F$，其中 $\mathbf{k}[a]$ 是由 a 生成的 1 维向量空间，其次数为 $|a|$，滤过层级为 $v(a)$。注意，$\mathcal{F}^{\Sigma,\ T}\subset\mathcal{F}^{\otimes}$。由此得到的锥长度概念规定，在每个阶段，都可以在 $\mathcal{F}$ 的元素的移位和平移的有限个副本之和上附加一个锥。我们将此锥长概念记为$N(A,\ B;\ \mathcal{F}^{\otimes},\ \epsilon)$。

d. 数值 $N(A,\ B;\ \mathcal{F},\ \epsilon)$ 随 ϵ 递减；取 $\epsilon\to\infty$后，在极限处可得到这些概念的变体，它们通常在标准拓扑和同调代数中更为熟悉。

在某些约束条件下，存在 $N_{\mathcal{C}}(L;\ \mathcal{F},\ \epsilon)$ 的一个有用下界，只要 $\mathcal{F}$ 有限，该下界就有定义。下一个结果中许多相关代数考量的灵感源自 Dimitrov-Haiden-Katzarkov-Kontsevich [22]。

命题 5.1.3。设 $\mathcal{C}$ 是一个 *TPC*，它是某个预三角范畴的同调范畴；该预三角范畴由严格含幺的过滤 A_∞-范畴上的过滤 A_∞-模构成，并且对所有 $X,Y\in\in Obj(\mathcal{C})$，$\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 都是有限型。假设 $\mathcal{F}\subset\in Obj(\mathcal{C})$ 是有限集，且其元素都是 *Yoneda* 模。在这些假设下，存在一个常数 $k(\mathcal{F})$，它取决于族 （以及 ），使得对每个 $\in$Obj($\mathcal{C}$)，都有：

$$N(L;\mathcal{F},\epsilon)\ge k(\mathcal{F})\sum_{F\in\mathcal{F}}\#\left(\mathcal{B}^{2\epsilon}_{\hom_{\mathcal{C}}(F,L)}\right)$$

其中，$\mathcal{B}^{\delta}_{V}$ 是由持久模V中长度大于 δ 的条形组成的条形码。

回顾一下，若一个持久模的条形码包含有限条条，则称其为有限型。过滤 A_∞-范畴的单位元总是假定处于滤过0 (关于我们的约定，见 §A.3.1。

关于 $\mathcal{C}$ 命题陈述中的条件，对于 Fukaya 型的某些 TPC（它们也是本文关注的主要示例）以及有限生成的过滤链复形在域 $\mathbf{k}$ （我们的基域）上的同伦范畴$H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{fg})$ 均成立。我们用 $H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})$ 表示不附带有限生成条件的相应范畴。正如 [13]所示，这两者都是 TPC。

该命题的证明见 §5.1.4 ，其依据是接下来两个小节中的结果；这些结果本身也颇有意义。

5.1.2. 加权收缩。 这里固定一个三角化持久范畴 $\mathcal{C}$ ，并再次参阅 [13] ，了解与 TPC 相关的基本定义和记号。

类似于（71），我们定义 ϵ-权重缩回锥长 A 相对于 B 如下：

$$N^r_{\mathcal{C}}(A,B;\mathcal{F},\epsilon)=\inf\left\{\#(\eta)\ \middle|\ \eta: B\overset{\mathcal{F}^{\Sigma,T}}{\rightsquigarrow}A',\ \ w(\eta)=0,\ \ d_{\text{r-int}}(A,A')\le\epsilon\right\} \tag{72}$$

（回顾一下， $d_{\text{r-int}}$ 定义见（2））。下文中采用以下

¯术语很有用：给定两个对象 A、A，在 $\mathcal{C}$中，我们称 A是一个 ϵ-缩回对象 A，如果 $d_{\text{r-int}}(A,A)<\epsilon$。显然，

$$N^r_{\mathcal{C}}(A,B;\mathcal{F},\epsilon)\le N_{\mathcal{C}}(A,B;\mathcal{F},\epsilon)\ .$$

此定义的意义在于，实际上收缩锥长更容易估计，正如下文将要看到的那样。与前面一样，如果 $B=0$ 我们就不在记号中写出它；如果上下文已足够清楚，则略去 $\mathcal{C}$ 。命题 5.1.3 的证明将利用 关于 $N^r(-;\ -,\ \epsilon)$ 的一些代数性质；事实上，该论证还表明一个比命题陈述更强的不等式，即：

$$N^r(L;\mathcal{F},\epsilon)\ge k(\mathcal{F})\sum_{F\in\mathcal{F}}\#\left(\mathcal{B}^{2\epsilon}_{\hom_{\mathcal{C}}(F,L)}\right) \tag{73}$$

注 5.1.4。 a. 加权收缩锥长还有另一种变体，其定义如下：

$$\tilde{N}^r(A,B;\mathcal{F},\epsilon)=\inf\left\{N'(\bar{A},B;\mathcal{F},\epsilon)\mid d_{\text{r-int}}(A,\bar{A})=0\right\}.$$

如果 $\mathcal{C}^0$ 是分裂完备的，这种变体尤其相关；此时条件

$$d_{\text{r-int}}(A,\bar{A})=0$$

¯表示 A同构于 A的一个直和项。

b. 利用注5.1.2a.，容易看出：

$$N^r(A,B;\mathcal{F},2\epsilon)\le\tilde{N}^r(A,B;\mathcal{F},\epsilon)\ .$$

c. (72) 中的定义以及备注中的 a. 点，让人联想到 Lusternik-Schnirelmann（LS）范畴与拓扑学中锥长之间的关系，定理 1.1

在 [17] 中：拓扑空间 X 的 LS 范畴是满足以下条件的最小整数 n： X 是一个 n-锥的同伦因子。

对于三角持久范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，假设 $\mathcal{F}$ 是有限的。令 $G_{\mathcal{F}} = \oplus_{F\in\mathcal{F}} F$。我们将族 $\{G_{\mathcal{F}}\}$ 视为单个对象 $G_{\mathcal{F}}$。加权收缩锥长的一个有用性质是：

引理 5.1.5。 采用上述记号，我们有

$$N^r(A,B;G_{\mathcal{F}},\epsilon) \leq N^r(A,B;\mathcal{F},\epsilon) \leq N^r(A,B;G_{\mathcal{F}},\epsilon)\cdot \#(\mathcal{F}).$$

该引理的证明只是对三角范畴中的正合三角进行简单运算，在此情形下是在 $\mathcal{C}_0$ 中。该命题的意义在于，给出 $N^r(A,\ B;\ G_{\mathcal{F}},\ \epsilon)$ 的锥分解是如（70）所示的一列正合三角，但其中每个 F_i 都被单个对象 $G_{\mathcal{F}}$ 可能的平移和/或平移版本所替代。因此，对于任意三个对象 $N^r_{\mathcal{C}}(A,\ B;\ G,\ \epsilon)$，考虑度量 A，B，G 在 $\mathcal{C}$ 中是有意义的。

˜加权收缩锥长的两种变体， N^r 以及 N^r，都满足备注5.1.2 b 中的加性分裂不等式，但也满足另一种乘法型不等式，而后者要求对 $\mathcal{C}$ 作出一些假设。不带权重时，这类不等式最早由 Dimitrov-Haiden-Katzarkov-Kontsevich [22]注意到并加以运用。本文将借助加权版本证明命题5.1.3。

引理 5.1.6. 假设 $\mathcal{C}$ 是与预三角化过滤 A_∞-范畴相关联的持久同调范畴。对于任意 A、G、$G' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，我们有：

$$N^r_{\mathcal{C}}(A;G,\epsilon) \leq N^r_{\mathcal{C}}(A;G',\epsilon')N^r_{\mathcal{C}}(G';G,\epsilon'')$$

当 $\epsilon \geq \epsilon' + N^r_{\mathcal{C}}(A;\ G'、\ \epsilon')\epsilon''$ 时。

˜对于 $N^r(-;\ -、\ -)$，在对 $\mathcal{C}$ 作出不同假设的情况下，同一公式仍然成立，即 $\mathcal{C}^0$ 是分裂完备的。

备注 5.1.7. a. 引理中联系 ϵ、ϵ'、ϵ'' 的关系较为复杂，但本文只需用到 $\epsilon''=0$ 和 $\epsilon=\epsilon'$ 的情形。

b. 加权锥长度 $N_{\mathcal{C}}(-;\ -,\ \epsilon)$ 也满足引理 5.1.6 中所述类型的乘法不等式，但精确公式较难表述，因此此处略去，因为本文后续内容并不需要它。

c. 本文感兴趣的主要例子是引理第一部分中所述的范畴 $\mathcal{C}$：过滤范畴上的过滤模的同调范畴，以及最简单的例子——过滤链复形的同伦范畴。

引理的证明 *5.1.6*。 关于 $N^r_{\mathcal{C}}(-)$ 的陈述可直接由 [11]中的引理 6.12 得出。我们回顾一下该引理改写为适用于滤过模的陈述。假设 $\mathcal{M}$ 是由滤过 A_∞-模（关于 0-平移映射）构成的迭代锥：

$$\mathcal{M} = \mathcal{C}one(\mathcal{K}_s \to \mathcal{C}one(\mathcal{K}_{s-1} \to \ldots \to \mathcal{C}one(\mathcal{N} \to \mathcal{C}one(\mathcal{K}_{i-1} \to \ldots \to \\ \to \mathcal{C}one(\mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_1)\ldots)) .$$

来自 [11] 的引理 6.12指出，若 $\mathcal{N}$ 是另一个滤过模 r的 $\mathcal{N}'$-缩回对象，则 $\mathcal{M}$是某个滤过模 r的 $\mathcal{M}'$ -缩回对象；该滤过模是与 $\mathcal{M}$同形式的迭代锥，只需在上文的分解中用 $\mathcal{N}'$ 替换 $\mathcal{N}$。该结果的证明基于这样一个事实：在 5.1.6 陈述所涉及的这类范畴中，同伦交换方块具有这样的性质：方块中两条水平映射的锥之间诱导的映射，可以用一个显式公式表示，该公式涉及两条垂直映射和交换同伦。

该结果在我们的情形中应用如下。我们从 $\mathcal{C}^0\eta$ 中的一个分解开始：$0 \overset{(G'}{\rightsquigarrow} {}^{\Sigma\ T} \bar{A}_{\bar{G}^\Sigma}$，并假设 A 是 $\bar{A}$的一个 ϵ'-缩回对象。我们还假设存在另一个分解，也在 $\mathcal{C}^0$中：$\eta' : 0 \overset{T}{\rightsquigarrow} \bar{G}'$，并假设 G' 是 $\bar{G}'$的一个 ϵ''-缩回对象。将上述代数结果应用于 η 的线性化$\ell(\eta)$中的每一项，我们把 η 变换为一个新的分解 $\bar{\eta} : 0 \overset{(\bar{G}')}{\rightsquigarrow} {}^{\Sigma\ T} \bar{A}'$，它仍在 $\mathcal{C}^0$中，并且此时 A 是 A'的一个$(\epsilon' + \#\ell(\eta)\epsilon'')$-缩回对象。最后，利用分解 η' 细化 $\bar{\eta}$线性化中的每一项，得到最终分解 $\bar{\eta}' : 0 \overset{G^\Sigma}{\rightsquigarrow} \bar{A}'$，由此可得结论（细化过程的精确描述见 [13] 中的命题 2.55）。

关于$\mathcal{N}^r(-;\ --)$，在 $\tilde{\mathcal{C}}^0$ 为分裂完备的假设下，其论证类似但更简单，因为不需要使用 [11], 中的引理 6.12，我们将其留作练习。□

还需要加权收缩锥长的另一个性质。

引理 5.1.8。 假设 $\mathcal{C}$ 满足命题5.1.3陈述中的假设。令任意 A、$B \in Obj(\mathcal{C})$，并假设 $X \in Obj(\mathcal{C})$ 是一个 *Yoneda* 模。对于任意 $\epsilon \geq 0$，我们有：

$$N^r_{\mathcal{C}}(A; B, \epsilon) \geq N^r_{H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})}(\hom_{\mathcal{C}}(X, A); \hom_{\mathcal{C}}(X, B), \epsilon) \ .$$

证明。记 $\mathcal{D}$ 为满足 $\mathcal{C} = H^0\mathcal{D}$的模的预三角化 A_∞-范畴。由于底层的 A_∞-范畴是严格含幺的，并且 X 是一个 Yoneda 模，我们看到函子 $\hom_{\mathcal{D}}(X, -)$将 $\mathcal{D}$ 中的正合三角变为 $[H^0(\mathcal{F}\mathrm{Ch})]^0$ 中的正合三角。这是由如下恒等关系得到的：对于每个模 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}(X) \cong \hom_{\mathcal{D}}(X, \mathcal{M})$，它属于 Yoneda 嵌入函子的性质——关于持久性情形，参见 §A.3.1——以及给出模态射 ϕ 的锥的显式公式：$\mathcal{M} \to \mathcal{N}$，§3e见 [39]。应用 $\hom_{\mathcal{D}}(X, -)$后，该公式归结为给出诱导链态射 ϕ_X的通常公式：$\hom(X, \mathcal{M}) \to \hom(X, \mathcal{N})$。所有这些构造都保持滤过，并且所有锥都取自平移 0 态射。因此，$\mathcal{C}^0$中的正合三角由 $\mathcal{D}$中的锥分解表示；这些锥分解经由 $\hom_{\mathcal{D}}(X, -)$被送到 $\mathcal{F}\mathrm{Ch}^0$中相应的锥分解，而后者又给出 $[H^0(\mathcal{F}\mathrm{Ch})]^0$中的正合三角。陈述中的不等式是这一观察的直接结果。□

我们在命题 5.1.3的陈述中的假设下进行讨论，并且同样假设，如其中所述，$\mathcal{F} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 是有限的，并且由 Yoneda 模组成。特别地，我们可以

考虑 $G_{\mathcal{F}} = \oplus_{F\in\mathcal{F}} F$。在这种情况下，引理 5.1.8表明：

$$N^r_{\mathcal{C}}(A; G_{\mathcal{F}}, \epsilon) \geq N^r_{H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})}(\hom_{\mathcal{C}}(G_{\mathcal{F}}, A); \hom_{\mathcal{C}}(G_{\mathcal{F}}, G_{\mathcal{F}}), \epsilon). \tag{74}$$

在继续之前，我们暂时引入一些简化记号，这些记号从现在起一直使用到 §5.1.4结束。具体而言，我们将使用 $\mathbf{k}$ 来表示两个不同（尽管密切相关）的对象。回顾一下，在全文中 $\mathbf{k}$表示我们的（未过滤）范畴和链复形所使用的基域，但我们也将使用同一个 $\mathbf{k}$ 来表示一个在次数0 且滤过层级为 0、仅含一个生成元的过滤链复形。当我们想要指明该生成元，例如 x时，也将把这个链复形记作$\mathbf{k}\langle x\rangle$。

回到我们的讨论，并从（74）继续，我们由引理 5.1.6推得

$$N^r_{H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})}(\hom_{\mathcal{C}}(G_{\mathcal{F}}, A); \hom_{\mathcal{C}}(G_{\mathcal{F}}, G_{\mathcal{F}}), \epsilon) \cdot N^r_{H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})}(\hom_{\mathcal{C}}(G_{\mathcal{F}}, G_{\mathcal{F}}); \mathbf{k}, 0) \geq \\ \geq N^r_{H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})}(\hom_{\mathcal{C}}(G_{\mathcal{F}}, A); \mathbf{k}, \epsilon)$$

将此与引理5.1.5结合，我们得到下面的不等式。

推论 5.1.9。 在命题*5.1.3* 的假设下，并且对于

$$k(\mathcal{F}) := 1/N^r_{H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})}(\hom_{\mathcal{C}}(G_{\mathcal{F}}, G_{\mathcal{F}}); \mathbf{k}, 0)$$

对于每个 A 的对象 $\mathcal{C}$ 以及所有 $\epsilon \geq 0$，我们都有：

$$N^r_{\mathcal{C}}(A; \mathcal{F}, \epsilon) \geq k(\mathcal{F}) N^r_{H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})}(\hom_{\mathcal{C}}(G_{\mathcal{F}}, A); \mathbf{k}, \epsilon)\ .$$

5.1.3. 过滤链复形的加权锥长度。 本小节旨在考察我们之前介绍的各种加权锥长度概念，聚焦于一个非常基础但重要的例子：三角持久范畴 $\mathcal{C}$ 是基域 $\mathbf{k}$上的过滤有限维链复形的同伦范畴 $H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})^{fg}$。

例 5.1.10。 以下陈述在范畴 $H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})^{fg}$中成立。

a) $H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})^{fg}$ 中的每个对象 V 都可以写成若干初等过滤链复形的平移的有限直和，且除排列顺序外唯一。这些初等过滤链复形分为两种类型：

$$E_2(a,b) = \mathbf{k}(a, b : da = 0, db = a), \text{ and } E_1(c) = \mathbf{k}(c : dc = 0).$$

对于这些链复形的每个生成元 x，我们用 $v(x) \in \mathbb{R}$ 表示其滤过层级。对于 $E_2(a,b)$，我们假设 $v(b) \geq v(a)$，其次数为 $|a| = 0, |b| = 1$。对于 $E_1(c)$，我们假设$v(c) = 0$ 和 $|c| = 0$。请注意，这种记号与文献中的其他常见约定有所不同。例如，在 [13, 第 2.5 节中，2] $E_2(a, b)$表示一个具有上述两个生成元的链复形，但 a, b 表示的是这两个生成元的滤过层级，而非生成元本身（ $E_1(c)$也类似）。按照我们的记号，持久同调 $H(E_2(a,b))$的条形码为 $[v(a)\ v(b))$，而在 [13] 中，该条形码为 $[a, b)$。

b) 平移 T 以显而易见的方式通过改变次数起作用： $|T^k x| = |x| + k$ 而移位函子将滤过层级改变为 $v(\Sigma^\alpha x) = v(x) + \alpha$。

c) 回想一下，$\mathbf{k}\langle x\rangle$ 也表示定义在$\mathbf{k}$上的一维过滤链复形，它只有一个生成元 x，其中 $|x| = 0$, $v(x) = 0$。于是我们有：

$$E_2(a,b) = \mathcal{C}one(\ \Sigma^{v(b)}\mathbf{k}\langle b\rangle \ \to\ \Sigma^{v(a)}\mathbf{k}\langle a\rangle\ )$$

其中，锥取自映射 $b \to a$。对于 $E_1(c)$，我们有：

$$E_1(c) \cong \Sigma^{v(c)}\mathbf{k}\langle c\rangle\ .$$

因此，对于 $\mathcal{C} = H^0(\mathcal{F}\mathrm{Ch})^{fg}$ 和 $X = \mathcal{O}b(H^0(\mathcal{F}\mathrm{Ch})^{fg})$，我们有 $g(X;\ 0) = 1$（见（69））， 其中 $\mathcal{F}_0 = \mathbf{k}\langle x\rangle$。因此， $H^0(\mathcal{F}\mathrm{Ch})^{fg}$ 是 0-可逼近的，且生成秩等于 1。

下一个结果同样是初等的，但不那么直接。我们先固定一些补充记号。对于持久模 K，我们用 $\mathcal{B}_K$ 表示其条形码，用 $\mathcal{B}_K^{\delta}$ 表示仅由 K 中长度为 $> \delta$ 的条组成的条形码，并用 K^{∞} 表示持久模 K 的 ∞-极限（它是一个维数等于 K 中半无限条数量的向量空间）。

引理 5.1.11。 设 V 是一个过滤的有限维链复形。则：

$$N(V,0;\mathbf{k},\epsilon) = N^r(V,0;\mathbf{k},\epsilon) = 2\#\left(\mathcal{B}^{2\epsilon}_{H(V)}\right) - \dim_{\mathbf{k}}(H(V)^{\infty})\ . \tag{75}$$

证明。 对于我们这一类中的过滤链复形 V 和 $\delta \geq 0$，令 V_{δ} 为通过将 V 写成初等项的直和（如例5.1.10中 a) 点所示），并从和中消去所有满足 $v(b) - v(a) \leq \delta$ 的项 $E_2(a,b)$ 后得到的链复形。在 V 的过滤链同伦等价意义下，显然存在链复形的包含映射 $i_{V,\delta}\colon V_{\delta} \to V$，以及投影 $j_{V,\delta}\colon V \to V_{\delta}$。容易看出：

> i. V 和 $V_{2\delta}$ 交错。这是因为映射 $\eta^V_{2\delta}\colon \Sigma^{\delta}V \to \Sigma_{-\delta}V$ 显然链同伦于复合映射 $i_V \circ j_V$（因为若 $v(b) - v(a) \leq 2\delta$，则 $\eta^{E_2(a,b)}{}_{2\delta}$ 是零同伦）。ii. $V_{2\delta}$ 的维数为 $2\#(\mathcal{B}^{2\delta}_{H(V)}) - \dim_{\mathbf{k}}(H(V)^{\infty})$。这是因为，在 $V_{2\delta}$ 的直和表示中， $E_2(a,b)$ 型项中的一对生成元 a, b 对应于形如 $[v(a)\ v(b)$ 的有限条，而 $E_1(c)$ 型项中的每个 c 生成元对应于一条半无限条，并在 $H(V)^{\infty}$ 中保留下来成为一个生成元。iii. 存在一个显然的锥分解 $\eta\colon 0 \overset{\langle\mathbf{k}\rangle^{\Sigma\ T}}{\rightsquigarrow} V_{2\delta}$，其锥的数量等于 $V_{2\delta}$ 的维数。

基于这三点，我们得出 $N(V,\ 0;\ \mathbf{k}\ \epsilon) \leq 2\#\left(\mathcal{B}^{2\epsilon}_{H(V)}\right)$ 一维$_{\mathbf{k}}(H(V)^{\infty})$。

为完成（75）的证明，我们需要说明：如果 V 是 W 的一个 ϵ-缩回对象，那么对于一个分解 $\eta'\colon 0 \rightsquigarrow W$， W 至少是一个维$_{\mathbf{k}}(V_{2\epsilon})$-锥，并且其线性化包含形如 $\Sigma^{\alpha}T^{i}\mathbf{k}$ 的项（这些是 $\langle\mathbf{k}\rangle^{\Sigma,\ T}$）的元素。

为证明这一点，我们首先注意到，对于我们这类过滤链复形中的任意 W，任意锥分解 $\eta\colon 0 \rightsquigarrow W$ 都属于 $(H^0(\mathcal{F}\mathrm{Ch})^{fg})^0$ （这是 TPC $H^0(\mathcal{F}\mathrm{Ch})^{fg}$ 的 0 级范畴），其线性化项取自 $\langle\mathbf{k}\rangle^{\Sigma,\ T}$，且至少包含 $\dim_{\mathbf{k}}(W_0)$ 项，其中 W_0 是从 W 中省略所有满足 $v(a) = v(b)$ 的项 $E_2(a,b)$ 后得到的。事实上，任意这样的分解都是底层范畴中一个分解 $\bar{\eta}\colon 0 \rightsquigarrow W'$ 的像

的过滤链复形 $\mathcal{F}\mathbf{Ch}$，并且存在一个过滤拟同构（平移为 0）$\phi\colon W \to W'$。出于维数理由，$\bar{\eta}$ 中锥的数量至少为 $\dim_{\mathbf{k}}(W')$。另一方面，$\phi|_{W_0}$ 是单射（注意到 ϕ 诱导出一个识别 $\mathcal{B}_W \cong \mathcal{B}_{W'}$ 和 $\mathcal{B}_W = \mathcal{B}_{W_0}$，即可看出这一点）。因此，剩下要证明的是：若 V 是 W 的一个 ϵ-缩回对象，则 $\dim_{\mathbf{k}}(W_0) \geq \dim_{\mathbf{k}}(V_{2\epsilon})$。若 V 是 W 的一个 ϵ-缩回对象，显然它也是 W_0 的一个 ϵ-缩回对象。简单验证可知，在这种情况下，$V_{2\epsilon}$ 单射到 W_0 中，由此引理得证。□

备注 5.1.12. 类似于引理的证明5.1.11 可得：

$$N(0, V; \mathbf{k}, \epsilon) = 2\#\left(\mathcal{B}^{2\epsilon}_{H(V)}\right) - \dim_{\mathbf{k}}(H(V)^\infty)\ . \tag{76}$$

由这个恒等态射和（75），以及备注5.1.2 b）中的三角不等式，我们得到 $N(V, V';\ \mathbf{k}\ \epsilon)$、$N^r(V, V';\ \mathbf{k}\ \epsilon)$关于 $H(V)$和 $H(V')$的条形码的粗略上界。

5.1.4.命题 *5.1.3*的证明。 利用前两个小节的准备材料，我们可以完成命题 5.1.3的证明。

我们先给出关于过滤链复形的另外两个简单代数备注。为此，设 V 是一个有限生成的过滤链复形。首先，对于任意 $\delta \geq 0$，显然有如下不等式

$$\#\left(\mathcal{B}^{\delta}_{H(V)}\right) - \dim_{\mathbf{k}}(H(V)^\infty) \geq 0$$

我们将其改写为 $2\,\#(\mathcal{B}^{\delta}_{H(V)}) - \dim_{\mathbf{k}}(H(V)^\infty) \geq \#(\mathcal{B}^{\delta}_{H(V)})$。其次，如果 V'是我们这一类中的另一个链复形，则有

$$\#\left(\mathcal{B}^{\delta}_{H(V\oplus V')}\right) = \#\left(\mathcal{B}^{\delta}_{H(V)}\right) + \#\left(\mathcal{B}^{\delta}_{H(V')}\right)\ .$$

将这些关系与推论 5.1.9和引理 5.1.11结合起来，并回顾 $G_{\mathcal{F}} = \oplus_{F\in\mathcal{F}} F$可得：

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{C}}(L; \mathcal{F}, \epsilon) \geq N^r_{\mathcal{C}}(L; \mathcal{F}, \epsilon) \geq k(\mathcal{F}) N^r_{H^0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})}(\hom_{\mathcal{C}}(G_{\mathcal{F}}, L); \mathbf{k}, \epsilon) \geq \\ \geq k(\mathcal{F}) \cdot \#\left(\mathcal{B}^{2\epsilon}_{\hom_{\mathcal{C}}(G_{\mathcal{F}}, L)}\right) = k(\mathcal{F}) \sum_{F\in\mathcal{F}} \#\left(\mathcal{B}^{2\epsilon}_{\hom_{\mathcal{C}}(F, L)}\right) \end{aligned}$$

这表明不等式（73），同时也完成了该命题的证明。 □

5.1.5. 加权范畴熵。 我们在此引入范畴熵的加权概念，即 Dimitrov-Haiden-Katzarkov-Kontsevich 在 [22]中引入的概念的加权类比。

考虑一个三角持久范畴 $\mathcal{C}$ 并固定 $X \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$以及一个族$\mathcal{F} \subset \mathcal{O}b(\mathcal{C})$，如 §5.1.1 中所述。

定义 5.1.13。给定一个（集合论意义上的）映射 $\Psi : X \to X$ 以及一个对象 $A \in X$，相对于 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$，$\Psi$ 在 A 处的 ϵ- 加权范畴熵定义为

$$h_{\mathcal{F}}(\Phi; A, \epsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(N_{\mathcal{C}}(\Psi^n A; \mathcal{F}, \epsilon))}{n}$$

