arXiv:2601.12531v1 [math.AC] 18 Jan 2026

通过 Tate 预解得到的导出等价

K. GANAPATHY 和 SARANG SANE

ABSTRACT. 对于交换诺特环R中任意有限序列的元素 $s_1,\dots,s_d$，我们证明，对于 $n \gg 0$，从 Koszul 复形 $K(s_1^n,\dots,s_d^n)$到 Koszul 复形 $K(s_1,\dots,s_d)$的自然映射可经由 $s_1^n,\dots,s_d^n$上的塔特分解进行分解。利用这一结果，对于 mod(R) 的任意解消子范畴 $\mathcal{A}$，以及任意理想 I，若它具有一个等价于 I-进滤过的滤过$\{I_n\}$，且 $\dim_{\mathcal{A}}(R/I_n) < \infty$，我们证明：支撑在 $V(I)$上且具有有限 $\mathcal{A}$维数的有限生成模的有界导出范畴，与同调支撑在 $V(I)$上的 $\mathcal{A}$ 的有界导出范畴之间存在导出等价。作为一个特例，当 R 具有素特征且 I 具有有限投射维数时，我们得到支撑在 $V(I)$上的有限投射维数模的有界导出范畴，与同调支撑在 $V(I)$上的投射模的有界导出范畴之间的导出等价。

1. INTRODUCTION

令 R 表示一个交换诺特环，mod(R) 表示有限生成 R-模所成的范畴。令 $\mathcal{P}$ 表示投射 R-模所成的全子范畴，并令 $\mathcal{A}$ 表示 mod(R) 的一个解消子范畴。令 $\mathcal{A}$ 表示 mod(R) 的全子范畴，由那些可由 $\mathcal{A}$ 中的模作有限预解的模组成，即满足 $\dim_{\mathcal{A}}(M) < \infty$ 的 $M \in$ mod(R)。这等价于要求 M 的所有高阶叙泽基都属于 $\mathcal{A}$。当 $\mathcal{A} = \mathcal{P}$ 时，$\dim_{\mathcal{A}}$ 就是投射维数，记作 pd。对于 mod(R) 的子范畴 $\mathcal{K} \subset$，令 $Ch^b(\mathcal{K})$ 表示 $\mathcal{K}$ 中有界链复形所成的范畴。对于 mod(R) 的 Serre 子范畴 $\mathscr{L}$，令 $Ch^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{K})$ 表示 $Ch^b(\mathcal{K})$ 的全子范畴，由同调属于 $\mathscr{L}$ 的复形组成；令 $D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{K})$ 表示将拟同构取逆后得到的相应导出范畴。将复形对应到其由 $\mathcal{A}$-模构成的预解，便得到一个函子 $D^b(\mathcal{A}\cap\mathscr{L}) \rightsquigarrow D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$。若对于任意满足 $R/I \in \mathscr{L}$ 的理想 $I \subseteq R$，都存在一个正则序列 $a_1,\dots,a_c$，其元素属于 I，且 $R/(a_1,\dots,a_c) \in \mathscr{L}$（定义 2.11]），则称 mod(R) 的 Serre 子范畴 $\mathscr{L}$ 满足条件(*)。当 $\mathscr{L}$ 满足条件(*) 时（例如，当 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$ 且 I 是一个集合论完全交时），文献 [18, 的引理 4.6]，证明了上述函子是一个等价。本文将上述结果推广到大得多的一类 Serre 子范畴（参见定理 4.5）。特别地，我们证明以下结论：

定理 1.1。设 R 为交换诺特环。设 $\mathcal{A} \subseteq$模(R) 为一个解消子范畴。那么在以下情形中，存在范畴等价 $D^b(\mathcal{A}\cap\mathscr{L}) \rightsquigarrow D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$：

(1) R 是一个正则环。*(2)* $\mathscr{L}$ 满足条件$(*)$。*(3)* $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$，其中 $I \subseteq R$ 是一个理想，它具有一个滤过 $\{I_n\}$，该滤过等价于 I-进滤过，并且 $\dim_{\mathcal{A}}(R/I_n) < \infty$。

定理1.1归纳了导出等价的两个已知情形，即 (1) 和 (2)，并将其推广到第三种情形。我们将理想 I 定义为具有最终有限投射

2020 数学学科分类。主要分类：13D02，13D09；次要分类：13C13，13E05。关键词和短语。Artin-Rees 性质、导出范畴、最终有限投射维数、塔特分解、Koszul 复形。

维数（最终有限投射维数，efpd）（参见定义 2.14），如果当所有 I_n 都具有有限投射维数时，它满足定理 1.1中性质 (3)。定理 1.1的一个直接且特别有趣的推论是：

推论 1.2. *(a)* 设 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$，其中 I 具有最终有限投射维数。那么 $D^b(\mathcal{A} \cap \mathscr{L}) \simeq D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$.
(b) 若 R 具有素特征，且 $\mathrm{pd}(R/I) < \infty$，则 I 具有最终有限投射维数，因此上述导出等价成立。*(c)* 若 R 是正则环，或 $\mathscr{L}$满足条件 $(*)$，或 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$，其中 I 具有最终有限投射维数，则 $D^b(\mathcal{P} \cap \mathscr{L}) \simeq D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{P})$。

文献中早已出现最终有限投射维数这一性质（但未命名），尤其是 [16]，其中考察了具有此性质的模的滤过这一更一般的情形。我们在预备知识的第 2 小节中正式定义具有最终有限投射维数的理想，并在定义之后以及第 5节中讨论一些例子和相关问题。

定理 1.1 证明中的主要技巧是证明：对于任意一个在 $X_\bullet$中的复形 $D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$，若其非零同调不止一个，则存在一个从 $D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 中某个适当的投射分解出发的态射，使得其锥的同调个数减少一个。这就是我们定义的 (参见定义 4.1) 的强约化子。此前 [18], 已运用这一思路，利用 Koszul 复形构造强约化子。事实上，一旦存在强约化子，[18]中的证明几乎可以逐字照搬，从而得到导出等价。这些证明以及定理 1.1的证明占据了第 4节的大部分内容。

本文证明，恰当的塔特分解可发挥强约化子的作用。实现这一点的方法是构造从塔特分解到 Koszul 复形的态射。接下来我们介绍相关结果，因为它本身也具有独立的研究价值。设 $\underset{\sim}{s} = s_1, \ldots, s_d$ 是 R 中任意一列元素，$K(\underset{\sim}{s})$ 是由 $\underset{\sim}{s}$ 构成的 Koszul 复形。回忆一下，塔特分解 $T(\underset{\sim}{s})$ 是通过从 $K(\underset{\sim}{s})$ 开始逐步分解同调而得到的，从而构成 $R/(\underset{\sim}{s})$ 的投射分解。事实上，这两个复形都是微分分次代数，并且根据构造，存在一个微分分次代数的自然包含 $K(\underset{\sim}{s}) \to T(\underset{\sim}{s})$。众所周知，$K(\underset{\sim}{s})$ 与 $T(\underset{\sim}{s})$“相同”当且仅当 $\underset{\sim}{s}$ 是正则序列。换言之，逆映射 $T(\underset{\sim}{s}) \succ K(\underset{\sim}{s})$ 存在当且仅当 $\underset{\sim}{s}$ 是正则序列。现在令 $\underset{\sim}{s}^n$ 表示从 $\underset{\sim}{s}$ 得到的序列，即将其中每个元素取 n^{th} 次幂。自然满射 $R/(\underset{\sim}{s}^u) \twoheadrightarrow R/(\underset{\sim}{s}^r)$ 诱导出一个自然的链复形映射 $\kappa^{u,r} : K(\underset{\sim}{s}^u) \to K(\underset{\sim}{s}^r)$；在 $u = r$ 的情形下，该映射是恒等映射。在定理 3.5 中，我们证明，对于任意序列 $\underset{\sim}{s}$，当 u 充分大时，映射 $\kappa^{u,r}$ 可分解为经过 $T(\underset{\sim}{s}^u)$，即

$$
\begin{array}{ccc}
K(\underset{\sim}{s}^u) & \hookrightarrow & T(\underset{\sim}{s}^u) \\
& \searrow^{\kappa^{u,r}} & \downarrow \phi \\
& & K(\underset{\sim}{s}^r)
\end{array}
\tag{1}
$$

当$\underset{\sim}{s} = \{s\}$是一个单元素集时，这一现象以及提高幂次和 R 为诺特环的作用可以如下看出：由于 R 是诺特的，存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得湮灭子(s^l) = 湮灭子(s^{l+1})。下图展示了当 $n = l + 1$时的映射 ϕ。

$$
\begin{array}{lccccccccc}
T(s^{l+1}): & \longrightarrow & R^t & \xrightarrow{\partial} & Re & \xrightarrow{(s^{l+1})} & R & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow 0 & & \downarrow (s^l) & & \downarrow id & & \\
K(s): & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Re & \xrightarrow{(s)} & R & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

由于 ∂ 将 R^t 的一组基映射到 Ann(s^{l+1}) = Ann(s^l) 的生成元，我们可知 ϕ 是一个链复形映射。

设 N 是一个 R-模。图示 (1) 的另一个有趣推论是，它揭示了 Koszul 上同调 $\{H^i(K(\underline{s}^r;N)^\vee)\}_{r\geq 1}$ 与 Ext-模$\{\mathrm{Ext}^i_R(R/(\underline{s}^r),N)\}_{r\geq 1}$之间更深层的联系，如推论 3.8 所示。由此立即可得，我们得到一个新的证明，说明局部上同调模 $H^i_I(N)$ 同构于直极限 $\varinjlim H^i(K(\underline{s}^r;N)^\vee)$，且不必使用 ˇCech 复形。

证明 ϕ 的存在性，依赖于提高幂次后 Koszul 同调模上自然映射的消失性结论；已知这些结论可由如下陈述推出：对于 $n\gg 0$，$\mathrm{Tor}^R_i(R/I^n,M)\to\mathrm{Tor}^R_i(R/I^r,M)$ 为零，而这又是 Artin-Rees 引理的推论。我们进一步证明，ϕ 的存在性实际上等价于上述关于 Tor 映射的消失性结论。陈述中的指数 n 被视为 r 和 i 的函数，此前已有研究，例如见 [2]。在定理 3.12 中，我们证明 n 可以取为 r 上的多项式函数，并且与次数 i 无关；这可直接由定理 3.5 得出。关于 Tor 映射的这一消失性结论，已有针对局部环的研究，见 [9] 和 [1]（另请参阅定义 2.7 及其评注）。

Artin-Rees 引理与导出等价之间的联系由来已久。在 [12], 中，存在一些条件，使得 $D^b(\mathcal{B})\to D^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ 是一个等价，其中 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴，而 $\mathcal{B}$ 是一个 Serre 子范畴。在 [14, 第 17 页的例（b）], 中，验证了当 $\mathcal{A}=\mathrm{mod}(R)$ 且 $\mathcal{B}$ 是由理想 $I\subseteq R$所确定的 I-挠模的全子范畴时，这些条件成立。证明的关键在于使用 Artin-Rees 引理。

存在 ϕ的一个最终推论是，可以对两个 K-理论不变量$\alpha(\mathscr{L})$ 和 $\beta(\mathscr{L})$ 给出界；这两个不变量是在 [6] 中引入的（更多详情请参见第 2 节）。利用定理 3.5，可以证明，当 R 具有素特征时，$\beta(\mathscr{L})$ 因而 $\alpha(\mathscr{L})$ 可以由 R/I 的投射维数给出界，其中 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_{V(I)}$，且 I 是一个完美理想。

2. Preliminaries

下面固定一些记号：令 $d,n\in\mathbb{N}$ 和 $\mathcal{P}^d_m$ 为$[d]=\{1,\dots,d\}$的所有有序 m-子集组成的集合。令 $s_1,\dots,s_d\in R$。记 $\underline{s}^n=\{s_1^n,\dots,s_d^n\}$和 $\underline{s}=\underline{s}^1$。回顾一下，Koszul 复形 $K(\underline{s}^n)=\bigwedge(\oplus_{i=1}^d Re_i)$ 是一个微分分次代数，对所有i，都有 $\deg(e_i)=1$，且微分将 e_i 映到 s_i^n。因此，对所有 $n\in\mathbb{N}$，$K(\underline{s}^n)$ 上的代数结构都是外代数。

令 $M\in\mathrm{mod}(R)$。回顾一下，以$\underline{s}^n$ 为底、系数取自 M 的 Koszul 复形为$K(\underline{s}^n;M)=\big(K_m(\underline{s}^n;M),\partial^{K(\underline{s}^n;M)}_m\big)_{m=0}^d$，其中 $K_m(\underline{s}^n;M)=K_m(\underline{s}^n)\otimes_R M$，而 $\partial^{K(\underline{s}^n;M)}_m$是诱导映射。$K_m(\underline{s}^n;M)=\bigoplus_{\underline{i}\in\mathcal{P}^d_m} Me_{\underline{i}}$的典型元素形式为 $\sum_{\underline{i}\in\mathcal{P}^d_m} c_{\underline{i}}e_{\underline{i}}$，其中 $c_{\underline{i}}\in M$。一些作者将 $H_m(K(\underline{s}^n;M))$ 记作 $H_m(\underline{s}^n;M)$。

在引言中，我们展示了湮灭子理想链如何发挥作用的一个基本例子。类似地，模 $(0:_M s^t)$ 在本文中也将扮演重要角色。我们陈述这些子模的一些基本性质。

记号 2.1。由于 R 是诺特的，且 M 是有限生成的 R-模，对于每个 $s\in R$，M 的子模升链

$$(0:_M s)\subseteq\cdots\subseteq(0:_M s^t)\subseteq(0:_M s^{t+1})\subseteq\cdots$$

最终稳定。设 $l_i\in\mathbb{N}$ 满足：对所有 $k\in\mathbb{N}$，都有 $(0:_M s_i^{l_i})=(0:_M s_i^{l_i+k})$。我们定义

$$l=l(\underline{s}):=\max\{l_i\mid i\in[d]\}.$$

引理 2.2。 *(i) Let $k\geq 0$. Then* $\left(0:_M\left(\prod_{t\in[d]}s_t^{l+k}\right)\right)=\left(0:_M\left(\prod_{t\in[d]}s_t^{l}\right)\right)$.

