arXiv:2601.12550v1 [math.AC] 18 Jan 2026

¨DG 模的联络与朴素提升

SAEED NASSEH、MAIKO ONO 和 YUJI YOSHINO

Abstract. 本文将阿兰·孔涅在非交换微分几何中引入的联络概念推广到微分分次（DG）同调代数的情形。接着，对于一个 DG 代数同态 $A \to B$，假设 B 作为底层分次 A-模是投射的，我们给出半自由 DG B-模能够朴素提升到 A的充要条件，并以联络来刻画这些条件。

Contents

1. 引言 1 2. 基本设置与拓扑 Hom 集的完备性 2 3. 导子 4 4. 联络 6 5. 沿 DG B^e-模的朴素提升与联络 10 6. 沿 DG B-模的朴素提升与联络 12 致谢 17 参考文献 17

1. Introduction

联络这一概念源于黎曼几何。据我们所知，其历史可追溯至十九世纪 Christoffel 的研究 [7]。此后，多位数学家和物理学家对这一概念进行了研究，包括 Levi-Civita、Ricci、Cartan、Ehresmann 和 Koszul（按其出现的先后顺序排列）[17, 6, 5, 11, 10, 16]„ 仅举数例。Connes 还将这一概念推广到了非交换微分几何的背景中 [8] ，随后 Cuntz 和 Quillen 也对其进行了进一步研究 [9]；另可参见 Eriksen 和 Gustavsen 的研究 [12, 13]。

另一方面，微分分次（DG）模的天真可提升性概念由作者在 [18]-[22]中提出并进行了深入研究，作为经典提升和弱提升概念 [1, 23, 24, 25, 26]的一种改进版本。发明天真可提升性的主要目的是研究同调交换代数中的一些基本问题，这些问题涉及 Ext 模的消失；有关这一主题的全面讨论，请参见 [18, 附录 A] 或 [21, 第 7] 节。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13N15, 16E45, 16W25, 16W50, 16W80。
Key words and phrases. Atiyah 映射、联络、曲率、导子、DG 代数、DG 模、对角理想、微分模、包络 DG 代数、自由 DG 模、可积联络、Kodaira-Spencer 同态、K¨ahler 微分模、朴素提升、半自由微分模、半自由分解、拓扑 DG 模。Y. Yoshino 获得了日本学术振兴会科研基金 19K03448 和 24K06690 的资助。

在本文中，我们进一步将 Connes连接的概念推广到 DG同调代数的框架中（参见 [19]）；这是第4节的主题。该节及其前面的各节为陈述并证明本文的主要结果，即定理 5.3，奠定了基础。在该定理中，对于一个 DG R-代数同态 $A \to B$，其中 R 是一个交换环，且 B 作为底层分次 A-模是射影的，我们以沿包络 DG 代数上的 DG 模的联络为条件，给出了一个半自由 DG B-模能够天真地提升到 A 的充要条件。最后，在第6节中，我们通过考虑沿 DG B-模的联络（而非沿 DGB^e-模的联络），证明了定理 6.5。该定理包含了定理 5.3 中所讨论的某些条件的其他变体，其中一个条件包含 Kodaira-Spencer 同态，或许具有独立的研究价值。

2. Basic set up and completeness of topological Hom sets

本节旨在明确本文中使用的一些微分分次（简称 DG）同调代数术语，并记录分次 Hom 集的一些拓扑性质。关于 DG 同调代数的一般参考资料包括 [2, 3, 14, 15]。此外，对于未定义的符号和细节，读者可参阅论文 [18], [19], 或 [21]。

2.1. 本文中，R 是一个交换环，而 (A, d^A)，或简写为 A，是一个DG R-代数。更准确地说，$A = \bigoplus_{n\geqslant 0} A_n$ 是一个非负分次 R-代数，它构成一个带有微分 d^A 的链复形（即，d^A 是一个集合 $\{d^A_n\colon A_n \to A_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中包含 R-线性映射，且满足 $d^A_{n-1} \circ d^A_n = 0$），使得对于所有齐次元素 $a \in A_{|a|}$ 和 $b \in A_{|b|}$，以下条件成立:

(i) $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ 且当 $|a|$ 为奇数时 $a^2 = 0$；(ii) d^A 满足莱布尼茨法则，也就是说，$d^A(ab) = d^A(a)b + (-1)^{|a|}ad^A(b)$。
这里，对于齐次元素 a，记号 $|a|$ 表示 a的次数。

2.2. 本文中，除非另有说明，所有 DG 模均视为右 DG 模。更准确地说，DG A-模 $(M,\ \partial^M)$，或简称 M，是一个分次右 A-模 $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$，它构成一个链复形，其微分 ∂^M 满足莱布尼茨法则，即对于所有齐次元素$a \in A$ 和 $m \in M$，都有 $\partial^M(ma) = \partial^M(m)a + (-1)^{|m|}md^A(a)$。左 DG A-模的概念定义类似。此外，根据定义，A 是一个“强交换”的 DG 代数，因此每个右 DG A-模 M 都具有左 DG A-模的结构，定义为对所有齐次元素$a \in A$ 和 $m \in M$，$am = (-1)^{|a||m|}ma$。我们称 $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ 为底层分次 A-模。

我们用 $\mathcal{C}(A)$ 表示 DG A-模及 DG A-模同态所构成的范畴。$\mathcal{C}(A)$ 中的同构记为 $\cong$，而 $\mathcal{C}(A)$ 中的拟同构记为 $\simeq$。此外，A 的同伦范畴记为 $\mathcal{K}(A)$。

设 n 为一个整数。DG A-模 M 的第 n 次平移 记为 $M(n)$，定义为 DG A-模 $\big(M(n),\ \partial^{M(n)}\big)$，其中对所有整数 i，有 $(M(n))_i = M_{i+n}$，且 $\partial^{M(n)}_i = (-1)^n\partial^M_{i+n}$。

2.3. 注意，$A(-n)$作为底层分次 A-模是自由的。因此，我们有$A(-n) \cong eA$ in $\mathcal{C}(A)$，其中 e 是次数为 n 的自由基元素，且 $d^A(e) = 0$。一般而言，DG A-模 M 称为自由，如果 $M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda A$，其中 $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是

M 作为底层分次 A-模的齐次自由基，且对所有 $\lambda \in \Lambda$都有 $\partial^A(e_\lambda) = 0$。我们将这样的基称为自由DG A-模 M的自由基。

2.4. 我们用 $\mathsf{Gr}(A)$ 表示分次（右） A-模及分次（即保持次数） A-模同态所构成的阿贝尔范畴。对于 DG A-模 M和 N，我们定义

$$^*\mathrm{Hom}_A(M,N) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Gr}(A)}(M, N(n))$$

其中，我们将 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{Gr}(A)}(M, N(n))$ 称为从 M到 N、次数为 n 的分次 A-模同态集合。注意， $^*\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 是一个 DG A-模，其左 A-模结构定义为 $(af)(m) = af(m) = (-1)^{|a|(|f|+|m|)} f(m)a$，右 A-模结构定义为 $(fa)(m) = f(am) = (-1)^{|a||m|} f(m)a$，而微分由下列公式定义

$$\partial^{\mathrm{Hom}}(f) = \partial^N \circ f - (-1)^n f \circ \partial^M \tag{2.4.1}$$

对所有齐次元素 $a \in A$、 $m \in M$，以及 $f \in \mathrm{Hom}^{\mathsf{Gr}(A)}(M, N(n))$。

2.5. 对于 DG A-模 M 和 N 以及正整数 n，令

$$U_n = \{f \in {}^*\mathrm{Hom}_A(M,N) \mid f(M_i) = 0 \text{ for all } i \leqslant n\}.$$