请注意，只有当 $\mathcal{F}$ 是 X在 $\mathcal{C}$ 中的一个-逼近族（如定义2.2.3所述）时，这一定义才有意义。我们从现在起假设这一点；否则，无法确保 $N_{\mathcal{C}}(\Psi^n A;\ \mathcal{F},\ \epsilon)$ 是有限的。换言之，此定义要有意义，就需要 TPC 可逼近性。

注 5.1.14. a. 当然，也可以使用 $N^r_{\mathcal{C}}(-;\ --)$ 定义类似的概念，从而得到一个变体，记作 $h^r_{\mathcal{F}}(\Psi;\ A, \epsilon)$。

b. 数值 $h_{\mathcal{F}}(\Psi;\ A, \epsilon)$、 $h^r_{\mathcal{F}}(\Psi;\ A, \epsilon)$ 是 ϵ中的递减函数。允许 $\epsilon = \infty$是有用的。在这种情况下，权重约束消失，我们得到纯粹的（三角化）范畴概念。特别是，当 $\mathcal{F}$ 为有限时，[22]中引入的范畴熵由 $h_{G_{\mathcal{F}}}(\Psi;\ A, \infty)$ 给出，其中 $G_{\mathcal{F}} = \oplus_{F\in\mathcal{F}} F$。

c. 与无权重的情形不同，加权熵的定义取决于族 $\mathcal{F}$ 的选择。

d. 此外，还有类似的慢熵概念，它们由类似形式的公式定义，与标准的相应动力系统定义相类比。

我们现在将看到，命题5.1.3 意味着加权范畴熵的一个下界是 [15]中引入的条形码熵的一种形式。

为了准确描述这种关系，我们在 TPC，$\mathcal{C}$ 的框架下定义本文所用的条形码熵概念。和之前一样，我们有映射 $\Psi\colon X \to X$，并选取两个对象 $A \in X, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。现在考虑 Ψ 在 A 处相对于 B 的 ϵ-条形码熵：

$$\hbar(\Psi; A, B; \epsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left(\#(\mathcal{B}^{\epsilon}_{\hom_{\mathcal{C}}(B,\Psi^n A)})\right)}{n} \tag{77}$$

推论 5.1.15. 假设命题 *5.1.3* 中的假设均成立。特别地，$\mathcal{F}$ 是有限的，且所有 同$_{\mathcal{C}}(-,\ -)$ 都是有限型持久模。我们有以下不等式：

$$h_{\mathcal{F}}(\Psi; A, \epsilon) \geq h^r_{\mathcal{F}}(\Psi; A, \epsilon) \geq h^r_{G_{\mathcal{F}}}(\Psi; A, \epsilon) \geq \hbar(\Psi; A, G_{\mathcal{F}}; 2\epsilon)$$

其中 $G_{\mathcal{F}} = \oplus_{F\in\mathcal{F}} F$。

这直接由命题 5.1.3 得出，另见（73）。

5.1.6. 拉格朗日子流形的加权复杂度。 我们回到 §3.1中的几何背景，并从本节前文所引入的复杂度度量的角度，讨论近邻可逼近性定理3.2.1 的一些推论。

我们首先给出一些从 TPC-可逼近性的角度来看很自然的复杂度定义——参见定义2.2.1以及注释2.2.2和2.2.4。

定义 5.1.16。假设 $(X,\ d)$ 是 TPC-可逼近的，并且对于固定的 $\epsilon > 0$，这些拟等距嵌入

$$\Phi = \{\Phi_\eta\}\ ,\ \Phi_\eta : (X, d) \to (\mathrm{Obj}(\mathcal{Y}_\eta), \bar{d}^{\,\eta}_{\mathrm{int}})\ .$$

属于 ϵ-TPC 逼近数据的部分是固定的。

i. 相对于 Φ，$(X,\ d)$ 的 ϵ-生成秩定义为

$$g_\Phi(X;\epsilon)=\limsup_{\eta\to 0}\ g_{\mathcal{Y}_\eta}(\Phi_\eta(X);\epsilon)$$

参见（69）以了解$g_{\mathcal{Y}_\eta}$的定义。

ii. 此时还固定相应的族$\mathcal{F}_{\epsilon,\ \eta}\subset \mathrm{Obj}(\mathcal{Y}_\eta)$ 如定义 2.2.1所述。对于某个 $\epsilon'\geq\epsilon$，元素 ϵ' 相对于族 $a\in X$ 的锥长 $\mathcal{F}_\epsilon=\{\mathcal{F}_{\epsilon,\eta}\}_{0<\eta<\epsilon}$ 定义如下：

$$N_\Phi(a;\mathcal{F}_\epsilon,\epsilon')=\limsup_{\eta\to 0}\ N_{\mathcal{Y}_\eta}(\Phi_\eta(a);\mathcal{F}_{\epsilon,\eta},\epsilon')\ .$$

注意，对于 $\epsilon_1\geq\epsilon_2\geq\epsilon$，我们有 $N_\Phi(a;\mathcal{F}_\epsilon,\epsilon_1)\leq N_\Phi(a;\mathcal{F}_\epsilon,\epsilon_2)$。这些概念的性质与 §5.1.1 中相应度量的性质非常相似。特别地，给定一个映射 $\Psi:\ X\to X$，并假设 (X,d) 是 TPC-可逼近的，我们定义 Ψ 在 $a\in X$ 处相对于逼近数据 $(\Phi,\ \mathcal{F}_\epsilon=\{\mathcal{F}_{\epsilon,\eta}\})$ 的 ϵ'-加权范畴熵，其中 $\epsilon'\geq\epsilon$，定义为

$$h_{\Phi,\mathcal{F}_\epsilon}(\Psi;a,\epsilon')=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log N_\Phi(\Psi^n a;\mathcal{F}_\epsilon,\epsilon')}{n}\ . \tag{78}$$

对于相应的收缩概念，我们也有类似的度量，分别记为 $N^r_\Phi(a;\ \mathcal{F}_\epsilon,\ \epsilon')$、$h^r_{\Phi,\ \mathcal{F}_\epsilon}(\Psi;\ a,\ \epsilon')$。

注 5.1.17。假设度量空间 $(X,\ d)$ 是全有界的，并且它是 TPC-可逼近的（分别为可由收缩逼近的），具有一个由 $(A,\ \eta)$-拟等距嵌入 $\Phi=\{\Phi_\eta\}$ 组成的系统以及如上所述的相应族 $\{\mathcal{F}_{\epsilon,\eta}\}$。那么，对于每个固定的 ϵ，存在一个取决于 $(X,\ d)$、Φ 和 $\{\mathcal{F}_{\epsilon,\eta}\}$ 的 $K>0$，使得

$$N_\Phi(a;\mathcal{F}_\epsilon,2\epsilon)\leq K$$

（分别地，$N^r_\Phi(a;\ \mathcal{F}_\epsilon,\ 2\epsilon)\leq K$）对所有 $a\in X$ 都成立。这是一个简单的练习：通过取 $(X,\ d)$ 的有限 ϵ_1- 网 $x_1,\ \ldots\ldots,\ x_k\subset X$，使得 $\epsilon_1/A<\epsilon$，即可得到界 K，然后取

$$K=\max_i N_{\mathcal{Y}_{\eta'}}(\Phi_{\eta'}(x_i);\mathcal{F}_{\epsilon,\eta'},\epsilon_1)\ \ (\text{respectively } K=\max_i N^r_{\mathcal{Y}_{\eta'}}(\Phi_{\eta'}(x_i);\mathcal{F}_{\epsilon,\eta'},\epsilon)\ )$$

对于某个 $\eta'<\epsilon$。特别地，如果 $(X,\ d)$ 是全有界的，那么对于所有 $x\in X$ 以及任意映射$\Psi:\ X\to X$，熵 $h_{\Phi,\ \mathcal{F}_\epsilon}(\Psi;\ a,\ 2\epsilon)$ 和 $h^r_{\Phi,\ \mathcal{F}_\epsilon}(\Psi;\ a,\ 2\epsilon)$ 都为零。因此，要证明 $(X,\ d)$ 不是全有界的，只需找到一个 $\epsilon>0$ 和一个序列 $a_k\in X$，使得$N_\phi(a_k;\mathcal{F}_\epsilon,\ 2\epsilon)\to\infty$ 属于 k。

现在我们转向几何。我们在 §3 中已经证明，度量空间

$$\mathcal{L}(N)=(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N),d_\gamma)$$

按照定义 2.2.1 的意义是可逼近的。在 §3.7.1 和 §3.7.2 中，我们为这个空间构造了两种类型的 TPC ϵ- 逼近数据：第一种情形为 $(\Phi,\mathcal{F}_\epsilon)$，第二种情形为 $(\Phi',\mathcal{F}'_\epsilon)$，后者只是缩回对象逼近。我们将第一种称为 局部，第二种称为 环境。

为提高可读性，我们回顾这两种逼近数据选择的基本特征。由拟等距嵌入构成的族 $\Phi = \{\Phi_\eta\}$ 是 Yoneda 嵌入——见 §3.7：

$$\Phi_\eta = \mathcal{Y}_{\epsilon',p} : \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p) \ .$$

这里， $\mathcal{C}_p$ 是针对所选扰动 p构造的、基于滤过 Fukaya 范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N)\ p)$ 的滤过 A_∞模的持久同调范畴，其中 $\nu(p) < \eta$和 $\epsilon' < \epsilon$。族 $\mathcal{F}_\epsilon$ 由对应于 D^*N的一个有限纤维族 $\{F_0, \ldots, F_{x_m}\}$的模组成，其中 $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ 是辅助莫尔斯函数$\varphi_{N,\ K,\ \delta}$ 的临界点：$N \to [0, K]$。族 Φ' 非常相似，区别在于持久导出范畴取代了 $\mathcal{C}_p$ 的位置

$$\mathcal{D}_p(E) = PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)}(E), p))$$

¯是利用辅助 Lefschetz 纤维化 h 构造的： $E \to \mathbb{C}$ （见 §3.5），而该纤维化本身又取决于$\varphi_{N,\ K,\ \delta}$。族 $\mathcal{F}'_\epsilon$ 由拉格朗日球面 S_{x_i}的 Yoneda 模组成，ˆ 对$\varphi_{N,\ K,\ \delta}$ 的每个临界点各取一个，并且满足 $S_{x_i} \cap D^*N = F_{x_i}$。

本质上，可以将 $\mathcal{C}_p$ 中的可逼近性结果视为由 $\mathcal{D}_p(E)$中的结果经拉回得到。不过请注意，$(\Phi', \mathcal{F}'_\epsilon)$ 仅是缩回对象 ϵ-逼近的，如推论 3.7.4所示。

注 5.1.18. a. 回顾一下，比较函子 $\mathcal{H}_{p,q} : \mathcal{C}_p \to \mathcal{C}_q$ 是$p \preceq q$的 TPC 函子。它们还保留生成族 $\mathcal{F}_\epsilon$ ：它们将 p-范畴 $\mathcal{C}_p$ 中对应于纤维 F_{x_i} 的模，映为与 $\mathcal{C}_q$中同一 F_{x_i} 所关联的模 0-同构的模。因此，固定 ϵ 后，我们的逼近族 $\mathcal{F}_\epsilon$ 不再依赖于 η。此外，对于每个 $L \in \mathcal{L}$ ag$^{(ex)}(D^*N)$，我们有

$$N_{\mathcal{C}_p}(L; \mathcal{F}_\epsilon, \epsilon) \geq N_{\mathcal{C}_q}(L; \mathcal{F}_\epsilon, \epsilon)$$

只要 $p \preceq q$。同样的注记也适用于范畴系统 $\{\mathcal{D}_p(E)\}_p$ 和族 $\mathcal{F}'_\epsilon$，并得出相同的不等式，其中以 $\mathcal{D}_-(E)$ 替代 $\mathcal{C}_-$ ，并且以$N^r(-;\ -\epsilon)$替换 $N(-;\ -\epsilon)$。

b. 在上述情形下，我们还有以下不等式：

$$N_{\mathcal{C}_q}(L; \mathcal{F}_\epsilon, \epsilon) \geq N_{\mathcal{C}_p}\left(L; \mathcal{F}_\epsilon, \epsilon + c|\eta(p) - \eta(q)|\right)$$

在假设 $p \preceq q$ 成立的情况下也成立，其中 c 是一个与 L无关的常数。

鉴于 $\mathcal{F}_\epsilon$ 和 $\mathcal{F}'_\epsilon$ 中的元素个数等于 $\varphi_{N,K,\delta}$ 的临界点个数，我们可得：

$$g_\Phi(\mathcal{L}(N); \epsilon) \leq \#\ \mathrm{Crit}(\varphi_{N,K,\delta})$$

以及同样的不等式，其适用于 Φ'。当 $\epsilon \to 0$ 中的元素数量 $\mathcal{F}_\epsilon$ 和 $\mathcal{F}'_\epsilon$ 趋于 ∞ 时，其变化速率可通过 §3.3 中的构造进行估算。

现在我们在相同的背景下，沿用相同的记号，讨论 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N)$ 的 ϵ-权重锥长 $N_\Phi(L;\mathcal{F}_\epsilon,\epsilon)$。

通过计算所有给出 分解的正合三角，可以得到该锥长的一个上界$\Delta_{i,j}$来自（47），从而得到 $m(i) \leq 2\#(\mathcal{B}_{HF(\hat{S}_{x_{m-i}},L_i)})$，因此：

$$N_\Phi(L;\mathcal{F}_\epsilon,\epsilon) \leq \sum_{i=0}^{m} 2\#(\mathcal{B}_{HF(\hat{S}_{x_{m-i}},L_i)}) \ . \tag{79}$$

拉格朗日子流形 $L_i \subset E$ 通过德恩扭转彼此关联——详见 §3.6.3： $L_{m+1} = L, L_{m-i} = \tau_{\hat{S}_i}(L_{m-i+1})$。因此，我们可以迭代地得到 $\#(\mathcal{B}_{HF(\hat{S}_{x_{m-i}},L_i)})$ 的一个上界。此外，容易看出存在一个与 L 无关的常数 $k'(\mathcal{F}_\epsilon)$，以及 $\epsilon'' > 0$, $\epsilon'' \ll \epsilon$（它们同样依赖于 $\mathcal{F}_\epsilon$，而不依赖于 L），使得

$$N_\Phi(L;\mathcal{F}_\epsilon,\epsilon) \leq k'(\mathcal{F}_\epsilon) \max_{S\in\mathcal{F}_\epsilon} \left(\#(\mathcal{B}^{\epsilon''}_{HF(S,L)})\right) \tag{80}$$

当然，这些估计首先是在 $\mathcal{C}^\epsilon_p$ 中针对 $\nu(p)$ 足够小时的 $N_{\mathcal{Y}_\eta}(\Phi_\eta(a);\mathcal{F}_{\epsilon,\eta},\epsilon)$ 建立的。通过令 $\nu(p) \to 0$，我们看到它们同样适用于 $N_\Phi(L;\mathcal{F}_\epsilon,\epsilon)$，如上所述。估计式 (79) 和 (80) 显然也对 $\Phi', \mathcal{F}'_\epsilon$ 保持成立，只需在该情形下使用 $N^r_{\Phi'}(-)$。

反过来，由命题 5.1.3 以及（73）中的更强形式，我们得到相对于数据 $(\Phi', \mathcal{F}'_\epsilon)$的加权锥长度和熵的下界：

推论 5.1.19。 对于每个 $L \in \mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$ 以及 $\epsilon' \geq \epsilon$，我们有：

$$N^r_{\Phi'}(L;\mathcal{F}'_\epsilon,\epsilon') \geq k(\mathcal{F}'_\epsilon) \sum_{S\in\mathcal{F}'_\epsilon} \#(\mathcal{B}^{2\epsilon'}_{HF(S,L)})$$

其中常数 $k(\mathcal{F}'_\epsilon)$仅取决于族 $\mathcal{F}'_\epsilon$，并且我们还有：

$$h^r_{\Phi',\mathcal{F}'_\epsilon}(\Psi;L,\epsilon') \geq \hbar(\Psi;L,G_{\mathcal{F}'_\epsilon};2\epsilon')$$

对于 $G_{\mathcal{F}'_\epsilon} = \oplus_{S\in\mathcal{F}'_\epsilon} S$。

推论 5.1.19 针对环境 ϵ-TPC-逼近数据 $(\Phi', \mathcal{F}'_\epsilon)$ 陈述。这一点至关重要，原因有二：首先，范畴 $\mathcal{D}_p(E)$ 具有如下性质：$\hom_{\mathcal{D}_p(E)}(A,B)$ 是有限型持久模 $\forall A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D}_p(E))$，如注 3.7.5 所述；其次，族 $\mathcal{F}'_\epsilon$ 由 Yoneda 模构成。因此，我们可以对每个 $\mathcal{D}_p(E)$ 应用命题 5.1.3，再令 $\nu(p) \to 0$，即可得到所述结论。相比之下，类似结论是否适用于局部逼近数据 $(\Phi, \mathcal{F}_\epsilon)$ 尚不明确。事实上，即使是推论 5.1.9 中引入的常数 $k(-)$，对于 $\mathcal{F}_\epsilon$ 也并非先验定义良好的。

注 5.1.20。在上述情形下，结合推论 5.1.19和（80），我们可推出

$$\hbar(\Psi;L,G_{\mathcal{F}'_\epsilon};\epsilon'') \geq h^r_{\Phi',\mathcal{F}'_\epsilon}(\Psi;L,\epsilon) \geq \hbar(\Psi;L,G_{\mathcal{F}'_\epsilon};2\epsilon) \quad \text{for} \quad 0 < \epsilon'' \ll \epsilon \tag{81}$$

这表明，在这种情况下（$M = D^*N$ 等等），加权范畴熵与 [15]中的条形码熵密切相关。在 [22] 中，作者得到了一个上界

通过一种比本文所用方法更具一般性的代数方法来处理（非加权）范畴熵，因此原则上，人们预期诸如（81）这样的不等式在更广泛的情形下仍然成立。

5.2. **加权范畴熵非零与推论 1.1.3。** 本小节旨在给出一类例子，它们具有非零的 ϵ-加权范畴熵（见 (78)），但“经典”范畴熵为零。下一条陈述将对此作更精确的表述。

命题 *5.2.1.* 设 (N, g) 是一个闭双曲流形。考虑度量空间 $(\mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)\ d_\gamma)$，并对某个足够小的 ϵ，固定环境 ϵ-*TPC*-逼近数据 $(\Phi', \mathcal{F}'_\epsilon)$，具体定义见 *§5.1.6*。存在一个拉格朗日子流形 $L \in \mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$，它与零截面哈密顿同伦；还存在一个哈密顿微分同胚 $\Psi : D^*N \to D^*N$，其支集包含于 D^*N 内，使得

$$h^r_{\Phi',\mathcal{F}'_\epsilon}(\Psi; L, 2\epsilon) > h^r_{\Phi',\mathcal{F}'_\epsilon}(\Psi; L, \infty) = 0$$

其中相关的 ϵ加权熵定义于（78）中。

该结果意味着，过滤范畴代数能够以非过滤版本所不具备的方式感知余切丛中的动力学。此外，鉴于注记 5.1.17，该命题蕴含了引言中推论 1.1.3 的一部分，即度量空间 $(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N)\ d_\gamma)$ 不是全有界的。推论的第二部分涉及 $M = S^2$ 以及由 $\mathcal{L}\mathrm{ag}(S^2)$ 组成的赤道，则将在 §5.3中讨论。

陈述中的非加权范畴熵 $h^r_{\Phi',\mathcal{F}'_\epsilon}(\Psi;\ L,\ \infty)$ 之所以为零是显然的，因为所有 $\Psi^n L$ 都与零截面哈密顿同伦，因此在不受权重约束的情况下，它们可以用具有相同项数的锥分解表示。

到目前为止，我们的论证并不依赖基域 $\mathbf{k}$，然而从这里开始，我们将在本小节中假设 $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_2$。

命题 5.2.1 的证明大量运用了推论 5.1.15，并将在接下来的五个次次小节中给出。该命题针对单位圆盘丛陈述，但在证明中，我们将进行一系列构造，涉及多个嵌套圆盘丛；经过适当缩放后，我们假定它们都包含在 E 中，其中 $h : E \to \mathbb{C}$，即 §3中的 Lefschetz 纤维化。所需的最大 r 为 $r = 10$。论证的大部分都在这个圆盘丛内进行，并在前四个小节中加以说明。我们将在 E 的5.2.5节中回到这一点并作出结论。

5.2.1. 对 Ψ 和 L的选择。 我们将考虑辅助哈密顿流 ϕ，它由光滑哈密顿量 $G : T^*(N) \to \mathbb{R}$ 生成，该哈密顿量定义为

$$G(q, p) = \eta(||p||) \tag{82}$$

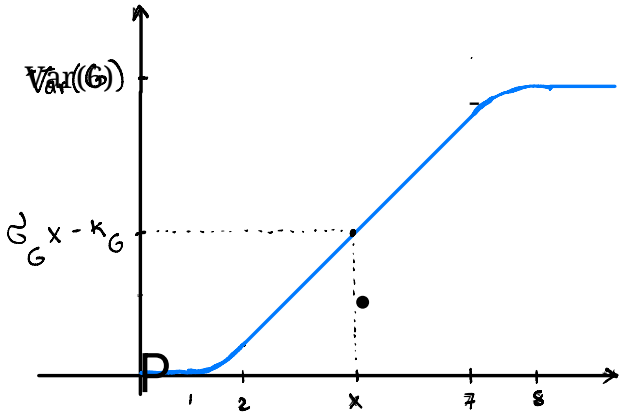


图 11. 函数 η 的图。

其中，$||-||$ 是关于由 g 和 η 诱导的度量的范数：$[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是光滑的，并具有以下性质：$\eta(x) = \sigma_G x - k_G$ 对于 $2 \le x \le 7$，其中 $0 < k_G < 2$ 和 $1 \le \sigma_G < \frac{3}{2}$ 是以如下方式选取的固定常数，具体将在下文进一步讨论；η 是非递减的；η 对于 $0 \le x \le 1$ 恒等于 0，并且对于 $x \ge 8$ 恒等于某个值 $= \mathrm{Var}(G) < 10$；$\eta''(x) > 0$ 对于 $x \in (1,2)$，以及 $\eta''(x) < 0$ 对于 $x \in (7,8)$，见图 11。

我们注意到 $\eta'(x) \le \frac{3}{2}, \forall x \in [0,\infty)$。由 G 生成的哈密顿微分同胚 $\Gamma = \phi_1^G$ 支集于 $D_8^*(N)$ 内。陈述中的哈密顿微分同胚是 Γ 的逆：

$$\Psi = \Gamma^{-1} .$$

现在我们描述拉格朗日子流形 L。这个拉格朗日子流形分两步构造。第一步是考虑一个函数 $\varphi : N \to [0, \frac{1}{2}]$ 如命题 3.3.1 中构造的函数，但针对 $\delta < 10$ 并定义一个拉格朗日子流形 L' 如下

$$L' = \mathrm{graph}\ (d\varphi) .$$

我们用 $x_i, 1 \le i \le m$ 表示 φ 的临界点，并选取函数 φ，使得 $L' \subset \mathrm{Int}(D_{10}^*(N))$，且 $L' \cap D_9^*(N)$ 是一个不交并：

$$L' \cap D_9^*(N) = \coprod_{i=1}^m Z_i$$

分别与 $Z_i \subset W_i$ 其中 W_i 是 F_{x_i}（这是 T^*N 在临界点 x_i 上的纤维 φ）的一个小管状邻域。最后，L 通过哈密顿同伦修改 L' 得到，具体方式使得（见图 12）：

$$L \subset \mathrm{Int}(D_{10}^*(N)) \ ,\ L \cap D_9^*(N) = \coprod_{i=1}^m F_{x_i} \cap D_9^*(N) .$$

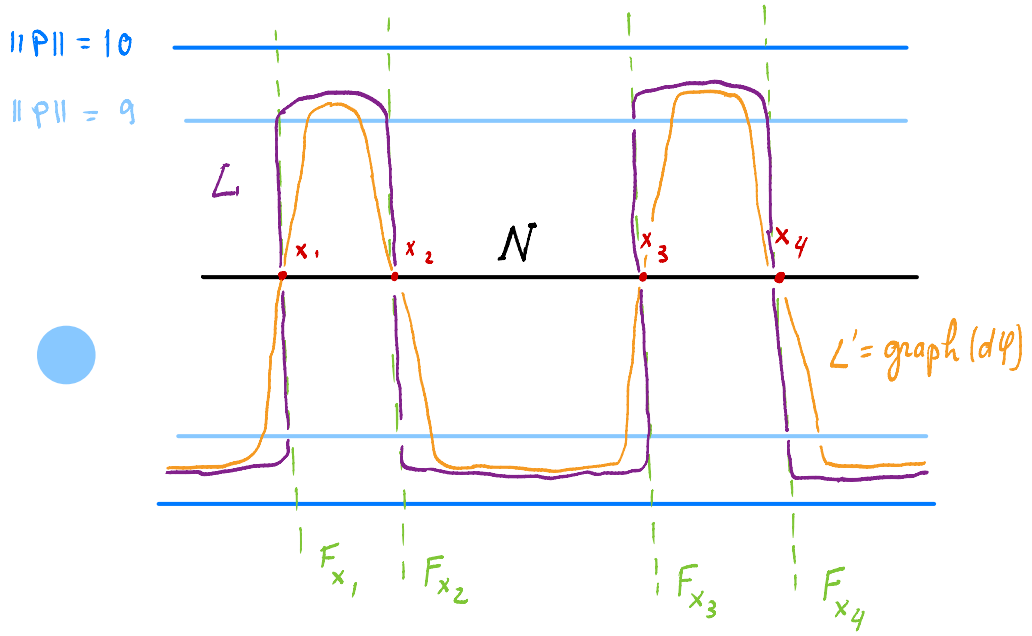


图 12. 拉格朗日子流形 L 的形状。

注 5.2.2。 常数 8、9、10 可能需要替换为 $8 < k < k'$，因为在命题 3.3.1 的证明中，我们无法在保持 g 固定的同时，直接得到 $||d\varphi||$ 的上界（另见注 3.3.2）。不过，选择 $k = 9$、$k' = 10$ 只是为了方便，对证明并无实质影响。

我们为拉格朗日子流形 L 固定一些额外的记号。令

$$L_i = F_{x_i} \cap D^*_9(N) \tag{83}$$

使得 $L \cap D^*_9(N) = \coprod_i L_i$。我们还考虑 $\lambda|_L$ 的一个原函数 $f_L\colon L \to \mathbb{R}$，它在相差一个平移的意义下，是 $\lambda|_{L'}$ 的原函数 φ 的一个小扰动。鉴于此，我们可以假设 f_L 的取值位于区间 $[-1,1]$ 内。当然，f_L 在每个 L_i 上都是常数，并且在每个这样的分支上取常数 k_i；这些常数都属于 $[-1,1]$，我们还可以假设 $k_1 = 0$。

5.2.2. *Floer* 同调。在本小节中，我们将证明某些 Floer 同调群的若干性质，这些性质对于证明至关重要。这里考虑的所有 Floer 同调都定义在 $T^*(N)$ 中，其中几乎复结构在 $D^*_8(N)$ 外是凸的。最大值原理表明，对相关微分有贡献的弗洛尔轨线都包含在 $D^*_{10}(N)$ 中。基域为 $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_2$。