(*ii*) 设 x、$y \in M$ 满足 s_i^l 整除 x 和 y。若 $s_i x = s_i y$，则 $x = y$。

证明。 (i) 设 $m \in M$ 使得 $\left(\prod_{t\in[d]} s_t^{l+k}\right) m = 0$。对于所有 $i \in [d]$，我们有 $(0 :_M s_i^{l_i}) = (0 :_M s_i^{l_i+k})$。因此 $s_d^l \left(\prod_{t\in[d-1]} s_t^{l+k}\right) m = 0$。继续归纳可得 $\left(\prod_{t\in[d]} s_t^l\right) m = 0$。因此，左端包含于右端。另一方向的包含显然成立，这就证明了 (i)。(ii) 由于 s_i^l 整除 x，且 y, $x - y = s_i^l z$ 对某个 $z \in M$ 成立。已知 $s_i(x - y) = 0$。因此$s_i^{l+1} z = 0$。根据 l 的定义，$s_i^l z = 0$。因此 $x - y = 0$，这意味着 $x = y$。□

Artin-Rees 引理与 Tor 模上的映射消失。

引理 2.3（Artin-Rees）。设 R 是一个交换诺特环，I 是 R 中的一个理想。设 M 是一个有限生成的 R-模，且 $N \subseteq M$。那么存在 $h \in \mathbb{N}$，使得对所有 $r \geq 0$,

$$I^{r+h} M \cap N = I^r (I^h M \cap N).$$

Artin-Rees 引理的一个较弱版本也常常很有用：

$$I^{r+h} M \cap N \subseteq I^r N.$$

引理 2.4。设 $I \subseteq R$ 是一个理想，$P_\bullet$ 是 M 的一个投射分解，$B_i \subseteq P_i$ 是 ∂_i^P 的像。那么

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, R/I) = \mathrm{Tor}_1^R(P_{i-1}/B_{i-1}, R/I) = (IP_{i-1} \cap B_{i-1})/IB_{i-1}.$$

证明。由 [20, 练习 2.4。3], $\mathrm{Tor}_i^R(M, -) = \mathrm{Tor}_1^R(Z_{i-2}, -)$，且由于 $P_\bullet$ 是正合的,

$$Z_{i-2} = B_{i-2} = P_{i-1}/Z_{i-1} = P_{i-1}/B_{i-1}.$$

这就证明了第一个等式。将 Tor 长正合列应用于正合列$0 \to B_{i-1} \to P_{i-1} \to P_{i-1}/B_{i-1} \to 0$，并注意到 $\mathrm{Tor}_1^R(P_{i-1}, R/I) = 0$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^R(P_{i-1}/B_{i-1}, R/I) &= \ker(B_{i-1} \otimes R/I \to P_{i-1} \otimes R/I) \\ &= \ker(B_{i-1}/IB_{i-1} \to P_{i-1}/IP_{i-1}) \\ &= (IP_{i-1} \cap B_{i-1})/IB_{i-1}.\end{aligned}$$

□

注记 2.5。由 Artin-Rees 引理，对于所有 $i \geq 1$，存在 $h(i) \in \mathbb{N}$ 使得对所有$r \geq 0$,

$$I^{r+h(i)} P_{i-1} \cap B_{i-1} \subseteq I^r B_{i-1}. \tag{2}$$

由引理 2.4，自然映射

$$(I^{r+h(i)} P_{i-1} \cap B_{i-1})/I^{r+h(i)} B_{i-1} \to (I^r P_{i-1} \cap B_{i-1})/I^r B_{i-1}$$

与自然映射相同

$$\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{r+h(i)}, M) \to \mathrm{Tor}_i^R(R/I^r, M).$$

上述 Tor 上的映射$_i$ 为零当且仅当 $I^{r+h(i)} P_{i-1} \cap B_{i-1} \subseteq I^r B_{i-1}$，由等式（2）可知这成立。这也表明等式（2）与投射分解无关。

作为直接推论，我们得到以下结果。

命题 2.6. 设 $I \subseteq R$ 为一个理想，M 为有限生成的 R-模。对所有 $i \geq 1$，存在 $h(i) \in \mathbb{N}$，使得对所有 $r \geq 1$，映射 $\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{r+h(i)}, M) \to \mathrm{Tor}_i^R(R/I^r, M)$为零。

在 [9] 和 [1], 方程（2）针对模 M的自由分解进行了研究。

定义 2.7。 [1] 设 R 是一个交换诺特环， M 是一个有限生成R-模。若存在一个自由分解 $P_\bullet$ 和一个统一整数 h，使得对所有 $r \geq 0$ 以及 $i \geq 0$，则称 M 相对于理想 I 具有同调维数意义下的 *Artin-Rees* 性质，

$$I^{r+h}P_i \cap B_i \subseteq I^r B_i. \tag{3}$$

在 [1, 推论 4.9], 中证明了，局部环中的任意有限生成模 M 相对于任意理想 I 都具有同调维数意义下的 Artin-Rees 性质，这回答了 [9]中的问题 B。文献 [2], 研究了 Tor 模之间映射的类似消失结论，其中使用了较弱版本的 Artin-Rees 引理。

如引言中所述，在第 3节的大部分内容中，我们将关键性地利用 Tor 模之间映射的消失，并将使用定义 2.7 及其评注来证明定理 3.12 及其推论。

交叉定理与 Cohen-Macaulay 环。 在本小节中，我们回顾两个广为人知、供后文使用的结果。以下结果归功于 Peskine-Szpiro 和 Roberts。

定理 2.8 (交叉定理)。 设 R 是一个局部环， M 和 N 是 R 上非零的有限生成模。若 $M \otimes_R N$ 有限长度，则 $\dim(N) \leq \mathrm{pd}(M)$。

一个直接且广为人知的推论是以下判据，它刻画了诺特局部环何时为 Cohen-Macaulay。

推论 2.9。 设 R 是一个诺特局部环。当且仅当 R 是 *Cohen-Macaulay* 环时，才存在一个非零、有限长度且投射维数有限的有限生成 R-模。

理想滤过与投射维数的渐近行为。

定义 2.10。 若滤过 $\{J_n\}$ 满足以下条件，则称其与 I 的 I-进滤过 $\{I^k\}$ 等价：对所有 $k \in \mathbb{N}$，存在 n 使得 $J_n \subseteq I^k$；并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，存在 k 使得 $I^k \subseteq J_n$。

等价地，滤过 $\{J_n\}$ 诱导出 I-进拓扑。

例 2.11. (i) 对于 R 中的理想 I，取其生成集$\underset{\sim}{s}$，定义 $I_s^{[r]} := (\underset{\sim}{s}^r)$。显然， $I_s^{[r]} \subseteq I^r$ 且 $I^{rd} \subseteq I_s^{[r]}$，其中 d表示序列$\underset{\sim}{s}$中的元素个数。因此，平方幂滤过 $\{I_s^{[n]}\}$ 等价于幂滤过 $\{I^k\}$。**(ii)** 对于正则环 R 及其理想 $I \subseteq R$，已知 I的符号幂滤过 $\{I^{(n)}\}$ 等价于 $\{I^k\}$([19, 定理 3.5])。事实上，关于 R 的假设还可以进一步减弱（[19, 命题 4.7]）。

注 2.12. 设 I 是 R 的一个理想，且$\underset{\sim}{s}$ 是 I的一个生成集。若 $\mathrm{char}(R) = p > 0$ 是素数，则 $I_s^{[p^n]}$是 I 的第 n 个 Frobenius 幂，因此与生成集$\underset{\sim}{s}$无关。记作 $I^{[p^n]}$。

下一个引理直接由 [16, 定理 1.7]得出。

引理 2.13. 设 $I \subseteq R$ 为一个理想，且$\mathrm{char}(R) = p > 0$，其中 p 为素数。若$\mathrm{pd}(R/I) < \infty$，则$\mathrm{pd}(R/I) = \mathrm{pd}(R/I^{[p^n]})$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$成立。

定义 2.14。 设 $I \subseteq R$ 是一个理想。若存在 $\{J_n\}$ 的一个滤过 I，等价于 $\{I^k\}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$均有投射维数$(R/J_n) < \infty$，则称理想 I 具有最终有限投射维数（***efpd***）。

注 2.15。若 I，$J \subseteq R$ 是满足 $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ 的理想，则 $\overline{I}$ 具有最终有限投射维数，当且仅当 J 具有最终有限投射维数。

我们讨论几类具有最终有限投射维数的理想。

例 2.16。(1) 当 R 是正则环时，每个理想都具有有限投射维数，因此每个理想都具有最终有限投射维数。

(2) 设 $\mathrm{char}(R) = p > 0$，其中 p 是素数且 $\mathrm{pd}(R/I) < \infty$。根据引理 2.13，对所有 R/I，有 $= \mathrm{pd}(R/I^{[p^n]})$。因此，由例 2.11(ii) 可知，$I$ 具有最终有限投射维数。

(3) 设 I 是一个集合论完全交理想，即存在一个正则序列 $a_1, \ldots\ldots, a_n$，使得 $\sqrt{(a_1, \ldots\ldots, a_n)} = \sqrt{I}$。由于对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$a_1^k, \ldots\ldots, a_n^k$ 也是一个正则序列，Koszul 复形 $K(a_1^k, \ldots\ldots, a_n^k)$ 是 $R/(a_1^k, \ldots\ldots, a_n^k)$ 的自由分解。因此，对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\mathrm{pd}(R/(a_1^k, \ldots\ldots, a_n^k)) < \infty$。所以每个集合论完全交理想都具有最终有限投射维数。

(4) 作为（3）的特例，Cohen-Macaulay 局部环中的极大理想具有最终有限投射维数。(5) 每个幂零理想都具有最终有限投射维数，因为滤过 $\{I^n\}$ 最终变为零。

(6) 设 R 是一个 Artin 环，且对于某个 $t \geq 1$，有 $Maxspec(R) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t\}$。那么存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $R \cong R/\mathfrak{m}_1^n \times \cdots \times R/\mathfrak{m}_t^n$ 且 $(\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_t)^n = 0$。我们断言，每个理想 $I \subseteq R$ 都具有最终有限投射维数。不失一般性，可假设 I 是一个根理想。因此，对于某个子集 $\Lambda \subseteq [t]$，有 $I = \prod_{i \in \Lambda} \mathfrak{m}_i$。若 R 是一个局部环，则 $I_{i \in \Lambda}$ 是幂零的极大理想。因此，I 具有最终有限投射维数。假设 R 中有多个极大理想。那么我们可以假设 $\Lambda \subset [t]$ 是任意一个非空真子集。于是对于所有的 $k \geq n$，

$$I^k = \prod_{i \in \Lambda} \mathfrak{m}_i^k \cong \prod_{j \in [t] \setminus \Lambda} R/\mathfrak{m}_j^k \cong \prod_{j \in [t] \setminus \Lambda} R/\mathfrak{m}_j^n$$

是一个投射 R-模。因此 I 具有最终有限投射维数。

(7) 设 $f\colon R \to S$ 是一个平坦环同态，且 $I \subseteq R$ 具有最终有限投射维数。则存在 I 的一个滤过 $\{J_n\}$，使得 $\mathrm{pd}_R(R/J_n) < \infty$，且 $\{J_n\}$ 与 $\{I^k\}$ 等价。因此 $\mathrm{pd}_S(S/(J_nS)) < \infty$，且 $\{J_nS\}$ 与 $\{(IS)^k\}$ 等价。由此，$IS \subseteq S$ 具有最终有限投射维数。

(8) 若 $I \subseteq R$ 具有最终有限投射维数，则对所有 $\mathfrak{p} \in Spec(R)$，$I_{\mathfrak{p}} \subseteq R_{\mathfrak{p}}$ 都具有最终有限投射维数，因为局部化是平坦的。

(9) 设 $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4]_{\mathfrak{m}}/(x_1x_4 - x_2x_3)$，其中 $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，且 $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$。Dutta-Hochster-McLaughlin[8] 的构造表明，存在一个 R-模 M，其有限长度且有限投射维数，并且对于某个模 N，交数 $\chi_R(M, N) < 0$。若存在从正则局部环到 R 的平坦局部环同态，则可推出 $\chi_R(M, N) \geq 0$。因此，不存在从任何正则局部环到 R 的平坦局部环同态。由于 R 有一个有限长度且有限投射维数的模，推论 2.9 蕴含 R 是一个 Cohen-Macaulay 局部环。因此 $\mathfrak{m}R \subseteq R$ 具有最终有限投射维数。由此，我们得到了一个具有最终有限投射维数的理想的例子，它并非在平坦映射下由正则局部环扩张而来。

稍后在第 4 节中，我们将证明，诺特局部环中的极大理想具有最终有限投射维数，当且仅当该环是 Cohen-Macaulay。我们还给出任意理想具有最终有限投射维数的一个必要条件。

E例 2.17. 令 $R = k[X, Y]/(XY)$。R 中的理想 (X) 不具有最终有限投射维数 .

mod(R) 的子范畴。我们用 $\mathrm{mod}(R)$ 表示有限生成的 R 模所构成的范畴。

定义 2.18。*(1) mod(*$\mathrm{mod}(R)$ 的 *Serre* 子范畴记为 $\mathscr{L}$，它是 *mod(*$\mathrm{mod}(R)$ 的一个全子范畴，并且对于 *mod(*$\mathrm{mod}(R)$ 中的任意短正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$， $M \in \mathscr{L}$ 当且仅当 $M', M'' \in \mathscr{L}$。

(2) 若集合 $V \subseteq Spec(R)$ 是若干闭集的并，则称其为特化闭集。*(3)* 给定一个特化闭集 V，存在一个相应的 *Serre* 子范畴，定义为

$$\mathscr{L}_V = \{M \in \mathrm{mod}(R) \mid Supp(M) \subseteq V\}.$$

(4) 给定一个 *Serre* 子范畴 $\mathscr{L}$，存在一个相应的特化闭集，定义为

as

$$V_{\mathscr{L}} = \bigcup_{M \in \mathscr{L}} \mathrm{Supp}(M).$$

Re标记 2.19。 [11] 显然，$\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}_{V_{\mathscr{L}}}$。设 $M \in \mathscr{L}_{V_{\mathscr{L}}}$。那么，根据定义 ，

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M) \subseteq V_{\mathscr{L}} = \bigcup_{M' \in \mathscr{L}} \mathrm{Supp}(M').$$

因此，对于每个 $\mathfrak{p} \in$Ass(M)，都存在一个模 $M' \in \mathscr{L}$，使得 $\mathfrak{p} \in$Supp(M')。由于$\mathscr{L}$是一个 Serre 子范畴，因此可得 $R/\mathfrak{p} \in \mathscr{L}$，因为它是 M'的某个关联素理想的商，而该关联素理想属于 $\mathscr{L}$，因为它是 M'的子模。利用 M 存在有限滤过这一事实，该滤过的商为 $R/\mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{p} \in$ Ass(M)，我们得到 $M \in \mathscr{L}$，进而得到 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V_{\mathscr{L}}}$。