那么，集合 $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 构成了 $^*\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 中 0 的开邻域基，由此定义了 $^*\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 上的线性拓扑。注意，加法映射 $(f, f') \mapsto f+f'$和作用映射 $f \mapsto f\cdot a$（对于 $a \in A$）在

$^*\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 上关于此拓扑都是连续的。显然，微分∂^{Hom}也是连续的。因此， $^*\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 是一个拓扑 DG A-模。此外，由于$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = 0$， $^*\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 中任何只含一个元素的集合在此拓扑下都是闭子集。因此，循环元 $\mathrm{Ker}(\partial^{\mathrm{Hom}})$ 是闭子集。

在接下来的讨论中，关于半自由 DG A-模等的定义，参见 [4, A.2]或参见 [21, 2.12]。

2.6. 设 M 是一个带有半自由滤过的半自由 DG A-模

$$0 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq M.$$

根据定义，对每个正整数 n，商模 F_n/F_{n-1} 是一个自由 DG A-模，并且有 $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$。我们还假设，每个商模 F_n/F_{n-1} 的自由生成元的最小次数随 n 递增。在这种情况下，对正整数 n，我们定义子集

$$V_n = \{f \in {}^*\mathrm{Hom}_A(M,N) \mid f(F_n) = 0\}$$

$^*\mathrm{Hom}_A(M,N)$中的。于是， $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 也是 $^*\mathrm{Hom}_A(M,N)$中0的一个开邻域基，它所定义的拓扑与 2.5 中的拓扑相同。

命题 2.7。 *对于 DG A-模 M 和 N，拓扑 DG A-模 $^*\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 是完备且分离的（也就是说，每个柯西序列都收敛到唯一的点）。*

证明。 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 $^*\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 中的一个柯西序列，也就是说，对于每个整数$n \geqslant 1$，都存在一个整数 $m \geqslant 1$，使得对于所有 $i, j \geqslant m$，都有 $f_i - f_j \in U_n$。因此，对于满足 $|x| = n$ 的齐次元素 $x \in M$，当 m 足够大时，我们有 $f_m(x) = f_{m+1}(x) = \cdots$。于是，我们可以定义映射 $f\colon M \to N$，令 $f(x)$ 等于每个 x 对应的这个共同值。然后， $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 唯一地收敛到 f，证毕。□

我们通过引入以下记号来结束本节。

2.8. 在全文中， $A \to B$ 是一个 DG R-代数同态，其中 B作为底层分次 A-模是投射的，而包络 DG R-代数$B \otimes_A B$记作 B^e。此外，(J, d^J)，或简写为 J，表示 B^e的对角理想，按定义，它是映射 $\pi_B\colon B^e \to B$ 的核，其中该映射由$\pi_B(b_1 \otimes_A b_2) = b_1 b_2$定义。关于 B^e 和 J的更多细节，请参见 [18]–[21]。此外，我们令 $\Omega := \Omega_A(B) = J/J^2$，称为 A上的 B 微分模 。如果 $A \to B$ 是交换环的同态，那么 Ω 就是 K¨ahler 微分模。

3. 导子

本节中，我们介绍 DG 背景下导子的概念，并记录其若干性质，以供后续各节使用。这里沿用上一节确立的记号。

3.1. 设 X 是一个 DG B^e-模，且 n 是一个整数。次数为 n 的 A-导子是一个元素 $D \in \mathrm{Hom}^{\mathsf{Gr}(A)}(B, X(n))$，它满足莱布尼茨法则，即对所有齐次元素 $b_1, b_2 \in B$，等式

$$D(b_1 b_2) = D(b_1)b_2 + (-1)^{|D||b_1|} b_1 D(b_2) \tag{3.1.1}$$

对 $|D| = n$ 成立。注意，对于一个 A-导子 D 和所有 $a \in A$， $D(a) = 0$ 。对于 DG B^e-模 X，所有次数为 n 的 A-导子构成的集合记为 $\mathrm{Der}_A(B, X)_n$ ，并且我们定义

$$^*\mathrm{Der}_A(B, X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Der}_A(B, X)_n.$$

注意， $^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 具有分次左 B-模结构。事实上，对于 $D \in \mathrm{Der}_A(B, X)_n$ 和 $b \in B_m$，次数为 $n + m$ 的 A-导子 bD 定义为 $(bD)(c) = bD(c)$，对所有 $c \in B$ 均成立。此外， $^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 具有左 DG B-模结构，其微分由下式定义

$$\partial^{\mathrm{Der}}(D) = \partial^X \circ D - (-1)^{|D|} D \circ d^B \in \mathrm{Der}_A(B, X)_{|D|-1}$$

对所有的 $D \in \mathrm{Der}_A(B, X)_{|D|}$，可以验证

$$\partial^{\mathrm{Der}}(bD) = d^B(b)D + (-1)^{|b|} b(\partial^{\mathrm{Der}}(D))$$

对所有齐次元素 $b \in B$，也就是说， $^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 满足莱布尼茨法则。

3.2. 在 3.1 的情形下，若 $X = B$，则我们将 $^*\mathrm{Der}_A(B, B)$ 简记为 $^*\mathrm{Der}_A(B)$。这是一个分次李代数，其括号乘积定义为

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2 \circ D_1 \tag{3.2.1}$$

对于齐次元素 $D_1, D_2 \in {}^*\mathrm{Der}_A(B)$。

在本文的不同语境中，我们都将使用括号乘积这一记号，其定义与 (3.2.1) 中相同，此处不再另行说明。

3.3. 考虑 3.1 中的情形，并设 $D_1, D_2 \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 是齐次导子，且满足 $|D_1| \neq |D_2|$。提醒读者注意，若 $|D_1| \equiv |D_2|$(模 2)，则 $D_1 + D_2$ 满足莱布尼茨法则 (3.1.1)。然而，非齐次元素 $D_1 + D_2$ 一般不一定满足莱布尼茨法则。换言之，$D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 并不意味着 D 满足 (3.1.1)，除非它是齐次的。

3.4. 考虑 3.1 中的情形，与 2.5 类似，可以在 $^*\mathrm{Der}_A(B,X)$ 上定义一个拓扑。更准确地说，对每个正整数 n，令

$$W_n = \{D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B,X) \mid D(B_i) = 0 \text{ for all } i \leqslant n\}.$$

于是，集合 $\{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 构成 $^*\mathrm{Der}_A(B,\ X)$ 中 0 的开邻域基，它定义了 $^*\mathrm{Der}_A(B,\ X)$ 上的线性拓扑。

以下结果的证明与命题 2.7 的证明类似。

命题 3.5。 设 X 是一个 *DG* B^e-模。那么，拓扑 *DG* B-模 $^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 是完备且分离的。

例 3.6。 设 $B = A[X_i \mid i \in \mathbb{N}]$ 是 A 的一个多项式扩张，它是通过伴随可数无穷多个变量得到的，并且满足 $0 < |X_1| \leqslant |X_2| \leqslant \cdots$，且对于所有正整数 n，$\{i \in \mathbb{N} \mid |X_i| = n\}$ 都是有限集；更多细节见 [21] 。那么，

$$D_1 = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \frac{\partial}{\partial X_i}$$

是 A 中 $^*\mathrm{Der}_A(B)$ 的一个 0 次 A-导子，也就是说， $D_1 \in \mathrm{Der}_A(B)_0$。根据命题 3.5，这个无穷和定义了一个唯一的导子。

另一方面，注意到元素

$$D_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial X_i}$$

不属于 $^*\mathrm{Der}_A(B)$。

例 3.7. 保次数映射 $\mathcal{E}\colon B \to B$ 由 $\mathcal{E}(b) = |b|b$ 定义，其中 $b \in B$ 为任意齐次元素。它是 $\mathrm{Der}_A(B)_0$ 中的一个元素，称为欧拉导子。注意， $B_0 \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{E}$；若 R 包含 $\mathbb{Q}$，则等号成立。