我们考虑两个恰当拉格朗日流形 K, K'，其原函数分别为 f_K 和 $f_{K'}$，并采用固定的分次选择，与本文其余部分相同。在我们的论证中，这些拉格朗日子流形 K, K' 要么是紧致的，包含于 $D^*_{10}(N)$ 的内部，要么与纤维 F_x重合，其中 $x \in N$。我们还考虑一个哈密顿量 $H\colon T^*(N) \to \mathbb{R}$ 以及一个几乎复结构

结构 $J = \{J_t\}_{0\le t\le 1}$，定义在 $T^*(N)$ 上，它是自治的，并且在（ $D_8^*(N)$ 的内部）之外与凸几乎复结构 J^∞ 重合。我们假设哈密顿量 H 在 $\partial D_{10}^*(N)$ 的某个邻域内为常数，并且 K 与 $\phi_1^{-H}(K')$ 横截相交。我们用 $\mathcal{P}(K,\ K';\ H)$ 表示与哈密顿流 ϕ_t^H 相关的哈密顿轨道 γ: $[0,1] \to D_{10}^*(N)$，其中哈密顿量为 X^H，且满足 $\gamma(0) \in K, \gamma(1) \in K'$。在路径空间上存在一个作用泛函

$$\mathcal{P}(K,K') = \{\gamma : [0,1] \to D_{10}^*(N) \mid \ \gamma \text{ smooth},\ \gamma(0) \in K,\ \gamma(1) \in K' \ \}$$

$$\mathcal{A}_{K,K';H}(\gamma) = \int_0^1 H(\gamma(t))dt - \int_0^1 \lambda(\dot\gamma(t))dt + f_{K'}(\gamma(1)) - f_K(\gamma(0)) \tag{84}$$

其临界点是 $\mathcal{P}(K,K';H)$ 中的元素。作为向量空间，Floer 复形$CF(K,K';\ H,J)$ 在有定义时（因此假设其正则）由 $\mathcal{P}(K,K';\ H)$ 张成。Floer 复形的微分通过计数 Floer 方程的解 u: $\mathbb{R}\times[0,1] \to D_{10}^*(N)$ 来定义:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_t\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_{\rho_t} H(u) = 0 \tag{85}$$

其中梯度是相对于黎曼度量 $\rho_t = \omega(-, J_t)$ 取的，而 $u(\mathbb{R}\times\{0\}) \subset K, u(\mathbb{R}\times\{1\}) \subset K'$。我们将 $CF^a(K,K';\ H,J)$ 记作 $CF(K,K';\ H,J)$ 的子复形，它由满足 $\mathcal{A}_{K,K';H}(x) \le a$ 的 Hamilton 弦 x 张成。

在我们的应用中，我们将有 $H = nG$ （其中 G 取自（82）），且 $n \in \mathbb{N}$取逐渐增大的值。特别地， H 在 D_8^*（N）之外为常数。这种形式的哈密顿量$H = h(||p||)$，其中 h 光滑，在文献中已有广泛研究（参见 [14][31]）。我们关注的基本情形是 K 和 K' 都是纤维。为方便起见，我们引入一种特殊的简写记号

$$C(x,y;n) := CF(F_x, F_y; nG, J)$$

其中 F_x和 F_y是 T^*N的两个不同纤维。在这两个纤维 F_x和 F_y上，我们都取恒等于零的函数作为原函数。在这种情况下可以实现正则性，因为在我们的所有例子中，所有弗洛尔轨线都包含在 $D_8^*(N)$ 内；而且我们可以在该处自由选取 $\{J_t\}$，同时令其在 $D_8^*(N)$ 之外等于 J^∞。我们强调，在 Floer 复形中，我们考虑路径的所有同伦类。记

$$\mathcal{G}_{x,y} = \{\ \bar\gamma \ \mid\ \bar\gamma : [0,\ell] \to N \text{ is a geodesic },\ ||\dot{\bar\gamma}(t)|| = 1 \quad \bar\gamma(0) = x,\ \bar\gamma(\ell) = y\ \}$$

N中以单位速度参数化、从 x 到 y的测地弧。我们将这类测地弧 $\bar\gamma$ 的长度记为 $\ell(\bar\gamma)$。相应的长度谱为:

$$\mathcal{L}_{x,y} = \{\ \ell(\bar\gamma) \mid \bar\gamma \in \mathcal{G}_{x,y}\} \subset [0,\infty)\ .$$

由于 $(N,\ g)$ 是双曲的，每个路径同伦类（端点固定）在$\mathcal{G}_{x,\ y}$ 中都包含唯一的测地弧，且$\mathcal{L}_{x,\ y}$ 是离散的。特别地，$\mathcal{L}_{x,\ y}$ 是可数的。因此，

商的集合 $Q\mathcal{L}_{x,\ y} = \{\frac{\ell}{n} \mid \ell \in \mathcal{L}_{x,y}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ 也是可数的。现在我们假设：

$$\sigma_G \notin Q\mathcal{L}_{x,y}\ . \tag{86}$$

这显然 是一个一般性假设，因为集合$Q\mathcal{L}_{x,\ y}$ 的勒贝格测度为零 e.

引理 5.2.3。 在上述假设下，复形 $CF(x, y;\ n)$ 定义良好；对于任意 $\delta > 0$，持久模 $HC(x, y; n)$ 中长度为 $\geq \delta$ 的条的数量随 n 增长，且增长速度至少为 $\frac{e^{hn}}{hn}$，其中 $h = \frac{5}{8}h_{top}$，而 h_{top} 是测地流的拓扑熵。

备注 5.2.4。i. 我们感谢 Viktor Ginzburg，他向第三位作者建议了如下文证明中所用的方法，以估计 $HC(x,\ y; n)$ 中条的数量。

ii. 陈述中的$_{5\ 8}$这一商是由 η 的选取造成的假象；通过适当缩短 η 定义中两段过渡区域 (1，2) 和 (7，8) 的长度，可以使它任意接近 1。

证明。 这里我们将采用 [14], 中的一些计算（参见其中的公式（16）和引理 5.3.2），并将其调整用于拉格朗日弗洛尔同调。这些计算表明：

i. 复形 $C(x, y; n)$ 是良定义且有限维的，只要 $n\sigma_G \notin \mathcal{L}_{x,y}$这由（86）可知成立。复形 $C(x, y;\ n)$ 的微分唯一可能的贡献来自满足（85）的解（其中 $H = nG$），且这些解包含于 $D^*_8(N)$。

ii. $C(x, y; n)$ 的生成元 γ 与 N 中连接点 x 和点 y 的测地线段 $\bar{\gamma}$ 一一对应，具体而言，若 $\gamma(t) = (q(t)\ p(t))$，则 $q(t)$ 是一条从 x 到 y 的测地线，其参数满足 $||\dot{q}(t)|| = \ell$； $\bar{\gamma}$ 是同一条测地线经重新参数化后得到的单位速度测地线，长度为 $\ell(\bar{\gamma}) = \ell$。

iii. 对于每个这样的生成元， $\gamma(t) = (q(t)\ p(t))$，我们有

$$\frac{p(t)}{r} = \frac{\dot{q}(t)}{||\dot{q}(t)||} \quad \text{with} \quad r > 0 \quad \text{such that} \quad n\eta'(r) = \ell\ .$$

特别地， $||p(t)||$ 是常数，且等于 r 和 $\ell \leq n\sigma_G$。

iv. 如上所述，生成元 γ 的作用量为：

$$\mathcal{A}_n(\gamma) := \mathcal{A}_{F_x,F_y;nG}(\gamma) = n\eta(r) - r\ell$$

因此，根据这些说明，每条从 x 到 y 、长度为 $\ell(\bar{\gamma}) < n\sigma_G$ 的测地弧 $\bar{\gamma}$，都会导出 $C(x,\ y;\ n)$的一个生成元，其形式为

$$\gamma(t) = (q(t), \frac{r\dot{q}(t)}{\ell(\bar{\gamma})}) \quad \text{for each } r \text{ such that } \eta'(r) = \frac{\ell(\bar{\gamma})}{n} \tag{87}$$

其中，如上所述， $q(t)$是经过重新参数化的测地线 $\bar{\gamma}$，使得 $||\dot{q}(t)|| = \ell(\bar{\gamma})$（这里我们利用 g 将 T^*N与 TN等同起来）。鉴于函数 η的性质，对于给定值$\ell < n\sigma_G$，恰有两个这样的值 $r_n(\ell)r'_n(\ell)$，其中一个值，例如 $r_n(\ell) \in (1,\ 2)$，另一个为 $r'_n(\ell) \in (7,\ 8)$。

固定一条测地弧 $\bar{\gamma}$。记与 $\bar{\gamma}$ 以及值 $r_n = r_n(\ell(\bar{\gamma}))$ 和 $r'_n = r'_n(\ell(\bar{\gamma}))$ 分别对应的两个 Hamilton 弦为 γ_n 和 γ'_n，则通过

公式（87）。当 $\sigma_G > \ell(\bar{\gamma})\, n$ 时，它们作为 $C(x,\ y;\ n)$ 的生成元出现，特别地，对于所有 $n > \ell(\bar{\gamma})$ 都如此（因为 $\sigma_G \geq 1$）。

现在我们考察两个相关生成元的作用量值。我们有：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n(\gamma_n') - \mathcal{A}_n(\gamma_n) = \ & n(\eta(r_n') - \eta(r_n)) - \ell(\bar{\gamma})(r_n' - r_n) \ \geq \\ & \geq n(\eta(7) - \eta(2)) - 7\ell(\bar{\gamma}) \geq 5n - 7\ell(\bar{\gamma})\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 $\eta(7) - \eta(2) = 5\sigma_G$ 和 $\sigma_G \geq 1$ 得出。

固定 $\delta > 0$，如陈述中所述。我们推得：

$$\mathcal{A}_n(\gamma_n') - \mathcal{A}_n(\gamma_n) \geq \delta \ \text{ if } \ n \ \geq \ \frac{7}{5}\,\ell(\bar{\gamma}) + \frac{\delta}{5}\,. \tag{88}$$

总之，对于 $n \geq \ell(\bar{\gamma})$，$\gamma_n$ 和 γ_n' 在 $CF(x,y;\ n)$ 中作为生成元出现；当 $n \geq \frac{7}{5}\ell(\bar{\gamma}) + \frac{\delta}{5}$ 时，它们的作用量至少相差 δ。

标准 Floer 同调 $HC^\infty(x,y;n)$ 消失（上标 ∞ 表示忽略持久性结构），且 $C(x,y;n)$ 中的 Floer 微分非常简单。事实上，Floer 轨线只能连接投影到 N 中属于同一同伦类的路径上的哈密顿弦。由于 $\mathcal{G}_{x,y}$ 中的每条测地线在其同伦类中都是唯一的，因此当 $n > \frac{7}{5}\ell(\bar{\gamma}) + \frac{\delta}{5}$ 时，我们有 $d(\gamma_n') = \gamma_n$（回顾一下，我们在 $\mathbb{Z}_2$ 上工作，并且 $HC^\infty(x,y;\ n)$ 消失），而对 (γ_n, γ_n') 定义了持久模 $HC(x,y;n)$ 中长度至少为 δ 的条形。因此，当 n 足够大时，$HC(x,y;\ n)$ 中长度至少为 δ 的条数不少于 $\mathcal{G}_{x,y}$ 中长度为 $\leq \frac{5}{8}n < \frac{5}{7}n(1 - \frac{\delta}{5n})$ 的测地弧数量。根据经典结果（例如 [35] 第 9 章中的结果），$\mathcal{G}_{x,y}$ 中长度小于 T 的测地线数量增长速度至少与

$$\frac{e^{Th_{top}}}{Th_{top}}\,.$$

将 T 替换为 $\frac{5}{8}n$ 即可得到该结果。 □

接下来我们关注滤过复形

$$C(x, L; n) := CF(F_x, L; nG, J)$$

其中 L 是 §5.2.1 中固定的拉格朗日子流形。回想一下，L 具有如下性质：$L \cap D_9^*(N) = \cup_i L_i$ 其中 $L_i = F_{x_i} \cap D_9^*(N)$（参见式（83））。

我们假设，对于 φ 的所有临界点 x_i，$x \neq x_i$，并且针对 F_x、L 和 G，我们再添加两个额外假设：

$$\sigma_G \notin Q\mathcal{L}_{x,x_i},\quad \forall x_i \tag{89}$$

如前所述，（86）之后指出，这是关于 σ_G 选择的一般性假设。注意：

$$L \cap F_x = \{z_x\} \subset D_{10}^*(N) \backslash D_9^*(N)\,. \tag{90}$$

为理解这一点，请回想 §5.2.1 中的结论：L 是 L' 的一个小变形，而 $d\varphi$ 是其图。由此可知，在假设 $x \neq x_i,\ \forall i$ 成立时，F_x 与 L 相交于单点（记作 z_x），且该点位于 $D_9^*(N)$ 之外。

由于 G 在 $D_8^*(N)$ 之外为常数，我们可以推知，$C(x,\ L;\ n)$ 的底层向量空间可写为：

$$C(x,L;n) = \oplus_i \Sigma^{k_i} C(x,x_i;n) \oplus \mathbb{Z}_2\langle z_x\rangle \ . \tag{91}$$

此外，出于同样的原因，复形 $C(x,x_i,n)$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 上是有限维的。这里出现平移 Σ^{k_i}，是因为原函数 f_L 在分支 L_i 上的取值不是 0，而是 $k_i \in [-1,1]$。点 z_x 的作用量为 $f_L(z_x)$，见 (84)。记 $d^{x_i;n}$ 为复形 $C(x,x_i;\ n)$ 的微分，并令 D^n 为复形 $C(x,L;\ n)$ 的微分。最后，回顾一下，对于过滤链复形 C，我们用 C^a 表示滤过 $\leq a$ 子复形。

引理 5.2.5。使用上述记号，存在一个常数 $\xi > 0$，它取决于 (N,g)、L、x 和几乎复结构 J（但不取决于 n），使得

$$D^n = \oplus_i d^{x_i;n} + \bar{D}^n$$

具有如下性质：

$$\bar{D}^n(C^\alpha(x,L;n)) \ \subset \ C^{\alpha-\xi}(x,L;n)\ ,\ \forall\ \alpha\ .$$

证明。对微分 D^n 有贡献的 Floer 条带分为两种：一种始终位于 $D_8^*(N)$ 内——这种情况下，它们出现在某个微分 $d^{x_i;n}$中；另一种条带 u，下文称为第二类，满足 $\mathrm{Im}(u) \not\subset D_8^*(N)$。回想一下，拉格朗日子流形 L 在 $D_9^*(N)$ 内与一族纤维的并集重合。由最大值原理可知，任何第二类条带 u都必定到达 L的非纤维状区域。换言之，存在一点 $(s_0,0) \in \mathbb{R}\times\{0\}$，使得 $u(s_0,0) \notin D_9^*(N)$。证明的目标是说明，存在一个与命题中相同的常数 δ，使得能量

$$E(u) = \int ||\frac{\partial u}{\partial s}||^2\ dsdt$$

对任意第二类条带 u，都有 $E(u) \geq \delta$。

该论证基于标准的单调性结果，例如 Sikorav 中的结果 [45]。第一步是固定常数 ξ。令 $K = D_9^*N \backslash \mathrm{Int}(D_{8.5}^*(N))$。[45] 中的结果（参见其中的命题 4.7.2）表明，存在正常数 r_0 和 C，它们仅取决于 J、$(N,\ \mathsf{g})$以及 L，并具有以下性质。对于每个点 $p \in L\cap K$，若 $v\colon\ \Sigma \to K$是一个 J-全纯曲线，且 Σ 是边界紧致的，并满足：

i. 存在某个点 $x \in \partial\Sigma$，使得 $v(x) = p$；ii. $v(\Sigma) \subset B_r(p) \subset K$，使得 $r \leq r_0$（其中 $B_r(a)$ 是 $T^*(N)$ 中半径为 r、中心为 a 的球）；iii. $v(\partial\Sigma) \subset \partial B_r(p) \cup L$,

那么 v 的辛面积 $A(v)$ 满足：

$$A(v) \geq Cr^2\ .$$

现在选取一些 $r' < r_0$ 使得对于 $z \in L\cap(D_{8.8}^*(N)\backslash\mathrm{Int}(D_{8.6}^*(N)))$ 中的每一点，我们都有 e

$$B_{r'}(z) \subset K\backslash F_x. \tag{92}$$

我们定义：

$$\xi = C(r')^2/2 \ .$$

采用这一记号，我们回到第二类 Floer 条带 $u\colon \mathbb{R}\times[0,1]\to D^*_{10}(N)$。我们想证明 $E(u)\geq\xi$。我们知道存在某个 s_0，使得点 $u(s_0,\,0)$ 属于 $L\backslash D^*_9(N)$。此外，u 的渐近极限中至少有一个是 nG 的 Hamilton 弦（对于某个 n），因此位于 $D^*_8(N)$ 内。由此可知，还存在某个点 $s_1\in\mathbb{R}$，使得 $p=u(s_1,\,0)\in L\cap(D^*_{8.8}(N)\backslash\mathrm{Int}(D^*_{8.6}(N)))$。

用 u_r 表示 u 在集合 $S_r=u^{-1}(B_r(p))\subset\mathbb{R}\times[0,1]$ 上的限制，其中 $0<r\leq r'$。利用 Sard 定理，对于 r 的一般选择，集合 S_r 是一个带边界的紧致曲面。我们选取这样一个正则 $r_1>\frac{r'}{\sqrt{2}}$。注意到 $u_1\colon S_{r_1}\to B_1(p)$ 具有如下性质：$u_1(\partial S_{r_1})\subset\partial B_{r_1}(p)\cup L$。当然，我们还有 $u_1(S_{r_1})\subset B_{r_1}(p)\subset K$。回想一下，$G$ 在 $D^*_8(N)$ 之外是常数，因此 $\nabla(nG)$ 在 K 上消失。因此，u_1 是 J-全纯的，于是我们得到：

$$E(u)\geq A(u_1)\geq Cr_1^2\geq\xi$$

由此证明得证。 □

注 5.2.6. 引理中的常数 ξ 对点 x 的依赖非常微弱。事实上，若我们假设 F_x 与 $L\cap D^*_9(N)$ 的一个固定邻域 U 不相交，则可以将条件 (92) 替换为 $B_{r'}(z)\subset K\cap U$；在此假设下，ξ 与 x 无关，只依赖于 L、J、(N,g) 和 U。

5.2.3. 一个辅助代数结果。 接下来我们将使用以下简单陈述。

引理 5.2.7. 设 C 是一个关于 $\mathbb{Z}_2$ 的过滤有限维链复形，并且是 $\mathbb{Z}_2$-分次的。固定 $\delta>0$。若 C 的微分 D 可以写为

$$D=d+D'$$

其中 $d^2=0$ 和 D' 满足对所有 $\alpha\in\mathbb{R}$，$D'(C^\alpha)\subset C^{\alpha-\delta}$，则对任意 $\epsilon<\delta$，都有

$$\#(\ \mathcal{B}^\epsilon_{H(C)}\ )\geq\#(\ \mathcal{B}^\epsilon_{H(C,d)}\ )\ .$$

证明。专家们很可能早已知道这个结果，但为了完整起见，我们仍给出证明。我们用 C_0 表示复形 (C,d)。容易看出，只需在 C_0 无圈时证明该结论，以下我们就作此假设。我们将 C_0 写成项 $E_2(a,b)$ 的直和，其滤过由取值于 $\mathbb{R}$ 的赋值 v 给出（见 §5.1.3）。这种形式的项有两类：满足 $v(a)\leq v(b)\leq v(a)+\epsilon$ 的项——记作 $E^s_2(a,b)$；以及满足 $v(b)>v(a)+\epsilon$ 的项，记作 $E^l_2(a,b)$。类型 E^l_2 的项数 n_l 等于 $\mathcal{B}_{HC_0}$ 中长度大于 ϵ 的条数。现在考虑一个 E^s_2 项 $E^s_2(a_0,b_0)$，使得 $v(b_0)-v(a_0)\leq\epsilon$ 在所有项 E^s_2 中最小。令 C_1 为 C 中由 C 的生成元（除 $\{a_0,b_0\}$ 之外）生成的子空间，于是作为 d-链复形，我们有$C_0=E^s_2(a_0,b_0)\oplus C_1$。我们考虑元素

$$a_0'=a_0+D'(b_0)\ .$$

它具有性质 $a_0' = D(b_0)$。我们注意到 $v(a_0') = v(a_0)$，因为 $\epsilon < \delta$，因此$v(D'(b_0)) < v(a_0)$。所以，我们也有 $D'(b_0) \in C_1$。令

$$E_2(a_0', b_0) = \mathbb{Z}_2\langle\ a_0',\ b_0\ :\ D(b_0) = a_0', D(a_0') = 0\ \rangle\ .$$

那么，$E_2(a_0',\ b_0)$ 是 C 的一个 D-子复形。我们有投影 $p_1 :\ C \to C_1$，它在生成元上的定义为：在 C_1 上是恒等态射，将 b_0 映为 0，并将 a_0 映为 $D'(b_0)$。该投影的核为 $E_2(a_0',\ b_0)$，并且它是保过滤的，即对所有 $\alpha \in \mathbb{R}$，它将 C^α 映为 C_1^α。微分 D 在 C_1 上诱导出微分 D_1，后者是使 p_1 成为链映射的唯一线性映射。此外，D_1 可以写成：

$$D_1 = d + D_1'$$

其中 $D_1' = p_1 \circ D'$。显然，D_1' 也至少降低 δ 的滤过，这与陈述中的 D' 一样。暂且假设映射 p_1 存在一个截面 $j_1 : (C_1, D_1) \to (C, D)$，且该截面是保过滤链映射。在这种情况下，我们可以对 (C_1, D_1) 迭代地重复相同的过程，从而依次消去所有的 $E_2^s(a, b)$。最终得到一个复形 (C_k, D_k)，其维数为 $2n_l$，且其微分 $D_k = d + D_k'$ 将滤过降低超过 ϵ（d 在 C_k 上将微分降低超过 ϵ，而 D_k' 至少降低 $\delta > \epsilon$）。因此，HC_k 中所有的条都比 ϵ 长，并且至少有 n_l 条。根据我们的迭代构造，(C_k, D_k) 是 (C, D) 的保过滤缩回，因此 HC 中长度超过 ϵ 的条数至少为 n_l，如所述。

因此，要完成证明，我们只需构造截面 j_1。我们将构造一个线性映射 $j_1 :\ C_1 \to C$，它是保过滤的，并具有性质 $p_1 \circ j_1 = id$，此外，$\mathrm{Im}(j_1)$ 是 C 的一个子复形。这意味着 j_1 也是一个链映射。作为向量空间，我们有分解 $C = E_2(a_0', b_0) \oplus C_1$。令 $x \in C_1$。有两种可能。假设相对于这个分解，$D(x) = w \in C_1$。在这种情况下，我们令 $j_1(x) = x$。另一方面，假设 $D(x) = a_0' + w$，其中 $w \in C_1$ 在这种情况下，我们令 $j_1(x) = x + b_0$。注意到 $v(x) \geq v(b_0)$。此外，$D(x + b_0) \in C_1$，且根据此定义，j_1 仅在次数 $|a_0| + 1$ 上与恒等态射不同。我们还注意到，j_1 以更强的意义保滤过，即对所有 $y \in C_1$，都有 $v(j_1(y)) = v(y)$。显然，$p_1 \circ j_1 = id$。现在我们要指出，$\bar{}$：$\mathrm{Im}(j_1)$ 关于 D 是闭的。首先，上述构造意味着，对于 $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$ 中的每个 $x \in C_1$，$D(x)$ 不可能具有形式 $a_0' + w, w \in C_1$。事实上，次数为 $|a_0| + 1$ 的所有 $x \in C_1$ $\bar{}$ $\bar{}$ 都满足 $D(x) \in C_1$，并且 C_1 和 C_1 在次数 $|a_0|$ 上相同。现在假设对于某个 $x \in C_1$，$D(x) = b_0 + \zeta, \zeta \in \bar{C}_1$。那么 $0 = D^2(x) = a_0' + D(\zeta)$，这就导致矛盾。因此，$\bar{C}_1$ 是 C 中的一个 D-子复形，证明至此完成。□

注记 5.2.8。 在证明中的某些地方，我们用到了在 $\mathbb{Z}_2$ 上工作的事实，但通过类似的证明，该结果对任意域 $\mathbf{k}$ 仍然成立。

5.2.4. 命题 *5.2.1* 的证明中的关键步骤。 本小节旨在证明：

引理 5.2.9。 对于 ϵ 充分小的情形，以及任意 ϵ-逼近族 $\mathcal{F}_\epsilon$ 对于 $\mathcal{L}ag^{(ex)}(D_{10}^* N)$在 $\mathcal{C}_p(10)$中，且 $\nu(p)$ 充分小——如定理*3.2.1*中所述，因此 $\mathcal{F}_\epsilon$ 由纤维组成

- 存在一个哈密顿同伦 Ψ 其支集包含于 $D^*_{10}(N)$中，以及一个拉格朗日子流形 L，二者均如 §5.2.1中所述，并且存在一个纤维 $F_x \in \mathcal{F}_\epsilon$，使得条的数量：

$$\#(\mathcal{B}^\epsilon_{HF(F_x,\Psi^n L)})$$

增长速度至少与 n 一样快 $\frac{e^{hn}}{hn}$，其中 h 是引理 5.2.3中的常数。

证明。我们首先按照 §5.2.1 选取一个拉格朗日子流形 L。此外，我们固定 $L \cap D^*_9(N)$ 的一个小邻域 U。在假设 $F_x \cap U = \emptyset$ 的条件下，我们取引理 5.2.5 给出的常数 δ。如注 5.2.6 所述，此常数与 x 无关。我们选取 $\epsilon < \delta$，并令 $\mathcal{F}_\epsilon$ 为 $\mathcal{C}_p(10)$ 的一个 ϵ-逼近族。如果 ϵ 足够小，则 $\mathcal{F}_\epsilon$ 中至少有一个元素 F_x 与 U 不相交（这是因为当 $\epsilon \to 0$ 时，$\cup_{F\in\mathcal{F}_\epsilon} F$ 的并在 $D^*_{10}(N)$ 中变得稠密）。此时我们可以选取哈密顿量 G。我们按照 §5.2.1 选取 G，并满足假设 (89)，该假设是泛性的。这意味着复形 $CF(F_x, L; nG, J)$ 对每个 n 都有定义，它在$\mathbb{Z}_2$ 上是有限维的，并且满足引理 5.2.5 中的结论。这意味着

$$CF(F_x, L; nG, J) = \oplus \Sigma^{k_i} CF(F_x, F_{x_i}; nG, J) \oplus \mathbb{Z}_2\langle z_x\rangle$$

作为滤过向量空间，满足 F_{x_i}如（83）所示，并且微分 D^n在 $CF(F_x, L; nG, J)$满足：

$$D^n = \oplus_i d^{x_i;n} + \bar{D}^n$$

¯满足 D^n滤过至少降低 ξ，并且满足 $d^{x_i;\,n}(CF, F_x; F_{x_i}, nG, J)$中的微分。在这种情况下，我们可以应用引理 5.2.7 推出：

$$\#(\mathcal{B}^\epsilon_{HF(F_x,L;nG,J)}) \geq \sum_i \#(\mathcal{B}^\epsilon_{HF(F_x,F_{x_i};nG,J)}) \,.$$