定义 2.20。若满子范畴 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{mod}(R)$ 满足以下条件，则称其为解消子范畴：

(1) R 属于 $\mathcal{A}$。*(2)* $M \oplus N \in \mathcal{A}$ 当且仅当 M 和 N 属于 $\mathcal{A}$。*(3)* 若 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$是一个正合列，且 $M'' \in \mathcal{A}$，则 $M \in \mathcal{A}$当且仅当 $M' \in \mathcal{A}$。

因此，有限生成的投射 R-模 $\mathcal{P}$ 构成的范畴包含于任意解消子范畴。解消子范畴的一些例子包括 $\mathcal{P}$，mod(R)、Gorenstein 维数为零的模（也称为全反身模）构成的范畴，以及 Cohen-Macaulay 局部环中极大 Cohen-Macaulay（MCM）模构成的范畴。关于解消子范畴的基本性质和论述，可见 [7] 和 [17]。这些文章对 mod(R) 的解消子范畴全体进行了分类，特别指出 mod(R) 有许多解消子范畴。

定义 2.21. 满子范畴 $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}(R)$ 是$\mathrm{mod}(R)$ 的厚子范畴，当且仅当它是解消子范畴，并且对于$\mathrm{mod}(R)$中的任意正合列，

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

$M, M' \in \mathcal{T}$推出 $M'' \in \mathcal{T}$。

注 2.22. 令 $\Omega^i M$ 表示 M的 i^{th} Syzgy。对于解消子范畴 $\mathcal{A}$，定义闭包 $\overline{\mathcal{A}} = \{M \in$mod($R$) | $\Omega^{\gg 0} M \in \mathcal{A}\}$。则 $\overline{\mathcal{A}}$ 是 mod(R) 的厚子范畴。

例 2.23. 以下是 mod(R) 的一些厚子范畴，它们是由解消子范畴取闭包得到的。

(1) $\overline{\mathcal{P}}$是有限生成模中具有有限投射维数的模所构成的范畴。(2) Gorenstein 维数为零的模的闭包，是 mod(R) 中具有有限 Gorenstein 维数的模所构成的满子范畴。(3) 当 R是 Cohen-Macaulay 局部环时， ~~$MCM(R)$~~ = mod(R)。

我们固定使用以下记号：对于 $X_\bullet \in Ch^b$(mod(R)),

(1) 对所有 $i < n\}$, $\min_i(X_\bullet) = \sup\{n \mid P_\bullet = 0$

(2) $\min(X_\bullet) = \sup\{n \mid H_i(X_\bullet) = 0 \text{ for all } i < n\}$
(3) $\operatorname{Suppi}(X_\bullet) = \{n \mid H_n(X_\bullet) \neq 0\}$
(4) $\operatorname{Width}(X_\bullet) = \begin{cases} \sup\{i-j \mid H_i(X_\bullet), H_j(X_\bullet) \neq 0\} & \text{if } X_\bullet \text{ is not acyclic} \\ -\infty & \text{if } X_\bullet \text{ is acyclic} \end{cases}$
(5) $\mathrm{W}(X_\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{if } \operatorname{Width}(X_\bullet) = -\infty \\ \operatorname{Width}(X_\bullet) & \text{otherwise} \end{cases}$
(6) $\Sigma X_\bullet$ denotes the shift of the complex $X_\bullet$, that is, $(\Sigma X_\bullet)_k = (X_\bullet)_{k+1}$

关于 K_0 某些范畴的在 [6], 稳定范围 $\alpha(\mathscr{L})$ 中， K_0 相对于一个 Serre 子范畴 $\mathscr{L}$ of $\operatorname{mod}(R)$ 以及一个可计算不变量 $\beta(\mathscr{L}) \geq \alpha(\mathscr{L})$ 已被引入并加以研究。下面我们回顾与本文相关的 $\beta(\mathscr{L})$ 的定义和结果。稍后在第 3 节中，我们将在某些情况下给出 $\beta(\mathscr{L})$ 的界。

定义 2.24. *(1)* 设 $k \geq 1$ 和 $P_\bullet \in Ch_{\mathscr{L}}^{[0,k]}(\mathcal{P})$。若一对 $(Q_\bullet, u)$ 是 $P_\bullet$ 的约化子，且 $Q_\bullet \in Ch_{\mathscr{L}}^{[0,k-1]}(\mathcal{P})$，并且 $u : Q_\bullet \to P_\bullet$ 是一个链复形映射，使得$u_0 : Q_0 \to P_0$ 是满射，则称其为 $P_\bullet$ 的约化子。*(2)* $\beta(\mathscr{L}) = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid$ 每个 $P_\bullet \in Ch_{\mathscr{L}}^{[0,k]}(\mathcal{P})$ 都有一个约化子，对所有 $k > m\}$均如此。

回顾记号 $\underset{\sim}{s} = s_1, \ldots, s_d$。仔细观察，并用 [10, 命题 23]的链复形的对偶重新表述，可得下面的引理。

引理 2.25. 设 $I = (\underset{\sim}{s})$ 是一个理想，且 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$。对于 $P_\bullet \in Ch_{\mathscr{L}}^{-}(\mathcal{P})$，存在$r \in \mathbb{N}$ 和一个链复形映射 $\Psi : K(\underset{\sim}{s}^r; P_0) \to P_\bullet$，使得 Ψ_0 是一个同构。

引理 2.25 以这种形式发挥了关键作用，见 [18]，随后在 [6] 中用于得到第一个约化子的例子，同时也推出了下一个引理的陈述 (2)。

引理 2.26. [6] 设 $I = (\underset{\sim}{s})$ 是一个理想，且 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$。
(1) 当 $\mathscr{L} \neq 0$ 时，级$(I) \leq \beta(\mathscr{L})$。
(2) $\beta(\mathscr{L}) \leq d$。

[6, 定理 6.3] 的一个直接推论如下所述。

引理 2.27. 若 级$(I) = \beta(\mathscr{L})$ 则 $K_0(\mathcal{P} \cap \mathscr{L}) \cong K_0(D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{P}))$。

注 2.28. 回顾一下， $\beta(\mathscr{L}_{V(I)})$ 的上界为 $\limsup \left\{\operatorname{pd}(R/I^{[r]}_{\underset{\sim}{s}}) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$，如 [6, 定理 5.1] 所证。注意，同一证明表明，对于任何与 $\{I^k\}$等价的滤过 $\{J_n\}$，都可以得到这个界，即

$$\beta(\mathscr{L}_{V(I)}) \leq \limsup \{\operatorname{pd}(R/J_n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

注意，上述不等式右侧也是局部上同调 $H^i_I(M)$ 非消失的上界，其中 M 是一个 R-模，因为它是 $\operatorname{Ext}^i_R(R/J_n, M)$ 的直极限。

后续使用的记号。下面汇总本文其余部分将用到的一些记号。

- $\underset{\sim}{i} = \{i_1, \ldots, i_m\} \in \mathcal{P}^d_m$ with $i_j < i_{j+1}$.
- $e_{\underset{\sim}{i}} := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$.
- $P_{\underset{\sim}{i}}$: the R-linear map $\bigoplus_{\underset{\sim}{i} \in \mathcal{P}^d_m} M e_{\underset{\sim}{i}} \to M$ where $\sum_{\underset{\sim}{i} \in \mathcal{P}^d_m} c_{\underset{\sim}{i}} e_{\underset{\sim}{i}}$ maps to $c_{\underset{\sim}{i}}$.
- $\underset{\sim}{i} \sqcup k$: the $(m+1)$-ordered subset containing $\underset{\sim}{i}$ and k where $k \notin \underset{\sim}{i}$.

- $\kappa^{n,k}$：从 $K(\underset{\sim}{s}^n; M)$ 到 $K(\underset{\sim}{s}^k; M)$ 的链复形映射，其中 $\kappa^{n,k}_m$ 对所有 $\underset{\sim}{i} \in \mathcal{P}^d_m$ 都将 $e_{\underset{\sim}{i}}$ 映射为 $(s_{i_1} \cdots s_{i_m})^{n-k} e_{\underset{\sim}{i}}$，且 $m \in [d]$ 满足 $n \geq k > 0$。
- l：子模链 $(0 :_M s_i^t)$ 的公共稳定点（定义见记号 2.1）。

注意，对于 $n \geq t \geq k$, $\kappa^{n,k} = \kappa^{t,k} \circ \kappa^{n,t}$。当 $M = R$, $\kappa^{n,k}$ 是微分分次代数的映射。

3. Factoring κ through the Tate resolution

本节中，我们定义塔特分解，并证明主定理：如引言中所述，存在从适当的塔特分解到 Koszul 复形的映射。我们首先给出一个关于 Koszul 同调上映射消失的引理。

引理 3.1. 存在 $h \in \mathbb{N}$，使得对所有 $r \geq 1$，映射

$$H_i(\kappa^{h+rd,r}) : H_i(K(\underset{\sim}{s}^{h+rd}; M)) \longrightarrow H_i(K(\underset{\sim}{s}^r; M))$$

对所有对象均为零 $i \geq 1$。对于 $i = 0$，该映射是自然满射 $M/(\underset{\sim}{s}^{h+rd})M \to M/(\underset{\sim}{s}^r)M$.

证明。令 $S = R[X_1, \ldots, X_d]$ 为多项式环，令 $f\colon S \to R$ 为将 X_i 映射到 s_i 的环映射。我们通过 f 将 S-模结构赋予 M，记为 ${}_SM$。于是，对于所有 $h \geq 0$，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Tor}_i^S(S/(X_1^{h+rd}, \ldots, X_d^{h+rd}), {}_SM) & \xrightarrow{\cong} & H_i(K(X_1^{h+rd}, \ldots, X_d^{h+rd}; {}_SM)) & \xrightarrow{\cong} & H_i(K(\underset{\sim}{s}^{h+rd}; M)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Tor}_i^S(S/(X_1^r, \ldots, X_d^r), {}_SM) & \xrightarrow{\cong} & H_i(K(X_1^r, \ldots, X_d^r; {}_SM)) & \xrightarrow{\cong} & H_i(K(\underset{\sim}{s}^r; M))
\end{array}$$

由于 Koszul 复形集中在从零到 d 的次数上，因此只需证明：对于所有 $1 \leq i \leq d$，存在 $h \geq 0$ 使得

$$\mathrm{Tor}_i^S(S/(X_1^{h+rd}, \ldots, X_d^{h+rd}), {}_SM) \to \mathrm{Tor}_i^S(S/(X_1^r, \ldots, X_d^r), {}_SM) \tag{4}$$

是零映射。由于自然满射 $S/(X_1^{h+rd}, \ldots, X_d^{h+rd}) \twoheadrightarrow S/(X_1^r, \ldots, X_d^r)$ 通过 $S/(X_1, \ldots, X_d)^{h+rd} \twoheadrightarrow S/(X_1, \ldots, X_d)^{rd}$ 分解，如果自然映射 $\mathrm{Tor}_i^S(S/(X_1, \ldots, X_d)^{h+rd}, {}_SM) \to \mathrm{Tor}_i^S(S/(X_1, \ldots, X_d)^{rd}, {}_SM)$ 为零，则 (4) 中的映射为零。利用命题 2.6 及指数 rd，对于每个 $1 \leq i \leq d$，存在 $h(i) \in \mathbb{N}$，使得对于所有$r \geq 1$，该映射

$$\mathrm{Tor}_i^S(S/(X_1, \ldots, X_d)^{h(i)+rd}, {}_SM) \to \mathrm{Tor}_i^S(S/(X_1, \ldots, X_d)^{rd}, {}_SM)$$

为零。取 $h = \max\{h(i) \mid 1 \leq i \leq d\}$，我们得到

$$\mathrm{Tor}_i^S(S/(X_1, \ldots, X_d)^{h+rd}, {}_SM) \to \mathrm{Tor}_i^S(S/(X_1, \ldots, X_d)^{rd}, {}_SM)$$

对所有 $1 \leq i \leq d$ 都是零映射。 □

在本节余下部分，我们固定上文得到的整数 h（它依赖于 M 和 $\underset{\sim}{s}$），即对所有 $r \geq 1$,

$$H_i(\kappa^{h+rd,r}) : H_i(K(\underset{\sim}{s}^{h+rd}; M)) \longrightarrow H_i(K(\underset{\sim}{s}^r; M))$$

对所有 $1 \leq i \leq d$ 都是零映射。以下关于元素的整除性的技术引理将用于定理 3.5 中的归纳命题。

引理 3.2. 给定 $n \geq 1$, $r \geq 1$，存在 $v := q(n, r) = h + (n + r)d$，使得对于所有$m \geq 1$ 以及 $x \in$ 核 $\left(\partial^{K(\underset{\sim}{s}^v;\ M)}\right)$，都存在 $y \in K_{m+1}(\underset{\sim}{s}^r;\ M)$，使得：

(a) $\partial_{m+1}^{K(\underset{\sim}{s}^r;M)}(y)^m = \kappa_m^{v,r}(x)$.

(b) $P_{\underset{\sim}{j}}(y)$ *is divisible by* $\prod_{j\in\underset{\sim}{j}} s_j^n$ *for all* $\underset{\sim}{j}\in\mathcal{P}_{m+1}^d$.