3.8. A-线性映射 $\delta\colon B \to J$ 由 $\delta(b) = b \otimes_A 1 - 1 \otimes_A b$ 定义，其中 $b \in B$ 任意。它是 $\mathrm{Der}_A(B,\ J)_0$ 中的一个元素，称为泛导子；参见 [19]。对于泛导子 $\delta \in {}^*\mathrm{Der}_A(B,\ J)$，总有 $\partial^{\mathrm{Der}}(\delta) = 0$。因此，$\delta$ 是 $^*\mathrm{Der}_A(B,\ J)$ 中的一个 0 次循环元。

给定一个 DG B^e-模 X 和一个整数 n，存在一个自然同构

$$\varpi_n\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Gr}(B^e)}(J, X(n)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_A(B,X)_n \tag{3.8.1}$$

阿贝尔群的同构，在此同构下， $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Gr}(B^e)}(J, X(n))$ 被映射为

$$\varpi_n(f) = f \circ \delta. \tag{3.8.2}$$

注意， $^*\mathrm{Hom}_{B^e}(J,X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Gr}(B^e)}(J, X(n))$ 是一个左 DG B-模，其左 B-作用定义为 $(bf)(j) = bf(j)$，对所有 $b \in B$, $f \in {}^*\mathrm{Hom}_{B^e}(J,X)$ 和$j \in J$均成立；微分则由公式 (2.4.1) 给出。

对所有整数 n，来自 (3.8.1) 的同构 ϖ_n 诱导出一个同构

$$\varpi\colon {}^*\mathrm{Hom}_{B^e}(J,X) \xrightarrow{\cong} {}^*\mathrm{Der}_A(B,X) \tag{3.8.3}$$

左 DG B-模之间的同构。此外，作为拓扑空间之间的同构，ϖ 是连续的。

回顾 2.8 中的记号，并注意到 $B^e/J \cong B$ 作为 DGR-代数，我们将上述讨论总结为以下结果。

命题 3.9。 给定一个 *DG* B^e-模 X，我们有一个同构

$$^*\mathrm{Der}_A(B,X) \cong {}^*\mathrm{Hom}_{B^e}(J,X)$$

拓扑左 *DG* B^e-模。取同调后，我们得到一个同构

$$\mathrm{H}\left({}^*\mathrm{Der}_A(B,X)\right) \cong {}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(B^e)}(J,X)$$

o分次 R-模，其中 $\mathcal{K}(B^e)$ 是 *DG* B^e-模的同伦范畴。此外，若 $XJ=0$ （即， X 是一个 *DG* B-模），则存在一个同构

$$^*\mathrm{Der}_A(B,X) \cong {}^*\mathrm{Hom}_B(\Omega,X) \tag{3.9.1}$$

拓扑 *DG* B-模。

3.10. 在命题 3.9 中，若假设 $X=J$，则

$$^*\mathrm{Der}_A(B,J) \cong {}^*\mathrm{End}_{B^e}(J)$$

其中 $^*\mathrm{End}_{B^e}(J) = {}^*\mathrm{Hom}_{B^e}(J,J)$ 是一个通常非交换的 DG R-代数。这表明 $^*\mathrm{Der}_A(B,J)$ 是 DG R-代数上的一个 DG 模
$^*\mathrm{End}_{B^e}(J)$。此外， $^*\mathrm{Der}_A(B,\ J)$ 是一个以单个元素 δ为生成元、定义在 $^*\mathrm{End}_{B^e}(J)$ 上的自由 DG 模。

例 3.11。 假设 $B=A[X_i \mid i\in\mathbb{N}]$ 是 A 的多项式扩张，或者 A 是一个除幂 DG R-代数，且 $B=A\langle X_i \mid i\in\mathbb{N}\rangle$ 是 A 的自由扩张；关于后一种情况的更多细节，参见 [21]。在两种情况下，我们都假设变量 X_i 满足与例 3.6 中相同的条件，即对于所有整数 $n\geqslant 1$，$0<|X_1|\leqslant|X_2|\leqslant\cdots$ 和 $\{i\in\mathbb{N}\mid |X_i|=n\}$ 都是有限集。

在 [21, 定理 6.10] 中，我们证明了 Ω 是一个半自由 DG B-模，其半自由基为 $\{u_i \mid i\in\mathbb{N}\}$，其中每个 u_i 都是 Ω 中 $\delta(X_i)\in J$ 的等价类。于是，在 $^*\mathrm{Der}_A(B) = {}^*\mathrm{Hom}_B(\Omega\ B)$ 中存在一个对偶基 $\{\partial_i \mid i\in\mathbb{N}\}$，其中每个$\partial_i\colon B\to B$ 都是一个 A-导子，满足

$$\partial_i(X_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

注意， $|\partial_i|=-|u_i|=-|X_i|$ 均为负数且递减。此外， $^*\mathrm{Der}_A(B)$中的每个元素都可以唯一地表示为 $\{\partial_i \mid i\in\mathbb{N}\}$的幂级数。更准确地说，对于 $D\in {}^*\mathrm{Der}_A(B)$中的每个元素，都有等式

$$D=\sum_{i=1}^{\infty} D(X_i)\partial_i$$

其中幂级数收敛，因为 $^*\mathrm{Der}_A(B)$是完备的。

4. Connections

联络的概念由 Connes [8] 在非交换微分几何的背景下提出；另见 [9]。文献 [19]讨论了这一概念在 DG 情形下的一种简要推广。此外，我们在此对这一主题的一些讨论，也可视为将文献 [12, 13] 中的内容提升至 DG 情形的版本。本节的主要结果是定理 4.14，其中我们引入了半自由 DG B-模沿着 DGB^e-模的联络的基本正合列。该结果对于我们在本文后文研究朴素可提升性至关重要。本节的记号仍沿用前文各节。

4.1. 设 N 是一个 DG B-模，X 是一个 DG B^e-模，且 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 是一个齐次元素。一个 D-联络（定义在 N 上，更准确地说，是沿着 X）是一个元素 $\psi \in \mathrm{Hom}^{\mathsf{Gr}(A)}(N, N \otimes_B X(|D|))$，满足对所有 $b \in B$ 以及所有齐次元素 $x \in N$，等式

$$\psi(xb) = \psi(x)b + (-1)^{|D||x|} x \otimes_B D(b) \tag{4.1.1}$$

成立。注意，$|\psi| = |D|$ 是一个 A-线性映射。

例 4.2. 对于 DG B-模 N，微分 ∂^N 是沿 B的 d^B-联络N 。

4.3. 沿用 4.1 中的记号，对于所有整数 n，零映射属于 $\mathrm{Der}_A(B, X)_n$ 。因此，根据定义，元素 $\psi \in \mathrm{Hom}^{\mathsf{Gr}(A)}(N, N \otimes_B X(|D|))$ 是沿 X 的零联络，当且仅当 ψ 是 B-线性的。

4.4. 沿用 4.1 中的记号，并假设 N 作为底层分次 B-模是自由的，且具有自由基 $\mathcal{B} = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$。对于任意导子 $D \in \mathrm{Der}(B, X)^{|D|}$，我们定义映射 $\varphi(D)$: $N \to N \otimes_B X$如下:

$$\varphi(D)\left(\sum_{i=1}^{r} e_{\lambda_i} b_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{|D||e_{\lambda_i}|} e_{\lambda_i} \otimes_B D(b_{\lambda_i})$$

对于所有由元素组成的序列 $b_{\lambda_1}, \ldots, b_{\lambda_r} \in B$，不难验证 $\varphi(D)$ 是一个 D-联络。我们称 $\varphi(D)$ 为相对于自由基 $\mathcal{B}$ 的 D-联络，定义在 N (沿着 X) 上的平凡 。