我们使用引理 5.2.3 得出结论：$\#(\mathcal{B}^\epsilon_{HF(F_x,L;\,nG,\,J)})$ 在 n 中以与 $\frac{e^{hn}}{nh}$ 一样快的速度增长。

论证最后指出，根据 Floer 方程的自然性，存在一个过滤链同构：

$$CF(F_x, \Psi^n L; 0, J_n) \to CF(F_x, L; nG, J) \,.$$

这里 $\Psi = \Theta^{-1}$ 其中 $\Theta = \phi^G_1$由 G的哈密顿流诱导。几乎复结构 J_n满足 $\Theta^n_* J_n = J$。由于 G在 $D^*_8(N)$ 之外是常数，几乎复结构 J_n在那里与 J重合，因此复形 $CF(F_x, \Psi^n L; 0, J_n)$ 定义良好，因为 $||-||^2$在 $D^*_8(N)$ 之外是 J_n-凸的。持久模 $HF(F_x, \Psi^n L; 0, J^*)$ 实际上与几乎复结构 J^*无关，只要它在$D^*_8(N)$ 之外与 J 重合。

□

5.2.5. 命题 5.2.1 的证明结束。上述各小节中的构造可以适当缩放，使其发生在单位圆盘丛 D^*N 中，而不是$D^*_{10}(N)$ 中；此外，该圆盘丛包含于 Lefschetz 纤维化h 的总空间中：$E \to \mathbb{C}$，这在定理 3.2.1 的证明中发挥了关键作用。此外，我们可以假设，按照 §3.6.2 中的做法，TPC ϵ-逼近族 $\mathcal{F}'_\epsilon$ 由拉格朗日球面 S_{x_i} 组成，其中每个球面都与 D^*N 相交于 D^*N的一个纤维 F_{x_i}。这些纤维构成的集合恰好就是ϵ-TPC-逼近族 $\mathcal{F}_\epsilon$；有关背景的简要回顾，请参见 §5.1.6。

现在回顾引理 5.2.9 的结论：条的数量 #($\mathcal{B}^\epsilon_{HF(F_x,\Psi^n L)}$) 在 n 中的增长至少与 $\frac{e^{hn}}{hn}$ 一样快。容易看出，导出这一结果的构造（均发生在 $D^*(N)$ 中）可以作相应调整，使得 #($\mathcal{B}^{4\epsilon}_{HF(F_x,\Psi^n L)}$) 也以相同速率增长；从现在起我们就假定如此。回想一下，F_x 是逼近族 $\mathcal{F}_\epsilon$ 中的一个纤维，且 $\Psi^n L \subset \mathrm{Int}(D^*N)$。因此，$F_x \cap \Psi^n L = \hat{} S_x \cap \Psi^n L \subset \mathrm{Int}(D^*N)$。由 ∂D^*N 的凸性可知，Floer 复形 $\hat{} CF(F_x, \Psi^n L; 0, J_n)$ 与 $CF(S_x, \Psi^n L; 0, J_n)$ 相同。因此

$$\#(\mathcal{B}^{4\epsilon}_{HF(\hat{S}_x,\Psi^n L)})$$

在 n 中的增长速度至少与 $\frac{e^{hn}}{hn}$ 一样快。

$\hat{} \hat{} \hat{}$ S_x 和 $\Psi^n L$ 都是 Yoneda 模，因此 $HF(S_x, \Psi^n L) = \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_p(E)}(S_x, \Psi^n L)$。结果，按照（77）的定义，$\hbar(\Psi; L, S_x, 4\epsilon)$ 不为零。由于 $G_{\mathcal{F}'_\epsilon} = \oplus_{S\in\mathcal{F}'_\epsilon} S$，我们还有 $\hbar(\Psi; L, G_{\mathcal{F}'_\epsilon}, 4\epsilon) > 0$。此时我们可以应用推论 5.1.19，从而得到

$$h^r_{\Phi',\mathcal{F}'_\epsilon}(\Psi; L, 2\epsilon) > 0$$

这正是所需的结论。 □

5.3. S^2 上赤道的复杂度。本小节的目的是通过证明 S^2 上赋予谱度量的赤道空间不是全有界的，完成推论 1.1.3 的证明。我们将使用第 §4 节中的记号。特别地，2-球面上的赤道集合记为 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},0)}(S^2)$。这里的记号反映了赤道是单调的，而 0 表示：对于某个赤道 L，其边界位于该赤道上并经过固定点 $x \in L$ 的 Maslov -2 J-全纯圆盘的 $\mathbb{Z}_2$-数为零。回忆命题 4.3.3，这类拉格朗日子流形是可缩回逼近的，并具有一个形如 $L_1, \ldots, L_N$ 的 $\frac{1}{4N} + 2\nu(p)$-逼近族，其中 L_i 是一条经过 S^2 南北极、且与 L_{i-1} 成 $\frac{\pi}{2N}$ 角的大圆。我们固定 L_1，使其经过点 (1, 0, 0)。我们假设 S^2 上的度量满足其面积等于 1。

—

请注意，在这种情况下，与 $M = D^*N$ 的情况相比，逼近数据（Φ, $\mathcal{F}$）更为简单，因为范畴 $\mathcal{Y}_{\epsilon,\ \eta}$ 不依赖于 ϵ，唯一的依赖是 p（我们可以假设 $\eta = \nu(p)$），并且对于每个 N，族 $\mathcal{E}(N) = \{L_1, \ldots, L_N\} \subset \mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E}$ 是所有经过两个极点的大圆组成的集合。

命题 5.3.1。 存在一个哈密顿微分同胚 $\Psi\colon\ S^2 \to S^2$, $L \in \mathcal{E}$, $N \in \mathbb{N}$，以及 $\epsilon' \geq 2$（$\frac{1}{4N} + 2\nu$（p）），使得：

$$N^r(\Psi^k L, \mathcal{E}(N), \epsilon') \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty\ .$$

由这个命题和备注5.1.17 可知，空间 $(\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(\mathrm{mon},\mathbf{0})}(S^2)\ d_\gamma)$不是全有界的。

命题*5.3.1*的证明。 首先，我们确定 Ψ：它是球面赤道上的水平德恩扭转，其支集位于环带内

$$U = \{(x, y, z) \in S^2 \mid -a < z < a\}$$

其中 $a > 0$ 的选取方式使得 U 的面积小于$1_{\ 4}$。接下来，我们选取 L 作为 S^2 上的大圆，它经过南北极以及点 (0，1，0)。注意到 L与 L_1横截相交； L_1是族 $\mathcal{E}(N)$中的第一个元素。

证明思路很简单：我们希望对固定的 ϵ'和某个 N（以 $\mathcal{E}(N)$代替 $\mathcal{F}'_\epsilon$），使用推论5.1.19中的第一个不等式，然后证明 $2\epsilon'$中长度大于 $HF(L_1, \Psi^k L)$的条数随 k趋于无穷。需要解决的关键问题是，我们在这里研究的是单调情形，且系数域为诺维科夫域 Λ，如§2.6.3所述。因此，命题 5.1.3 和（73）中的代数结果需要调整以适用于这一情形。利用 Usher-Zhang 的结果 [50] 即可做到这一点，下面我们将简要回顾。

假设 C 是定义在诺维科夫域 Λ 上的有限维过滤链复形。其同调 $H(C)$ 按经典意义是域 $\mathbb{Z}_2$ 上的持久模。然而，按通常方式统计条形并无意义，因为一旦出现一条 $[a, b$ 型的条，所有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的 $T^\alpha[a, b$ 型平移也都会出现。处理这一问题所需的工具将在 [50] 中介绍，同时还会引入一套专门术语。首先， [50] 中的方法适用于诺维科夫型的环，但比我们在此选择的情况更一般；文中将这些环记为 $\Lambda^{\mathcal{K},\ \Gamma}$，其中 $\mathcal{K}$ 是基域（在我们的情形中为 $\mathbb{Z}_2$），而 Γ 是 $\mathbb{R}$ 的加法子群。在我们的情形中， $\Gamma = \mathbb{R}$。此外， [50] 适用于所谓的可正交化的非阿基米德赋范向量空间，也就是说， C 是定义在 Λ 上、带有过滤函数 ℓ：$C \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 的向量空间；该函数具有作用泛函的典型性质，并且还满足存在特殊“正交”基这一性质。定义 4.1 将此类复形称为 Floer 型复形；特别地，本文中的所有 Floer 复形都属于这一类。在我们的情形中，所有 Floer 型复形都将是 Λ 上的有限维复形。¯对这样的 Floer 型链复形， C [50] 指派一个条形码 $\mathcal{B}_{HC}$，文中称之为 C 的简约条形码。它由长度非负（可以为无穷）、下界均为 0 的区间组成（这当然不同于本节前面讨论的情形；条的下界始终为 0，反映了上文提到的与 Λ 的作用有关的问题）。文中证明，这样的条形码在过滤链同伦等价意义下唯一确定 C（这也解释了为什么我们在记号中使用 $H(C)$）。这一条形码的构造与非过滤域上的标准构造类似：它

通过在 Λ 上选取一个特殊基，写出复形 C 的微分 $d : C \to C$；在该基下，微分矩阵是上三角的，且只含 0 和 1，每行和每列至多有一个 1。我们将 $\bar{\mathcal{B}}^{\delta}_{H(C)}$ 记作从 $\mathcal{B}_{H(C)}$ 中消去所有长度为 $\leq \delta$ 的条后得到的条形码，其中 $\bar{}$，正如 §5.1.3 中所做的那样。$\bar{}$ 条形码 $\mathcal{B}_{H(C)}$ 的构造很容易表明，命题引理 5.1.11 的类似结论在此情形下仍然成立：此处以定义在 Λ 上的 Floer 型有限维复形替代 V，并以 $\mathcal{B}$ 替代 $\mathcal{B}$。因此，命题 5.1.3 和式 (73) 经如下修改后也仍然成立：$\bar{}$ 基 A_∞-范畴是 Λ 上的福柯过滤范畴，且由 $\mathcal{B}$ 替代 $\mathcal{B}$ 。

简而言之，要证明该命题，我们需要证明

$$\# \left(\bar{\mathcal{B}}^{2\epsilon'}_{HF(L_1, \Psi^k L)} \right) \xrightarrow{k \to \infty} \infty \, . \tag{93}$$

此时我们选取值 $\epsilon' = \frac{1}{32}$。我们将考虑定义在 Λ 上的复形 $CF(L_1, \Psi^k L)$。该复形的生成元是交点 $L_1 \cap \Psi^k L$。这些交点的数量为 $2k + 2$：其中两个是南北极，每次连续应用 Ψ 后还会产生另外两个。弗洛尔轨线是全纯的，利用开映射定理很容易看出，如果一条弗洛尔轨线从点 $\in L_1 \cap \Psi^k L \cap U$ 出发，那么它不可能始终完全处于 U 内，因此会填满 $S^2 \backslash ($ $U \cup L_1 \cup L$) 的一个连通区域。因此，每条这样的弗洛尔轨线的面积至少为 $_3\, {}_{32}$。与此同时，带 $\mathbb{Z}_2$ 系数的 Floer 同调 $HF(L_1, \Psi^k L; \mathbb{Z}_2)$ 是良定义的（这是通过令 $T = 1$得到的），并且同构于 $HF(L_1, L; \mathbb{Z}_2)$，其在 $\mathbb{Z}_2$ 上的维数为 2，且 $\bar{}$ 由南极和北极生成。由此可知，$\mathcal{B}_{HF(L_1, \Psi^k L)}$ 至少包含 k 条条形，且每条的长度都大于 $\frac{2}{32} = 2\epsilon'$。证明至此完成。□

—

备注 5.3.2。 命题 5.3.1 很容易改写为某种熵度量不为零的形式，这种度量可以称为 ϵ-加权慢（范畴）熵，其定义方式与公式（78）完全相同，只是将$\log(n)$置于分母中，以取代n。用这些术语来说，我们在上述证明中所展示的是：按照证明中的方式选取时， ϵ-加权缩回对象熵（相对于 Ψ 而言） L至少为1 ，只要 $\epsilon \leq \frac{1}{32}$。由于 Ψ 是一个哈密顿微分同胚，很容易看出，对于 $\epsilon = \infty$ ，慢熵为零。熵与弗洛尔理论计算之间的关系已在[23]中展开。关于涉及条形码熵估计的其他一些结果，参见 [20] [21] 。

5.4. **准刚性与推论**1.1.4。 我们首先以更精确的方式重新表述推论1.1.4。

推论 5.4.1. 固定一个闭黎曼流形 (N, g)，其单位余切丛 D^*N以及一个 $\epsilon > 0$。另固定一个由 D^*N 的纤维组成的族，该族 ϵ-逼近$\mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$，如定理 *3.2.1* 中所构造（见定义 *2.5.7*）。考虑一个恰当辛同胚 ϕ： $D^*N \to D^*N$，其支集位于 D^*N 的内部，并令

$$\chi(\phi; \mathcal{F}) = \max_{F \in \mathcal{F}} \left\{ \max h_{\phi(F)} - \min h_{\phi(F)} \right\} \, .$$

对于任意 $L \in \mathcal{L}ag^{(ex)}(D^*N)$，我们有

$$d_\gamma(L, \phi(L)) \leq 4(\epsilon + N(L; \mathcal{F}, \epsilon)\chi(\phi; \mathcal{F})) \ .$$

我们回顾一下，对于恰当拉格朗日子流形 $L \subset D^*N$，我们记 $h_L : L \to \mathbb{R}$ 为 L 上恰当1-形式 λ 的一个原函数的选取。对于 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N)$、$D^*N$ 的纤维F，以及诸如 $\phi(F)$ 这类在 ϕ 的支集之外与纤维 F 重合的拉格朗日子流形，均使用此记号。另请注意，$Var(h_L) = \max h_L - \min h_L$ 与原函数 h_L的选取无关。

注释5.4.2。a. 我们将推论 5.4.1 中的性质称为准刚性，因为其含义是：ϕ 在整个 $\mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N)$ 上的作用量大小受到其在有限纤维族 $\mathcal{F}$ 上的作用量大小的约束。特别地，请注意，如果对于所有纤维$F \in \mathcal{F}$都有 $\phi(F) = F$，那么，对于这样的 F，$Var(h_{\phi(F)}) = 0$，从而 $\chi(\phi; \mathcal{F}) = 0$。因此，在这种情况下，我们有

$$d_\gamma(L, \phi(L)) \leq 4\epsilon \quad , \forall \ L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N) \ .$$

b. 在推论5.5.1 和5.4.1 中，相应不等式右侧都有一个系数 2。若在 TPC-可逼近性的定义中使用伪度量 D_{int}，它来自 (50)，而不使用 d_{int}，则可以避免这一系数。

c. 推论的表述中，很可能可以将 $N(L; \mathcal{F}, \epsilon)$ 替换为 $\#(\mathcal{F})$，即 ϵ-逼近族 $\mathcal{F}$ 中元素的数量。

¯推论的证明 *5.4.1*。论证用到了 Lefschetz 纤维化 h：$E \to \mathbb{C}$、ˆ拉格朗日球面 $S_{x_i} \subset E$，以及导出 §¯3.7.1 和 §3.7.2 中局部和环境可逼近性数据定义的设定。的构造 h 及其性质见 §3.4 和 §3.5。

给定 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N)$，在范畴中存在一个迭代锥 C_L $\mathcal{D}_p(D^*N)$（见 §3.7.2），如方程式（54）所示：

$$\Delta_i \ : \ Z_i \longrightarrow X_i \longrightarrow X_{i+1} \ , \ 0 \leq i < m \ , \tag{94}$$

其中 Z_j 的形式为 $\Sigma^{l(j)}\hat{} S_{x_{s(j)}}$ 或 $= 0$，且每个 Δ_i 在 $(\mathcal{D}_p(E))^0$ 中都是恰当的。这里 $X_0 = 0$、$C_L = X_m$，并且存在一个与 D^*N 不相交的拉格朗日子流形 X_L，使得 $d_{\mathrm{int}}(L \oplus X_L, C_L) < \epsilon + c_\epsilon \nu(p)$——参见推论 3.7.4。我们还将假设该分解具有最小长度，因此$m = N(L; \mathcal{F}, \epsilon)$。

陈述中的恰当辛同胚 ϕ 通过在 D^*N 的外部取恒等态射，自然延拓为 E。我们仍用 ϕ 表示这一延拓。注意，$\phi(X_L) = X_L$。

按照这些约定，回顾 §2.6.7，见（30）和（31），辛微分同胚¯态射 ϕ 诱导出一个 TPC 函子 $\phi_* := PD(\phi) : \mathcal{D}_p(D^*N) \to \mathcal{D}_{\phi_* p}(D^*N)$（回顾一下，扰动空间 $\mathcal{P}$ 在 ϕ的作用下是闭合的。）

记 $L' = L \oplus X_L$。注意，在 D^*N 和 E 中，$= d_{\mathrm{int}}(L \oplus X_L, \phi(L) \oplus X_L)$ 与 $d_{\mathrm{int}}(L, \phi(L))$ 以及交错距离 $d_{\mathrm{int}}(X, \phi(L))$ 相同（对于 E 上的扰动数据 p，其扩展了在 D^*N 上的选择）。令 $p, \ \phi_* p \preceq q$。在 $\mathcal{D}_q(D^*N)$ 中，我们有如下不等式：

$$d_{\mathrm{int}}(\phi(L'), L') \leq d_{\mathrm{int}}(\phi(L'), \mathcal{H}_{\phi_* p, q}(\bar{\phi}(C_L))) + d_{\mathrm{int}}(\mathcal{H}_{\phi_* p, q}(\bar{\phi}(C_L)), \mathcal{H}_{p,q}(C_L)) + d_{\mathrm{int}}(\mathcal{H}_{p,q}(C_L), L') \ .$$

与此同时，我们还有

$$d_{\text{int}}(\phi(L'), \bar{\phi}(C_L)) \leq d_{\text{int}}(L', C_L) < \epsilon + c_\epsilon \nu(p)$$

¯在 $\mathcal{D}_{\phi_* p}(D^* N)$ 因为 ϕ 是一个持久函子，因此相对于d_{int} (见引理 2.1.2 i）。函子 $\mathcal{H}_{p,}$ $_q$, $\mathcal{H}_{\phi_* p,q}$ 相对于各自的交错伪度量也都是非膨胀的。因此，在 $\mathcal{D}_q(D^* N)$ 中，我们有

$$d_{\text{int}}(\phi(L'), \mathcal{H}_{\phi_* p,q}(\bar{\phi}(C_L))) < \epsilon + c_\epsilon \nu(p),\ d_{\text{int}}(\mathcal{H}_{p,q}(C_L), L') < \epsilon + c_\epsilon \nu(p)\ .$$

从 这一点出发，我们首先在附加假设下证明该结论：

$$\phi(F) = F\ ,\ \forall\ F \in \mathcal{F}\ . \tag{95}$$

在这一 假设下，我们首先注意到，如果能够证明 tha，该结论便可推出 t:

$$d_{\text{int}}(\mathcal{H}_{\phi_* p,q}(\bar{\phi}(C_L), \mathcal{H}_{p,q}(C_L)) = 0 \tag{96}$$

对于某个 q 使得 p， $\phi_* p \preceq q$ 考虑 d_{int}、 D_{int}和d_γ 之间的关系，如方程（50）、（51）和（52）所示，并取 p 使得 ν（p） $\to 0$。

现在我们在附加假设（96）下证明（95）。迭代锥C_L 属于范畴

$$\mathcal{D}_p(E) = PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)}(E), p))\ .$$

回想一下，该范畴还有另一种以扭曲复形为基础的模型，如 §2.4.5 所述，我们将其记为 $\mathcal{D}_p^{Tw}$（E）。这个 TPC 是过滤 A_∞-范畴上的滤过扭曲复形的持久同调范畴，其对象为 E 中的恰当闭拉格朗日子流形。采用 §2.4.5中的记号：

$$\mathcal{D}_p^{Tw}(E) = PH\left(FTw\left(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)}(E), p)\right)\right).$$

Yoneda 嵌入扩展为 TPC 的一个 0-等价：

$$\mathcal{Y}_p : \mathcal{D}_p^{Tw}(E) \to \mathcal{D}_p(E)$$

它与比较函子 $\mathcal{H}_{p、\ q}$ 相容（相差一个 0-同构），其中 $p \preceq q$。特别地，迭代锥 C_L 与一个滤过扭曲复形 0-同构

$$\bar{C}_{L;p} = (\oplus_i Z_i', A_{\bar{C}_{L,p}})$$

ˆ 在分解（94）中出现的平移后的拉格朗日球面 $Z_i' = \Sigma^{s_i} S_{x_{j(i)}}$ 之上。这样的扭曲复形由一个上三角 $m \times m$ 矩阵 $A_{\bar{C}_{L;p}}$所刻画，其元素 CF属于S_{x_j}（S_{x_s}； p）（相差显然的平移），如 [39] 中所述（另见 [11] 中的过滤ˆ ˆ ˆλ-引理及§A.3.2）。这里， CF（S_{x_i}， S_{x_j}； p）是 S_{x_i} ˆ与S_{x_j} 的过滤 Floer 链复形，它是在 E 中相对于扰动数据 p计算得到的。为强调其对扰动数据的依赖，我们将 p纳入记号中。

¯通过扭曲复形的推前，便可轻松追踪借助扭曲复形实现的 ϕ 所产生的影响：这会将涉及的拉格朗日子流形经由 ϕ 传输，并推前

扰动数据 $p \to \phi_* p$，并将矩阵 $A_{\bar{C}_{L;p}}$ 中的元素逐一按显然的变换映射到矩阵 $\phi_*(A_{\bar{C}_{L;p}})$：

$$CF(\hat{S}_{x_j}, \hat{S}_{x_s}; p) \xrightarrow{\phi_*} CF(\phi(\hat{S}_{x_j}), \phi(\hat{S}_{x_s}); \phi_* p) = CF(\hat{S}_{x_j}, \hat{S}_{x_s}; \phi_* p) \tag{97}$$

ˆ（这里我们使用假设 ϕ 保持每个 S_{x_i} 不变）。我们将所得的扭曲复形记为 $\phi_*(C_{L,\ p})$。它具有如下形式：

$$\phi_*(\bar{C}_{L,p}) = (\oplus_i Z_i', A'_{\phi_* p}) \in FTw\left(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)}(E), \phi_* p)\right)$$

其中 $A'_{\phi_* p} = \phi_*(A_{\bar{C}_{L,\ p}})$。

此时，我们需要更精确地说明ˆ ˆ各对 $(S_{x_i},\ S_{x_j})$所涉及的 Floer 数据有何种选择。鉴于此处涉及的范畴系统的性质（如 §2.5 和 §2.6所述），作为扰动数据族 $\mathcal{P}$ 一部分的任何此类选择都适用于此论证。同样，我们还需要讨论两个相关的延拓函子 $\mathcal{H}_{p,\ q}$以及 $\mathcal{H}_{\phi_* p,\ q}$。我们不妨重新查看图 4 ，其中一部分经稍作调整后复制于图 13。

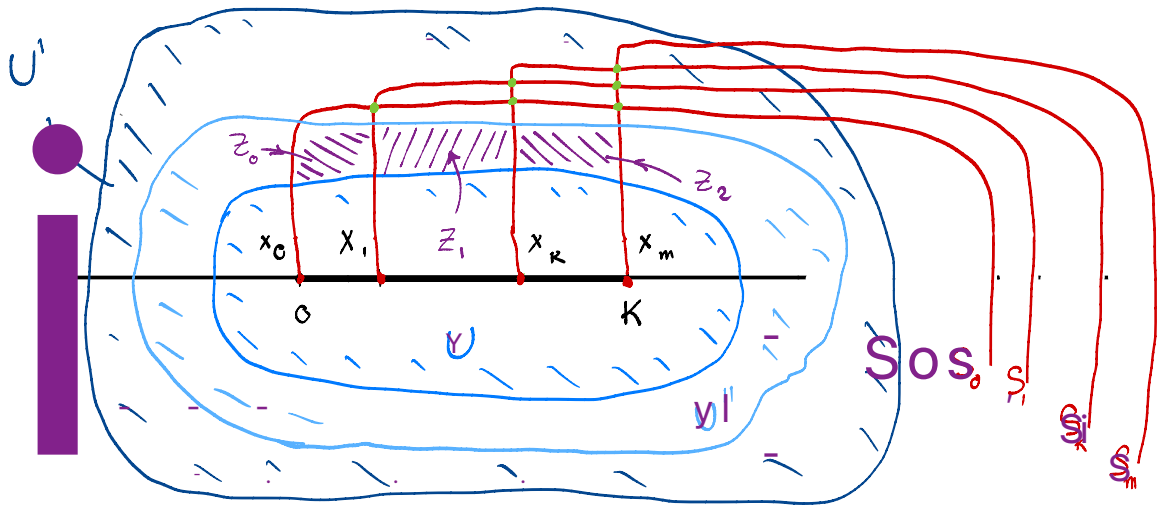


图 13。拉格朗日球面及其交点。

请回想，U 包含圆盘从 $D^*N \subset E$ 到 $\mathbb{C}$ 上的投影，并且可以假设球面S_{x_i} 在S_{x_i} 之外与图中的球面重合

D^*N（这需要对某些 U、 U'作少许修改，但这些修改与其余论证无关）。我们还可以假设任意两个球面 S_{x_i}、 S_{x_j} 都横截相交。所有配对（$\hat{}S_{x_i}$, $\hat{}S_{x_j}$）的 Floer 数据均选取为使哈密顿量 $H^{\hat{}S_{x_i}, \hat{}S_{x_j}}$在 D^*N之外为常数。因此，相应 Floer 复形的生成元就是相关球面之间的交点。每个球面 S_{x_i} 上的莫尔斯函数选取为恰有两个临界点，即一个极大值点和一个极小值点，且二者都位于 $\bar{h}^{-1}$（U'）之外。几乎复结构 $J^{i,j} = J^{S_{x_i}, S_{x_j}}$的选取使得 $\bar{h}$在$W = \bar{h}^{-1}$（$U''\backslash U$）上是（$J^{i,j}, i$）-全纯的。这里，集合 U''表示 D^*N的一个邻域，且比U'小；我们可以将其取为 D_2^*N的投影，并使所有拉格朗日球面 S_{x_i} 的交点都位于 U''之外。用于定义高阶运算以及延拓映射$\mathcal{H}_{p,q}$ 和$\mathcal{H}_{\phi_* p,q}$ 的 E上的其他几乎复结构也取自同一类，亦即它们使投影 h全纯。

根据这些选择，简单应用开映射定理即可证明：不存在以不同巴黎的交点为输入、以另一个此类交点为输出、边界位于（其中一些）这些球面上，且与区域 $U''\backslash U$ 相交的 Floer 条带（甚至多边形）。例如，若图中有一条这样的曲线与区域Z_1 相交，很容易看出它也必然延伸到区域 Z_0 和 Z_2；继续这一论证便会导出矛盾。