证明。由引理 3.1 可知，自然映射 $H_m(\kappa^{v,n+r}): H_m(K(\underset{\sim}{s}^v;\ M)) \to H_m(K(\underset{\sim}{s}^{n+r};\ M))$ 对所有 $m\geq 1$ 都为零。因此，对于所有 $x\in$ 核 $\left(\partial_m^{K(\underset{\sim}{s}^v;\ M)}\right)$，我们得到 $\kappa^{v,n+r}_m(x)\in B_m(K(\underset{\sim}{s}^{n+r};\ M))$，其中 $B_m(K(\underset{\sim}{s}^{n+r};\ M))$ 表示 $\mathrm{Im}(\partial_{m+1}^{K(\underset{\sim}{s}^{n+r};M)})$。因此，下面的交换图表明 $\kappa^{v,r}_m(x)\in B_m(K(\underset{\sim}{s}^r;\ M))$。

$$\begin{array}{ccccc} K_{m+1}(\underset{\sim}{s}^{n+r};M) & \xrightarrow{\kappa_{m+1}^{n+r,r}} & K_{m+1}(\underset{\sim}{s}^{r};M) & \xrightarrow{P_{\underset{\sim}{i}}} & \left(\prod_{i\in\underset{\sim}{i}} s_i^{n-1}\right)M \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_{m+1}^{K(\underset{\sim}{s}^{n+r};M)}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{m+1}^{K(\underset{\sim}{s}^{r};M)}} & & \\ \ker\left(\partial_m^{K(\underset{\sim}{s}^{v};M)}\right) & \xrightarrow[(Lemma\ 3.1)]{\kappa_m^{v,n+r}} B_m(K(\underset{\sim}{s}^{n+r};M)) & \xrightarrow{\kappa_m^{n+r,r}} & B_m(K(\underset{\sim}{s}^{r};M)) & \end{array}$$

由于 $\kappa^{v,n+r}_m(x)\in B_m(K(\underset{\sim}{s}^{n+r};\ M))$，存在 $z=\sum_{\underset{\sim}{j}\in\mathcal{P}_{m+1}^d} c_{\underset{\sim}{j}}e_{\underset{\sim}{j}}\in K_{m+1}(\underset{\sim}{s}^{n+r};\ M)$，使得 $\partial^{K(\underset{\sim}{s}^{n+r};M)}_{m+1}(z)=\kappa^{v,n+r}_m(x)$。令 $y:=\kappa^{n+r,r}_{m+1}(z)$。则 $\partial^{K(\underset{\sim}{s}^{r};M)}_{m+1}(y)=\kappa^{v,r}_m(x)$。此外，

$$y=\sum_{\underset{\sim}{j}\in\mathcal{P}_{m+1}^d}\left(\prod_{j\in\underset{\sim}{j}} s_j^n\right)c_{\underset{\sim}{j}}e_{\underset{\sim}{j}} \quad\text{and hence}\quad P_{\underset{\sim}{j}}(y)=\left(\prod_{j\in\underset{\sim}{j}} s_j^n\right)c_{\underset{\sim}{j}} \quad \text{for all } \underset{\sim}{j}\in\mathcal{P}_{m+1}^d.$$

□

定理 3.3。令 $r\geq 1, m\geq 1$ 和 $x=\sum_{\underset{\sim}{i}} x_{\underset{\sim}{i}}e_{\underset{\sim}{i}}\in$ 核 $\left(\partial^{K(\underset{\sim}{s}^{r};\ M)}_m\right)$。假设对每个 $\underset{\sim}{i}\in\mathcal{P}_m^d$，$x_{\underset{\sim}{i}}$ 都能被 $\prod_{i\in\underset{\sim}{i}} s_i^{l+n}$ 整除。那么存在 $y\in$ 核 $\left(\partial^{K(\underset{\sim}{s}^{n+r};\ M)}_m\right)$，使得 $x=\kappa^{n+r,r}_m(y)$。

证明。我们首先考虑 $m=1$ 的情形。此时 $x=\sum_{i=1}^d x_ie_i$ 和 $\partial^{K(\underset{\sim}{s}^{r};M)}_1(x)=\sum_{i=1}^d s_i^rx_i=0$。由于 s_i^{l+n} 整除 x_i，存在 $c_i\in M$ 使得对所有 $i\in[d]$ 都有 $x_i=s_i^{l+n}c_i$。定义 $y=\sum_{i=1}^d s_i^lc_ie_i\in K_1(\underset{\sim}{s}^{n+r};\ M)$。于是 $\partial^{K(\underset{\sim}{s}^{n+r};M)}_1(y)=\sum_{i=1}^d s_i^{l+n+r}c_i=\sum_{i=1}^d s_i^rx_i=0$。此外，$\kappa^{n+r,r}_1(y)=\sum_{i=1}^d s_i^{l+n}c_ie_i=x$，从而证明了此情形下的结论。

考虑 $m\geq 2$ 的情形。由于 $x=\sum_{\underset{\sim}{i}\in\mathcal{P}_m^d} x_{\underset{\sim}{i}}e_{\underset{\sim}{i}}\in\ker\left(\partial^{K(\underset{\sim}{s}^{r};\ M)}_m\right)$，我们有

$$\sum_{\underset{\sim}{j}\in\mathcal{P}_{m-1}^d}\left(\sum_{k\in[d]\setminus\underset{\sim}{j}}(-1)^{\tau(k,\underset{\sim}{j})+1}s_k^rx_{(\underset{\sim}{j}\sqcup k)}\right)e_{\underset{\sim}{j}}=0 \tag{5}$$

其中，$\tau(k,\underset{\sim}{j})$表示 k 在有序集 $\underset{\sim}{j}\sqcup k$ 中的位置。因此，对于每个 $\underset{\sim}{j}\in\mathcal{P}_{m-1}^d$，

$$\sum_{k\in[d]\setminus\underset{\sim}{j}}(-1)^{\tau(k,\underset{\sim}{j})+1}s_k^rx_{(\underset{\sim}{j}\sqcup k)}=0. \tag{6}$$

由于 $\prod_{t\in \underset{\sim}{i}} s_t^{l+n}$ 整除 $x_{\underset{\sim}{i}}$，我们得到 $x_{\underset{\sim}{i}} = \left(\prod_{t\in \underset{\sim}{i}} s_t^{l+n}\right) x'_{\underset{\sim}{i}}$，其中 $x'_{\underset{\sim}{i}} \in M$。因此，对于每个 $\underset{\sim}{j} \in \mathcal{P}_{m-1}^d$ 以及 $k \in [d]\setminus \underset{\sim}{j}$，我们得到

$$0 = \sum_{k\in[d]\setminus \underset{\sim}{j}} (-1)^{\tau(k,\underset{\sim}{j})+1} s_k^r x_{(\underset{\sim}{j}\sqcup k)} = \sum_{k\in[d]\setminus \underset{\sim}{j}} (-1)^{\tau(k,\underset{\sim}{j})+1} s_k^r \left(\prod_{t\in(\underset{\sim}{j}\sqcup k)} s_t^{l+n}\right) x'_{(\underset{\sim}{j}\sqcup k)}$$
$$= \left(\prod_{t\in \underset{\sim}{j}} s_t^l\right)\left(\prod_{t\in \underset{\sim}{j}} s_t^n\right) \sum_{k\in[d]\setminus \underset{\sim}{j}} (-1)^{\tau(k,\underset{\sim}{j})+1} s_k^{n+r}(s_k^l x'_{(\underset{\sim}{j}\sqcup k)}).$$

由引理 2.2，对于所有 $n \geq 1$，$\left(0 :_M \left(\prod_{t\in \underset{\sim}{j}} s_t^{n+l}\right)\right) = \left(0 :_M \left(\prod_{t\in \underset{\sim}{j}} s_t^{l}\right)\right)$。因此，

$$\left(\prod_{t\in \underset{\sim}{j}} s_t^l\right) \sum_{k\in[d]\setminus \underset{\sim}{j}} (-1)^{\tau(k,\underset{\sim}{j})+1} s_k^{n+r}(s_k^l x'_{(\underset{\sim}{j}\sqcup k)}) = 0.$$

Take $y_{\underset{\sim}{i}} = \left(\prod_{t\in \underset{\sim}{i}} s_t^l\right) x'_{\underset{\sim}{i}}$. Observe that $x_{\underset{\sim}{i}} = \left(\prod_{t\in \underset{\sim}{i}} s_t^n\right) y_{\underset{\sim}{i}}$. Define $y := \sum_{\underset{\sim}{i}\in\mathcal{P}_m^d} y_{\underset{\sim}{i}} e_{\underset{\sim}{i}} \in K_m(\underset{\sim}{s}^{n+r}; M)$.

于是，对于所有 $j \notin \mathcal{P}_{m-1}$，上述等式给出

$$\sum_{k\in[d]\setminus \underset{\sim}{j}} (-1)^{\tau(k,\underset{\sim}{j})+1} s_k^{n+r} y_{(\underset{\sim}{j}\sqcup k)} = 0.$$

因此 $y \in \ker\left(\partial^{K(\underset{\sim}{s}^{n+r};\ M)}_{m}\right)$。显然 $\kappa^{n+r,\ m}{}^{r}(y) = x$。 □

定义 3.4。设 $\underset{\sim}{f} = f_1 \ldots, f_n \in R$。借鉴塔特分解的构造（例如参见 [3]），我们现在构造一个链复形 $T'(\underset{\sim}{f};\ M)$。定义

$$T'_i(\underset{\sim}{f}; M) = \begin{cases} 0 & if\ \ i < 0 \\ K_i(\underset{\sim}{f}; M) & if\ \ i = 0, 1 \\ K_i(\underset{\sim}{f}; M) \oplus R^{t_i} & if\ \ i \geq 2 \end{cases}$$

其中，微分和 t_i 归纳定义如下：

$\partial^{T'(\underset{\sim}{f};M)}{}_1 := \partial^{K(\underset{\sim}{f};M)}{}_1$. 选取 $Z_1(T'(\underset{\sim}{f};\ M))$ 的一个生成集 S_1，并定义 $t_2 = |S_1|$。假设对所有 $j \leq r-1$，微分 $\partial^{T'(\underset{\sim}{f};M)}{}_j$ 均已定义，已选取 $Z_j(T'(\underset{\sim}{f};\ M))$ 的生成集 S_j，且 $t_{j+1} = |S_j|$。定义 $\partial^{T'(\underset{\sim}{f};M)}{}_r$ 为 $\partial^{T'(\underset{\sim}{f};M)}{}_r |_{K_r(\underset{\sim}{f};M)} = \partial^{K(\underset{\sim}{f};M)}{}_r$，并且 $\partial^{T'(\underset{\sim}{f};M)}{}_r$ 将 R^{t_r} 的一组基映射到 $Z_{r-1}(T'(\underset{\sim}{f};\ M))$ 的集合 S_{r-1}。选取 $Z_r(T'(\underset{\sim}{f};\ M))$ 的一个生成集 S_r，并定义 $t_{r+1} = |S_r|$。

注意，$T'(\underset{\sim}{f};\ M)$ 满足以下性质：

(1) $K(\underset{\sim}{f};\ M)$ 是 $T'(\underset{\sim}{f};\ M)$ 的子复形。

(2) 对所有 $i \geq 1$，$H_i(T'(\underset{\sim}{f};\ M)) = 0$，且 $H_0(T'(\underset{\sim}{f};\ M)) = M/(\underset{\sim}{f})M$。

为了获得 dg R-代数结构，对上述构造作稍加增强（当 $M = R$ 时），所得结果恰好是 [3], 中定义的关于 $R/(\underset{\sim}{f})$ 的塔特分解，我们将其记为 $T(\underset{\sim}{f})$。现在我们已做好准备陈述并证明主定理。

定理 3.5. 给定 $r \geq 1$，存在一个链复形映射 $\phi: T'(\underline{s}^{u(r)}; M) \to K(\underline{s}^r; M)$，满足 $\phi|_{K(\underline{s}^{u(r)};M)} = \kappa^{u(r)}$，对于 $u(r) = (h+l)\left(\sum_{j=0}^{d-1} d^j\right) + rd^d$。特别地，存在一个链复形映射 $\phi: T(\underline{s}^{u(r)}) \to K(\underline{s}^r)$，使得 $\phi_0 = \kappa^{u(r)}_{0}{}^{r} = id_R$。

证明。回顾记号 $q(n, r) = h + (n+r)d$，来自引理 3.2。定义

$$q^{(i)} = \begin{cases} q(0,r) - r = h + rd - r & \text{if } i = 0 \\ q(q^{(i-1)} + l, r) - r & \text{if } i \geq 1 \end{cases}.$$

断言：对于 $i \geq 0$，$q^{(i)} = h\left(\sum_{j=0}^{i} d^j\right) + rd^{i+1} + l\left(\sum_{j=0}^{i-1} d^j\right) d - r$。

该断言在基例 $i = 0$ 中显然成立，并且如下面的计算所示可通过归纳法得到：

$$\begin{aligned} q^{(i+1)} = q(q^{(i)} + l, r) - r &= h + \left(h\left(\sum_{j=0}^{i} d^j\right) + rd^{i+1} + l\left(\sum_{j=0}^{i-1} d^j\right) d - r + l + r\right) d - r \\ &= h\left(\sum_{j=0}^{i+1} d^j\right) + rd^{i+2} + l\left(\sum_{j=0}^{i} d^j\right) d - r. \end{aligned}$$

Therefore $q^{(d-1)} + l + r = h\left(\sum_{j=0}^{d-1} d^j\right) + rd^d + l\left(\sum_{j=0}^{d-2} d^j\right) d + l = (h+l)\left(\sum_{j=0}^{d-1} d^j\right) + rd^d = u(r)$.

在本证明的其余部分中，我们将 u_r 简写为 $u(r)$。现在我们着手构造 ϕ。对于 $m = 0$，定义 ϕ_0 为恒等映射。对于 $m > d$，零映射是唯一可能的映射。对于 $1 \leq m \leq d$，我们将归纳定义 ϕ_m，使得

(a) $\phi_{m-1}\partial_m^{T'(\underline{s}^u;M)} = \partial_m^{K(\underline{s}^r;M)}\phi_m$
(b) $\phi_m|_{K_m(\underline{s}^u;M)} = \kappa_m^{u,r}$
(c) $P_{\underline{i}}\phi_m$ is divisible by $\prod_{i \in \underline{i}} s_i^{q^{(d-m)}+l}$ for all $\underline{i} \in \mathcal{P}_m^d$.