下面的结果列出联络的一些性质。证明可直接由定义得出。

命题 4.5. 设 N 是 *DG* B-模，X 是 *DG* B^e-模。对于 i =1，2，假设 $D_i \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 是齐次的，且 ψ_i: $N \to N \otimes_B X(|D_i|)$ 是沿着 X 定义在 N 上的 D_i- 联络。那么，以下断言成立:
(a) 若 $b \in B$ 是齐次的，则 $b\psi_1$ 是一个 bD_1-联络。(b) 若 $|D_1| = |D_2|$，则 $\psi_1 \pm \psi_2$ 是一个 $D_1 \pm D_2$-联络。(c) 若 $X = B$，则 $[\psi_1, \psi_2]$ 是一个 $[D_1, D_2]$-联络。

以下结果可由命题 4.5(b) 和 4.3 立即推出。

推论 4.6. 设 N 是一个 *DG* B-模，X 是一个 *DG* B^e-模。若ψ_1和 ψ_2: $N \to N \otimes_B X$ (n) 都是沿着 X、次数为 $n \in \mathbb{Z}$的 D-联络，则$\psi_1 - \psi_2$ 是 B-线性的。

4.7. 设 N 是一个 DG B-模，X 是一个 DG B^e-模。对于每个整数 n，令

$$\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X)_n = \left\{ \psi \colon N \to N \otimes_B X(n) \;\middle|\; \begin{array}{c} \psi \text{ is a } D\text{-connection for some} \\ D \in \mathrm{Der}_A(B, X)_n \end{array} \right\}.$$

此外，我们定义

$${}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X)_n.$$

由命题 4.5 可知，${}^*\mathsf{Conn}(N, N \otimes_B X)$ 具有分次左B-模的结构。此外，${}^*\mathsf{Conn}(N, N \otimes_B X)$ 是一个左 DG B-模，其微分结构由下式定义

$$\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi) = \partial^{N \otimes_B X} \circ \psi - (-1)^{|\psi|} \psi \circ \partial^N$$

对所有齐次元素 $\psi \in {}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X)$ 都成立，其中 $\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi)$ 是 D-联络 ψ的$\partial^{\mathrm{Der}}(D)$-联络。

在 $X = B$ 的情况下，我们将 ${}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B B)$ 简记为 ${}^*\mathrm{Conn}(N)$。

4.8. 采用 4.1 中的记号，若 $N = 0$，则 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Gr}(A)}(N, N \otimes_B X(|D|))$ 中只有一个元素ψ ，即零映射。注意，对于任意齐次导子 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$，此映射 ψ都满足 (4.1.1)。将视为 D-联络的零映射记为 0_D；若 $D \neq D'$，则我们区分 0_D 和 $0_{D'}$ 。因此，我们有双射

$$ {}^*\mathrm{Conn}(0, 0 \otimes_B X) = \{0_D |\ D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)\} \cong {}^*\mathrm{Der}_A(B, X) $$

4.9. 设 N 是 DG B-模， X 是 DG B^e-模。与 2.5 中的讨论类似， ${}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X)$ 成为一个拓扑 DG B- 模。

同样，命题 2.7 中的论证意味着以下结论。

命题 4.10。对于 *DG* B-模 N 和 *DG* B^e-模 X，拓扑 *DG* B-模 ${}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X)$ 是完备且分离的。

4.11。对于一个 DG B-模 N ，若其作为底层分次 B-模是自由的，并具有基 $\mathcal{B} = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ，以及一个 DG B^e-模 X，则存在一个自然包含

$$ \iota \colon {}^*\mathrm{Hom}_B(N, N \otimes_B X) \to {}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X) $$

因为所有 B-线性映射 $N \to N \otimes_B X$ 都是 0-联络。另一方面，存在一个自然映射

$$ \nu \colon {}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X) \to {}^*\mathrm{Der}_A(B, X) $$

该映射将一个 D-联络 ψ 映射到 D。注意， ν 是良定义的，即，如果 $\psi \in {}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X)$ 是一个 D-联络，那么 D 由 ψ唯一确定。更确切地说，如果 ψ 也是一个关于 $D' \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 的 D'-联络，那么对于所有 $b \in B$ 以及基元素 $e_\lambda \in \mathcal{B}$，根据 (4.1.1)，我们有 $e_\lambda \otimes_B (D - D')(b) = 0$，这意味着 $D = D'$。还要注意， ι 和 ν 都是连续的。

4.12. 设 N 是一个 DG B-模， X 是一个 DG B^e-模，并且 $\mathcal{L} \subseteq {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 是一个左 DG B-子模。一个 $\mathcal{L}$-联络 是一个 DG B-模同态

$$ \nabla \colon \mathcal{L} \to {}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X). $$

对于元素 $D \in \mathcal{L}$，我们用 ∇_D 表示 $\nabla(D)$。因此， ∇ 是一个 $\mathcal{L}$-联络，当且仅当对所有 $D, D' \in \mathcal{L}$ 和 $b \in B$ ，下列条件均成立：

(i) ∇_D 是沿着 X 在 N 上的一个 D-联络；(ii) $\nabla_{D+D'} = \nabla_D + \nabla_{D'}$；(iii) $\nabla_{bD} = b\nabla_D$；(iv) $\nabla_{\partial^{\mathrm{Der}}(D)} = \partial^{\mathrm{Conn}}(\nabla_D)$。

4.13. 考虑 4.12 中的情形。假设 $X = B$ 和 $\mathcal{L}$ 是 ${}^*\mathrm{Der}_A(B)$ 的李子代数。设 ∇ 是一个 $\mathcal{L}$-联络。对于 $D_1, D_2 \in \mathcal{L}$，定义

$$ R_\nabla(D_1, D_2) = [\nabla_{D_1}, \nabla_{D_2}] - \nabla_{[D_1, D_2]}. $$

我们称 R_∇ 的曲率。此外，若$R_\nabla = 0$，则称 $\mathcal{L}$-联络 ∇ 可积；关于这些模主题的详细内容，参见 [13] 。

定理 4.14。设 N 是一个 *DG* B-模，X 是一个 *DG* B^e-模。假设 N 作为底层分次 B-模是自由的（不一定是半自由的）。那么，

$$\mathcal{E}_N(X)\colon 0 \to {}^*\mathrm{Hom}_B(N, N\otimes_B X) \xrightarrow{\iota} {}^*\mathrm{Conn}(N, N\otimes_B X) \xrightarrow{\nu} {}^*\mathrm{Der}_A(B, X) \to 0$$

是左 *DG* B-模范畴 $\mathcal{C}(B)^{op}$ 中的一个正合列。

证明。由 4.4 以及对所有 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 都有 $\nu(\varphi(D)) = D$ 这一事实可知，ν 是满射。此外，根据定义，$\mathrm{Ker}\,\nu$ 是所有沿 X 作用于 N 的 0-联络构成的集合，也就是说，$\mathrm{Ker}\,\nu = {}^*\mathrm{Hom}_B(N, N\otimes_B X)$；参见 4.3 和 4.11。□

4.15. 我们将定理 4.14 中引入的短正合列 $\mathcal{E}_N(X)$ 称为 上沿 X 的联络的基本正合列 。

若 $N = 0$，则联络的基本正合列 $\mathcal{E}_0(X)$ 蕴含一个同构：
${}^*\mathrm{Conn}(0,\ 0\otimes_B X) \cong {}^*\mathrm{Der}_A(B,\ X)$，这一点已在 4.8 中提及。