回想一下， ϕ 的支集位于 $D^*N \subset \bar{h}^{-1}(U)$ 内。这意味着实际上 $\bar{C}_{L,\ p}$ 与 $\phi_*(C_{L,\ p})$ 重合——两个矩阵 $A'_{\phi_* p}$ 和 $A_{\bar{C}_{L,\ p}}$ 相同。此外，同样由于 Floer 类型的条带或多边形无法穿过区域 $U''\backslash U$，显然可以得出，采用显然的 扰动数据时，$\mathcal{H}_{p,\ q}$ 和$\mathcal{H}_{\phi_* p,\ q}$ 在 $C_{L,\ p}$ 以及 $\phi_*(C_{L,\ p})$ 上的作用方式相同。因此，

$$d_{\mathrm{int}}(\mathcal{H}_{p,q}(\bar{C}_{L,p}), \mathcal{H}_{\phi_* p,q}(\phi_*(\bar{C}_{L,p}))) = 0$$

这意味着（96），并在附加假设（95）下完成证明。

我们现在放弃这一假设（95），并考虑一般情形。我们的目标是证明 w

$$d_{\mathrm{int}}(\mathcal{H}_{\phi_* p,q}(\bar{\phi}(C_L), \mathcal{H}_{p,q}(C_L)) \leq 2m\chi(\phi; \mathcal{F}) \ . \tag{98}$$

这足以结束推论的证明。记 $S_i = \phi(S_{x_i})$。这些是恰当的 拉格朗日球面，具有如下性质： S_i 在 S_{x_i} 之外与 D^*N 重合，且满足这些 S_i在 D^*N内部两两不相交。因此，在假设（95）下所用的同一论证也表明，在当前更一般的情形中，定义该扭曲复形的矩阵 $A'_{\phi_* p}$

$$\phi_*(\bar{C}_{L,p}) = (\oplus_i \phi(Z'_i), A'_{\phi_* p}) \in FTw\left(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag^{(ex)}(E), \phi_* p)\right)$$

可被视为一个线性映射（不考虑滤过）$A_{\bar{C}_{L,\ p}}$ 在$\hat{}$变换$S_{x_i} \to S_i$（类似于基变换）下对应于$A_{\bar{C}_{L,\ p}}$。不过， $m \times m$矩阵$A'_{\phi_* p}$ 的元素的滤过层级可能与$A_{\bar{C}_{L,\ p}}$不同。为理解这一变化，注意到滤过复形 $CF(\bar{S}_i, \bar{S}_j)$与 $\Sigma^{k_{i,\ j}} CF(\hat{}S_{x_i}, \hat{}S_{x_j})$同构，其中$|k_{i,\ j}| \leq Var(h_{\phi(F_{x_i})}) + Var(h_{\phi(F_{x_j})}) \leq 2\chi(\phi; \mathcal{F})$。这些平移会累积，并且鉴于我们有

m 所考虑的扭曲复形中的项，因此我们推得（98），从而完成证明。□

5.5. **拉格朗日格罗莫夫宽度与推论 1.1.5**。我们首先回顾此处相关的格罗莫夫宽度（[5], [4]）的定义。为此，考虑一个辛流形（M，ω）、一个拉格朗日子流形 $L \subset M$和一个闭子集 $K \subset M$。相对于 的格罗莫夫宽度L，相对于 K 定义为：

$$\mathcal{W}(L;K) = \sup\Big\{\pi\frac{r^2}{2} \mid \exists\, j : (B_r,\omega_0) \to (M,\omega),\ j \text{ is an embedding},\\ j^*\omega = \omega_0,\ \ j^{-1}(L) = B_r \cap \mathbb{R}^n,\ j(B_r)\cap K = \emptyset\Big\}$$

其中（B_r，ω_0）$\subset$（$\mathbb{C}^n$，ω_0）是 $\mathbb{C}^n$ 中以原点为中心的标准辛 r-球。

本小节旨在证明推论 1.1.5。我们将在此以更精确的方式重新表述该推论。

推论 5.5.1。假设（$\mathcal{L}ag(M)$ d_γ）是 *TPC*收缩 ϵ-可逼近的，其意义见定义 2.5.8，在 $\mathcal{C}$ 这一 *Fukaya* 型 *TPC* 系统中，通过族 $\mathcal{F}_\epsilon$，使得 $\mathcal{F}_\epsilon$ 的每个元素都是 *Yoneda* 模。对于每个 $L \in \mathcal{L}ag(M)$ 我们有

$$\mathcal{W}(L;\cup_{F\in\mathcal{F}_\epsilon} F) \le 2\epsilon\ .$$

注 5.5.2. a. 推论 5.5.1 并不直接适用于 $M = D^*N$ 的情形，因为 ϵ-生成族 $\mathcal{F}_\epsilon$ 由模 $\mathcal{F}_{x_i}$ 组成，这些模对应于纤维 F_{x_i}，但并非范畴 $\mathcal{C}_p$ 中的 Yoneda 模（它们是局部逼近数据 $(\Phi, \mathcal{F}_\epsilon)$ 的一部分——见 §3.7.1）。然而，该推论适用于 §3.7.2 中的环境逼近数据 $(\Phi', \mathcal{F}'_\epsilon)$，因为在这种情形下，$\mathcal{F}'_\epsilon$ 的元素由拉格朗日球面 $\hat{}\,\hat{}S_{x_i} \subset E$ 表示。因此，回顾 $F_{x_i} = S_{x_i} \cap D^*N$，我们可推得该推论的结论在 $M = D^*N$，$\mathcal{F}_\epsilon = \{F_{x_1}, \dots, F_{x_l}\}$ 的情形下仍然成立。

b. 该陈述中的不等式立即表明，当 $\epsilon \to 0$ 时，$\mathcal{F}_\epsilon$ 族在 M 中变得稠密。事实上，假设某个 $\mathcal{F}_\epsilon$ 族避开了某个球 $B \subset M$。取一条经过该球中心 x 的 L，并按照宽度的定义，选取一个嵌入 j，使得 $j(0) = x$，且 $j(B_r) \subset B$。在假设 $\mathcal{F}_\epsilon$ 不与 B 相交的情况下，我们由此得到 $\epsilon \ge \pi\frac{r^2}{2}$，因此 ϵ 与零保持有正距离。

c. 在本备注中，我们考虑 $M = D^*N$ 的情形。一个纤维由其基点决定，而圆盘丛 D^*N 由黎曼度量 g 决定。鉴于此，该推论表明，与对 $(\mathcal{S}, \mathrm{g})$ 相关联的一些辛不变量存在，其中 $\mathcal{S}$ 是底空间中由 k 个互异点组成的构型。为说明这一点，对于任意有限族 $\mathcal{S} \in N$，记 $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ 为其在 D^*N 内对应的纤维族（定义该圆盘丛的度量为 g）。现在将 $\mathcal{S}$ 的可逼近精度定义为：

$$\epsilon_\mathcal{S} = \inf\{\ \epsilon > 0 \mid \text{存在如 §3.7.1 } \}\ .\text{中所述的 } \epsilon - \text{逼近数据 } (\Phi, \mathcal{F}_\mathcal{S})$$

根据 b 点，这不是零，而且是有限的。事实上，对于 $\mathcal{S}$ 由单点组成的情形，可由 [10] 中的论证得出（这些论证在一定程度上是定理3.2.1证明的前身）

该 $\epsilon_{\mathcal{S}}$ 已经是有限的。显然，这个量与所讨论的点无关，并且是任意有限 $\epsilon_{\mathcal{S}}$的上界 $\mathcal{S}$。然而，对于 $\mathcal{S}$ 含有多个元素的情形，这个数通常取决于 N中点的配置。举例来说，取 $\mathcal{S} \subset D$ 使得 $D \subset N$ 为一个小圆盘，则 $\epsilon_{\mathcal{S}}$ 肯定会远离0 （同样根据 b 点），且与 $\mathcal{S}$中的元素数量无关。但如果相同数量的纤维更均匀地分布在 N上，那么通过增加 $\mathcal{S}$ 中的元素数量，可以作出选择使得 $\epsilon_{\mathcal{S}} \to 0$ ，因为根据定理3.2.1， ϵ-逼近数据对所有 ϵ都存在。这里我们不再深入讨论这一问题，但显然它值得进一步研究。

推论 5.5.1 的证明。证明直接由 [11] 中的推论 6.13 i. 得出。我们只需将该文中的记号和约定与此处的语境联系起来。首先要指出的是， [11] 处理的是弱过滤 A_∞ 范畴的情形。本文的情形是过滤 A_∞ 范畴，因此 [11]$\widehat{\ }$ 中的结果和论证在此处同样适用。将系统 $\mathcal{C}$ 中的 TPC 记为 $\mathcal{C}_p(M)$。取 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}(M)$。回顾¯注 2.2.4 可知，在缩回对象¯可逼近性的定义中，使用 d_{int} 还是 d_{int} 并无区别。此外，根据引理 4.2.3 中对 d_{int} 的描述，我们可以推出，存在一个元素 $a \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_p(M))$、一个锥分解 $\eta\colon 0 \rightsquigarrow a$ （其在 $\mathcal{F}_\epsilon$ 中线性化），以及两个映射 $\alpha \in \hom^{r_1}(L,a)$、 $\beta \in \hom^{r_2}(a,L)$，使得 $\beta \circ \alpha = i_{0,r_1+r_2}(id_L)$，其中$r_1 + r_2 < 2\epsilon + c_\epsilon \nu(p)$，而 $p \in \mathcal{P}$ 是对适当扰动数据的一种选取。考察 [11] 中式（6.16）所定义的量 ρ，可知 $\rho(\alpha) < 2\epsilon + c_\epsilon \nu(p)$（简言之，这个$\rho(\alpha)$ 是对满足存在如前所述态射 β 条件的 $r_1 + r_2$ 取下确界）。此外，这意味着当 $\nu(p)$ 足够小时，采用 [11] 中的记号，有 $w_p((\alpha, a, \eta)) < 2\epsilon + c_\epsilon \nu(p)$（式（6.19）中的这个 w_p [11] 是赋予三元组 (α, a, η) 的度量，它是在所有 $\alpha\colon L \to a$ 的选取中对 $\rho(\alpha)$ 取下确界；它也取决于扰动数据 p）。由 [11] 中的推论 6.13. i 可推出 $2\epsilon \geq \frac{1}{2}\delta(L; \cup_{F\in\mathcal{F}_\epsilon} F)$。 [11] 第 85 页定义的量 $\delta(-;-)$，是本节开头所定义的格罗莫夫宽度的两倍。推论得证。□

注 5.5.3. a. 如引言中所述，推论 5.4.1 和 5.5.1 有一些纯粹几何上的推论，它们既独立于可逼近性，也独立于证明中所用的工具。第一个陈述可以理解为：对每个 $\epsilon > 0$，都存在一个由该类中的拉格朗日子流形构成的有限族，可用于给出近似（对T^*N而言是纤维，对 S^2而言是赤道，等等），使得任意 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(M)$ 相对于此族的格罗莫夫宽度小于 ϵ。类似地，聚焦于 $M = D^*N$ 的情形，对任意 $\epsilon > 0$，都存在一个有限纤维族 $\mathcal{F}$，使得任何满足 $\phi(F) = F$ 对所有 $F \in \mathcal{F}$ 均成立的恰当辛微分同胚，在谱度量中对每个 $L \in \mathcal{L}\mathrm{ag}^{(ex)}(D^*N)$ 的移动都小于 ϵ。

b. 其中一些几何推论也可以通过更直接的方法得到。事实上，Egor Shelukhin 注意到，对于 $\epsilon > 0$，可以用与 Fukaya 范畴技术无关的方法证明，存在一个有限族 $\mathcal{F}$，由 D^*N 的纤维构成，使得任何由哈密顿同伦诱导、支集包含于 D^*N且与 $\mathcal{F}$中的这些纤维不相交的哈密顿微分同胚 ϕ，其谱范数都小于 ϵ。证明使用了与命题 φ中构造的同类型的莫尔斯函数3.3.1，以及 Usher 的一个结果 [49]。

该结果还表明， D^*M 内部纤维补集的格罗莫夫宽度 ϵ有一个上界。Mark Gudiev 也通过使用命题 φ 中的莫尔斯函数进行直接位移论证，注意到了这一格罗莫夫宽度结果3.3.1。

5.5.1. 格罗莫夫宽度、锥长度与逼近族的大小。 设 (M,ω) 是 §2.6 中所述类型之一的辛流形，并设 $\mathcal{L}$ag 是 M 中拉格朗日子流形集合的一个子集，如 §2.6.6 所述。回忆一下，我们有过滤 A_∞-范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag})$ 系统，以及其过滤导出的 TPC 系统 $PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag}))$。

设 $\mathcal{S}$ 是 M 的一个子集集合， $\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$ag 是来自 $\mathcal{L}$ag 的拉格朗日子流形集合。对于 $w>0$ ，定义 $\mathcal{S}$ 相对于 $\mathcal{L}$ 的 w-密度指标为：

$$I(\mathcal{S},\mathcal{L};w):=\inf\big\{k\geq 1\mid \exists\, S_1,\dots,S_k\in\mathcal{S}\text{ such that }\mathcal{W}(L;S_1\cup\cdots\cup S_k)\leq w,\ \forall L\in\mathcal{L}\big\}. \tag{99}$$

本文中此处及其他地方，我们采用如下约定：下确界 $\emptyset=\infty$，上确界 $\emptyset=-\infty$。因此，若 $L\subset S_1\cup\cdots\cup S_k$ 对某个 $L\in\mathcal{L}$ag， S_1，……， $S_k\in\mathcal{S}$，则有 $\mathcal{W}(L;\ S_1\cup\cdots\cup S_k)=-\infty$因此 $\mathcal{W}(L;\ S_1\cup\cdots\cup S_k)\leq w$在（99）中自动成立。

对于子集 $\mathcal{K}\subset\mathcal{L}$ag，我们记

$$\widetilde{\mathcal{K}}\subset\widetilde{\mathrm{Obj}}(PD(\widehat{\mathcal{F}uk}(\mathcal{L}\mathrm{ag})))$$

为对象 $\mathcal{Y}_p(K)\in$Obj$(PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}$ag; $p)))$,$K\in\mathcal{K}$, $p\in\mathcal{P}$ 的等价类集合（见 §2.5.10），其中 $\mathcal{Y}_p$: $\mathcal{F}uk(\mathcal{L}$ag; $p)\longrightarrow F$mod$^{\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\mathrm{ag};p)}$ 是 Yoneda 嵌入（见 §A.3.1 和 §2.5.5）。

以下结论可直接由推论 5.5.1 得出。

推论 5.5.4。 设 $\mathcal{L},\mathcal{F}\subset\mathcal{L}ag$ 是两个拉格朗日子流形集合。设 $w_0>0$和 $\mathcal{F}^0\subset\widetilde{\mathcal{F}}$ 是一个有限子集，且 $\mathcal{L}$在 $PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}ag))$ 中可由 $\mathcal{F}^0$ 作 w_0-缩回逼近。那么

$$|\mathcal{F}^0|\geq I(\mathcal{F},\mathcal{L};w_0). \tag{100}$$

此外，存在 $L\in\mathcal{L}$，使得 $N^r(L;\ \mathcal{F}^0,w_0)\geq I(\mathcal{F},\mathcal{L};\ w_0)$。

备注 5.5.5. (1) 备注5.5.2 中的要点 (a) 在此同样适用。也就是说，推论 5.5.4 的结论对于 $M=D^*N$ 在 $\mathcal{L}=\mathcal{L}$是 D^*N 且 $\mathcal{F}$ 是任意余切纤维集合的情况下，仍然成立，其中 ag 是所有闭精确拉格朗日子流形的集合。

(2) 如果 $\mathcal{S}'\subset\mathcal{S}''$, $\mathcal{L}'\supset\mathcal{L}''$, $w'\leq w''$，那么

$$I(\mathcal{S}',\mathcal{L}';w')\geq I(\mathcal{S}'',\mathcal{L}'';w''). \tag{101}$$

特别地，对于每个 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{L}$ ，我们有 $I(\mathcal{S},\mathcal{L};w)\geq I(\mathcal{S},\emptyset;w)$。注意，后一个不变量取决于集合 $\mathcal{S}$ 本身，且不涉及任何拉格朗日子流形。

(3) 不等式（100）在固定一个集合 $\mathcal{F}$ ，使其（缩回对象）逼近 $\mathcal{L}$ ，并希望对任何可能的、能缩回对象逼近$\mathcal{F}^0\subset\mathcal{F}$ 的w_0有限族的大小给出下界 $\mathcal{L}$时，或许会派上用场。请注意，推论 5.5.4 对拉格朗日子流形集合并无特别假设，除了该集合包含 $\mathcal{F}^0$ （并且是

的子集 $\mathcal{L}$，当然）。特别是，我们甚至不需要假设 $\mathcal{F}$ 缩回对象逼近 $\mathcal{L}$。但鉴于（101），（100）中关于 $|\mathcal{F}^0|$ 的最有效下界是在 $\mathcal{F}$ 尽可能小时得到的；在应用中，假设 $\mathcal{F}$ 缩回对象逼近 $\mathcal{L}$ 是合理的。

下面给出一个简单示例，说明推论 5.5.4 在实践中的应用。考虑$M = S^2$，赋予其标准辛结构 ω，并将其归一化，使得面积(S^2,ω) =1。令 $\mathcal{L}$ag 表示 S^2 中所有闭单调拉格朗日子流形的集合（在此情形下，即所有将 S^2 分隔成两个面积均为 1 2 的区域的嵌入闭曲线）。令 $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ag 表示所有经过 S^2南北极的大圆的集合。根据命题 4.3.3，$\mathcal{F}$缩回逼近 $\mathcal{L}$ag 于 $PD(\mathcal{F}uk(\mathcal{L}\text{ag}))$。

我们断言 $I(\mathcal{F},\ \emptyset;\ w) \geq \lceil \frac{1}{4w} \rceil$。事实上，如果 F_1，.....，$F_k \in \mathcal{F}$那么 $S^2\backslash(F_1\cup\cdots\cup F_k)$ 的连通分支中至少有一个的面积为 $\geq \frac{1}{2k}$，因此 $\mathcal{W}(\emptyset;\ F_1\cup\cdots\cup F_k) \geqslant \frac{1}{4k}$。由此可得 $I(\mathcal{F},\ \emptyset;\ w) \geq \lceil \frac{1}{4w} \rceil$。（事实上，不难看出这里实际上取等号。）

由推论 5.5.4 可知，对于任意 $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ag、任意 $w_0 > 0$以及任意有限集合 $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}$，若其 w_0 是 $\mathcal{L}$ 的缩回对象近似，则有：

$$|\mathcal{F}^0| \geq I(\mathcal{F},\mathcal{L};w_0) \geq I(\mathcal{F},\emptyset;w_0) \geq \left\lceil \frac{1}{4w_0} \right\rceil.$$

附录 A. 过滤 A_∞范畴

A.1.**过滤 A_∞范畴、 A_∞函子、 A_∞自然变换和平移A_∞函子。过滤** A_∞范畴早已见于文献，例如参见 [13,第 3 节2] 和 [11, 第 2]章。因此，我们将非常简要地回顾这一主题，并主要讨论下文中尚未在文献中涉及的理论方面。

固定一个域 $\mathbf{k}$ 以及 $\mathbf{k}_0 \subset \mathbf{k}$ 的一个子环。本文的大多数应用中，我们要么取 $\mathbf{k}_0$ =$\mathbf{k}$ $= \mathbb{Z}_2$，要么取 $\mathbf{k}$ $= \Lambda$ （系数取自 $\mathbb{Z}_2$ 的通用诺维科夫域），并且$\mathbf{k}_0 = \Lambda_0 \subset \Lambda$ 为正Novikov环（见 §19）和（20）中的式（2.6.3）。

在下文中，若 (C, d) 是一个关于 $\mathbf{k}$ 的过滤链复形，即 (C, d) 是一个关于$\mathbf{k}$ 的链复形，并且带有一个由实数轴参数化的递增过滤，该过滤由$\mathbf{k}_0$-模构成且在 d 作用下保持不变。

设 $\mathcal{A}$ 是一个关于 $\mathbf{k}$ 的 A_∞-范畴。对于 $X_0, X_1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$，我们简记：

$$\mathcal{A}(X_0, X_1) := \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1),$$

更一般地，对于对象元组 $\vec{X}$:=$(X_0, \ldots, X_d)$， $d \geq 1$，我们记作

$$\mathcal{A}(\vec{X}) := \mathcal{A}(X_0, X_1) \otimes_{\mathbf{k}} \cdots \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{A}(X_{d-1}, X_d)$$

并将 μ_d: $\mathcal{A}(\vec{X}) \longrightarrow \mathcal{A}(X_0, X_d)$ 记作 A_∞-运算。

过滤的 A_∞-范畴（在 $(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)$ 上）是一个 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$ ，其上定义在 $\mathbf{k}$ 上，使得任意两个对象 X，Y之间的态射空间 $\mathcal{A}(X,\ Y)$ =$\mathbf{hom}_{\mathcal{A}}(X,\ Y)$ 都是定义在 $\mathbf{k}$ 上的过滤链复形。对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们将 $\mathcal{A}^\alpha(X,\ Y) \subset \mathcal{A}(X,\ Y)$ 记作 $\mathbf{k}_0$-子模

它是由 α 参数化的滤过层级。更一般地，对于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 以及由 $\mathcal{A}$ 中对象构成的元组 $\vec{X} = (X_0, \ldots, X_d)$，我们记作

$$\mathcal{A}^\alpha(\vec{X}) \subset \mathcal{A}(\vec{X})$$

对于由所有$\mathbf{k}_0$-模的像生成的$\mathbf{k}_0$-子模

$$\mathcal{A}^{\alpha_1}(X_0, X_1) \otimes_{\mathbf{k}_0} \cdots \otimes_{\mathbf{k}_0} \mathcal{A}^{\alpha_d}(X_{d-1}, X_d), \text{ with } \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \leq \alpha,$$

在显然的（$\mathbf{k}_0$-线性）映射下

$$\mathcal{A}(X_0, X_1) \otimes_{\mathbf{k}_0} \cdots \otimes_{\mathbf{k}_0} \mathcal{A}(X_{d-1}, X_d) \longrightarrow \mathcal{A}(\vec{X}).$$

于是我们要求，对于每个 $d \geq 1$、每个 X 和每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，都有 e:

$$\mu_d(\mathcal{A}^\alpha(\vec{X})) \subset \mathcal{A}^\alpha(X_0, X_d).$$

若一个过滤的 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$作为一个不带滤过的 A_∞-范畴是严格含幺的，并且对于每个 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$，严格单位元$e_X \in \mathcal{A}(X, X)$都属于滤过层级 0，即 $e_X \in \mathcal{A}^0(X, X)$，则称该过滤的 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$是严格含幺的（在过滤意义下）。除非另有说明，本文中所有过滤的 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$ 均默认是严格含幺的。

过滤 A_∞-范畴的一个例子是$\mathbf{k}$上的过滤链复形构成的 dg-范畴 $\mathcal{F}\mathbf{Ch}$。

A_∞-函子这一概念也有过滤版本。两个 A_∞-范畴之间的一个 A_∞-函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 称为过滤的，如果对于每个 $d \geq 1$ 以及每个对象元组$\vec{X}$，其 d阶项 $\mathcal{F}_d$ 保滤过，即

$$\mathcal{F}_d(\mathcal{A}^\alpha(\vec{X})) \subset \mathcal{B}^\alpha(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_d), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

本文中的所有过滤 A_∞-函子都默认是严格含幺的。

过滤 A_∞-函子之间的预自然变换可定义如下。设$\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$是两个过滤 A_∞-函子。一个平移量为s 的预自然变换 $T\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$，是通常意义下的一个预自然变换 A_∞，且其 d 阶项 T_d 对滤过的平移不超过 s；也就是说，我们有一族元素 $T^0 \in \mathcal{B}^s(\mathcal{F}X, \ldots, \mathcal{G}X)$，对每个 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ 都成立。此外，对于每个 $d \geq 0$ 以及每个对象元组 $\vec{X} = (X_0, \ldots, X_d)$，有：

$$T_d(\mathcal{A}^\alpha(\vec{X})) \subset \mathcal{B}^{\alpha+s}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{G}X_d), \ \forall d \geq 1, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

我们总是为我们的 A_∞范畴 $\mathcal{A}$ 赋予一个移位函子。这并非单个函子，而实际上是一个由过滤 A_∞ 函子 $\{\Sigma^r\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\}_{r\in\mathbb{R}}$, $r \in \mathbb{R}$组成的系统，它们的高阶项均为平凡项（$\Sigma^r_d = 0, \ \forall d \geq 2$）；此外，对每个 $r, \ s \in \mathbb{R}$，还配有移位为 $s - r$的滤过自然变换$\eta_{r,\,s}\colon \Sigma^r \longrightarrow \Sigma^s$，并且满足：

(1) Σ^0 =同一。(2) 对所有 $r, \ s \in \mathbb{R}, \ \Sigma^r \circ \Sigma^s = \Sigma^{r+s}$。(3) $\eta_{r,\,s}$ 的高阶项 $(\eta_{r,\,s})_d$，$d \geq 1$ 消失。(4) 对每个 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$，指派给 X 的 $\eta_{r,\,s}$ 的 0 项是一个循环 $(\eta^X_{r,\,s})_0 \in \mathcal{A}^{s-r}(\Sigma^r X, \ \Sigma^s X)$。此外，我们有 $(\eta^X_{0,\,0})_0 = e_X \in \mathcal{A}^0(X, \ X)$。

(5) 对每个 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ 和每个 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $\mu_2\big((\eta^X_{r,\,s})_0, (\eta^X_{s,\,t})_0\big) = (\eta^X_{r,\,t})_{0\circ}$ (6) 对每个 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ 和每个 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $\Sigma^t_1\big((\eta^X_{r,\,s})_0\big) = (\eta^X_{r+t,\,s+t})_{0\circ}$

由此可知，每个 $\eta_{r,s}$ 都是同构，其逆为 $\eta_{s,r}$。分别从左侧和右侧与 $\eta^X_{0,r}$ 和 $\eta^Y_{s,0}$ 复合，可得同构

$$\mathcal{A}^\alpha(\Sigma^r X, \Sigma^s Y) \cong \mathcal{A}^{\alpha+r-s}(X,Y),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

它们与滤过 $\mathcal{A}^{\beta'}(-,-) \subset \mathcal{A}^{\beta''}(-,-)$，$\beta' \le \beta''$相容。

备注 A.1.1. 条件 (1)-(6) 在 A_∞-语境中可能显得过于强；为给出较弱但仍有意义的移位函子定义，这些条件或许可以放宽。对于上文的 Σ，更合适的称呼或许是严格 移位函子，但本文不采用这一术语。

从现在起，所有过滤 A_∞-函子都假定与移位函子相容，其含义是：对于每个 $r \in \mathbb{R}$，$\mathcal{F} \circ \Sigma^r = \Sigma^r \circ \mathcal{F}$ 且对于每个 $r, s \in \mathbb{R}$，$(\eta^{\mathcal{F}X}_{r\,s})_0 = \mathcal{F}_1(\eta^X_{r,s})_0$。