然后，我们将证明，所构造的映射 $P_{\underline{i}}\phi_d$ 可被 $\prod_{i \in \underline{i}} s_i^{q^{(0)}+l}$ 整除，这将蕴含 $\phi_d\partial^{T'(\underline{s}^u M)}_{d+1} = 0 = \partial^{K(\underline{s}^r;);M)}_{d+1}\phi_{d+1}$，从而完成证明。

在基例 $m = 1$ 中，注意到 $T_1(\underline{s}^u; M) = M^{\oplus d_i} \cong \bigoplus_i Me_i$ 因此，我们可以通过延拓 $\phi_1(e_i) = s_i^{u-r}e_i$ 来定义 ϕ_1。于是 $\phi_0\partial^{T'(\underline{s}^u M)}_1 = \partial^{K(\underline{s}^r;);M)}_1\phi_1$，$\phi_1|_{K_1(\underline{s}^u;M)} = \kappa^{u,r}_1$ 并且 $P_i\phi_1$ 可被 $s_i^{q^{(d-1)}+l}$ 整除，即条件 (a)、(b) 和 (c) 成立。

假设对于 $1 \leq t < m \leq d$ 存在 ϕ_t，使得条件 (a)、(b) 和 (c) 成立。回忆 $T'_m(\underline{s}^u; M) = K_m(\underline{s}^u; M) \oplus R^{t_m}$。我们将在每个直和项上分别定义 ϕ_m，并检查上述条件 (a)、(b) 和 (c) 在各个直和项上均得到满足。定义 $\phi_m|_{K_m}(\underline{s}^u; M) := \kappa^{u,r}_m$。由于根据定义 $\partial^{T'(\underline{s}^u M}_m|_{K_m};) (\underline{s}^u; M) = \partial^{K(\underline{s}^u; M)}_m$，且 $\kappa^{u,r}_m$ 是链复形映射，$\phi_{m-1}\partial^{T'(\underline{s}^u M}_m|_{K_m};) (\underline{s}^u; M) = \partial^{K(\underline{s}^u; M)}_m\phi_m|_{K_m}(\underline{s}^u; M)$。由于对于所有 $i \in \underline{i}$，$P_{\underline{i}}\kappa^{u,r}_m$ 都可被 $\prod_{i \in \underline{i}} s_i^{u-r}$ 整除 $\underline{i} \in \mathcal{P}_m^d$ 并且 $u - r \geq q^{(d-m)} + l$，对于直和项 $K_m(\underline{s}^u; M)$，条件 (c) 成立。设 x 是自由 R-模 $R^{t_m} \subseteq T'_m(\underline{s}^u; M)$ 的一个基元素。由归纳法，$\phi_{m-1}\partial_m^{T'(\underline{s}^u;M)}(x) \in$

$\ker\left(\partial^{K(\underset{\sim}{s}^r;\quad M}\right)$) 和 $P_{\underset{\sim}{i}}\phi_{m-1}\partial_m^{T'}(\underset{\sim}{s}^u;M)(x)$ 可被 $\prod s_i^{q^{(d-m+1)}+l}$ 整除。由定理 3.3，$i\in i_{\sim}$存在 $z\in\ker\left(\partial_{m-1}^{K(\underset{\sim}{s}^{q^{(d-m+1)}+r}\ M}\right)$;)，使得 $\kappa^{q^{(d-m+1)}+r}{}_{,m-1}{}^{r}(z)=\phi_{m-1}\partial^{T'}(\underset{\sim}{s}^u;M)_m(x)$。由于 $q^{(d-m+1)}+r=q(q^{(d-m)}+l,r)$ 且 $z\in\ker\left(\partial_{m-1}^{K(\underset{\sim}{s}^{q^{(d-m+1)}+r}\ M}\right)$;)，引理 3.2 推出存在 $y\in K_m(_{\sim}s^r;M)$，使得 $\partial^{K(\underset{\sim}{s}^r;M)}{}_m(y)=\kappa^{q^{(d-m+1)}+r}{}_{,m-1}{}^{r}(z)$，并且 $P_{\underset{\sim}{i}}(y)$ 可被$\prod_{i\in}$整除

$s_i^{q^{(d-m)}+l}$。定义 $\phi_m(x):=y$。于是，

$\underset{\sim}{i}$

$$\phi_{m-1}\partial_m^{T'(\underset{\sim}{s}^u;M)}(x)=\kappa_{m-1}^{q^{(d-m+1)}+r,r}(z)=\partial_m^{K(\underset{\sim}{s}^r;M)}(y)=\partial_m^{K(\underset{\sim}{s}^r;M)}\phi_m(x).$$

通过线性将其扩张为映射 ϕ_m on R^{t_m}。由于对于 R^{t_m} 的每个基元素，性质 (a) 和 (c) 都成立，因此它们对 R^{t_m} 中的每个元素都成立。于是，ϕ_m 已经对 $1\le m\le d$ 归纳构造完成。

接下来只需验证 $\phi_d\partial^{T'}(\underset{\sim}{s}^u;M)_{d+1}=0$。令 $x\in T'_{d+1}(_{\sim}s^u;M)$。由于 $P_{\underset{\sim}{i}}\phi_d\partial^{T'}(\underset{\sim}{s}^u;M)_{d+1}(x)$ 可被 $\prod_{i\in i}s_i^{q^{(0)}+l}$ 整除，根据定理 3.3，存在 $z\in\ker\left(\partial^{K(\underset{\sim}{s}^{q^{(0)}+r};\quad M}_{d}\right)$) 使得 $_{\sim}\kappa^{q^{(0)}+r}{}_{,d}{}^{r}(z)=\phi_d\partial^{T'}(\underset{\sim}{s}^u;M)_{d+1}(x)$。由于 $q^{(0)}+r=q(0,r)$ 且 $z\in\ker\left(\partial^{K(\underset{\sim}{s}^{q^{(0)}+r};}_{d}{}^{M}\right)$)，引理 3.2(a) 推出 $\kappa^{q^{(0)}+r}{}_{,d}{}^{r}(z)\in\mathrm{Im}\left(\partial^{K(\underset{\sim}{s}^r;}_{d+1}{}^{M}\right)=0$)。证明完毕。□

注记 3.6. 请注意，在前面的定理 3.5 中，得到的 ϕ 不一定唯一，因为在每个次数上都可能有多个提升的选择。由于塔特分解 $T(_{\sim}s^{u(r)})$ 和 Koszul 复形 $K(_{\sim}s^r)$ 都是微分分次 R-代数，我们可以问，是否能够构造上述映射，使其成为微分分次 R-代数映射。先从定理 3.5 得到的任意映射 $\phi:T(_{\sim}s^{u(r)})\to K(_{\sim}s^r)$ 开始。由于微分分次 R- 代数 $T(_{\sim}s^{u(r)})$ 是形如 $R[\{X_{ij}\mid i>0,j\in\Lambda_i\}]$ 的多项式代数，其中 X_{ij} 是次数为 i的变量，我们可以通过映射 $\gamma(X_{ij})=\phi(X_{ij})$ 定义一个微分分次 R-代数映射 $\gamma:T(_{\sim}s^{u(r)})\to K(_{\sim}s^r)$，然后利用微分分次结构将其扩展到整个 $T(_{\sim}s^{u(r)})$。因此，存在一个从 $T(_{\sim}s^{u(r)})$ 到 $K(_{\sim}s^r)$ 的微分分次 R- 代数映射，它扩展了 $\kappa^{u(r)}{}_{,}{}^{r}$。

推论 3.7。设 $r\ge1$ 和 $u(r)$ 分别表示定理 *3.5* 中的整数。设 $P_\bullet(M/(_{\sim}s^{u(r)})M)$ 是 $M/(_{\sim}s^{u(r)})M$的投射分解，则存在一个链复形映射

$$\xi:P_\bullet(M/(\underset{\sim}{s}^{u(r)})M)\to K(\underset{\sim}{s}^r;M)$$

使得 $H_0(\xi)$ 是自然满射 $M/(_{\sim}s^{u(r)})M\twoheadrightarrow M/(_{\sim}s^r)M$。

证明。根据投射模复形的提升性质 [20, 定理 2.2。6], 存在一个链复形映射 $\psi:P_\bullet(M/(_{\sim}s^{u(r)})M)\to T'(_{\sim}s^{u(r)};M)$，使得 $H_0(\psi)$ 在 $M/(_{\sim}s^{u(r)})M$上是恒等映射。将其与由定理 3.5 得到的映射 $\phi:T'(_{\sim}s^{u(r)};M)\to K(_{\sim}s^r;M)$ 复合，我们得到 $\xi=\phi\circ\psi:P_\bullet(M/(_{\sim}s^{u(r)})M)\to K(_{\sim}s^r;M)$。由于 $H_0(\phi)$ 是自然满射 $M/(_{\sim}s^{u(r)})M\twoheadrightarrow M/(_{\sim}s^r)M$，所以 $H_0(\xi)$ 也是如此。□

对于序列 $_{\sim}s=s_1,\dots,s_d$，以及一个 R-模 N，Koszul 复形$K(_{\sim}s^r;N)^\vee:=\mathrm{Hom}(K(_{\sim}s)N)$ 的对偶是一个上链复形，其非零项集中在从零到 d 的次数上。众所周知，例如对所有 $r\ge1$ 应用 [5, 命题 1.6。9]，存在自然同态 $H_i(K(_{\sim}s^r;N))\to\mathrm{Tor}_i^R(R/(_{\sim}s^r)N)$ 和 $\mathrm{Ext}^i_R(R/(_{\sim}s^r)N)\to H^i(K(_{\sim}s^r;N)^\vee)$。下一个推论表明，在 Tor 和 Ext 模中适当地提高幂次后，反方向的映射也存在。

推论 3.8。 设 $I = (\underset{\sim}{s})$ 是一个理想，且 N 是一个 R-模。令 $r \geq 1$ 和 $u(r)$ 表示定理 3.5 中关于 $M = R$所述的整数。那么对所有 $i \geq 0$，都存在自然同态

$$\mathrm{Tor}_i^R(R/(\underset{\sim}{s}^{u(r)}), N) \to H_i(K(\underset{\sim}{s}^r; N)) \text{ and } H^i(K(\underset{\sim}{s}^r; N)^\vee) \to \mathrm{Ext}_R^i(R/(\underset{\sim}{s}^{u(r)}), N).$$

证明。 考虑 ϕ 在 $M = R$ 定理 3.5中得到的映射。函子 $- \otimes_R N$ 和 $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ 作用于 ϕ 给出了所需的自然映射。 □

局部上同调模 $H_I^i(N)$ 可以定义为 $\varinjlim \mathrm{Ext}_R^i(R/(\underset{\sim}{s}^n)\ N)$，也可以定义为 Čech 上同调。证明它与 Koszul 上同调之间联系的标准方法，是注意到 Koszul 复形的对偶 $\{K(\underset{\sim}{s}^r; N)^\vee\}_{r\geq 1}$ 收敛到 Čech 复形。然而，上述讨论给出了这一联系的一种新证明，无需使用 Čech 复形。

推论 3.9。 设 $I = (\underset{\sim}{s})$ 是一个理想，且 N 是一个 R-模。那么

$$H_I^i(N) = \varinjlim \mathrm{Ext}_R^i(R/(\underset{\sim}{s}^n), N) \cong \varinjlim H^i(K(\underset{\sim}{s}^n; N)^\vee).$$

注 3.10。 下图总结了迄今为止证明的结构。

Artin-Rees 引理 $\Rightarrow$ Tor 映射的消失 $\Rightarrow$ Koszul 映射的消失 $\Rightarrow$ ϕ的存在性

注意，一旦我们知道定理3.5中映射 ϕ的存在性，便可立即推出，对于所有 i， $H_i(\kappa^{u(r),r})$: $H_i(K(\underset{\sim}{s}^{u(r)}; M)) \to H_i(K(\underset{\sim}{s}^r; M))$ 均为零，因为 $\kappa^{u(r),r}$ 可经由 $T'(\underset{\sim}{s}^{u(r)}; M)$ 分解，而后者对所有 $i \neq 0$的同调均为零。因此，Koszul 同调映射的消失等价于映射 ϕ的存在。

众所周知（例如，参见定理3.1的证明），Koszul 同调可以用 Tor 模来描述，由此得到上述第二个蕴含。下面的命题和定理表明，Tor 模之间的映射消失可由 Koszul 同调映射的消失推出；换言之，第二个蕴含也可以反过来成立。

命题 3.11. 设 $I = (\underset{\sim}{s})$ 是一个理想。设 $i \geq 1$ 和 $r \geq 1$。则以下条件等价。

(i) 存在 $v(i, r) \geq r$，使得映射 $\mathit{Tor}_i^R(R/I^{v(i,r)}, M) \to \mathit{Tor}_i^R(R/I^r, M)$ 为零。*(ii)* 存在 $w(i, r) \geq r$，使得 $H_i(\kappa^{w(i,r),r})$: $H_i(K(\underset{\sim}{s}^{w(i,r)}; M)) \to H_i(K(\underset{\sim}{s}^r; M))$ 为零。

证明. (1) $\implies$ (2)：应用定理 3.5，可得一个链复形映射 $T(\underset{\sim}{s}^{u(r)}) \to K(\underset{\sim}{s}^r)$，其中某个 $u(r) \in \mathbb{N}$。对 $u(r)d \in \mathbb{N}$ 应用 (1)，我们得到 $v(i, u(r)d) \geq u(r)d$，使得映射

$$\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{v(i,u(r)d)}, M) \to \mathrm{Tor}_i^R(R/I^{u(r)d}, M) \tag{7}$$

为零。我们有自然满射

$$R/(\underset{\sim}{s}^{v(i,u(r)d)}) \twoheadrightarrow R/I^{v(i,u(r)d)} \twoheadrightarrow R/I^{u(r)d} \twoheadrightarrow R/(\underset{\sim}{s}^{u(r)}).$$

另请注意， $K(\underset{\sim}{s}^{v(i,u(r)d)}) \subseteq T(\underset{\sim}{s}^{v(i,u(r)d)})$。因此我们得到自然映射

$$H_i(K(\underset{\sim}{s}^{v(i,u(r)d)}); M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(R/(\underset{\sim}{s}^{v(i,u(r)d)}), M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(R/I^{v(i,u(r)d)}, M) \longrightarrow$$
$$\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{u(r)d}, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(R/(\underset{\sim}{s}^{u(r)}), M) \longrightarrow H_i(K(\underset{\sim}{s}^r); M)\ ,$$

其复合为 $H_i(\kappa^{v(i,u(r)d),r})$。由于（7）中的映射为零，因此上述复合为零。于是定义 $w(i, r) = v(i, u(r)d)$，证明完毕。

(2) $\Longrightarrow$ (1)：给定 $w(i,r)\in\mathbb{N}$，由定理 3.5，存在 $u(w(i,r))\geq w(i,r)$，使得存在链复形映射 $T(\underset{\sim}{s}^{u(w(i,r))})\xrightarrow{\phi}K(\underset{\sim}{s}^{w(i,r)})$. 我们有自然满射

$$R/I^{u(w(i,r))d}\twoheadrightarrow R/(\underset{\sim}{s}^{u(w(i,r))})\twoheadrightarrow R/(\underset{\sim}{s}^{r})\twoheadrightarrow R/I^{r}$$

它诱导映射

$$\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{u(w(i,r))d},M)\to\mathrm{Tor}_i^R(R/(\underset{\sim}{s}^{u(w(i,r))}),M)\to\mathrm{Tor}_i^R(R/(\underset{\sim}{s}^{r}),M)\to\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{r},M).$$