在下面的结果中，请回顾 2.3 中自由 DG 模的定义。

命题 4.16. 设 N 是一个自由 *DG* B-模。那么，作为 *DG*B-模的一个序列，$\mathcal{E}_N(X)$ 对所有 *DG* B^e-模 X都分裂。若 $X = B$，则 N 具有一个可积的 ${}^*\mathrm{Der}_A(B)$-联络。

证明. 设 $\mathcal{B} = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是自由 DG B-模 N的一组自由基。考虑φ: ${}^*\mathrm{Der}_A(B,\ X) \to {}^*\mathrm{Conn}(N, N\otimes_B X)$，它将一个导子 D映射到平凡的D-联络 $\varphi(D)$；该联络是相对于自由基 $\mathcal{B}$定义的，见 4.4。显然，φ 是一个分次 B-模同态，并且 $\nu\circ\varphi = \mathrm{id}_{{}^*\mathrm{Der}_A(B,X)}$。因此，要证明该断言，只需证明等式

$$\partial^{\mathrm{Conn}} \circ \varphi = \varphi \circ \partial^{\mathrm{Der}}. \tag{4.16.1}$$

为此，令 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 和 $b \in B$。于是，

$$\begin{aligned}
(\partial^{\mathrm{Conn}} \circ \varphi)(D)(e_\lambda b) &= (\partial^{\mathrm{Conn}}(\varphi(D)))(e_\lambda b)\\
&= \partial^{N\otimes X}(\varphi(D)(e_\lambda b)) - (-1)^{|D|+|e_\lambda|}\varphi(D)(e_\lambda d^B b)\\
&= (-1)^{|D||e_\lambda|}\Big(\partial^{N\otimes X}(e_\lambda\otimes_B D(b)) - (-1)^{|D|+|e_\lambda|}e_\lambda\otimes_B D(d^B b)\Big)\\
&= (-1)^{|D||e_\lambda|+|e_\lambda|}\left(e_\lambda\otimes_B \partial^X(D(b)) - (-1)^{|D|}e_\lambda\otimes_B D(d^B b)\right)\\
&= (-1)^{|D||e_\lambda|+|e_\lambda|}e_\lambda\otimes_B \left(\partial^X(D(b)) - (-1)^{|D|}D(d^B b)\right)\\
&= (-1)^{|D||e_\lambda|+|e_\lambda|}e_\lambda\otimes_B \partial^{\mathrm{Der}}(D)(b)\\
&= \varphi\left(\partial^{\mathrm{Der}}(D)\right)(e_\lambda b)\\
&= (\varphi\circ\partial^{\mathrm{Der}})(D)(e_\lambda b)
\end{aligned}$$

其中第二个等号由以下事实得出：$\partial^N(e_\lambda b) = (-1)^{|e_\lambda|}e_\lambda d^B b$。这一计算证明了等式 (4.16.1)。

现在假设 $X = B$，并令 $\nabla_D = \varphi(D)$，其中 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B)$。若$D_1,\ D_2 \in {}^*\mathrm{Der}_A(B)$，则由命题 4.5(c)可知，$[\nabla_{D_1}, \nabla_{D_2}]$ 是一个 $[D_1, D_2]$-联络。此外，对于所有基元素 $e_\lambda \in \mathcal{B}$，都有 $[\nabla_{D_1}, \nabla_{D_2}](e_\lambda) = 0$。因此，$[\nabla_{D_1}, \nabla_{D_2}]$ 是平凡的 $[D_1, D_2]$-联络，即 $[\nabla_{D_1}, \nabla_{D_2}] = \nabla_{[D_1,D_2]}$。这意味着 ∇ 的曲率 R_∇ 消失，因此 ∇是可积的。□

5. Naïve lifting and connections along DG B^e-modules

本节（也是本文）的主要结果是定理 5.3，其中我们用沿 DGB^e-模的联络来刻画 DG 模的朴素可提升性。首先提醒读者 [21, 22] 中朴素可提升性的定义。和往常一样，我们仍沿用前几节的记号。

5.1. 设 N 是一个半自由 DG B-模，其半自由基为 $\mathcal{B} = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$。记 $N|_A$ 为 DG B-模 N，并通过 $A \to B$ 将其视为 DG A-模。注意，$N|_A$ 是一个半自由 DG A-模，且存在一个自然的 DG B-模满射 $\pi_N\colon N|_A \otimes_A B \to N$，其定义为对所有 $n \in N$ 和 $b \in B$，$\pi_N(n \otimes_A b) = nb$。若 π_N 在阿贝尔范畴 $\mathcal{C}(B)$ 中有右逆，或者等价地，若自然正合列

$$0 \to N \otimes_B J \to N \otimes_A B \xrightarrow{\pi_N} N \to 0$$

的 DG B-模分裂。

注意，N 是一个半自由 DG B-模，这恰好意味着它作为底层分次 B-模是自由的，其自由基 $\mathcal{B}$ 由一个良序集 Λ 索引，并且对每个 $e_\lambda \in \mathcal{B}$，都有

$$\partial^N(e_\lambda) = \sum_{\mu<\lambda} e_\mu b_{\mu\lambda} \tag{5.1.1}$$

其中 $b_{\mu\lambda} \in B$。在此情形下，由下式定义的 B-线性映射 $\alpha\colon N \to N \otimes_B J(-1)$

$$\alpha(e_\lambda) = \sum_{\mu<\lambda} e_\mu \otimes_B \delta(b_{\mu\lambda})$$

其中 δ 是在 3.8 中定义的泛导子，称为*Atiyah* 同态；更多详情参见 [19] 。实际上，映射 α 是一个次数为 -1 的 DG B-模同态，并且它属于一个正合三角

$$N \otimes_B J \to N|_A \otimes_A B \xrightarrow{\pi_N} N \xrightarrow{\alpha} N \otimes_B J(-1)$$

在同伦范畴 $\mathcal{K}(B)$ 中。[19, 命题 4.10] 证明了，N 可朴素地提升到 A 当且仅当 α 是零伦的。

下面给出使用联络描述 Atiyah 同态的另一种方式；与 [19, 定理 4.9] 比较。

命题 5.2。对于半自由 *DG* B-模 N，有如下等式

$$\alpha = -\partial^{\mathrm{Conn}}(\varphi(\delta)).$$

证明。设 $\mathcal{B} = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 DG B-模 N 的半自由基。注意，$\partial^{\mathrm{Conn}}(\varphi(\delta))$ 是一个 $\partial^{\mathrm{Der}}(\delta)$-联络，也就是说，$\partial^{\mathrm{Conn}}(\varphi(\delta))$ 是 B-线性的。于是，根据定义，对每个 $e_\lambda \in \mathcal{B}$，有如下等式

$$\begin{aligned} -\partial^{\mathrm{Conn}}(\varphi(\delta))(e_\lambda) &= \varphi(\delta)(\partial^N(e_\lambda)) - \partial^{N\otimes_B J}(\varphi(\delta)(e_\lambda)) \\ &= \sum_{\mu<\lambda} e_\mu \otimes_B \delta(b_{\mu\lambda}) \\ &= \alpha(e_\lambda) \end{aligned}$$

其中第二个等式由 (5.1.1) 以及 $\varphi(\delta)(e_\lambda) = 0$ 这一事实推出。 □

定理 5.3。对于半自由 *DG* B-模 N，以下各项等价：(i) N 可平凡提升至 A；

（*ii*）存在一个 δ-联络 $\psi \in {}^*Conn(N, N \otimes_B J)$，使得 $\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi) = 0$；（*iii*）$\mathcal{E}_N(J)$ 作为 *DG* B-模的序列分裂；（*iv*）对于所有 *DG* B^e-模 X，$\mathcal{E}_N(X)$ 作为 *DG* B- 模的序列分裂；（*v*） N 具有一个 ${}^*Der_A(B, J)$- 联络；（*vi*）对于所有 *DG* B^e-模 X，N 具有一个 ${}^*Der_A(B, X)$-联络。