A.2. **过滤 A_∞-模与双模**。设 $\mathcal{A}$ 为一个过滤的 A_∞-范畴。过滤左 $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$-模，配备以下附加结构和性质。对于每个 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$，链复形 $(\mathcal{M}(X)\ \mu_1^{\mathcal{M}})$（定义在$\mathbf{k}$上的向量空间）都带有一个由子复形构成的递增过滤，这些子复形是$\mathbf{k}_0$-模，并由 $\mathbb{R}$参数化。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们将此滤过的 $\mathcal{M}^\alpha(X) \subset \mathcal{M}(X)$ 级记为 $\alpha_\circ$ 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 以及对象元组 $\vec{X} = (X_0, \ldots, X_k)$，记

$$(\mathcal{A}(\vec{X}) \otimes \mathcal{M}(X_k))^\alpha \subset \mathcal{A}(\vec{X}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{M}(X_k) \tag{102}$$

由所有$\mathbf{k}_0$-子模在映射下的像生成的$\mathbf{k}_0$-子模

$$\mathcal{A}^{\alpha'_1}(X_0,\ X_1) \otimes_{\mathbf{k}_0} \cdots \otimes_{\mathbf{k}_0} \mathcal{A}^{\alpha'_k}(X_{k-1}, X_k) \otimes_{\mathbf{k}_0} \mathcal{M}^{\alpha''}(X_k),\ \text{with}\ \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_k + \alpha'' \le \alpha,$$

在显然的映射下

$$\mathcal{A}(X_0, X_1) \otimes_{\mathbf{k}_0} \cdots \otimes_{\mathbf{k}_0} \mathcal{A}(X_{k-1}, X_k) \otimes_{\mathbf{k}_0} \mathcal{M}(X_k) \longrightarrow \mathcal{A}(\vec{X}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{M}(X_k).$$

我们要求高阶运算 $\mu^{\mathcal{M}}_{k|1}$, $k \ge 1$保持滤过。也就是说，对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象元组 $\vec{X} = (X_0, \ldots, X_k)$ 以及每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，都有：

$$\mu^{\mathcal{M}}_{k|1}\big((\mathcal{A}(\vec{X}) \otimes \mathcal{M}(X_k))^\alpha\big) \subset \mathcal{M}^\alpha(X_0).$$

为保持统一，我们也将微分$\mu_1^{\mathcal{M}}$记作 $\mu^{\mathcal{M}}_{0|1}$。

或者，也可以将过滤的 $\mathcal{A}$-模视为过滤的 A_∞-函子 $\mathcal{A} \to \mathcal{F}$**链复形**^{op}。

过滤模之间的预同态定义如下。设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 为过滤的 A_∞-模。平移量为 $\le s \in \mathbb{R}$ 的模预同态 $t : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ 是一个预同态，满足对于每个 $k \ge 0$、每个元组 X以及 $\alpha \in \mathbb{R}$，都有

$$t_{k|1}((\mathcal{A}(\vec{X}) \otimes \mathcal{M}(X_k))^\alpha) \subset \mathcal{N}^{\alpha+s}(X_0).$$

过滤的 A_∞-模及其预同态构成一个过滤的 dg-范畴 $F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$，其中 $\mathrm{hom}^s_{F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 由所有平移 $\le s$ 的预同态 t：$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ 组成。注意

其中 $F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$ 带有一个自然的移位函子 Σ。 Σ。它在对象 $\mathcal{M} \in \mathrm{Obj}(F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}})$ 上的作用如下：

$$(\Sigma^r \mathcal{M})^{\alpha}(X) := \mathcal{M}^{\alpha - r}(X),\ \forall r \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}).$$

除非另有说明，本文中的所有模均假设为严格含幺。我们还假设所有过滤模都以显然的方式与移位函子相容，即对所有对象 $X \in \mathrm{Obj}(\dashv)$ 及所有 $r \in \mathbb{R}$， $\mathcal{M}(\Sigma^r X) = (\Sigma^r \mathcal{M})(X)$。

右 $\mathcal{A}$-模的定义与左模完全类似。为区分二者，在可能引起混淆时，我们将过滤左$\mathcal{A}$-模的范畴记为 $F\mathrm{mod}^{l}_{\mathcal{A}}$，将右模的范畴记为 $F\mathrm{mod}^{r}_{\mathcal{A}}$。

给定两个过滤 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$，我们也有过滤的 $(\mathcal{A}$， $\mathcal{B})$ 模。它们的定义方式与上文类似。本文还假设过滤双模严格含幺，并与移位函子相容。它们构成一个过滤 dg-范畴，记作 $F\mathrm{bimod}_{\mathcal{A},\ \mathcal{B}}$。

A.3. **滤过 Yoneda 嵌入**。

A.3.1. 定义。 设 $\mathcal{A}$ 是一个带有结构映射 A_∞-范畴，其结构映射为 $(\mu_d)_{d\geq 1}$。回顾一下，我们始终假设 A_∞-范畴是严格含幺的。我们将 Yoneda 嵌入（见 [39, 第 (1l) 节]）升级为滤过版本，也就是说，我们定义一个滤过 A_∞-函子

$$\mathcal{Y}\colon \mathcal{A} \to F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}.$$

我们将使用左 A_∞-模，但对右 A∞-模也可以类似地进行构造。为避免混淆，我们将左 Yoneda 嵌入记作 $\mathcal{Y}^l\colon\ \mathcal{A} \to F\mathrm{mod}^{l}_{\mathcal{A}}$，并将 $\mathcal{Y}^r\colon\ \mathcal{A} \to F\mathrm{mod}^{r}_{\mathcal{A}}$。有时我们需要在记号中明确指定 A_∞-范畴，此时将 Yoneda 嵌入记作 $\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}$。

设 L 是 $\mathcal{A}$中的一个对象。我们通过以下方式定义 $\mathcal{Y}(L)$:

$$\mathcal{Y}(L)(L') := \mathcal{A}(L', L)$$

对任意对象 L'（属于 $\mathcal{A}$），并赋予它由 $\mu^{\mathcal{Y}(L)}_{l|1} := \mu_{l+1}$（对 $l \geq 0$）给出的 A_∞-结构。显然， $\mathcal{Y}(L)$ 确实定义了一个滤过 A_∞-模。

现在我们定义函子 $\mathcal{Y}$ 的高阶运算。为简化记号，在本小节余下部分中，我们通常用 $\mathcal{Y}_L$ 代替 $\mathcal{Y}(L)$。考虑 $\mathcal{A}$ 中的两个对象 L_0 和 L_1，以及一个元素 $c \in \mathcal{A}^{\leq \alpha}(L_0, L_1)$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$。我们将其像 $\mathcal{Y}_1(c) \in F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}_{L_0}, \mathcal{Y}_{L_1})$ 定义为一个模的预态射，其分支为 $\mathcal{Y}_1(c)_{l|1}\colon\ \mathcal{A}(\vec{X}) \otimes \mathcal{Y}_{L_0}(X_l) \to \mathcal{Y}_{L_1}(X_0)$，定义如下：

$$\mathcal{Y}_1(c)_{l|1}(x_1, \ldots, x_l, y) := \mu_{l+1}(x_1, \ldots, x_l, y, c).$$

我们以类似的方式，利用收缩映射定义 Yoneda 嵌入的高阶分量 $\mathcal{Y}_d$ 。也就是说，给定一个元组 $\vec{L} = (L_0$、.....、 $L_d)$ 和一个元素 $\vec{c} \in \mathcal{A}(\vec{L})$，我们通过以下方式定义模的预态射 $\mathcal{Y}_d(\vec{c}) \in F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}_{L_0},\ \mathcal{Y}_{L_d})$

$$\mathcal{Y}_d(\vec{c})_{l|1}(x_1, \ldots, x_l, y) := \mu_{l+d+1}(x_1, \ldots, x_l, y, \vec{c}).$$

注意， $\mathcal{Y}$ 是一个过滤的 A_∞-函子，因为映射 μ_d、 $d \geq 1$ 按假设是过滤的。

A.3.2. 这个 λ-映射。设 L 是 $\mathcal{A}$ 的一个对象，且 $\mathcal{M}$ 是一个过滤 A_∞-模。我们有如下映射，通常简称为 λ-映射：

$$\lambda \colon \mathcal{M}(L) \to F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}(L), \mathcal{M})$$

对 $c \in \mathcal{M}(L)$ 定义如下

$$\lambda(c)_{l|1}(x_1, \ldots, x_l, y) := \mu^{\mathcal{M}}_{l+1|1}(x_1, \ldots, x_l, y, c).$$

显然 λ 是良定义的（即其值属于过滤模的范畴），这是因为 $\mathcal{A}$ 是一个过滤 A_∞-范畴。与 [39, 引理 2.12] 和 [11, 命题 2.5.1]类似，我们有以下结果。通常利用谱序列证明该结果，但 $\mathcal{A}$ 的严格含幺性使我们能够给出更直接的证明，现陈述如下。

命题 A.3.1.映射 λ 是一个过滤拟同构，其滤过拟逆由滤过链同伦给出。特别地，它在持久同调中诱导出一个同构。

证明。 λ 是过滤的，这一点显然，因为 $\mathcal{A}$ 是过滤的。我们将通过显式构造一个拟逆及链同伦来证明该命题的其余部分。首先，我们定义一个候选拟逆

$$\theta \colon F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}(L), \mathcal{M}) \to \mathcal{M}(L)$$

如下：给定一个预模态射 $\varphi \in F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}(L)\ \mathcal{M})$，我们定义

$$\theta(\varphi) := \varphi_{0|1}(e_L)$$

这里回顾一下， $e_L \in \mathcal{A}(L,\ L)$表示 L的（给定的）严格单位元。显然，θ 是一个链映射。容易看出，给定 $c \in \mathcal{M}(L)$， $\theta(\lambda(c)) = c$，这正是因为 e_L 是一个严格单位元，因此在这个方向上不需要链同伦。此外，根据我们对过滤 A_∞-范畴的定义，由于 $e_L \in \mathcal{A}^{\leq 0}(L,\ L)$，我们得到 θ 是一个过滤链映射，也就是说，对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，它将平移为 α 的预态射映射到 $\mathcal{M}^{\leq \alpha}(L)$。

We n现在为另一个复合定义一个候选链同伦：我们定义 e

$$H \colon F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}(L), \mathcal{M}) \to F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}(L), \mathcal{M})$$

通过将 $\varphi \in F$ 发送到 将 $\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}(L)\ \mathcal{M})$ 映射到模的预态射 $H(\varphi)$，其分支为

$$H(\varphi)_{l|1}(x_1, \ldots, x_l, y) := \varphi_{l+1|1}(x_1, \ldots, x_l, y, e_L)$$

对于任意 $l \geq 0$。同样，由于严格单位元位于消失过滤层级，映射 H 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都保持 $F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}(L)\ \mathcal{M})^{\leq \alpha}$。我们证明

$$\lambda \circ \theta + id_{F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}(L),\mathcal{M})} = \mu_1^{\mathrm{mod}} \circ H + H \circ \mu_1^{\mathrm{mod}},$$

也就是说， θ 是 λ 的右拟逆，借助链同伦 H。令 $\varphi \in F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}(L)\ \mathcal{M})$和 $l \geq 0$，我们计算得：

（1）首先，项

$$\begin{aligned}\mu_1^{\mathrm{mod}}(H(\varphi))_{l|1}(x_1,\dots,x_l,y) = &\sum_{i=0}^{l}\mu^{\mathcal{M}}_{i|1}(x_1,\dots,x_i,\varphi_{l-i+1|1}(x_{i+1},\dots,x_l,y,e_L))\\ &+\sum_{i=0}^{l}\varphi_{i+1|1}(x_1,\dots,x_i,\mu_{l-i+1}(x_{i+1},\dots,x_l,y),e_L)\\ &+\sum_{j=0}^{l-1}\sum_{i=1}^{l-j}\varphi_{l-i+2|1}(x_1,\dots,x_j,\mu_i(x_{j+1},\dots,x_{j+i}),x_{j+i+1},\dots,x_l,y,e_L)\end{aligned}$$

（2）则该项

$$\begin{aligned}H(\mu_1^{\mathrm{mod}}\varphi)_{l|1}(x_1,\dots,x_l,y) = &\ \mu_1^{\mathrm{mod}}\varphi_{l+1|1}(x_1,\dots,x_l,y,e_L)\\ =&\sum_{i=0}^{l}\mu^{\mathcal{M}}_{i|1}(x_1,\dots,x_i,\varphi_{l-i+1|1}(x_{i+1},\dots,x_l,y,e_L)+\mu^{\mathcal{M}}_{l+1|1}(x_1,\dots,x_l,y,\varphi_1(e_L))\\ &+\sum_{i=0}^{l}\varphi_{i|1}(x_1,\dots,x_i,\mu_{l-i+2}(x_{i+1},\dots,x_l,y,e_L))\\ &+\sum_{j=0}^{l-1}\sum_{i=1}^{l-j}\varphi_{l-i+2|1}(x_1,\dots,x_j,\mu(x_{j+1},\dots,x_{j+i}),x_{j+i+1},\dots,x_l,y,e_L)\\ &+\sum_{j=0}^{l}\varphi_{j+1|1}(x_1,\dots,x_j,\mu_{l-j+1}(x_{j+1},\dots,x_l,y),e_L)\end{aligned}$$

并注意，最后一个等号之后的第二个大求和等于 $\varphi_{l|1}(x_1,\ \dots\dots,\ x_l,\ y)$，因为 e_L 是严格单位元。

（3）最后，我们计算

$$(\lambda\circ\theta+id)(\varphi)_{l|1}(x_1,\dots,x_l,y)=\mu^{\mathcal{M}}_{l+1|1}(x_1,\dots,x_l,y,\varphi_1(e_L))+\varphi_{l|1}(x_1,\dots,x_l,y). \tag{103}$$

我们看到，将上述所有贡献相加，便在 $l|1$ 层得到预期的等式。这证明了该命题。□

下面的结果是上述内容的一个直接推论。我们将 $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$ =image($\mathcal{Y}$) 记为由 Yoneda 模构成的 $F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$ 子范畴。

推论 A.3.2. 诱导的持久函子 $H(\mathcal{Y})\colon\ H(\mathcal{A})\ \to H(\text{像}(\mathcal{Y}))$ 是持久性范畴之间的等价。

A.4. **持久性 Hochschild 同调**。设 $\mathcal{A}$ 是一个 A_∞-范畴，$\mathcal{M}$ 是一个 ($\mathcal{A}$，$\mathcal{A}$)-双模。记 CC ($\mathcal{A}$，$\mathcal{M}$) 为 $\mathcal{A}$ 的 Hochschild 链复形，其系数取自 $\mathcal{M}$（又称循环Bar复形）。回顾一下，这个链复形可分解为直和

$CC(\mathcal{A},\ \mathcal{M}) = \oplus_{d\geq 0} CC(\mathcal{A},\ \mathcal{M};\ d)$，其中

$$CC(\mathcal{A},\mathcal{M};d) = \bigoplus_{\vec{X}} \mathcal{M}(X_d, X_0) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{A}(\vec{X}),$$

其中，直和遍历 $\mathcal{A}$ 中所有由对象构成的元组 $\vec{X} = (X_0, \ldots, X_d)$。对于 $d = 0$，我们令 $\mathcal{A}(\vec{X}) = \mathbf{k}$，使得 $CC(\mathcal{A},\mathcal{M};0) := \bigoplus_{X\in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})} \mathcal{M}(X,X)$。我们在 $CC(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 上赋予霍赫希尔德微分 d_{CC}（例如参见 [24, 44, 37]）。其同调记作 $HH(\mathcal{A},\mathcal{M})$，称为 $\mathcal{A}$ 的霍赫希尔德同调，系数取自 $\mathcal{M}$。

若 $\mathcal{M} = \Delta_{\mathcal{A}}$ 是对角（$\mathcal{A}$，$\mathcal{A}$）-双模，我们将系数取自 $\Delta_{\mathcal{A}}$ 的霍赫希尔德链复形和同调分别记作 $CC(\mathcal{A},\ \mathcal{A})$ 和 $HH(\mathcal{A},\ \mathcal{A})$。有时我们还将它们简写为 $CC(\mathcal{A})$ 和 $HH(\mathcal{A})$。

现在假设 $\mathcal{A}$ 是一个过滤的 A_∞-范畴，而 $\mathcal{M}$ 是一个过滤的（$\mathcal{A}$，$\mathcal{A}$）-双模。对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$、$d \geq 0$ 和 $\vec{X} = (X_0, \ldots\ldots, X_d)$，记

$$(\mathcal{M}(X_d, X_0) \otimes \mathcal{A}(\vec{X}))^{\alpha} \subset \mathcal{M}(X_d, X_0) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{A}(\vec{X})$$

为由所有子模的像生成的 $\mathbf{k}_0$-子模

$$\mathcal{M}^{\alpha'}(X_d, X_0) \otimes_{\mathbf{k}_0} \mathcal{A}^{\alpha''_1}(X_0, X_1) \otimes_{\mathbf{k}_0} \cdots \otimes_{\mathbf{k}_0} \mathcal{A}^{\alpha''_d}(X_{d-1}, X_d),\ \text{with } \alpha' + \alpha''_1 + \cdots + \alpha''_d \leq \alpha,$$

在显然的映射下

$$\mathcal{M}(X_d, X_0) \otimes_{\mathbf{k}_0} \mathcal{A}(X_0, X_1) \otimes_{\mathbf{k}_0} \cdots \otimes_{\mathbf{k}_0} \mathcal{A}(X_{d-1}, X_d) \longrightarrow \mathcal{M}(X_d, X_0) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{A}(\vec{X}).$$

记

$$CC^{\alpha}(\mathcal{A},\mathcal{M};d) := \bigoplus_{\vec{X}} (\mathcal{M}(X_d, X_0) \otimes \mathcal{A}(\vec{X}))^{\alpha}$$

它是 CC（$\mathcal{A}$，$\mathcal{M}$；d）的一个 $\mathbf{k}_0$-子模。最后，记

$$CC^{\alpha}(\mathcal{A},\mathcal{M}) := \bigoplus_{d\geq 0} CC^{\alpha}(\mathcal{A},\mathcal{M};d).$$

这为 CC（$\mathcal{A}$，$\mathcal{M}$）给出了由 $\mathbf{k}_0$-子模 CC^{α}（$\mathcal{A}$，$\mathcal{M}$）$\subset CC$（$\mathcal{A}$，$\mathcal{M}$），$\alpha \in \mathbb{R}$构成的递增过滤。由于 $\mathcal{A}$、$\mathcal{M}$ 是过滤的，霍赫希尔德微分保持此滤过，即

$$d_{CC}(CC^{\alpha}(\mathcal{A},\mathcal{M})) \subset CC^{\alpha}(\mathcal{A},\mathcal{M})$$

因此，$(CC(\mathcal{A},\mathcal{M})\ d_{CC})$ 成为一个过滤链复形。我们用 $PHH(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 表示它的持久同调。

霍赫希尔德复形 $CC(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 也带有一种离散过滤，传统上称为长度 滤过，$(F^N CC(\mathcal{A},\mathcal{M}))_{N\geq 0}$其对 $N \geq 0$ 的定义如下：

$$F^N CC(\mathcal{A},\mathcal{M}) := \bigoplus_{d\leq N} CC(\mathcal{A},\mathcal{M};d).$$

容易看出，d_{CC} 也保持此滤过，因此会在每个 $F^N CC(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 上诱导一个微分。我们将由此得到的同调记作 $F^H H(\mathcal{A},\mathcal{M})$。显然，上文定义的实数滤过与长度过滤相容。因此，我们得到一个由持久模组成的序列$F^N PHH(\mathcal{A},\mathcal{M})$，$N \geq 0$。

注意，若 $\mathcal{A}$ 是过滤的，则对角双模 $\Delta_{\mathcal{A}}$ 也是过滤的；我们分别将相应的过滤链复形及其持久同调记作 $CC(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 和$PHH(\mathcal{A},\mathcal{A})$。

我们在 §4 中简要介绍几何应用中所用的霍赫希尔德同调分次形式。设 (X,ω) 是一个实维数为 $2n$ 的单调辛流形，$\mathcal{A}$ 是由 (X,ω) 中的拉格朗日子流形构造的 Fukaya范畴。Floer 复形定义在诺维科夫域 $\mathbf{k}=\Lambda$ 上，且为 $\mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ 分次，其中 Novikov变量的次数为 0。特别地，以下内容均需按模 2 理解。$\mathcal{A}$ 的 d 阶 A_∞-映射 μ_d 的上同调次数为 $2-d$，因此其同调次数为 $(d-2)+(d-1)n$。这给出了 $\mathcal{A}$ 的霍赫希尔德复形 $CC_*(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 上如下的分次：给定 $\vec{x}:=x_1\otimes\cdots\otimes x_k\in\mathcal{A}(X_0,\dots,X_k,X_0)$，令

$$\deg(\vec{x}):=\sum_{i=1}^{k}\deg(x_i)+k-1-n.$$

很容易看出，d_{CC} 的次数为 -1。

A.5. 移位范畴。 设 $\mathcal{A}$ 是一个带有移位函子 Σ的过滤 A_∞-范畴，并设$r\geq 0$。定义 $\mathcal{A}$ 的归一化 r-平移 $S^r\mathcal{A}$ 为一个过滤 A_∞-范畴，它与 $\mathcal{A}$ 具有相同的对象，且两个对象 L 和 L'之间的态射空间为$(S^r\mathcal{A})(L,\ L')$：

$$(S^r\mathcal{A})^\alpha(L,L'):=\begin{cases}\mathcal{A}^\alpha(L,L'),\ \text{if } L=\Sigma^l L' \text{ for some } l\in\mathbb{R},\\ \mathcal{A}^{\alpha-r}(L,L'),\ \text{otherwise.}\end{cases}$$

$\mathcal{A}$ 上的 A_∞-运算 $\mu_d^{\mathcal{A}}$自然诱导出 $S^r\mathcal{A}$上的映射 $\mu_d^{S^r\mathcal{A}}$。平移与平移函子 Σ 和 T 以显然的方式延拓到 $S^r\mathcal{A}$。

存在一个显然的过滤 A_∞-函子 $\eta_r^{\mathcal{A}}\colon S^r\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$，它在对象上是恒等映射，由态射上的恒等映射诱导而来，并且具有平凡的高阶运算。

A.6. 具有线性偏差的函子。 为便于阅读，我们在此重述A_∞-函子的定义，这类函子具有线性偏差（简称 LD 函子）。

设 $\mathcal{A}$ 是一个过滤的 A_∞-范畴。给定来自 $\mathcal{A}$ 的对象元组 $\vec{X}=(X_0,\ \dots\dots,\ X_d)$，我们通过从 $\vec{X}$ 中省略后续（按循环次序）那些与先前对象相差一个平移的对象，定义其约化元组 $\vec{X}_R:=(X_{i_0},\ \dots\dots,\ X_{i_{d_R}})$。构成 $\vec{X}_R$ 的对象仅在平移意义下定义良好，但 $\vec{X}_R$ 的长度（或者说，其长度减 1） $0\leq d_R\leq d$ 是定义良好的。我们称之为 $\vec{X}$ 的约化长度，并记作 d_R 或 $d_R(\vec{X})$，以便强调它对 $\vec{X}$ 的依赖性。注意，若 $\vec{X}$ 中任意两个相邻对象（在平移意义下）都不同，则 $d_R(\vec{X})=d$。另一极端情况是，若 $\vec{X}$ 中所有对象在平移意义下都相同，则 $d_R(\vec{X})=0$。

设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是两个过滤的 A_∞-范畴。设 $s\geq 0$。若一个 A_∞-函子 $\mathcal{F}\colon\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ 满足以下条件，则称其线性偏差率为 s：对于每个 $d\geq 1$、Obj($\mathcal{A}$) 中的每个对象元组 $\vec{X}=(X_0、\ \dots\dots、\ X_d)$ 以及每个 $\alpha\in\mathbb{R}$，我们有：

$$\mathcal{F}_d\big(\mathcal{A}^\alpha(X_0,\dots,X_d)\big)\subset\mathcal{B}^{\alpha+d_R(\vec{X})s}(\mathcal{F}X_0,\mathcal{F}X_d).$$

我们将这样的函子称为 LD-函子（LD 代表线性偏差）。

设 $\mathcal{F},\mathcal{G}\colon\ \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ 是两个 LD-函子，二者的偏差率均为 $\leq s$。若预自然变换 $T:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ 具有线性偏差率 s 和平移 $\leq r$，则称之为.....，如果对每个$d\geq 0$，其 d 阶分量 T_d 将滤过层级平移 $\leq r+ds$。

具有给定偏差率 $s\geq 0$ 的 LD-函子 $\mathcal{F}:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ 及其预自然变换构成一个过滤的 A_∞-范畴 $\mathrm{fun}^{\mathrm{LD};s}(\mathcal{A},\mathcal{B})$。为强调给定的偏差率，我们有时将该范畴的对象记为 $(\mathcal{F},s)$。注意，对每个 $s'\leq s''$，我们都有一个显然的（忠实但非满）过滤A_∞-范畴嵌入 $\mathrm{fun}^{\mathrm{LD};s'}(\mathcal{A},\mathcal{B})\subset\mathrm{fun}^{\mathrm{LD};s''}(\mathcal{A},\mathcal{B})$。

A.6.1. LD-函子之间的同伦。我们还有 LD-函子之间同伦的概念，这是对 [39, 第 (1h) 节] 中概念在过滤且具有 LD 结构情形下的改编。设 $\mathcal{F},\mathcal{G}\colon\ \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ 是两个偏差为 $\leq s$ 的 LD-函子，并假设这两个函子对对象的作用相同。考虑由 $D_0:=0$ 和 $D_d:=\mathcal{F}_d-\mathcal{G}_d$ 定义的、介于 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 之间的预自然变换 $D=\{D_d\}_{d\geq 0}$。若存在预自然变换$T\in hom^r\mathrm{fun}^{\mathrm{LD};s}(\mathcal{A},\mathcal{B})\big((\mathcal{F},s),(\mathcal{G},s)\big)$，其 0 项为零 $T^0=0$，且偏差率为 $\leq s$、平移为 $\leq r$，使得 $D=\mu_1(T)$，则称 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是偏差为 $\leq s$ 的 LD-函子之间的 r-同伦。

请回忆，过滤函子是 LD-函子的一个特例，而它们之间的同伦（如上文所定义；即偏差为 $s=0$）也很有意义。本文既需要过滤函子之间的同伦，也需要 LD-函子之间的同伦。

接下来，我们简要讨论函子同伦与持久性 Hochschild 同调之间的关系。回忆 §A.4，若 $\mathcal{A}$ 是一个过滤 A_∞-范畴，则其 Hochschild 链复形 $CC(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 继承了来自 $\mathcal{A}$ 的滤过，因此后者的同调成为一个持久模，我们称之为 $\mathcal{A}$的持久性 Hochschild 同调 $PHH(\mathcal{A},\mathcal{A})$。注意，其 ∞-极限 $PHH^\infty(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 与通常的 Hochschild 同调$HH(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 一致。

命题 A.6.1. 设 $\mathcal{F},\mathcal{G}\colon\ \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$是两个过滤函子。若 $\mathcal{F},\mathcal{G}$是 0-同伦的，则由 $\mathcal{F},\mathcal{G}$在滤过 *Hochschild* 链复形 $\mathcal{F}_{CC},\mathcal{G}_{CC}\colon\ CC(\mathcal{A},\mathcal{A})\longrightarrow CC(\mathcal{B},\mathcal{B})$ 上诱导的链映射是 0-链同伦的。特别地，在持久性 *Hochschild* 同调 $\mathcal{F}_{PHH},\mathcal{G}_{PHH}\colon\ PHH(\mathcal{A},\mathcal{A})\longrightarrow PHH(\mathcal{B},\mathcal{B})$ 上诱导的映射作为持久模的映射彼此相同。