我们将证明上面的第二个映射为零，因此复合映射也为零。注意，存在链复形映射

$$T(\underset{\sim}{s}^{u(w(i,r))})\xrightarrow{\phi}K(\underset{\sim}{s}^{w(i,r)})\xrightarrow{\kappa^{w(i,r),r}}K(\underset{\sim}{s}^{r})\hookrightarrow T(\underset{\sim}{s}^{r})$$

使得零次处的同调映射是自然满射。因此，映射 $\mathrm{Tor}_i^R(R/(\underset{\sim}{s}^{u(w(i,r))})\ M)\to\mathrm{Tor}_i^R(R/(\underset{\sim}{s}^{r})\ M)$ 可经由 $H_i(K(\underset{\sim}{s}^{w(i,r)};\ M))\to H_i(K(\underset{\sim}{s}^{r};\ M))$ 分解；根据假设，该映射为零。因此，定义 $v(i,r)=u(w(i,r))d$ 后，断言得证。□

在 [1, 推论 4.9], 中证明了，当 R 是诺特局部环时， M 关于 I具有同调维数意义下的 Artin-Rees 性质，也就是说，存在一个线性函数 $w(r)$，使得对所有 $i\geq 1$，$\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{w(r)},M)\to\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{r},M)$ 都为零。下一个定理给出一个多项式函数 $w(r)$，即使对于不一定是局部环的环也是如此，使得次数为 $w(r)$ 到 r 之间的 Tor 模之间的映射消失。注意，函数 $w(r)$ 与次数 i无关，这进一步加强了[2,第 10 章命题 10 和引理 11]中 Tor 模之间映射按次数消失的结论。

定理 3.12. 设 R 是一个诺特环， $I=(\underset{\sim}{s})$ 是一个理想，且 M 是一个有限生成R-模。给定 $r\geq 1$，存在 $w(r):=u(h+rd)$，使得映射

$$\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{w(r)},M)\to\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{r},M)$$

对所有 $i\geq 1$ 都为零。

证明。根据引理 3.1，映射 $H_i(\kappa^{h+rd,r}):H_i(K(\underset{\sim}{s}^{h+rd};M))\to H_i(K(\underset{\sim}{s}^{r};M))$ 对所有 $i>0$ 都为零。根据定理 3.5，存在一个链复形映射 $T(\underset{\sim}{s}^{u(h+rd)})\to K(\underset{\sim}{s}^{h+rd})$。定义$w(r):=u(h+rd)$。由此得到一个链复形映射

$$T(\underset{\sim}{s}^{w(r)})\otimes M\to K(\underset{\sim}{s}^{h+rd};M)\to K(\underset{\sim}{s}^{r};M)\to T(\underset{\sim}{s}^{r})\otimes M.$$

由于中间映射在同调上的映射为零，因此得到

$$\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{w(r)},M)\to\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{r},M)$$

对所有 $i>0$ 都是零映射。 □

推论 3.13. 设 I 是一个主理想，且 M 是一个有限生成 R-模。那么映射 $\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{2h+l+r},M)\to\mathrm{Tor}_i^R(R/I^{r},M)$对所有 $i>0$ 都为零。因此， M 关于 I 具有同调维数意义下的 *Artin-Rees* 性质。

证明。 当 I是主理想时， $d=1$。因此我们得到 $w(r)=u(h+r)=2h+l+r$，从而得到该断言。□

引理 3.14。 设 $\mathrm{char}(R)=p>0$，其中 p 是素数，且 $I=(\underset{\sim}{s})$ 是 R中的一个理想。则 *(1)* 每个 $P_\bullet\in Ch_{\mathscr{L}}^{[0,k]}(\mathcal{P})$，其中 $k>\mathrm{pd}(R/I)$，都有一个约化子。*(2)* $\beta(\mathscr{L}_{V(I)})\leq\mathrm{pd}(R/I)$。

证明。根据引理 2.25，存在一个链复形映射 $\Psi:\ K(\underset{\sim}{s}^{r};P_0)\to P_\bullet$ for some$r\in\mathbb{N}$，使得 Ψ_0 是一个同构。考虑映射 $\phi:\ T(\underset{\sim}{s}^{u})\to K(\underset{\sim}{s}^{r})$，其中 $u\in\mathbb{N}$由定理 3.5 构造得到。不失一般性，我们可以假设 $u=p^n$ for some $n\in\mathbb{N}$。根据引理 2.13，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$\mathrm{pd}(R/I)=\mathrm{pd}(R/I^{[p^n]})$。因此，典范

截断 $T'_\bullet$ 在该次数处对 $T(\underset{\sim}{s}^u)$ 的截断通过自然包含与其同伦等价。定义 $T_\bullet = T'_\bullet \otimes P_0$ 和 α 为通过如下复合得到的链复形映射：

$$T_\bullet \hookrightarrow T(\underset{\sim}{s}^u) \otimes P_0 \xrightarrow{\phi \otimes id_{P_0}} K(\underset{\sim}{s}^r; P_0) \xrightarrow{\Psi} P_\bullet \quad .$$

现在很容易看出 $T_0 = K_0(\underset{\sim}{s}^r; P_0)$，因此 α_0 是满射。因此，每当 $k > \text{pd}(R/I) = \text{pd}(R/I^{[p^n]})$ 时，$(T_\bullet, \alpha)$ 是 $P_\bullet$ 的约化子。根据定义可得，$\beta(\mathscr{L}_{V(I)}) \leq \text{pd}(R/I)$。□

定理 3.15。设 $\text{char}(R) = p > 0$，其中 p 是素数，且 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$，其中 I 是 R 中的完美理想。那么 $K_0(\mathcal{P} \cap \mathscr{L}) \cong K_0(D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{P}))$。

证明。由引理 2.26 和引理 3.14，$\text{grade}(I) \leq \beta(\mathscr{L}) \leq \text{pd}(R/I)$。由于 I 是完美理想，$\text{pd}(R/I) = \text{grade}(I)$。因此 $\beta(\mathscr{L}) = \text{grade}(I)$。应用引理 2.27，可得$K_0(\mathcal{P} \cap \mathscr{L}) \cong K_0(D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{P}))$
. □

4. A Derived Equivalence

本节的主要结果大体沿用了 [18, 第 3 节和 4]的思路。正如引言中所述，这些证明之所以成立，是因为将该文中的 Koszul 分解替换为此处的塔特分解。不幸的是，其中的陈述（具体而言，关键的 [18, 定理 3.1 和 3.3]）无法直接应用于我们的情形，因为它们在证明中利用了 Koszul 分解的结构。

我们首先定义强约化子，它实质上汇集了 [18, 第 3 节和 4]的证明中用到的 Koszul 分解的性质。

定义 4.1. 设 $\mathcal{A} \subseteq \text{mod}(R)$ 是一个解消子范畴，$\mathscr{L}$ 是$\text{mod}(R)$的一个 *Serre* 子范畴，$X_\bullet \in Ch^b_{\mathscr{L}}(\text{mod}(R))$ 且 $J \subseteq R$ 满足 $X_\bullet$ 不是正合的，并且 $R/J \in \mathscr{L}$。若满足以下条件，则称 $(T_\bullet, \alpha, I)$ 是关于 $\mathcal{A}$ 的$(X_\bullet, J)$ 的强约化子：

(1) $T_\bullet \in Ch^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$。*(2)* 最小$_c(T_\bullet) = m$ 其中 $m =$最小$(X_\bullet)$。*(3)* $\alpha : T_\bullet \to X_\bullet$ 是一个链复形映射。*(4)* $T_\bullet) = \{m\}$ 和 $H_m(T_\bullet) = T_m/IT_m$。*(5)* $H_m(\alpha) : H_m(T_\bullet) \to H_m(X_\bullet)$ 是满射。*(6)* $I \subseteq J$。

若 *Serre* 子范畴 $\mathscr{L}$ *of*mod(R) 对于 $\mathcal{A}$具有强约化子(SR)性质，则定义为：对于每个 $X_\bullet \in Ch^b_{\mathscr{L}}$(mod$(R)$ $J \subseteq R$，使得 $X_\bullet$ 不是正合复形且 $R/J \in \mathscr{L}$，$(X_\bullet, J)$具有相对于 $\mathcal{A}$ 的强约化子。

在本节余下部分，我们使用以下记号：$\mathscr{L}$ 是 mod(R) 的 Serre 子范畴，$\mathcal{A}$ 是 mod(R) 的解消子范畴，$\mathcal{T}$ 是 mod(R) 中包含 $\mathcal{A}$ 的厚子范畴。以下引理类似于 [18, 引理 3.2]。

引理 4.2. 设 $X_\bullet \in Ch^b_{\mathscr{L}}(\text{mod}(R))$ 且 $J \subseteq R$ 满足 $R/J \in \mathscr{L}$。假设$(X_\bullet, J)$ 相对于 $\mathcal{A}$有一个强约化子$(T_\bullet, \alpha, I)$。将链复形映射 α 扩充为 $D^b_{\mathscr{L}}(\text{mod}(R))$ 中的一个正合三角：

$$\Sigma^{-1}C_\bullet \to T_\bullet \xrightarrow{\alpha} X_\bullet \to C_\bullet.$$

若 $\text{W}(X_\bullet) > 0$，则有如下结论：

(1) W$(C_\bullet)$ <W$(X_\bullet)$.*(2)* W$(\Sigma^{-1}C_\bullet \oplus T_\bullet)$ < W$(X_\bullet)$.

证明。令 $m = \min(X_\bullet)$。由于对于所有 $i \neq m$，$H_i(T_\bullet) = 0$，我们有对于所有$i \neq m, m+1$，$H_i(X_\bullet) \cong H_i(C_\bullet)$。由于 $H_m(\alpha)$ 是满射，$H_m(C_\bullet) = 0$。因此断言得证。□

下面的引理与 [18, 定理 3.3 和引理 3。4]类似。证明实际上只是检查这些结果的证明是否仍然成立，只需用强约化子替代理想的选取和 Koszul 分解。既然如此，我们只给出证明的概述。

引理 4.3. 设 $\mathscr{L}$ 相对于 $\mathcal{A}$ 具有 *SR* 性质。令 $X_\bullet \xrightarrow{f} Y_\bullet$ 为 $D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})$ 中的一个态射，使得 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$ 是 $Ch^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$ 中的链复形，$\min(X_\bullet \oplus Y_\bullet) = m$，且 $\min_c(X_\bullet)$，$\min_c(Y_\bullet) \geq m$。那么存在 $M_\bullet^X$ 和 $M_\bullet^Y$ 这两个 $Ch^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$ 中的链复形，以及链复形态射 $M_\bullet^X \xrightarrow{\beta^X} X_\bullet$、$M_\bullet^Y \xrightarrow{\beta^Y} Y_\bullet$ 和 $M_\bullet^X \xrightarrow{\rho} M_\bullet^Y$，使得

- $M_\bullet^X, M_\bullet^Y \in Ch^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$，其中对所有 $i \neq m$ 都有 $M_i^X = M_i^Y = 0$.
- 在 $D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})$ 中存在一个交换方块：

$$\begin{array}{ccc} M_\bullet^X & \xrightarrow{\beta^X} & X_\bullet \\ \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ M_\bullet^Y & \xrightarrow{\beta^Y} & Y_\bullet \end{array} .$$

- $H_m(\beta^X)$ 和 $H_m(\beta^Y)$ 是满射。

令 $C_\bullet^X$ 和 $C_\bullet^Y$ 分别为 β^X 和 β^Y 的锥。若 $\mathrm{W}(X_\bullet \oplus Y_\bullet) = k > 0$，则 *(1)* $\mathrm{W}(C_\bullet^X \oplus C_\bullet^Y) < k$。*(2)* $\mathrm{W}(C_\bullet^X \oplus Y_\bullet) \leq k$。*(3)* 若 $\min(X_\bullet) < \min(Y_\bullet)$，则 $\min(C_\bullet^X \oplus Y_\bullet) \leq k-1$。

证明。定义复形 $M_\bullet^Y$ 为 $\Sigma^m Y_m$ 和 $\beta^Y\colon M_\bullet^Y \to Y_\bullet$ 包含映射。于是 $M_\bullet^Y \in Ch^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$，且 β^Y 是链复形映射，使得 $H_m(\beta^Y)$ 是满射。
设 f 由屋顶图 $X_\bullet \xleftarrow{q} Q_\bullet \xrightarrow{g} Y_\bullet$ 给出，其中 q 是拟同构。我们可以假设 $\min_c(Q_\bullet) = m$。令 $Q'_\bullet$ 为 β^Y 和 g 在 $Ch^b(\mathrm{mod}(R))$ 中的拉回：

$$\begin{array}{ccc} Q'_\bullet & \xrightarrow{\nu} & Q_\bullet \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M_\bullet^Y & \xrightarrow{\beta^Y} & Y_\bullet \end{array} .$$

因此，我们得到正合列 $0 \to Q'_\bullet \to Q_\bullet \oplus M_\bullet^Y \to B_\bullet \to 0$，其中 $B_\bullet$ 是映射 $Q_\bullet \oplus M_\bullet^Y \xrightarrow{(g,\ -\beta^Y)} Y_\bullet$的像。我们注意到 $B_\bullet \in Ch^b(\mathscr{L})$，因此 $B_\bullet \in Ch^b_{\mathscr{L}}(\text{模}(R))$。由于 $M_\bullet^Y$和 $Q_\bullet$也属于 $Ch^b_{\mathscr{L}}(\text{模}(R))$，我们得到 $Q'_\bullet \in Ch^b_{\mathscr{L}}(\text{模}(R))$。令 $\lambda = q \circ \nu$且 $J = \mathrm{Ann}(X_m)$。那么 $R/J \in \mathscr{L}$。由于 $\mathscr{L}$ 相对于 $\mathcal{A}$具有 SR 性质，$(Q'_\bullet, J)$相对于 $\mathcal{A}$具有强约化子$(T_\bullet, \alpha, I)$。因此，我们在 $D^b_{\mathscr{L}}(\text{模}(R))$中有如下交换图示：

$$\begin{array}{ccccc} T_\bullet & \xrightarrow{\alpha} & Q'_\bullet & \xrightarrow{\lambda} & X_\bullet \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & & M_\bullet^Y & \xrightarrow{\beta^Y} & Y_\bullet \end{array} .$$