证明。(ii) $\Longrightarrow$ (i)：假设存在一个 δ-联络 $\psi \in {}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B J)$，使得 $\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi) = 0$。那么，根据命题 4.5(b)，$f = \psi - \varphi(\delta)$ 是 0-联络，因此，f 是 B-线性的，即 $f \in {}^*\mathrm{Hom}_B(N, N \otimes_B J)$。于是，

$$\partial^{\mathrm{Hom}}(f) = \partial^{\mathrm{Conn}}(\iota(f)) = -\partial^{\mathrm{Conn}}(\varphi(\delta)) = \alpha$$

其中最后一个等式来自命题 5.2。因此，α 是零伦的。

(i) $\Longrightarrow$(ii)：假设 N 可以朴素提升至 A。根据我们在 5.1 节中的讨论，映射 α 是零伦的。因此，存在一个分次 B-线性映射 $f\colon N \to N \otimes_B J$，使得 $\partial^{\mathrm{Conn}}(\iota(f)) = \partial^{\mathrm{Hom}}(f) = \alpha$。令 $\psi = f + \varphi(\delta)$。利用命题 5.2，我们可以验证 ψ 满足 (ii) 中的要求。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)：假设 $\mathcal{E}_N(J)$ 作为 DG B-模的正合列是分裂的。因此，${}^*\mathrm{Der}_A(B, J)$ 同构于 ${}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B J)$ 的一个直和项，视为 DGB-模。由于正如我们在 3.8 中提到的，$\delta \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, J)$ 是一个循环元，因此在 ${}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B J)$ 中存在一个相应的循环元 ψ，满足 (ii) 中的要求。

(iv)$\Longleftrightarrow$(vi)（以及 (iii)$\Longleftrightarrow$(v)）：假设对于所有 DG B^e-模 X，DG B-模的短正合列 $\mathcal{E}_N(X)$ 都分裂。因此，ν 是一个分裂满同态，即存在一个 DG B-模同态 $\Psi\colon {}^*\mathrm{Der}_A(B, X) \to {}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X)$，使得 $\nu \circ \Psi = \mathrm{id}_{{}^*\mathrm{Der}_A(B, X)}$。我们通过设定 $\nabla_D = \Psi(D)$，为所有 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$ 定义 ${}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$-联络 ∇。

反过来，假设对于每个 DG B^e-模 X，DG B-模 N 都存在一个 ${}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$-联络 ∇。那么，令 $\Psi(D) = \nabla_D$，对所有 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$，我们有 $\nu \circ \Psi = \mathrm{id}_{{}^*\mathrm{Der}_A(B, X)}$，如所求。

(ii) $\Longrightarrow$ (iv)：设 X 为 DG B^e-模，并假设存在一个 δ-联络 $\psi \in {}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B J)$，使得 $\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi) = 0$。考虑 (3.8.3) 中的 ϖ，注意到 ϖ^{-1} 与微分可交换，因此，对于所有元素 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$，我们有等式

$$\varpi^{-1}(\partial^{\mathrm{Der}}(D)) = \partial^{\mathrm{Hom}}(\varpi^{-1}(D)). \tag{5.3.1}$$

现在，我们定义一个映射

$$\Psi\colon {}^*\mathrm{Der}_A(B, X) \to {}^*\mathrm{Conn}(N, N \otimes_B X)$$

由公式

$$\Psi(D) = (\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D)) \circ \psi$$

对于所有齐次元素 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B, X)$。注意，$|\Psi| = |\psi|$ 和 $\Psi(D)$ 是 D 上沿 X 的联络。事实上，对于所有 $b \in B$ 以及所有齐次元素 $x \in N$，我们有等式

$$\begin{aligned}
\Psi(D)(xb) &= (\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D))(\psi(xb)) \\
&= (\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D))(\psi(x)b + x \otimes_B \delta(b)) \\
&= \Psi(D)(x)b + (-1)^{|x||D|} x \otimes_B D(b)
\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 (3.8.2) 得出。因此，根据 ν 的定义，我们有 $(\nu \circ \Psi)(D) = D$，也就是说，$\nu \circ \Psi = \mathrm{id}_{{}^*\mathrm{Der}_A(B, X)}$。显然，$\Psi$ 是一个分次 B-模同态。现在只需证明 $\partial^{\mathrm{Conn}} \circ \Psi = \Psi \circ \partial^{\mathrm{Der}}$，

即， Ψ 是一个 DG B-模同态。为验证这个等式，设 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B,\ X)$ 是一个齐次元素。那么，我们有以下等式

$$\begin{aligned}
(\partial^{\mathrm{Conn}} \circ \Psi)(D) &= \partial^{\mathrm{Conn}}(\Psi(D)) \\
&= \partial^{N\otimes_B X} \circ \Psi(D) - (-1)^{|\Psi(D)|}\Psi(D) \circ \partial^N \\
&= \partial^{N\otimes_B X} \circ (\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D)) \circ \psi - (-1)^{|\psi|+|D|}(\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D)) \circ \psi \circ \partial^N \\
&= \partial^{N\otimes_B X} \circ (\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D)) \circ \psi - (-1)^{|D|}(\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D)) \circ \partial^{N\otimes_B J} \circ \psi \\
&= \left[\mathrm{id}_N \otimes_B (\partial^X \circ \varpi^{-1}(D)) + (\partial^N \otimes_B \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D))\right] \circ \psi \\
&\quad -(-1)^{|D|}\left[\left(\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D)\right)\left(\partial^N \otimes_B \mathrm{id}_X\right) + \mathrm{id}_N \otimes_B (\varpi^{-1}(D) \circ \partial^J)\right] \circ \psi \\
&= \left(\mathrm{id}_N \otimes_B (\partial^X \circ \varpi^{-1}(D))\right) \circ \psi - (-1)^{|D|}\left(\mathrm{id}_N \otimes_B (\varpi^{-1}(D) \circ \partial^J)\right) \circ \psi \\
&= \left(\mathrm{id}_N \otimes_B \partial^{\mathrm{Hom}}(\varpi^{-1}(D))\right) \circ \psi \\
&= \left(\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(\partial^{\mathrm{Der}}(D))\right) \circ \psi \\
&= \left(\Psi \circ \partial^{\mathrm{Der}}\right)(D)
\end{aligned}$$

其中，第三个等式由 $\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi) = 0$ 的假设得到，第六个等式由以下事实得到

$$(\partial^N \otimes_B \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D)) = (-1)^{|D|}\left(\mathrm{id}_N \otimes_B \varpi^{-1}(D)\right)\left(\partial^N \otimes_B \mathrm{id}_X\right)$$

最后，第八个等式来自 (5.3.1)。这一计算完成了证明。□

推论 5.4。 设 N 是一个半自由 *DG* B-模。如果由 ***4.11*** 中的 N 诱导的同调映射

$$\mathrm{H}_0(\nu)\colon \mathrm{H}_0({}^*\mathrm{Conn}(N, N\otimes_B J)) \to \mathrm{H}_0({}^*\mathrm{Der}_A(B, J))$$

是满射的，那么 N 可朴素地提升到 A。

证明。 正如我们在 3.8 中提到的，泛导子 δ 是 中次数为 0 的循环元 ${}^*\mathrm{Der}_A(B,\ J)$。由于 ν 是一个满射 DG B-模同态，它在边界集上诱导出满射。因此，若 $\mathrm{H}_0(\nu)$ 是满射，那么它也在循环元集之间诱导出满射映射 $Z_0({}^*\mathrm{Conn}(N,\ N\otimes_B J)) \to Z_0({}^*\mathrm{Der}_A(B,\ J))$。因此， δ 是 ${}^*\mathrm{Conn}(N,\ N\otimes_B J)$ 中一个循环元在 ν 下的像。由此，定理 5.3 中的条件 (ii) 得以满足，这等价于 N可朴素地提升到 A。□