A.6.2. 从 *LD*-函子到滤过函子。设 $\mathcal{F}\colon\ \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ 是一个 LD A_∞-函子，其偏差率为 $\leq r$。利用 §A.5，定义一个新的 A_∞-函子

$$\eta^r\mathcal{F}:S^r\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B},\quad \eta^r\mathcal{F}:=\mathcal{F}\circ\eta_r^{\mathcal{A}},$$

我们称之为 $\mathcal{F}$ 的归一化 r-平移。显然，$\eta^r\mathcal{F}$ 是一个过滤A_∞-函子。

A.7. **与函子相关的过滤双模**。给定一个过滤 A_∞-函子 $\mathcal{F}:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$，定义 $(\mathcal{B},\mathcal{A})$-双模

$$\underline{\mathcal{F}} := (\mathrm{id}_{\mathcal{B}}\otimes\mathcal{F})^*\Delta_{\mathcal{B}},$$

其中，$\Delta_{\mathcal{B}}$ 表示 $\mathcal{B}$的对角双模。换言之，给定 $Y\in\mathrm{Obj}(\mathcal{B})$、$X\in\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$，我们有

$$\underline{\mathcal{F}}(Y,X) := \mathcal{B}(Y,\mathcal{F}(X)).$$

在双模可复合元素上，$\mathcal{F}$ 的结构映射 $\mu^{\mathcal{F}}_{l|1|r}$（其中 $l,r\geq 0$）由下式给出

$$\mu^{\underline{\mathcal{F}}}_{l|1|r}(b_1,\dots,b_l,y,a_1,\dots,a_r) :=$$
$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{\substack{s_1+\cdots+s_j=r\\ 1\leq s_i}}\mu^{\mathcal{B}}_{l+j+1}(b_1,\dots,b_l,y,\mathcal{F}_{s_1}(a_1,\dots,a_{s_1}),\dots,\mathcal{F}_{s_j}(a_{r-s_j},\dots,a_r)).$$

注意，由于 $\mathcal{F}$ 是过滤的，双模 $\mathcal{F}$ 也是过滤的。

赋值 $\mathcal{F}\longmapsto\underline{\mathcal{F}}$可扩展为一个过滤的 A_∞-函子 $\mathcal{U}\colon F\mathrm{fun}(\mathcal{A},\mathcal{B})\longrightarrow F\mathrm{bimod}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$。其一阶项 $\mathcal{U}_1$ 具有如下描述。设 $\mathcal{F},\mathcal{G}$；$\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$是两个过滤的 A_∞-函子，并且 $T\colon\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ 是它们之间的一个预自然变换，具有某个给定的平移 α（即 $T\in\hom^{\alpha}_{F\mathrm{fun}(\mathcal{A},\mathcal{B})}(\mathcal{F},\mathcal{G})$）。定义（$\mathcal{B},\mathcal{A}$）-双模预同态

$$\mathcal{U}_1(T)\colon\underline{\mathcal{F}}\longrightarrow\underline{\mathcal{G}},$$
$$\mathcal{U}_1(T)_{l|1|r}(b_1,\dots,b_l,y,a_1,\dots,a_r) :=$$
$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{j}\sum_{\substack{s_1+\cdots+s_j=r\\ 1\leq s_k,\,\forall k\neq i}}\mu^{\mathcal{B}}_{l+1+j}\big(b_1,\dots,b_l,y,(\mathcal{F}_{s_1},\dots,\mathcal{F}_{s_{i-1}},T_{s_i},\mathcal{G}_{s_{i+1}},\dots,\mathcal{G}_{s_j})(a_1,\dots,a_r)\big).$$

容易验证，$\mathcal{U}_1(T)$是具有相同平移 α的双模预同态。给定从 $\mathcal{A}$到 $\mathcal{B}$的 A_∞-函子之间可复合的自然变换 $T_1,\dots,T_d$，$(\mathcal{B},\mathcal{A})$-双模 $\mathcal{U}_d(T_1,\dots,T_d)$的预同态由类似的公式定义。

引理 A.7.1 ([30]中的定理 8.2.1.2)。 函子 $\mathcal{U}$ 的分支 $\mathcal{U}_1$ 诱导一个拟同构。

A.8. **过滤-模的拉回与推前**。令 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 为过滤 A_∞-范畴，$\mathcal{F}\colon\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ 为过滤 A_∞-函子。令 $\mathcal{M}$ 为过滤 $\mathcal{B}$-模。那么，拉回 $\mathcal{F}^*\mathcal{M}$ 可以用直接明了的方式赋予过滤 $\mathcal{A}$-模结构。然而，如果我们不再假设 $\mathcal{F}$ 是过滤的，而只假设它是一个 LD-函子，那么拉回 $\mathcal{F}^*\mathcal{M}$ 一般并非过滤的，而是一个 LD-模（本文不会用到这一概念）。

与此同时，可以通过 LD-函子定义过滤模的推前，并且仍然得到过滤模。下面介绍这一构造。

设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是过滤的 A_∞-范畴，且 $\mathcal{F}\colon \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ 是一个偏差率为 $\leq r$ 的 LD-函子。设 $\mathcal{M}$ 是一个过滤的 $\mathcal{A}$-模。$\mathcal{M}$ 沿 $\mathcal{F}$ 的推前 $(\mathcal{F},r)_*\mathcal{M}$ 定义为如下过滤的 $\mathcal{B}$-模：

$$(\mathcal{F},r)_*\mathcal{M}:=\underline{\eta^r\mathcal{F}}\otimes_{S^r\mathcal{A}}(\eta_r^{\mathcal{A}})^*\mathcal{M}. \tag{104}$$

注意，参数 r 的取值会影响推前模上的滤过结构，因此我们将其纳入记号。换言之，如果 $r<r'$，那么 $(\mathcal{F},r')_*\mathcal{M}$ 的滤过结构与 $(\mathcal{F},r)_*\mathcal{M}$ 不同。当然，如果忘掉滤过，那么 $\mathcal{M}$ 的推前只取决于 $\mathcal{F}$，并且对所有 r's 都给出相同的结果。

给定过滤 $\mathcal{A}$-模之间的预同态 $f\colon\mathcal{M}_0\longrightarrow\mathcal{M}_1$，定义其推前 $(\mathcal{F},r)_*f\colon(\mathcal{F},r)_*\mathcal{M}_0\longrightarrow(\mathcal{F},r)_*\mathcal{M}_1$ 如下。高阶项 $((\mathcal{F},r)_*f)_{l|1},l\geq 1$ 定义为 0，而线性阶项为：

$$((\mathcal{F},r)_*f)_{0|1}(b\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_d\otimes m)=\sum_{i=1}^{d}b\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_i\otimes f_{d-i|1}(a_{i+1},\ldots,a_d,m).$$

上述构造可扩展为一个过滤的 A_∞-函子

$$PF:\mathrm{fun}^{\mathrm{LD};r}(\mathcal{A},\mathcal{B})\longrightarrow F\mathrm{fun}(F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}},F\mathrm{mod}_{\mathcal{B}}),$$

其在对象 $(\mathcal{F},r)$ 上的作用是过滤函子 $(\mathcal{F},r)_*\colon F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}\longrightarrow F\mathrm{mod}_{\mathcal{B}}$。为定义 PF 在态射上的作用，设 $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathrm{Obj}(\mathrm{fun}^{\mathrm{LD};r}(\mathcal{A},\mathcal{B}))$，并设 $T\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 是一个平移为 $\rho\geq 0$ 的预自然变换（属于偏差率为 $\leq r$ 的 LD-函子范畴 $\mathrm{fun}^{\mathrm{LD};r}(\mathcal{A},\mathcal{B})$）。在推前函子 PF 下，T 的像 $PF_1(T)$ 对对象 $\mathcal{M}\in\mathrm{Obj}(F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}})$ 定义为预模同态 $PF_1(T)\in\hom_{F\mathrm{mod}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{F}_*\mathcal{M},\mathcal{G}_*\mathcal{M})$，其定义如下：

$$PF(T)_{l|1}(b_1,\ldots,b_l,y\otimes\vec{a}\otimes m):=\sum_{j=0}^{d}\mathcal{U}_1(T)_{l|1|j}(b_1,\ldots,b_l,y,a_1,\ldots,b_j)\otimes a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_d\otimes m$$

$$=\sum_{j=0}^{d}\sum_{l=1}^{j}\sum_{i=1}^{l}\sum_{\substack{s_1+\cdots+s_l=j\\1\leq s_k,\forall k\neq i}}\mu^{\mathcal{B}}_{l+1+j}\big(b_1,\ldots,b_l,y,(\mathcal{F}_{s_1},\ldots,\mathcal{F}_{s_{i-1}},T_{s_i},\mathcal{G}_{s_{i+1}},\ldots,\mathcal{G}_{s_l})(a_1,\ldots,a_j)\big)$$

$$\otimes a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_d\otimes m.$$

在 PF_d 下，可合成元组 T_1，……，T_d 中的 A_∞-预自然变换的像以非常相似的方式定义。容易验证，PF 是一个过滤的（严格含幺）A_∞-函子。

下一个命题表明，忽略平移后，对象的 Yoneda 模的推前与该对象在给定函子下的像的 Yoneda 模相同。这里我们用 $\mathcal{Y}$ 表示滤过 Yoneda 嵌入，分别对应 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$。

命题 A.8.1. 设 $\mathcal{F}\colon\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ 是偏差率为 $\leq r$的 *LD*-函子。对于每个$X\in Obj(\mathcal{A})$，*Yoneda* 模 $\mathcal{Y}(X)$ 的推前 $(\mathcal{F},r)_*\mathcal{Y}(X)$ 与 $\Sigma^r\mathcal{Y}(\mathcal{F}X)$是 0-准同构的。

为简化记号，当函子的偏差率可由上下文明确得知时，我们有时会省略有序对 $(\mathcal{F}, r)$ 中的 r，而只写作 $\mathcal{F}_*\mathcal{M}$。

A.9. **滤过扭曲复形**。本节介绍滤过扭曲复形。此处发展的构造是将 [39, Chapter 3] 从未滤过情形升级到过滤情形，以及将 [13, Section 2.5.1] 从 dg 到 A_∞ 情形。

A.9.1. 滤过 A_∞-范畴的滤过扭曲复形。 设 $\mathcal{A}$ 是一个滤过 A_∞-范畴，且不指定移位函子。对于在 $\mathbf{k}_0$上的区间持久模 $\mathbf{k}_0^r[d]$，我们记其在次数 $d \in \mathbb{Z}$ 上有唯一生成元，该生成元位于滤过层级 $r \in \mathbb{R}$，并给定一个对象L of $\mathcal{A}$，记 $\Sigma^r L[d]$ 为形式张量积 $\mathbf{k}_0^r[d] \otimes L$。

定义 A.9.1。我们将 $\mathcal{A}$ 的（标准）平移完备化定义为范畴 $\mathcal{A}^\Sigma$，其对象为

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\Sigma) := \{\Sigma^r L[d] \ : \ L \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}),\ d \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{R}\},$$

态射空间

$$\mathcal{A}^\Sigma(\Sigma^r L_0[d_0], \Sigma^s L_1[d_1]) := \Sigma^{-(r-s)}\mathcal{A}(L_0, L_1)[d_1 - d_0]$$

也就是说，$\mathcal{A}(\Sigma^r L_0[d_0],\ \Sigma^s L_1[d_1])$ 是链复形 $\mathcal{A}(L_0,\ L_1)$，其次数上移 $d_1 - d_0$，滤过上移 $r - s$，并且具有相同的 A_∞-运算 $\mathcal{A}$。

备注 A.9.2。(1) 容易看出，$\mathcal{A}^\Sigma$ 是一个过滤的 A_∞-范畴 .

(2) 在 A_∞-范畴 $\mathcal{A}^\Sigma$ 上，有一个直接可选的平移 A_∞-函子（按 [13, 第 3.2.1] 节的含义），其在对象上的作用为 $\Sigma^r(L) := \Sigma^r L$。(3) 在一些文献中，前缀 Σ 表示一个 A_∞-范畴的加性扩张（例如 [39,第 (3k)] 节），但这里并非如此。

定义 A.9.3。我们将 $\mathcal{A}$ 的过滤加性扩张 $\mathcal{A}^\oplus$ 定义为 $\mathcal{A}^\Sigma$ 按照 [39, 第 (3k)], 节含义的加性扩张；也就是说，它是一个 A_∞-范畴，其对象由形式和给出

$$\overline{L} = \bigoplus_{i=1}^{n} \Sigma^{r_i} L_i[d_i],$$

其中，对任意 i，$n \in \mathbb{N}$和 $\Sigma^{r_i} L_i[d_i]$是 $\mathcal{A}^\Sigma$ 的对象；而对象$L = \bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{r_i} L_i[d_i]$ 和 $\overline{L'} = \bigoplus_{i=1}^m \Sigma^{r'_i} L'_i[d'_i]$ 之间的态射空间由 $n \times m$ 矩阵给出

$$f = (f_{ij}),\ \text{where } f_{ij} \in \mathcal{A}^\Sigma\left(\Sigma^{r_i} L_i[d_i], \Sigma^{r'_j} L'_j[d'_j]\right)$$

具有通常的矩阵分次。给定一个对象 $L = \bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{r_i} L_i[d_i]$，我们记 $|L| = n$，并称其为 L 的长度。A_∞-映射 $\mu_d^\oplus$、$d \geq 1$ 通过将 μ_d 按矩阵方式扩展来定义，也就是说，给定 $L_0,\ \ldots,\ L_d$ 个 $\mathcal{A}^\oplus$ 中的对象以及矩阵 $f^1,\ \ldots,\ f^d$，其中 $f^i \in \mathcal{A}^\oplus(L_{i-1},\ L_i)$，我们对$i = 1,\ \ldots,\ |L_0|$ 和 $j = 1,\ \ldots,\ |L_d|$ 定义：

$$\mu_d^\oplus\left(f^1, \ldots, f^d\right)_{ij} := \sum_{i_1=1}^{|\overline{L}_1|} \cdots \sum_{i_{d-1}=1}^{|\overline{L}_{d-1}|} \mu_d\left(f^1_{ii_1}, \ldots, f^d_{i_{d-1}j}\right).$$

此外，我们在 $\mathcal{A}^{\oplus}$ 中对态射空间进行滤过，方法是将一个矩阵的滤过层级设为其各个条目的滤过层级的极大值，也就是说：

$$(\mathcal{A}^{\oplus})^{\leq\alpha}(\overline{L},\overline{L}') := \left\{ f=(f_{ij})\in\mathcal{A}^{\oplus}(\overline{L},\overline{L}') :\ f_{ij}\in(\mathcal{A}^{\Sigma})^{\leq\alpha}\left(\Sigma^{r_i}L_i[d_i],\Sigma^{r'_j}L'_j[d'_j]\right) \text{ for any } i,j \right\}.$$

注记 A.9.4. (1) 我们不会写出 $\mu_d^{\oplus}$ 定义中的所有求和，而是使用简写记号 $\sum_{i_1,\ldots,i_{d-1}}$。

(2) 显然， $\mathcal{A}^{\oplus}$ 是一个过滤 A_∞-范畴。

定义 A.9.5。 $\mathcal{A}^{\Sigma}$ 的一个过滤（单边）扭曲复形是一个对

$$(\overline{L},q=q_{\overline{L}}) := \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Sigma^{r_i}L_i[d_i],(q_{ij})\right)$$

对于某个 $n\in\mathbb{N}$，使得：

(1) $\overline{L}$ 是 $\mathcal{A}^{\oplus}$ 的一个对象，也就是说，对于任意 $i=1,\ldots,n$， $\Sigma^{r_i}L_i[d_i]$ 都是 $\mathcal{A}^{\Sigma}$ 的一个对象；(2) q 是 $\mathcal{A}^{\oplus}(L,L)$ 中的一个态射，其次数为 1，且消失过滤层级为零。(3) 矩阵 q 是严格上三角的，也就是说，对于任意 $i\geq j$， $q_{ij}=0$ ；(4) 矩阵 q 满足

$$\sum_{d\geq 1}\mu_d^{\oplus}(q,\ldots,q)=0,$$

我们将其称为 q 的 Maurer-Cartan 恒等式。

矩阵 $q=q$ 称为 L 的微分，在记号中通常省略 .

注 A.9.6。 由于 q 是严格上三角的，任意输入 $\mu_d^{\oplus}(q,\ldots,q)_{i,j}$, $i,j=1,\ldots,|L|$ 均可写成

$$\sum_{i<i_1<\cdots<i_{d-1}<j}\mu_d(q_{ii_1},q_{i_1i_2},\ldots,q_{i_{d-1}j}).$$

此外， q 的 Maurer-Cartan 恒等式中的求和是有限和：事实上，对于任意 $d\geq|L|$，我们有 $\mu_d^{\oplus}(q,\ldots,q)=0$，因为可能出现的最长项是

$$\mu_{|L|-1}(q_{12},q_{23},\ldots,q_{|\overline{L}|-1|\overline{L}|})$$

在矩阵中 矩阵 $\mu_{|L|-1}^{\oplus}(q,\ldots\ldots,q)$，其仅在位置 $(1,\ |L|)$ 处有一个非零输入。

给定一个滤过 A_∞-范畴上的扭曲复形，其含义见 [39, 第 (3l) 节和注记 3。26], 微分可能不保持滤过（即上面的条件4 不成立）。在 [13] 中，引理 2.96 的类比结论成立：存在移位 r_i，使得该扭曲复形变为一个滤过复形。

定义 A.9.7 。 我们将 $\mathcal{A}$ 的滤过预三角完备化 $FTw(\mathcal{A})$ 定义如下 s:

(1) $FTw(\mathcal{A})$ 的对象是 $\mathcal{A}$ 上的过滤单边扭曲复形；(2) 给定两个过滤扭曲复形 L 和 L'，态射空间 $FTw(\mathcal{A})(L,L')$ 定义为 $\mathcal{A}^{\oplus}(L,\overline{L'})$，并带有相同的过滤，

(3) A_∞-运算按以下方式由微分变形：给定任意$d \geq 1$和扭曲复形

$$\left(\overline{L_i} = \bigoplus_{k=1}^{n_i} \Sigma^{r_{i,k}} L_{i,k}[d_{i,k}], q_i\right)$$

对于任意 $i = 0, \ldots, d$ 以及态射 $f^i \in FTw(\mathcal{A})(L_{i-1}, \overline{L_i})$，对于任意 $i = 1, \ldots, d$，我们将 $\mu_d^{Tw}(f^1, \ldots, f^d)$ 定义为矩阵 $|\overline{L}_0| \times |L_d|$

$$\mu_d^{Tw}(f^1, \ldots, f^d) := \sum_{k_0, \ldots, k_d \geq 0} \mu^{\oplus}_{d+k_0+\cdots+k_d}\left(q_0^{\otimes k_0}, f^1, q_1^{\otimes k_1}, \ldots, q_{d-1}^{\otimes k_{d-1}}, f^d, q_d^{\otimes k_d}\right)$$

此外，给定 $N \geq 1$，我们将 $FTw^N\mathcal{A}$ 定义为 $FTw\mathcal{A}$ 的满 A_∞-子范畴，其对象为长度为 $|L| \leq N$ 的滤过扭曲复形 L。

注 A.9.8. a. $FTw(\mathcal{A})$ 和 $FTw^N(\mathcal{A})$ 构成一个 A_∞-范畴，这是微分满足上述 Maurer-Cartan 恒等式的结果。

b. 显然，对于所有 $N \geq 1$，都存在滤过的满且忠实的 A_∞-函子 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}^N$: $\mathcal{A} \to FTw^N(\mathcal{A})$，以及 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A} \to FTw(\mathcal{A})$。

c. Σ 在 $\mathcal{A}^\Sigma$ 上的移位函子会在 $FTw(\mathcal{A})$上诱导一个移位函子，仍记作 Σ。它在对象 $L = \bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{r_i} L_i[d_i]$ 上的定义为

$$\Sigma^r \overline{L} = \bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{r_i + r} L_i[d_i]$$

并将 L 的微分 q 的每个输入 q_{ij} 视为一个态射

$$q_{ij} \in FTw(\mathcal{A})(\Sigma^{r_i+r} L_i[d_i], \Sigma^{r_j+r} L_j[d_j]) \cong FTw(\mathcal{A})(\Sigma^{r_i} L_i[d_i], \Sigma^{r_j} L_j[d_j]).$$

d. μ_d^{Tw}定义中的求和是有限和，基本上出于与 Maurer-Cartan 恒等式由有限和构成相同的原因。例如，在 $\mu_1^{Tw} f$中，对 $f \in FTw(\mathcal{A})(L, L')$，我们将形如 $\mu_{1+k_0+k_1}(q^{\otimes k_0}, f, q'^{\otimes k_1})$ 的元素相加，其 (i, j) 项为

$$\sum_{i_1, \ldots, i_{k_0}=1}^{|\overline{L}|} \sum_{i_{k_0+1}, \ldots, i_{k_0+k_1}=1}^{|\overline{L}'|} \mu_{1+k_0+k_1}\left(q_{ii_1}, \ldots, q_{i_{k_0-1}i_{k_0}}, f_{i_{k_0}i_{k_0+1}}, q'_{i_{k_0+1}i_{k_0+2}}, \ldots, q'_{i_{k_0+k_1}j}\right)$$

因此，由微分的下三角性可知，当 $k_0 \geq |L|$ 或 $k_1 \geq |L'|$时，$\mu_{1+k_0+k_1}(q^{\otimes k_0}, f, q'^{\otimes k_1}) = 0$。特别地，最长的可能求和项为

$$\mu_{|\overline{L}|+|\overline{L}'|-1}\left(q_{12}, \ldots, q_{|\overline{L}|-1|\overline{L}|}, f_{|\overline{L}|1}, q'_{12}, \ldots, q'_{|\overline{L}'|-1|\overline{L}'|}\right)$$

在 $(1, |L'|)$ 输入中。容易看出，当某个 i 使得 $k_i \geq |L_i|$ 时，μ_d^{Tw} $(f^1, \ldots, f^d)$ 中也成立。

定义 A.9.9。 设 L 和 L' 是上述 $FTw(\mathcal{A})$ 中的两个滤过扭曲复形，$f \in FTw(\mathcal{A})$ (L, L') 是一个零次态射，满足 $\mu^{FTw}{}_{(\mathcal{A})_1}$ $f = 0$，并且 $\lambda \in \mathbb{R}$ 满足 $\lambda \geq \mathbb{A}(f)$。我们将 f 的 λ-过滤映射锥定义为

$$\mathrm{Cone}^{\lambda}(f) := \left(\overline{L}' \oplus \Sigma^{\lambda}\overline{L}[1],\ q_{co}\right) \text{ where } q_{co} := \begin{pmatrix} q' & f \\ 0 & \Sigma^{\lambda}q[1] \end{pmatrix}.$$

引理 A.9.10. *Cone*$^{\lambda}(f)$ 是一个滤过扭曲复形。

注 A.9.11。 注意，子范畴 $FTw^{N}(\mathcal{A})$ 并非预三角化的，因为锥构造不保持长度过滤。

命题 A.9.12. 设 $\mathcal{A}$ 是一个过滤的 A_{∞}-范畴。那么 $H^0(FTw(\mathcal{A}))$ 是一个 *TPC*。

滤过扭曲复形也可以通过允许与分次滤过向量空间（而非持久模！）张量来描述，其中这些向量空间不必是一维的。给定一个有限自由生成的滤过分次向量 $V := \bigoplus_{i\in I} \Lambda \cdot \gamma_i$，其上的环为 Λ，以及 $\mathcal{A}$ 中的一个对象 L，我们可以将张量 $V \otimes L$ 定义为元素 $\Sigma^{|\gamma_i|}L[\deg(\gamma_i)] = \Lambda \cdot \gamma_i \otimes L$ 的直和（换言之，即零映射的 0-过滤映射锥）。其中，$\deg(\gamma_i)$ 表示 V 中 γ_i 的次数。我们通常将 $\Sigma^{|\gamma_i|}L[\deg(\gamma_i)]$ 简记为 $L \cdot \gamma_i$。若 V 是一个滤过链复形，即带有微分 d_V，则张量积继承如下变形微分：设 $d_V\gamma_i = \sum_j \alpha_j^i \gamma_j$ 表示任意一个 $i \in I$，则 $V \otimes L$ 上的微分是一个矩阵，其 (i, j) 项等于 $\alpha_j^i e_L$，其中 $e_L \in \mathcal{A}(L, L)$ 是严格单位元。显然，这一定义可扩展到整个范畴 $FTw(\mathcal{A})$（也就是说，它不仅对 $\mathcal{A}$ 中对象的像有定义）。另一种可能的做法（参见 [39, 第 (3l) 节]）是定义范畴 FTw，其对象为形如 $\bigoplus V_i \otimes L_i$ 的张量，其中 V_i 是有限维滤过向量空间，L_i 是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象，并配有一个上三角微分 q。此时，$\bigoplus_i V_i \otimes L_i$ 与 $\bigoplus_j W_j \otimes L'_j$ 之间的态射是.....的元素

$$\bigoplus_{i,j} \mathrm{Lin}(V_i, W_j) \otimes \mathcal{A}(L_i, L'_j)$$

并且，通过考虑线性映射的复合来修改 A_{∞}-映射（参见 [39, 方程 (3.17)]）。不难看出，这两种描述是等价的。

A.9.2. 滤扩展 *Yoneda* 嵌入。 我们将上文引入的 Yoneda 嵌入 $\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A} \to F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$ 扩展为一个过滤 A_{∞}-函子

$$\widetilde{\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}} \colon FTw\mathcal{A} \to F\mathrm{mod}_{\mathcal{A}}$$

via

$$\widetilde{\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}} := \mathcal{I}_{\mathcal{A}}^{*} \circ \mathcal{Y}_{FTw\mathcal{A}}$$

其中 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}^{*}$是 A_{∞}函子 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A} \to FTw(\mathcal{A})$，该函子在注记 A.9.8b. 中引入，$\mathcal{Y}_{FTw\mathcal{A}}$是过滤 A_{∞}范畴 $FTw\mathcal{A}$的滤过 Yoneda 嵌入，而 $\circ$是 A_{∞}函子的通常复合。由于过滤 A_{∞}函子的拉回保持过滤 A_{∞}-$\widetilde{\ }$模，且拉回本身也是过滤的，因此函子 $\mathcal{Y}_{A}$ 确实是一个过滤 A_{∞}函子。注意

，这只是将 [39, 第 (3s) 节]中扩展 Yoneda 嵌入的定义直接推广到过滤情形。

命题 A.9.14. 诱导函子 $H(\mathcal{Y}_{\mathcal{A}})\colon PD(\mathcal{A}) \to H(F模_{\mathcal{A}})$ 在 $PD(\mathcal{A})$ 与 $H(\mathcal{Y}_{\mathcal{A}})$ 的像之间给出一个 *TPC* 等价。