定义 $M_\bullet^X$为链复形 $\Sigma^m H_m(T_\bullet) \in Ch^b(\mathcal{A}\cap\mathscr{L}) \subseteq Ch^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$。由于$I \subseteq J = \mathrm{Ann}(X_m)$ 且 $H_m(T_\bullet) \cong T_m/IT_m$，映射 $\lambda_m \circ \alpha_m\colon T_m \to X_m$ 可经由 T_m/IT_m 分解。因此，我们得到一个链复形映射 $\beta^X\colon M_\bullet^X \to X_\bullet$。此外，$\mu\circ\alpha$可经由$M_\bullet^X$分解，从而得到链复形映射 $\rho\colon M_\bullet^X \to M_\bullet^Y$，使得下图交换

在 $D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})$ 中:

$$\begin{array}{ccc} M_\bullet^X & \xrightarrow{\beta^X} & X_\bullet \\ \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ M_\bullet^Y & \xrightarrow{\beta^Y} & Y_\bullet. \end{array}$$

要证明 $H_m(\beta^X)$ 是满射，只需证明 $H_m(\nu)$ 是满射；这是因为 $Q'_\bullet$ 只是逐次的拉回。结论 (1)，(2) 和 (3) 可由映射锥所产生的同调长正合列推出，证明过程与前引理类似。□

现在陈述本节的技术核心，它类似于关键定理[18, 定理 4.5] 的 [18]。设 $\iota\colon D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L}) \rightsquigarrow D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})$ 是由包含映射 $Ch^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L}) \hookrightarrow Ch^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})$ 诱导的自然函子。

定理 4.4。 假设 $\mathscr{L}$ 相对于 $\mathcal{A}$ 具有 *SR* 性质。那么函子 $\iota : D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L}) \rightsquigarrow D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})$ 是范畴等价。

证明。 由于 ι 是三角范畴之间的三角函子，因此只需证明 ι 在对象上忠实、满且本质满（例如根据 [18, 引理 2.19]）。若 $\iota(X_\bullet) = 0$，即它是无环的，那么 $X_\bullet$ 也无环。因此，ι 在对象上忠实，只需证明 ι本质满且满。这个证明与 [18, 命题 4.4] 的证明完全相同，因此我们仅简要说明证明的主要步骤，并请感兴趣的读者参阅 [18]中的详细证明。下面关于 k 的归纳命题将说明 ι 本质满且满:

(1) 对每个满足 $\mathsf{W}(P_\bullet) = k$ 的 $P_\bullet \in D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})$，都存在 $\tilde{P}_\bullet \in D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$，使得$\iota(P_\bullet) \cong P_\bullet$。 (2) 对所有满足 $\mathsf{W}(X_\bullet \oplus Y_\bullet) = k$ 的 $X_\bullet, Y_\bullet \in D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$，$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})}(X_\bullet, Y_\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})}(X_\bullet, Y_\bullet)$ 都是满射。

基例是 $k = 0$的情形。若 $\mathsf{W}(P_\bullet) = 0$，则对某个 $m \in \mathbb{Z}$，$\mathsf{Suppi}(P_\bullet) \subseteq \{m\}$。因此，$P_\bullet$ 与 $\Sigma^m H_m(P_\bullet)$拟同构。根据 $\mathcal{T}$ 和 $\mathscr{L}$的定义，$H_m(P_\bullet) \in \mathcal{T}\cap\mathscr{L}$，进而 $\Sigma^m H_m(P_\bullet) \in D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$，这就证明了 (1)。类似地，$\mathsf{W}(X_\bullet \oplus Y_\bullet) = 0$ 意味着 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$ 分别与某个 $m \in \mathbb{Z}$ 的 $\Sigma^m H_m(X_\bullet)$和 $\Sigma^m H_m(Y_\bullet)$拟同构。注意，对任意 R-模 M 和 N，将它们视为复形时，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\cap\mathscr{L}}(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})}(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})}(\iota(M),\iota(N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(M,N).$$

因此，当 $k = 0$时，(2)成立。

假设该命题对所有 $k' < k$ 都成立。由于 $\mathscr{L}$ 关于 $\mathcal{A}$ 具有 SR 性质，$(P_\bullet, R)$ 存在一个关于 $\mathcal{A}$ 的强约化子 $(Q_\bullet, \beta, I)$。因此，$Q_\bullet \in Ch^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}) \subseteq Ch^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})$，且 $\mathsf{Suppi}(Q_\bullet) = \{m\}$。延拓链复形态射 $\beta\colon Q_\bullet \to P_\bullet$，得到正合三角 $\Sigma^{-1}C_\bullet \xrightarrow{\alpha} Q_\bullet \xrightarrow{\beta} P_\bullet \xrightarrow{\gamma} C_\bullet$。引理 4.2 表明 $\mathsf{W}(C_\bullet) < k$且 $\mathsf{W}(\Sigma^{-1}C_\bullet \oplus Q_\bullet) < k$。应用归纳假设 (1) 和 (2)，存在$\tilde{C}_\bullet \in D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$，使得 $\iota(\tilde{C}_\bullet) = C_\bullet$，且映射

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})}(\Sigma^{-1}\tilde{C}_\bullet, \Sigma^m H_m(Q_\bullet)) \to \mathrm{Hom}_{D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})}(\Sigma^{-1}\tilde{C}_\bullet, \Sigma^m H_m(Q_\bullet)) \cong \mathrm{Hom}_{D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})}(\Sigma^{-1}\tilde{C}_\bullet, Q_\bullet)$$

是满射。因此，存在 $\tilde{\alpha}: \Sigma^{-1}\tilde{C}_\bullet \to \Sigma^m H_m(Q_\bullet)$，其锥为 $\tilde{P}_\bullet$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{-1}C_\bullet & \xrightarrow{\alpha} & Q_\bullet & \xrightarrow{\beta} & P_\bullet & \xrightarrow{\gamma} & C_\bullet \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\iota(\Sigma^{-1}\tilde{C}_\bullet) & \xrightarrow{\iota(\tilde{\alpha})} & \iota(\Sigma^m H_m(Q_\bullet)) & \xrightarrow{\iota(\tilde{\beta})} & \iota(\tilde{P}_\bullet) & \xrightarrow{\iota(\tilde{\gamma})} & \iota(\tilde{C}_\bullet)
\end{array}$$

根据三角范畴的公理 TR3，$\iota(P_\bullet) \cong P_\bullet$。因此，(1) 得证。

现在我们给出 (2) 的证明思路。设 $X_\bullet$，$Y_\bullet \in D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$ 和 $f \in \mathrm{Hom}_{D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})}(X_\bullet, Y_\bullet)$ 且 $\min(X_\bullet \oplus Y_\bullet) = m$。不妨假设 $\min_c(X_\bullet) \geq m$ 且 $\min_c(Y_\bullet) \geq m$。应用引理 4.3，我们得到 $D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})$ 中的三角形态射：

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{-1}C^X_\bullet & \xrightarrow{\alpha^X} & M^X_\bullet & \xrightarrow{\beta^X} & X_\bullet & \xrightarrow{\gamma^X} & C^X_\bullet \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma^{-1}\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\
\Sigma^{-1}C^Y_\bullet & \xrightarrow{\alpha^Y} & M^Y_\bullet & \xrightarrow{\beta^Y} & Y_\bullet & \xrightarrow{\gamma^Y} & C^Y_\bullet
\end{array}$$

其中 $M^X_\bullet$，$M^Y_\bullet$集中在次数 m，态射 β^X，β^Y，ρ是链复形映射，$H_m(\beta^X)$ $H_m(\beta^Y)$ 是满射，且 $\mathrm{W}(C^X_\bullet \oplus C^Y_\bullet) < k$。将归纳假设 (2) 应用于 $C^X_\bullet$和 $C^Y_\bullet$，我们得到 $\tilde{\lambda} \in \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})}(C^X_\bullet, C^Y_\bullet)$，使得 $\iota(\tilde{\lambda}) = \lambda$。由此我们得到 $D^b(\mathcal{T}\cap\mathscr{L})$ 中的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{-1}C^X_\bullet & \xrightarrow{\alpha^X} & M^X_\bullet & \xrightarrow{\beta^X} & X_\bullet & \xrightarrow{\gamma^X} & C^X_\bullet \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma^{-1}\tilde{\lambda}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \vdots{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\lambda}} \\
\Sigma^{-1}C^Y_\bullet & \xrightarrow{\alpha^Y} & M^Y_\bullet & \xrightarrow{\beta^Y} & Y_\bullet & \xrightarrow{\gamma^Y} & C^Y_\bullet
\end{array}$$

其中 g 由三角范畴的公理 TR3 保证存在。遗憾的是，无法由此推出 $\iota(g) = f$。由线性性可知，在 $D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{T})$ 中，我们得到如上所示的一个三角形态射，其中从 $X_\bullet$ 到 $Y_\bullet$ 的垂直箭头为 $f - \iota(g)$，其余垂直箭头均为零。利用弱核/余核性质，我们得到从 $C^X_\bullet$到 $Y_\bullet$ 以及从 $X_\bullet$ 到 $M^Y_\bullet$的映射。对这些复形之间的 Hom 集合进行非常仔细的分析，并结合归纳假设，最终可得对于某个 h，$f = \iota(h)$，从而完成证明。□

下述定理是定理4.4的直接推论。

定理 4.5。假设 $\mathscr{L}$ 相对于 $\mathcal{A}$具有 *SR* 性质。那么存在一个范畴等价 $D^b(\mathcal{A}\cap\mathscr{L}) \rightsquigarrow D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$。特别地，$D^b(\mathcal{P}\cap\mathscr{L}) \simeq D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{P})$。

证明。应用定理 4.4 及 $\mathcal{T} = \mathcal{A}$，可得 $D^b(\overline{\mathcal{A}}\cap\mathscr{L}) \simeq D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$。对于解消子范畴 $\mathcal{A}$，自然函子 $D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ 通过标准的全复形论证可知是一个等价。因此 $D^b(\mathcal{A}\cap\mathscr{L}) \simeq D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$。□

下面的引理给出了一个充分条件：若一个 Serre 子范畴中的理想具有由有限 $\mathcal{A}$ 维理想构成的滤过，则该子范畴具有 SR 性质。

引理 4.6。设 $\mathscr{L}$ 是一个 *Serre* 子范畴，具有如下性质：每当 $R/I' \in \mathscr{L}$时，都存在 $I \subseteq I'$，使得 $R/I \in \mathscr{L}$，且 I 具有一个滤过 $\{I_n\}$，该滤过等价于 I-进滤过，并且 $\dim_{\mathcal{A}}(R/I_n) < \infty$。那么 $\mathscr{L}$ 关于 $\mathcal{A}$具有 *SR* 性质。

证明。令 $X_\bullet \in Ch^b_{\mathscr{L}}(\mathrm{mod}(R))$，并令 $J \subseteq R$ 为一个理想，使得 $X_\bullet$ 不正合且 $R/J \in \mathscr{L}$。不失一般性，假设 $\min(X_\bullet) = 0$。那么存在一个由有限个

生成的自由模构成的复形，以及一个拟同构 $\pi:\ F_\bullet \to X_\bullet$ 其中 $F_i = 0$ 对所有 $i < 0$，并且 π_0 是满射。由 [20, 推论 10.47] 可得

$$\mathrm{End}_{K(R)}(F_\bullet) \cong \mathrm{End}_{D(R)}(F_\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{D(R)}(F_\bullet, X_\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{K(R)}(F_\bullet, X_\bullet).$$

由于 $X_\bullet$ 有界，$\mathrm{Hom}^{K(R)}(F_\bullet,\ X_\bullet)$ 是有限生成的，因此 $\mathrm{End}^{K(R)}(F_\bullet)$ 也是有限生成的。此外，对于所有 $\mathfrak{p} \in Spec(R)$，映射 $(\mathrm{End}^{K(R)}(F_\bullet))_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{End}^{K(R_{\mathfrak{p}})}((F_\bullet)_p)$ 都是单射；这由上述同构以及关于 $X_\bullet$ 的有界性假设可得。

我们断言 $\mathrm{Supp}(\mathrm{End}^{K(R)}(F_\bullet)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{Supp}(H_i(F_\bullet))$。设 $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ 使得 $(\mathrm{End}^{K(R)}(F_\bullet))_{\mathfrak{p}} \neq 0$。那么 $\mathrm{End}^{K(R_{\mathfrak{p}})}((F_\bullet)_{\mathfrak{p}}) \neq 0$，因此 $(F_\bullet)_{\mathfrak{p}}$ 不同伦于 $O_\bullet$。由于 $F_\bullet$ 从下方有界，所以 $(F_\bullet)_{\mathfrak{p}}$ 不是无环的。因此，对于某个 i，有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(H_i(F_\bullet))$，从而得到该断言。因此我们得到

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{End}_{K(R)}(F_\bullet)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{Supp}(H_i(F_\bullet)) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{Supp}(H_i(X_\bullet)) \subseteq V_{\mathscr{L}}$$

其中 $V_{\mathscr{L}}$ 是与 $\mathscr{L}$ 对应的特化闭集，定义见 2.18(4)。

定义 $N = \mathrm{Ann}(\mathrm{End}^{K(R)}(F_\bullet)) \subseteq R$。那么 $V(N) = \mathrm{Supp}(\mathrm{End}^{K(R)}(F_\bullet)) \subseteq V_{\mathscr{L}}$。由于我们假设 $R/J \in \mathscr{L}$, $V(J) = \mathrm{Supp}(R/J) \subseteq V_{\mathscr{L}}$。因此

$$V(N \cap J) = V(N) \cup V(J) \subseteq V_{\mathscr{L}}.$$

因此，$R/(N \cap J) \in \mathscr{L}$。根据关于 $\mathscr{L}$ 的假设，存在 $I \subseteq (N \cap J)$，使得 $R/I \in \mathscr{L}$ 且 I 具有滤过 $\{I_n\}$，该滤过等价于 I-进滤过，并且 $\dim_{\mathcal{A}}(R/I_n) < \infty$。令 $f_1, \ldots, f_t$ 生成 I。由于 $I \subseteq N' = \mathrm{Ann}(\mathrm{End}^{K(R)}(F_\bullet))$，对每个 i，$f_i id_{F_\bullet}$ 都是零伦的。由引理 2.25，存在一个链复形映射

$$\Psi : K_\bullet = K(f_1, \ldots, f_t) \otimes_R F_0 \to F_\bullet$$

使得 $\min_c(K_\bullet) = 0$ 和 $\Psi_0:\ K_0 \to F_0$ 是一个同构。因此 $H_0(\Psi)$ 是满射 .