6. Naïve lifting and connections along DG B-modules

定理 5.3 刻画了关于沿 DGB^e-模（尤其是沿对角理想 J）的联络的朴素可提升性。本节中，我们将更加关注通过同构 $B \cong B^e/J$ 将 DG B-模视为 DG B^e-模时的联络，其中也包括 B 本身。正如我们在本节末尾所提到的，与定理 5.3 不同，在这种情况下，我们不知道朴素可提升性是否可以通过关于沿 DG B-模的联络来刻画。不过，本节的主要结果，即定理 6.5，给出了若干等价条件，其中一些与定理 5.3 中的条件相似，另有一个条件与 Kodaira-Spencer 同态有关。最后提醒一下，我们仍沿用前几节确立的记号。

6.1. 经典 *Atiyah* 映射 $\bar{\alpha}\colon N \to N\otimes_B \Omega(-1)$定义为复合映射 $(\mathrm{id}_N \otimes_B \pi)\circ\alpha$，其中 $\alpha\colon N \to N\otimes_B J(-1)$是 5.1 节中引入的 Atiyah 同态

而 $\mathrm{id}_N \otimes_B \pi\colon N \otimes_B J(-1) \to N \otimes_B \Omega$ 是由自然投影 $\pi\colon J \to \Omega = J/J^2$ 诱导的映射。

6.2. 设 N 是一个半自由 DG B-模，且 $\bar{\delta}\colon B \to \Omega = J/J^2$ 是由泛导子 $\delta\colon B \to J$ 诱导的自然映射。于是，关于 N 的某个自由基，可以定义一个平凡的$_-$ $_\delta$-联络 $\varphi(\delta)\colon N \to N \otimes_B \Omega$。与命题 5.2 类似，我们可以得到 $\bar{\alpha} = -\partial^{\mathrm{Conn}}(\varphi(\bar{\delta}))$。

6.3. 设 N 是一个具有半自由基 $\mathcal{B} = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 的半自由 DG B-模。对于一个 A-导子 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B)$，4.4 节中讨论的沿着 B 的 N 上的平凡 D-联络 $\varphi(D)$，可以通过映射 $\varphi(D)\colon N \to N$ 来识别，其定义为对所有 $b \in B$ 和 $\mathrm{e}_\lambda \in \mathcal{B}$，有 $\varphi(e_\lambda b) = e_\lambda D(b)$。在此情形下，我们定义映射

$$\kappa\colon {}^*\mathrm{Der}_A(B) \to {}^*\mathrm{End}_B(N)(-1)$$

由以下公式

$$\kappa(D) = [\partial^N, \varphi(D)] - \varphi([d^B, D]) \tag{6.3.1}$$

对所有齐次元素 $D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B)$。我们称 κ 为 上的 *Kodaira-Spencer* 同态。注意，由命题 4.5(c)，对于任意齐次元素$D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B)$，$[\partial^N, \varphi(D)]$ 和 $\varphi([d^B, D])$都是 N 上次数相同的 $[d^B, D]$-联络。因此，根据推论 4.6，$\kappa(D)\colon N \to N(|D| - 1)$ 是一个 B-线性映射，故其定义良好。此外，显然 κ是一个 DG B-模同态。

6.4. 我们称 DG R-代数同态 $A \to B$ 具有半自由微分模，如果 $\Omega = J/J^2$ 是一个半自由 DG B-模，即存在一个由良序集 Λ 索引的半自由基$\mathcal{B} = \{u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$，使得对于所有整数 n，$\{\lambda \mid |u_\lambda| = n\}$ 是有限集，并且对于所有 $\lambda \in \Lambda$，$\partial^\Omega(u_\lambda)$ 属于 $\sum_{\mu<\lambda} u_\mu B$。在此情形下，$\Omega = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda B$ 是底层的分次自由 B-模，并且对每个$u_\lambda \in \mathcal{B}$，存在 $c_{\mu\lambda} \in B$ 使得

$$\partial^\Omega(u_\lambda) = \sum_{\mu<\lambda} u_\mu c_{\mu\lambda}.$$

请注意，例 3.11 中讨论的两个 DG 代数扩张都具有半自由微分模；参见 [21]。事实上，许多意义下的拟光滑DG代数扩张 [21] 都满足这一条件。从这个意义上说，具有半自由微分模几乎等同于拟光滑。

本节的主要结果是以下定理。

定理 6.5。 对于半自由 *DG* B-模 N，以下条件等价：

(i) 经典 *Atiyah* 映射 $\bar{\alpha}$ 是零伦的；*(ii)* 存在一个 $\bar{\delta}$-联络 $\psi \in {}^*\mathit{Conn}(N, N \otimes_B \Omega)$，使得 $\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi) = 0$；*(iii)* $\mathcal{E}_N(\Omega)$作为 *DG* B-模的正合列分裂；*(iv)* 对所有 *DG* B-模 X，$\mathcal{E}_N(X)$作为 *DG* B-模的正合列分裂；*(v)* N 具有一个 ${}^*\mathit{Der}_A(B, \Omega)$-联络；*(vi)* 对所有 *DG* B-模 X，N 具有一个 ${}^*\mathit{Der}_A(B, X)$-联络。

此外，如果 N 是非负分次的，且 $A \to B$ 具有半自由微分模，那么上述条件等价于以下条件：

(vii) $\mathcal{E}_N(B)$ 作为 *DG* B-模序列分裂；(viii) N 存在一个 ${}^*\mathrm{Der}_A(B)$-联络；

(ix) ***Kodaira-Spencer*** 同态 κ是零伦的。

该定理的证明将在以下准备工作之后给出。

6.6. 假设 $A \to B$ 具有半自由微分，并考虑 6.4 中的情形。由于根据 (3.9.1)，存在一个 DGB-模的同构 $g\colon {}^*\mathrm{Der}_A(B) \xrightarrow{\cong} {}^*\mathrm{Hom}_B(\Omega B)$，我们可以找到 $\partial_\lambda \in {}^*\mathrm{Der}_A(B)$，使得 $|\partial_\lambda| = -|u_\lambda| < 0$ and

$$g(\partial_\lambda)(u_\mu) = \begin{cases} 1 & (\lambda = \mu) \\ 0 & (\lambda \neq \mu). \end{cases} \tag{6.6.1}$$

引理 6.7. 考虑 *6.4* 和 *6.6* 中的情形，以下断言成立：(a) 对于所有 $\lambda \in \Lambda$，都有等式

$$\partial^{\mathrm{Der}}(\partial_\lambda) = (-1)^{|u_\lambda|+1} \sum_{\upsilon > \lambda} c_{\lambda\upsilon}\partial_\upsilon. \tag{6.7.1}$$

(b) 对于所有 $b \in B$，都有等式

$$\bar{\delta}(b) = \sum_\lambda u_\lambda \partial_\lambda(b). \tag{6.7.2}$$

(6.7.1) 的右侧是一个幂级数，因此是一个无穷和。另一方面，(6.7.2) 的右侧是一个有限和。

证明。 (a) 根据定义，对于所有 λ， $\mu \in \Lambda$，我们有等式

$$\begin{aligned} g(\partial^{\mathrm{Der}}(\partial_\lambda))(u_\mu) &= \left(\partial^{\mathrm{Hom}}(g(\partial_\lambda))\right)(u_\mu) \\ &= d^B\left(g(\partial_\lambda)(u_\mu)\right) - (-1)^{|\partial_\lambda|} g(\partial_\lambda)(\partial^\Omega(u_\mu)) \\ &= (-1)^{|\partial_\lambda|+1} g(\partial_\lambda)\left(\sum_{\upsilon<\mu} u_\upsilon c_{\upsilon\mu}\right) \\ &= (-1)^{|u_\lambda|+1} \sum_{\upsilon<\mu} \left(g(\partial_\lambda)(u_\upsilon)\right) c_{\upsilon\mu} \\ &= \begin{cases} (-1)^{|u_\lambda|+1} c_{\lambda\mu} & \lambda < \mu \\ 0 & \lambda \geqslant \mu. \end{cases} \end{aligned}$$