证明。 $H(\mathcal{Y}_{\mathcal{A}})$ 给出持久性范畴等价这一事实显而易见。我们需要证明它是一个 TPC 函子，也就是说，它与移位函子兼容，并且在 0 级是三角化的。它与移位函子兼容这一事实，直接源于 $FTw\mathcal{A}$ 上的移位函子在构造时就与模兼容。0 级是三角化的这一事实，则由 Yoneda 嵌入在链级上是一个 A_∞-函子可得。□

A.9.3. 过滤扭曲。 设 X 和 Y 为 $\mathcal{A}$中的对象，并考虑过滤扭曲复形 $Y \otimes \mathcal{A}(X,Y)$，其微分为

$$e_Y \otimes \mu_1 \in FTw(Y \otimes \mathcal{A}(X,Y), Y \otimes \mathcal{A}(X,Y)) = \mathcal{A}(Y,Y) \otimes \mathrm{Lin}(\mathcal{A}(X,Y), \mathcal{A}(X,Y))$$

其中， $e_Y \in \mathcal{A}(Y,Y)$是 Y的严格单位元，$\mathrm{Lin}(-,-)$表示两个向量空间之间的线性映射空间。换言之，给定 $\mathcal{A}(Y,X)$的一组基 $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$，上述扭曲复形为 $\bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{|a_i|} Y[\deg(a_i)]$，其微分由矩阵 $q_{ij} = \alpha_{ij} e_Y$给出，其中 $e_Y \in \mathcal{A}(Y,Y)$是 Y的严格单位元，而 $\alpha_{ij} \in \mathbf{k}$是$\mu_1(a_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} a_j$中的系数。我们将过滤扭曲复形之间的过滤态射定义为

$$\xi\colon Y \otimes \mathcal{A}(Y,X) \to X$$

在链复形的典范过滤同构下与恒等态射对应的映射

$$FTw(Y \otimes \mathcal{A}(Y,X), X) \cong \mathrm{Lin}(\mathcal{A}(Y,X), \mathcal{A}(Y,X)).$$

定义 A.9.15。 我们将 $T_Y X$ 由 Y的扭曲定义为由 ξ的锥给出的扭曲复形，即 $T_Y X = \mathrm{Cone}(\xi)$

我们可以写成

$$T_Y X = X \oplus \bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{|a_i|} Y[\deg(a_i) + 1]$$

其微分由矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \vec{a} \\ \vec{0}^T & q_{ij}() \end{pmatrix}$给出。注意，严格单位元 $e_X \in \mathcal{A}(X, X)$ 诱导出一个扭曲复形的态射 $i\colon X \to T_Y X$，其向量表示为 $(e_X, 0, \dots\dots, 0)$。

我们感兴趣的是描述 $T_Y X$ 在扩展的过滤 Yoneda 嵌入 $\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}$ 下的像，该嵌入A.9.2节中引入。

引理 A.9.16. 我们有

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{T_Y X} \cong Cone(\phi)$$

其中 ϕ: $\mathcal{Y}_Y \otimes \mathcal{A}(Y,X) \to \mathcal{Y}_X$ 是如下给出的模的过滤态射

$$\phi_{l|1}(x_1,\dots,x_l,a\otimes b) := \mu_{s+2}(x_1,\dots,a,b)$$

and $\mathcal{Y}_Y \otimes \mathcal{A}(Y,\ X)$ 具有 [39, 第 (3c) 节]中定义的模结构。

证明。容易看出，作为 $FTw(Y\otimes\mathcal{A}(Y,\ X)\ X) = \mathcal{A}(Y,\ X)\otimes$Lin$(A(Y,\ X)\ \Lambda)$ 的一个元素，态射 ξ 对应于元素

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \psi_{a_i}$$

其中 $a_i \in \mathcal{A}(Y,\ X)$ 是如上所述的一个基元素，而 ψ_{a_i}: $A(Y,\ X) \to \Lambda$ 是将 a_i映射到 1、并将所有其他基元素映射到 0 的映射。在 Yoneda 嵌入下，即作为 A_∞-模 $\mathcal{Y}_Y \otimes \mathcal{A}(Y,\ X) \to \mathcal{Y}_X$ 的态射，ξ变为映射

$$\begin{aligned}\phi_{l|1}(x_1,\dots,x_l,b\otimes c) &= \sum_{i=1}^{n} \psi_{a_i}(c)\lambda(a_i)_{l|1}(x_1,\dots,x_l,b)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \psi_{a_i}(c)\mu_{l+2}(x_1,\dots,x_l,b,a_i) = \mu_{l+2}(x_1,\dots,x_l,b,c).\end{aligned}$$

证明到此结束。 □

我们可以很容易地将这一构造推广到 X 本身是 $\mathcal{A}$上的一个滤过扭曲复形的情形。在这种情况下，在扩展 Yoneda 嵌入下，X 对应于一个过滤 A_∞-模 $\mathcal{M}$，而 $T_Y X$ 对应于完全收缩映射的 0-锥

$$\phi\colon \mathcal{Y}_Y \otimes \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}$$

（参见 [39,第 (5a) 节]）。我们将上述锥记作

$$\mathcal{T}_Y\mathcal{M} := \mathrm{Cone}(\phi).$$

上述引理在此情形下也同样成立。

引理 A.9.17。设 Y 是 $\mathcal{A}$ 的一个对象，且 X 是一个关于 $\mathcal{A}$的滤过扭曲复形。那么存在一个 A_∞-模之间的过滤拟同构

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_{T_Y X} \to \mathcal{T}_Y\widetilde{\mathcal{Y}}_X.$$

A.9.4. 过滤扭曲复形的函子性。设 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 是过滤 A_∞-范畴。回想一下，对于任意 $s \geq 0$, 我们在 § A_∞-范畴 fun$^{\mathrm{LD};s}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 中定义了 A_∞具有线性偏差率的 -函子 s，见 §A.6。

我们引入以下记号：对于 $N \geq 1$ 和 $s \geq 0$，记作

$$FTw^N\mathcal{Q}_s = \mathrm{fun}^{\mathrm{LD};s}(FTw^N\mathcal{A}, FTw^N\mathcal{B}) \tag{105}$$

以及

$$FTw\mathcal{Q}_s = \mathrm{fun}^{\mathrm{LD};s}(FTw\mathcal{A}, FTw\mathcal{B})$$

回顾， $FTw^N\mathcal{A}$ 是 A_∞-子范畴（ A_∞-范畴 $FTw\mathcal{A}$ （滤过扭曲复形）中仅以长度为 $\leq N$ 的扭曲复形为对象（参见 §A.9）。本节定义滤过 A_∞-函子

$$FTw^N\colon \mathrm{fun}^{\mathrm{LD};s}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \to FTw^N\mathcal{Q}_{Ns}$$

对于任意 $s \geq 0$ 和 $N \geq 1$。注意，在目标范畴中，偏差为 Ns。遗憾的是，这些函子无法扩展为函子 FTw，因为像中函子的偏差取决于其所作用的扭曲复形的长度，这一点将在下文的讨论中显而易见。我们能做的最好办法是定义函子

$$\overline{FTw}\colon \mathrm{fun}^{\mathrm{LD};s}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \to \overline{FTw\mathcal{Q}_s}$$

其中 $\overline{FTw\mathcal{Q}_s}$ 是从 $FTw\mathcal{A}$ 到 $FTw\mathcal{B}$ 的 A_∞-范畴中的 A_∞-函子所构成的范畴；这些函子满足：对于任意 $N \geq 1$，限制到子范畴 $FTw^N\mathcal{A}$ 后，其线性偏差率为 Ns。

设 $s \geq 0$ 和 $(\mathcal{F}, s)$ 是一个线性偏差为 s 的 A_∞-函子。那么， $\mathcal{F}$ 可立即扩展为一个偏差为 s 的 A_∞-函子 $\mathcal{F}^\Sigma\colon \mathcal{A}^\Sigma \to \mathcal{B}^\Sigma$，它定义在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的平移完备化之间。我们如下定义其到滤过加性扩张的扩张 $(\mathcal{F}, s)^\oplus\colon \mathcal{A}^\oplus \to \mathcal{B}^\oplus$ （我们在记号中省略 s ，但诱导出的函子取决于这一选择）：

（1）作用于对象 $\overline{L} = \bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{r_i} L_i[d_i]$, $\mathcal{F}^\oplus$ 上时为

$$\mathcal{F}^\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{r_i} L_i[d_i]\right) := \bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{r_i-(i-1)s}\mathcal{F}(L_i)[d_i] \tag{106}$$

（2）给定 $\mathcal{A}^\oplus$ 的对象 $\overline{L_0}, \ldots, L_d$，以及对任意 $i = 1, \ldots, \overline{d}$ 的态射 $f^i \in \mathcal{A}^\oplus(L_{i-1}, L_i)$，我们定义 $\mathcal{F}_d^\oplus(f^1, \ldots, f^d) \in \mathcal{B}^\oplus(\mathcal{F}\overline{L_0}, \mathcal{F}\overline{L_d})$ 为其 (i, j) 项等于以下内容的矩阵

$$\sum_{i_1=1}^{|\overline{L}_1|} \cdots \sum_{i_{d-1}=1}^{|\overline{L}_{d-1}|} \mathcal{F}_d\left(f^1_{ii_1}, \ldots, f^d_{i_{d-1}j}\right)$$

对于 $i = 1, \ldots, \overline{|L_0|}$ 以及 $j = 1, \ldots, \overline{|L_d|}$。

我们可以将其 n 通过设定，轻松地将 $\mathcal{F}$ 扩展为一个 A_∞-函子 $FTw\mathcal{F}\colon FTw\mathcal{A} \to FTw\mathcal{B}$ g

$$FTw\mathcal{F}(\overline{L}) := \mathcal{F}^\oplus(\overline{L}) \text{ and } q_{Tw\mathcal{F}(\overline{L})} := \sum_{d\geq 1} \mathcal{F}_d^\oplus(q_{\overline{L}}, \ldots, q_{\overline{L}})$$

对于 $FTw\mathcal{A}$ 的任意对象 (L, q_L)，给定 $FTw\mathcal{A}$ 的对象 $(L_0, q_0) \ldots, \overline{(L_d, q_d)}$ 以及对任意 $i = 1, \ldots, d$ 的态射 $f^i \in \overline{FTw\mathcal{A}}(\overline{L_{i-1}, L_i})$，我们定义

$$(FTw\mathcal{F})_d(f^1, \ldots, f^d) := \sum_{k_0,\ldots,k_d\geq 0} \mathcal{F}^\oplus_{d+k_0+\cdots+k_d}\left(q_0^{\otimes k_0}, f^1, q_1^{\otimes k_1}, \ldots, q_{d-1}^{\otimes k_{d-1}}, f^d, q_d^{\otimes k_d}\right)$$

注记 A.9.18。 (1) $q_{Tw\mathcal{F}(L)}$ 和 $FTw\mathcal{F}_d$ 的定义中的求和是有限的。

(2) s的移位在 L 在（106）中的像里至关重要，这样像$q_{TwF(L)}$ 在q_L 中的滤过层级才能达到≤ 0，这将在下一个引理中证明。此外，我们在此再次指出，诱导函子 $\mathcal{F}^{\oplus}$和 $FTw\mathcal{F}$显然取决于偏差 s的选择，尽管这一事实并未在记号中明确体现。

引理 A.9.19. 设$(\mathcal{F}, s)$ 是 $fun^{LD;s}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$的一个对象。设$(L, q_L)$ 是一个滤过扭曲复形。则它在 $FTw\mathcal{F}$下的像$(FTw\mathcal{F}(L)\ ^{q_{TwF(L)}})$也是一个滤过扭曲复形。

注 A.9.20。 尽管 $\mathcal{F}$ 通常并不是一个滤过的 A_∞-函子，像 $FTw\mathcal{F}(L)$ 却能保留滤过扭曲复形的结构，这一事实或许有些违背直觉；不过，也可以将其视为一个提示：具有线性偏差的函子与滤过同调构造相容，因此是恰当的研究框架。

证明。 容易看出，$q_{TwF(L)}$ 满足 Maurer-Cartan 方程。接下来只需验证它处于非正滤过层级。记 q_L为 q。设 $d \in \{1, \dots, |L| - 1\}$，并考虑 $\mathcal{F}_d^{\oplus}(q, \dots, q)$ 的 (i, j)-输入，其值为

$$\sum_{i<i_1<\cdots<i_{d-1}<j} \mathcal{F}_d(q_{ii_1}, \dots, q_{i_{d-1}j}).$$

假设对于某些 $i_1, \dots, i_{d-1}$， $\mathcal{F}_d(q_{ii_1}, \dots, q_{i_{d-1}j})$ 非零；特别地， $j - i \geq d$，否则，根据 q 的三角性，这一项将为零。注意， $\mathcal{F}_d(q_{ii_1}, \dots, q_{i_{d-1}j})$ 属于

$$(\mathcal{B}^{\Sigma})^{\leq ds}(\Sigma^{r_i}\mathcal{F}(L_i)[d_i], \Sigma^{r_j}\mathcal{F}(L_j)[d_j]) \subset (\mathcal{B}^{\Sigma})^{\leq (j-i)s}(\Sigma^{r_i}\mathcal{F}(L_i)[d_i], \Sigma^{r_j}\mathcal{F}(L_j)[d_j])$$

它与下列对象同构：

$$(\mathcal{B}^{\Sigma})^{\leq 0}(\Sigma^{r_i-(i-1)s}\mathcal{F}(L_i)[d_i], \Sigma^{r_j-(j-1)s}\mathcal{F}(L_j)[d_j]).$$

根据我们对 $FTw\mathcal{A}$ 上对象的 $FTw\mathcal{F}$ 作用量的定义，可直接得出 $q_{TwF(L)}$ 位于消失过滤层级。– □

注记 A.9.21. 由定义可知，诱导函子 $FTw\mathcal{F}$ 保持扭曲复形的长度，因此它限制为一个函子 $Tw^N\mathcal{A} \to Tw^N\mathcal{B}$。我们将此函子记作 $FTw^N\mathcal{F}$，即强调 N，这是因为下面的命题。

命题 A.9.22. 设 $N \geq 1$，且令 $(\mathcal{F}, s)$ 为 $fun^{LD;s}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 的一个对象。那么诱导函子

$$Tw^N\mathcal{F}\colon FTw^N\mathcal{A} \to FTw^N\mathcal{B}$$

是一个 A_∞-函子，其偏差率为 $N \cdot s$，也就是说，它是 FTw^NQ_{Ns}的一个对象（参见（105））。

证明。考虑长度为 n^0 的对象 (L^0, q_0)……，(L^d, q_d)，分别记为 $FTw^N\mathcal{A}$ 和 $n^d \leq N$，以及任意 $i = 1$，……，d 对应的态射 $f^i \in FTw\mathcal{A}^{\alpha_i}(L_{i-1}, L_i)$。矩阵中（通常）“平移最多”的非零项

$$FTw\mathcal{F}_d(f^1, \dots, f^d) \in FTw\mathcal{B}(Tw\mathcal{F}L_0, Tw\mathcal{F}L_d)$$

是该求和项的 (1， n^d) 输入

$$\mathcal{F}^{\oplus}_{d+(n^0-1)+\cdots+(n^d-1)}(q_0^{n^0-1}, f^1, \ldots, f^d, q_d^{n^d-1}).$$

该项位于滤过层级

$$\leq \sum_{i=1}^{d} \alpha_i + \sum_{j=0}^{d}(n^j-1)s + ds = \sum_{i=1}^{d}\alpha_i + \sum_{j=0}^{d} n^j s - s$$

在 $\mathcal{B}^{\Sigma}(\Sigma^{r_1}\mathcal{F}(L_1^0)\ \Sigma^{r_{n^d}}\mathcal{F}(L_{n^d}^d))$ 中，即位于层级

$$\leq \sum_{i=1}^{d}\alpha_i + \sum_{j=0}^{d-1} n^j s$$

在 $\mathcal{B}^{\Sigma}(\Sigma^{r_1^0}\mathcal{F}(L_1^0)\ \Sigma^{r_{n^d}^d - (n^d-1)^s}\mathcal{F}(L_{n^d}^d))$ 中。由于根据假设 $n^0, \ldots, n^d \leq N$，我们有 $\sum_{j=0}^{d-1} n^j s \leq dNs$ ，结论得证。

□

注 A.9.23. $FTw\mathcal{F}$ 作用于扭曲复形时，会根据各直和项的顺序对其进行不同幅度的平移；这一点是获得平移关于顺序呈次线性增长的诱导函子所必需的。平移取决于顺序这一事实似乎有悖直觉，但这与微分的上三角性相符，而微分的上三角性显然取决于直和项的顺序。

到目前为止，我们只在对象层面定义了 A_∞-函子 FTw。现在定义一阶项 FTw_1。设 $(\mathcal{F}, s)$ 和 $(\mathcal{G}, s)$ 是函子 $^{\mathrm{LD};s}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 的对象，并考虑一个从 $(\mathcal{F}, s)$ 到 $(\mathcal{G}, s)$ 、带有平移 ρ 的 A_∞- 预自然变换 T（定义见 §A.6）。我们将 'A_∞-预自然变换'[4] FTw_1T 定义为其第 d 项为 $d \geq 0$,

$$(FTw_1T)_d(f_1, \ldots, f_d) := \sum_{k_0,\ldots,k_d \geq 0} T^{\oplus}_{d+k_0+\cdots+k_d}\left(q_0^{\otimes k_0}, f^1, q_1^{\otimes k_1}, \ldots, q_{d-1}^{\otimes k_{d-1}}, f^d, q_d^{\otimes k_d}\right)$$

其中， $T^{\oplus}$ 是 T的矩阵式扩展，其定义与上述函子的情形类似。与函子的情形一样，我们可以将范围限制在长度为 $\leq N$的扭曲复形子范畴，并为任意 $N \geq 1$定义$FTw_1^N T$ 。考虑到滤过，我们得到以下结果。

引理 A.9.24。 设$(\mathcal{F}, s)$ 和$(\mathcal{G}, s)$ 是函子 $fun^{LD;s}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 中的对象，并考虑它们之间的一个 A_∞-预自然变换 $T\colon(\mathcal{F}, s) \to (\mathcal{G}, s)$，其平移为 ρ。设 $N \geq 1$。那么， $FTw_1^N T$是 $FTw^N\mathcal{F}$和 $FTw^N\mathcal{G}$之间平移为 $\leq \rho$的一个 A_∞-预自然变换，也就是说

$$FTw_1^N T \in FTw^N Q_{Ns}(FTw^N\mathcal{F}, FTw^N\mathcal{G})^{\rho}.$$

注记A.9.25。换句话说，上述引理告诉我们， FTw_1 将具有线性偏差 s 和移位 $\leq \rho$ 的 A_∞-预自然变换映射为具有线性偏差 Ns 和移位 ρ的 A_∞-预自然变换。

[4]这里加引号是因为严格来说，这是两个定义不良的函子之间的自然变换。

我们将高阶项 FTw_d、 $d \geq 2$定义为零。特别地，我们证明了以下结果，该结果已在本节开头预先说明。

推论 A.9.26. 对于任意 $N \geq 1$ 和 $s \geq 0$， A_∞-函子

$$FTw^N \colon fun^{LD;s}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to fun^{LD;Ns}(FTw^N \mathcal{A}, FTw^N \mathcal{B}) = FTw^N \mathcal{Q}_{Ns}$$

是过滤的。

参考文献

[1] M. Abouzaid. 生成 Fukaya 范畴的几何判据。Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 112:191–240, 2010年.[2] G. Ambrosioni. 滤过Fukaya范畴。J. Symplectic Geom., 23(2):423–509, 2025.[3] T. Asano, St. Guillermou, V. Humilière, and Y. Ike. γ 支集作为微支撑。Comptes Rendus Math., 361:1333–1340, 2023.[4] J.-F. Barraud and O. Cornea. 辛拓扑中的同伦动力学。载于 P. Biran, O. Cornea, and F. Lalonde 编，《非线性分析与辛拓扑中的莫尔斯理论方法》，NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. 第 217 卷，第 109–148 页，多德雷赫特，2006。Springer。[5] J.-F. Barraud and O. Cornea. 拉格朗日交与塞尔谱序列。Annals of Math- ematics, 166:657–722, 2007.[6] P. Biran and O. Cornea. 拉格朗日量子同调。载于《辛场论的新视角与挑战》，CRM 会议录讲义第 49 卷，第 1–44 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2009。[7] P. Biran and O. Cornea. 拉格朗日子流形的刚性与单有理覆盖。几何与拓扑，13(5):2881–2989, 2009.[8] P. Biran and O. Cornea. Lefschetz 纤维化中拉格朗日协边的锥分解。arXiv 版本，2016。见 https://arxiv.org/pdf/1504.00922。[9] P. Biran and O. Cornea. Lefschetz 纤维化中拉格朗日协边的锥分解。Selecta Math. (N.S.), 23(4):2635–2704, 2017.[10] P. Biran and O. Cornea. 余切丛中拉格朗日谱度量的界。Comment. Math. Helv., 96(4):631–691, 2021.[11] P. Biran, O. Cornea, and E. Shelukhin. 拉格朗日影与三角范畴。Astérisque, 426:128, 2021.[12] P. Biran, O. Cornea, and J. Zhang. 持久性 K 理论。量子拓扑，第 1–87 页，2024。DOI 10.4171/QT/222。[13] P. Biran, O. Cornea, and J. Zhang. 三角化、持久性与 Fukaya 范畴。即将发表于欧洲数学会回忆录，2024。预印本版本（2023、2024）见 https://arxiv.org/abs/2304.01785。[14] P. Biran, L. Polterovich, and D. Salamon. 哈密顿动力学中的传播与相对辛同调。Duke Math. J., 119(1):65–118, 2003.[15] E. Çineli, V. Ginzburg, and B. Gürel. 哈密顿微分同胚的拓扑熵：持久同调与 Floer 理论的视角。数学杂志，308:2–75, 2024。https://doi.org/10.1007/s00209-024-03627-0。[16] J. P. Chassé. 具有黎曼界的拉格朗日度量几何。预印本（2024）——即将发表于代数与几何拓扑，见 https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.19144。[17] O. Cornea. 锥长与 Lusternik–Schnirelmann 范畴。Topology, 33:95–111, 1994年。[18] O. Cornea. 强范畴等于锥长。Topology, 34:377–381, 1995。

[19] O. Cornea and F. Lalonde. 簇同调：构造与结果综述。Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc., 12:1–12, 2006。[20] A. Dawid. Dehn-Seidel扭转分支中的 Floer条形码增长。硕士论文，苏黎世联邦理工学院，2023。[21] A. Dawid. a_3构型的 Hofer几何。预印本，2025。[22] G. Dimitrov, F. Haiden, L. Katzarkov, and M. Kontsevich. 动力系统与范畴。Contemporary Mathematics, 621:133–170, 2014。[23] U. Frauenfelder and F. Schlenk. Dehn-Seidel扭转分支中的体积增长。Geom. Funct. Anal., 15(4):809–838, 2005。[24] S. Ganatra. 包裹Fukaya范畴的辛上同调与对偶性。ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2012。博士论文——麻省理工学院。[25] T. Ganea. Lusternik–Schnirelmann 范畴与强范畴。Ill. Journal of Math, 11:417–427, 1967。[26] E. Giroux. 从莫尔斯函数到余切丛上的 Lefschetz 纤维化。预印本，2025。见 https://arxiv.org/abs/2510.10669。[27] St. Guillermou, Cl. Viterbo, and B. Zhang. T^*N 的持久性Fukaya范畴的纤维稠密性。编写中，2025。[28] P. Seidel K. Fukaya and I. Smith. 单连通余切丛中的恰当拉格朗日子流形。Invent. Math., 172(1):1–27, 2008。[29] A. Kislev and E. Shelukhin. 谱范数与条形码的界。几何与拓扑，25(7):3257–3350, 2021。[30] Kenji Lefèvre-Hasegawa. 关于 a_∞范畴。论文，巴黎第七大学，2003。[31] L. Macarini and F. Schlenk. 球化上的 Reeb流具有正拓扑熵。Math. Proc. of t he Cambridge Phil. Soc., 151:103–128, 2011。[32] C.-Y. Mak and W. Wu. 通过拉格朗日协边得到的 Dehn扭转正合序列。Compos. Math., 154(12):2485–2533, 2018。[33]J. Miller. 持久性范畴的幂等元完备化。Journal of Pure and Applied Algebra, 229(12):1–38, 2025。[34] A. Neeman. 将有限近似作为研究三角范畴的工具。载于《国际数学家大会论文集》，第 3 卷，第 1636–1658 页。EMS Press，2022。[35]W. Parry and M. Policott. 双曲动力学的 Zeta函数与周期轨道结构。Astérisque, 187-188:1–268, 1990。[36] L. Polterovich, D. Rosen, K. Samvelyan, and J. Zhang. 几何与分析中的拓扑持久性，大学讲座系列第 74 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2020。[37] Alexander F. Ritter and Ivan Smith. 单调包裹 Fukaya范畴与开闭弦映射。Selecta Math. (N.S.), 23(1):533–642, 2017。[38] P. Seidel. 分次Lagrangian子流形。Bull. Soc. Math. France, 128(1):103–149, 2000。[39] P. Seidel. Fukaya 范畴与 Picard-Lefschetz理论。苏黎世高级数学讲座。欧洲数学会，苏黎世，2008。[40] P. Seidel. 通过 C^*等变 A_∞ 模研究 A_m Milnor纤维中的拉格朗日同调球面。Geometry and Topology, 16:2343–2389, 2012。[41] E. Shelukhin. 辛上同调与 Viterbo猜想。Geom. Funct. Anal., 32(6):1514–1543, 2022。[42] E. Shelukhin. Zoll对称空间上的 Viterbo 猜想。Invent. Math., 230(1):321–373, 2022。[43] N. Sheridan. 射影空间中 Fano 超曲面的 Fukaya 范畴。Publications Mathématiques de l’IHÉS, 124:165–317, 2016年。[44] N. Sheridan. 非交换 Hodge理论中的公式。J. Homotopy Relat. Struct., 15(1):249–299, 2020。

[45] J.C. Sikorav. 近复流形中全纯曲线的一些性质。载于辛几何中的全纯曲线，第165–189页。Birkhauser，1994年。[46] A. Thom. 群的有限近似及其应用。载于*2018*年国际数学家大会论文集，第1779–1999页。世界科技出版公司，2019年。[47] B. Toen. 关于微分分次范畴的讲座。载于代数与拓扑*K*理论专题，《数学讲义》，第243–302页。施普林格，柏林，2011年。[48] A. Turing. 李群的有限近似。数学年刊，39(1):105–111，1938年。[49] M. Usher. 锐能量-容量不等式。当代数学通讯，12:457–473，2010年。[50] M. Usher and J. Zhang. 持久同调与Floer–Novikov理论。几何与拓扑，20(6):3333–3430，2016年。

Giovanni Ambrosioni，数学系，苏黎世联邦理工学院，Rämistrasse 101，8092苏黎世，瑞士电子邮箱地址：giovanni.ambrosioni@math.ethz.ch PAUL BIRAN，数学系，苏黎世联邦理工学院，Rämistrasse 101，8092 苏黎世，瑞士电子邮箱地址：biran@math.ethz.ch

OCTAV CORNEA，数学与统计系，蒙特利尔大学，C.P. 6128 Succ. Centre-Ville 蒙特利尔，魁北克省 H3C 3J7，加拿大电子邮箱地址：cornea@dms.umontreal.ca