根据定理 3.5，存在 $u \in \mathbb{N}$和一个链复形映射 $\phi:\ T(f_1^u, \ldots, f_t^u) \to K(f_1, \ldots, f_t)$，使得 ϕ_0是一个同构，因此 $H_0(\phi)$ 是满射。由于 I 的滤过 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 等价于滤过 $\{I^l\}_{l\in\mathbb{N}}$，进而等价于平方幂滤过 $\{I^{[l]}\}_{l\in\mathbb{N}}$，所以存在 $s \in \mathbb{N}$使得 $I_s \subseteq I^{[u]}$。这诱导出一个从 R/I_s 的塔特分解到 $R/I^{[u]}$的塔特分解的链复形映射。由于 $\dim_{\mathcal{A}}(R/I_s) < \infty$，其塔特分解在该次数处的典范截断 $T'_\bullet$ 通过自然包含与之同伦等价，且由 $\mathcal{A}$中的模构成。定义 $T_\bullet = T'_\bullet \otimes F_0$ 和 α 为通过如下复合得到的链复形映射：

$$T_\bullet \hookrightarrow T(R/I_s) \otimes F_0 \to T(f_1^u, \ldots, f_t^u) \otimes_R F_0 \xrightarrow{\phi \otimes id_{F_0}} K(f_1, \ldots, f_t) \otimes F_0 \xrightarrow{\Psi} F_\bullet \xrightarrow{\pi} X_\bullet \quad .$$

现在很容易看出，$T_0 = F_0$，因此 α_0 是满射。因此，$H_0(\alpha)$ 是满射。注意，$\min_c(T_\bullet) = 0$，且 $T_\bullet$ 是 $R/I_s \otimes_R F_0$ 的有限 $\mathcal{A}$-预解。因此，$T_\bullet \in Ch^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$，且 $\mathrm{Suppi}(T_\bullet) = \{0\}$。此外，可得 $H_0(T_\bullet) \cong T_0/I_s T_0$。最后，$I_s \subseteq I^{[u]} \subseteq I \subseteq J$。因此，$(T_\bullet,\ \alpha,\ I_s)$ 是关于 $\mathcal{A}$ 的 $(X_\bullet,\ J)$ 的强约化子。□

最后，作为定理 4.5 和引理 4.6的直接推论，我们得到本节的主定理，它即定理 1.1。

定理 4.7。设 R 是一个交换诺特环。设 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{mod}(R)$ 是一个解消子范畴。那么，在以下情形中，存在一个范畴等价 $D^b(\mathcal{A} \cap \mathscr{L}) \rightsquigarrow D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$：

(1) R 是正则环。*(2)* $\mathscr{L}$ 满足条件$(*)$ （定义见引言）。

(3) $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$ 其中 $I \subseteq R$ 是一个理想，具有滤过 $\{I_n\}$，该滤过等价于 I-进滤过，且 $\dim_{\mathcal{A}}(R/I_n) < \infty$。

证明。容易检验，在上述情形下，$\mathscr{L}$ 满足引理4.6 的假设，因此相对于 $\mathcal{A}$具有 SR 性质。应用定理4.5 即可完成证明。□

为完整起见，我们重述推论1.2 ，这是定理4.7的一个直接且特别有意义的推论。

推论4.8。 *(a)* 设 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$，其中 I具有最终有限投射维数。那么 $D^b(\mathcal{A} \cap \mathscr{L}) \simeq D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$。 *(b)* 如果 R 具有素特征且 $\mathrm{pd}(R/I) < \infty$，那么 I 具有最终有限投射维数，因此上述导出等价成立。*(c)* 当 R 是正则环，或 $\mathscr{L}$满足条件$(*)$，或 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$ 其中 I 具有最终有限投射维数时，$D^b(\mathcal{P} \cap \mathscr{L}) \simeq D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{P})$。

5. Remarks on ideals of eventually finite projective dimension

导出等价的一些推论。 现在我们研究诺特环中的理想 I 何时具有最终有限投射维数。下一个引理给出一系列蕴含关系，从而为理想具有最终有限投射维数提供必要条件。

引理5.1。 设 R 为诺特环，$I \neq R$ 是其中的一个理想，且$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(I)}$。考虑以下命题。

(i) I 是一个具有最终有限投射维数的理想。*(ii)* 存在一个导出等价 $D^b(\mathcal{P} \cap \mathscr{L}) \simeq D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{P})$。*(iii)* 存在一个非零有限生成模 M，其投射维数有限，且支撑$(M) = V(I)$。 *(iv)* 对于 I的每个极小素理想 $\mathfrak{p}$，$R_{\mathfrak{p}}$ 都是 *Cohen-Macaulay*。

那么$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$。

证明。 $(i) \Rightarrow (ii)$：这是推论4.8(c)。

$(ii) \implies (iii)$：根据 Hopkins-Neeman 定理，

$$V(I) = \bigcup_{X \in D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{P})} \mathrm{Supp}(X) = \bigcup_{X \in D^b(\overline{\mathcal{P}} \cap \mathscr{L})} \mathrm{Supp}(X) = \bigcup_{M \in \overline{\mathcal{P}} \cap \mathscr{L}} \mathrm{Supp}(M).$$

因此，对于每个 $\mathfrak{p}_i \in Min(I)$，都存在 $M_i \in \mathcal{P} \cap \overline{\mathscr{L}}$使得 $(M_i)_{\mathfrak{p}_i} \neq 0$。于是，$M = \oplus M_i$是有限生成的，具有有限投射维数，并且 Supp$(M) = V(I)$。

$(iii) \implies (iv)$：对于 $\mathfrak{p}$ 的任意极小素理想 I，$R_{\mathfrak{p}}$-模 $M_{\mathfrak{p}}$ 具有有限投射维数，且 Supp$(M_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}$。因此，根据推论 2.9，$R_{\mathfrak{p}}$ 是 Cohen-Macaulay 的。□

请注意，蕴含关系 $(i) \implies (iii)$ 可直接由定义推出（例如，选择 $M = R/I_n$ 即可）。

例 5.2。 例 2.17 中，$R = k[X,Y]/(XY)$ 对于域 k 以及 $I = (X)$ 的情形，也表明 $(iv) \not\Rightarrow (iii)$。

问题 5.3。其他反向蕴含是否也成立?

下面重点介绍一种特殊情形：$(R, \mathfrak{m})$ 是一个局部环，且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-初等理想，此时上述各陈述彼此等价。这是对 [18, 定理 1.1], 的直接推广；该定理正是前引理的灵感来源，同时也丰富了通过 efpd 性质刻画 Cohen-Macaulay 局部环的方式。

推论 5.4. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为诺特局部环。则以下各项等价 :

(i) $\underline{\mathfrak{m}}$具有最终有限投射维数。*(ii)* $D^b(\mathcal{P}\cap\mathscr{L}) \simeq D^b_{\mathscr{L}}(\mathcal{P})$ 其中 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{V(\mathfrak{m})}$。*(iii)* 存在一个非零有限生成模 M，其具有有限长度和有限投射维数。*(iv)* $(R,\mathfrak{m})$ 是 *Cohen-Macaulay*。

证明。根据前引理，我们只需证明 $(iv)\Rightarrow(i)$；观察到当 R 是 Cohen-Macaulay 时，$\mathfrak{m}$ 是一个集合论完全交理想，即可得出这一结论。

□

请注意，其中一些蕴含关系可以直接证明为等价关系。

关于具有最终有限投射维数的理想的已知结果和反例。 最终具有有限投射维数的理想这一概念，引出了关于滤过的投射维数最终行为的一些自然问题。以下推论[4,定理 2(i)] 进一步表明，其极限行为可能颇为有趣。

定理 5.5。 设 R 是一个诺特环，I 是 R中的一个理想。那么，对于所有充分大的 $n\in\mathbb{N}$，$\operatorname{pd}(R/I^n)$ 都是常数（可能为无穷大）。

遗憾的是，这一性质是幂滤过所特有的，其他等价滤过（例如符号幂滤过）并不具备这一性质，以下近期结果便说明了这一点。

定理。 [15, 定理 6。3] 对于任意满足周期为 $t\gg 0$ 的正数值函数 $\psi(t)$，存在一个多项式环 R 和一个齐次理想 $I\subset R$，使得$\operatorname{pd}(R/I^{(n)}) = \psi(n)+c$，其中某个 $c\geq 0$。

令 R 为多项式环，I 为上述定理结论中得到的理想，其中 ψ 是周期恰为 2 的周期函数。显然，I 具有最终有限投射维数；但考虑滤过 $\{J_n = I^{(n)}\}$、$\{J'_n = I^{(2n)}\}$ 和 $\{J''_n = I^{(2n+1)}\}$，它们都等价于 $\{I^n\}$，我们看到 $\lim_{n\to\infty}\operatorname{pd}(R/J_n)$ 不存在，而 $\lim_{n\to\infty}\operatorname{pd}(R/J'_n)$ 和 $\lim_{n\to\infty}\operatorname{pd}(R/J''_n)$ 均存在，但收敛到不同的值。这些例子表明：

(1) 对于任何与 $\{I^n\}$ 等价的滤过，I 都有最终有限投射维数 $\not\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\operatorname{pd}(R/J_n)$。
(2) 对于满足以下条件且两个极限均存在的滤过 $\{J_n\}$ 和 $\{J'_n\}$，I 有最终有限投射维数：$\not\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\operatorname{pd}(R/J_n) = \lim_{n\to\infty}\operatorname{pd}(R/J'_n)$，并且这些滤过与 $\{I^n\}$ 等价。

以下近期结果也表明，幂滤过可能无法提供关于一个理想是否具有最终有限投射维数的信息。

引理。 [13, 引理 3。1] 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个一维 *Cohen-Macaulay* 局部环。设I 是一个 $\mathfrak{m}$-初等的非主理想，则对于所有 $n\geq 1$，$\operatorname{pd}(R/I^n) = \infty$。

由于 R 是一个一维 Cohen-Macaulay 局部环，存在一个由 R-正则元素生成的 $\mathfrak{m}$-初等理想J。因此，$\{J^n\}_{n\gg 0}$ 给出了 I 的一个与 $\{I^n\}$-滤过等价的滤过，该滤过由投射模组成，因而 I 具有最终有限投射维数。

总之，似乎无法通过基于最终行为且与滤过无关的数值不变量来刻画一个理想何时具有最终有限投射维数。

Acknowledgments

我们感谢 Srikanth Iyengar 建议在命题2.6的背景下，考察 Artin-Rees 性质以及 Tor 模上映射的消失；此外，他还在仔细阅读本文初稿后，提出了多项改进建议。尤其是第一项建议，大幅缩短了原始证明

3.5，并为我们开辟了新的研究方向。我们感谢 ICTS，尤其感谢 ICTS/dta2023/05 项目，它使我们能够不受干扰地撰写本文，也为我们提供了与 Srikanth 会面讨论的机会和场所。我们还感谢 V. Srinivas，他提出了例子 2.16(9)。

第二位署名作者谨向 J.K.Verma 致谢，感谢他就例2.11(ii) 进行了有益的讨论；同时也感谢 Billy Sanders 多年来围绕本文内容（包括十年前 Tate 分解的作用）进行的多次交流。

第一位署名作者谨感谢总理研究奖学金（PMRF）计划为开展这项研究工作提供的支持。

References

[1] Ian M. Aberbach、Aline Hosry 和 Janet Striuli。叙的统一 Artin-Rees 界。Adv. Math., 285:478–496, 2015。[2] Michel Andr´e。交换代数的同调，第 206 卷，数学科学基础丛书。Springer-Verlag，柏林-纽约，1974。[3] Luchezar L.Avramov。无限自由分解。载于《交换代数六讲》（Bellaterra，1996），数学进展第 166 卷，第 1–118 页。Birkh¨auser，巴塞尔，1998。[4] M. Brodmann。解析扩张度的渐近性质。Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 86(1):35–39, 1979。[5] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog。Cohen-Macaulay 环，第 39 卷，剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，1993。[6] Subhajit Chanda 和 Sarang Sane。约化子与 K_0 支撑。Comm. Algebra, 50(2):635–660, 2022。[7] Hailong Dao 和 Ryo Takahashi。解析子范畴与次数一致函数的分类。Int. Math. Res. Not. IMRN, (1):119–149, 2015。[8] Sankar P. Dutta、M. Hochster 和 J. E. McLaughlin。具有负交重数且投射维数有限的模。Invent. Math., 79(2):253–291, 1985。[9] David Eisenbud 和 Craig Huneke。无限分解的一种有限性。J. Pure Appl. Algebra, 201(1-3):284–294, 2005。[10] Hans-Bjørn Foxby 和 Esben Bistrup Halvorsen。复形范畴的 Grothendieck 群。J. K-Theory, 3(1):165–203, 2009。[11] Pierre Gabriel。阿贝尔范畴。Bull. Soc. Math. France, 90:323–448, 1962。[12] A. Grothendieck。阿贝尔范畴与三角范畴的类群。完美复形。载于 Luc Illusie（编），《布瓦-马里代数几何研讨班 1965–66：SGA 5》，第 351–371 页，柏林、海德堡，1977。Springer Berlin Heidelberg。[13] Ganesh S. Kadu 和 Tony J. Puthenpurakal。湮灭子与 A/I^n的 Betti 数。J. Algebra, 573:620–640, 2021。[14] Bernhard Keller。正合范畴的循环同调。J. Pure Appl. Algebra, 136(1):1–56, 1999。[15] Hop Dang Nguyen 和 Ngo Viet Trung。齐次理想符号幂的深度函数。Invent. Math., 218(3):779–827, 2019。[16]C. Peskine 和 L. Szpiro。有限投射维数与局部上同调。应用于证明 M. Auslander、H. Bass 和 A. Grothendieck 的猜想。Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math., (42):47–119, 1973。[17] William Sanders。解析子范畴的分类。Pacific J. Math., 286(2):401–438, 2017。[18] William T. Sanders 和 Sarang Sane。有限同调维数与导出等价。Trans. Amer. Math. Soc., 369(6):3911–3935, 2017。[19] Jugal Kishore Verma。理想的符号拓扑。J. Algebra, 112(2):416–429, 1988。[20] Charles A. Weibel。同调代数导论，第 38 卷，剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，1994。

K. Ganapathy, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Sar-dar Patel Road, Chennai India 600036电子邮箱地址: ganapathy.math@gmail.com

Sarang Sane*, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Sar-dar Patel Road, Chennai India 600036电子邮箱地址: sarangsanemath@gmail.com