另一方面，我们有等式

$$\begin{aligned} g\left(\sum_{\upsilon>\lambda} (-1)^{|u_\lambda|+1} c_{\lambda\upsilon}\partial_\upsilon\right)(u_\mu) &= \sum_{\upsilon>\lambda} (-1)^{|u_\lambda|+1} c_{\lambda\upsilon} g(\partial_\upsilon)(u_\mu) \\ &= \begin{cases} (-1)^{|u_\lambda|+1} c_{\lambda\mu} & \lambda < \mu \\ 0 & \lambda \geqslant \mu \end{cases} \end{aligned}$$

其中，第一个等式源于以下事实： g 是连续的。因此，

$$g\left(\partial^{\mathrm{Der}}(\partial_\lambda)\right) = g\left(\sum_{\upsilon>\lambda} (-1)^{|u_\lambda|+1} c_{\lambda\upsilon}\partial_\upsilon\right)$$

这就推出了所需的等式 (6.7.1)。

(b) 注意，同构 g 由等式 $g(D) \circ \delta = D$ 给出，对所有$D \in {}^*\mathrm{Der}_A(B)$均成立。特别地，对于任意 $\mu \in \Lambda$，有 $g(\partial_\mu)(\delta(b)) = \partial_\mu(b)$。由于 Ω作为底层分次 B-模由 $\mathcal{B}$ 生成，我们可以写成 $\delta(b) = \sum_\lambda u_\lambda b_\lambda$

¯对 $b_\lambda \in B$成立。由此根据 (6.6.1) 可得 $b_\mu = g(\partial_\mu)(\delta(b)) = \partial_\mu(b)$，这就推出了等式 (6.7.2)，如所需。□

定理 *6.5* 的证明。 (i)-(vi) 的等价性可用与定理 5.3 证明中相同的论证得出。此外，(iv) $\Longrightarrow$ (vii) 的蕴含显然成立，而 (vii)$\Longleftrightarrow$(viii) 的证明与等价性 (iv)$\Longleftrightarrow$(vi) 的证明类似。

(vii) $\Longrightarrow$ (ii)：假设 $\mathcal{E}_N(B)$ 分裂为 DG B-模的一个正合列。考虑 6.4 和 6.6 中的情形。由于 $\nu\colon {}^*\mathsf{Conn}(N) \to {}^*\mathsf{Der}_A(B)$ 是一个分裂的满态射，存在一个 DG B-模同态 $\Psi\colon {}^*\mathsf{Der}_A(B) \to {}^*\mathsf{Conn}(N)$，使得 $\nu \circ \Psi = \mathrm{id}_{{}^*\mathrm{Der}_A(B)}$。对每个 $\lambda \in \Lambda$，令 $\psi_\lambda = \Psi(\partial_\lambda)$，并注意到$\psi_\lambda \in {}^*\mathsf{Conn}(N)$ 是一个带有 $|\psi_\lambda| = |\partial_\lambda| = -|u_\lambda|$的 ∂_λ-联络。现在，我们按如下公式定义映射 $\psi\colon N \to N \otimes_B \Omega$

$$\psi(x) = \sum_\lambda (-1)^{(|x|+|u_\lambda|)|u_\lambda|} \psi_\lambda(x) \otimes_B u_\lambda \tag{6.7.3}$$

对所有齐次元素 $x \in N$ 和 $u_\lambda \in \mathcal{B}$。注意，(6.7.3) 右侧的和是有限和，因为若 $|x| < |u_\lambda| = -|\partial_\lambda|$，则 $\psi_\lambda(x) = 0$，且满足不等式 $|u_\lambda| \leqslant |x|$的 λ 只有有限个。我们证明 ψ 满足条件 (ii)。对于所有齐次元素 $x \in N$ 和 $u_\lambda \in \mathcal{B}$，我们有

$$\begin{aligned}
\psi(xb) &= \sum_\lambda (-1)^{(|x|+|b|+|u_\lambda|)|u_\lambda|} \psi_\lambda(xb) \otimes_B u_\lambda \\
&= \sum_\lambda (-1)^{(|x|+|b|+|u_\lambda|)|u_\lambda|} \left(\psi_\lambda(x)b \otimes_B u_\lambda + (-1)^{|x||\partial_\lambda|} x\partial_\lambda(b) \otimes_B u_\lambda \right) \\
&= \sum_\lambda (-1)^{(|x|+|b|+|u_\lambda|)|u_\lambda|} \psi_\lambda(x) \otimes_B bu_\lambda + x \otimes_B \sum_\lambda (-1)^{(|b|+|u_\lambda|)|u_\lambda|} \partial_\lambda(b) u_\lambda \\
&= \sum_\lambda (-1)^{(|x|+|u_\lambda|)|u_\lambda|} \psi_\lambda(x) \otimes_B u_\lambda b + x \otimes_B \sum_\lambda u_\lambda \partial_\lambda(b) \\
&= \psi(x)b + x \otimes_B \bar{\delta}(b).
\end{aligned}$$

¯其中最后一个等式由 (6.7.2) 得出。因此，ψ 是一个 δ-联络。现在只需证明 $\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi) = 0$。为此，再次设 $x \in N$ 为一个

齐次元素，且 $u_\lambda \in \mathcal{B}$。于是，我们有以下等式

$$\begin{aligned}
(\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi))(x) &= \left(\partial^{N\otimes_B\Omega}\circ\psi - \psi\circ\partial^N\right)(x)\\
&= \partial^{N\otimes_B\Omega}\left(\sum_\lambda (-1)^{(|x|+|u_\lambda|)|u_\lambda|}\psi_\lambda(x)\otimes_B u_\lambda\right)\\
&\quad -\sum_\lambda (-1)^{(|x|-1+|u_\lambda|)|u_\lambda|}\psi_\lambda(\partial^N(x))\otimes_B u_\lambda\\
&= \sum_\lambda (-1)^{(|x|+|u_\lambda|)|u_\lambda|}\Big(\partial^N(\psi_\lambda(x))\otimes_B u_\lambda + (-1)^{|x|+|u_\lambda|}\psi_\lambda(x)\otimes_B \partial^\Omega(u_\lambda)\Big)\\
&\quad -\sum_\lambda (-1)^{(|x|-1+|u_\lambda|)|u_\lambda|}\psi_\lambda(\partial^N(x))\otimes_B u_\lambda\\
&= \sum_\lambda (-1)^{(|x|+|u_\lambda|)|u_\lambda|}\left(\partial^N(\psi_\lambda(x)) - (-1)^{|u_\lambda|}\psi_\lambda(\partial^N(x))\right)\otimes_B u_\lambda\\
&\quad +\sum_\lambda (-1)^{(|x|+|u_\lambda|)|u_\lambda|+|x|+|u_\lambda|}\psi_\lambda(x)\otimes_B \partial^\Omega(u_\lambda)\\
&= \sum_\lambda (-1)^{(|x|+|u_\lambda|)|u_\lambda|}\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi_\lambda)(x)\otimes_B u_\lambda\\
&\quad +\sum_\lambda (-1)^{(|x|+|u_\lambda|)|u_\lambda|+|x|+|u_\lambda|}\psi_\lambda(x)\otimes_B \partial^\Omega(u_\lambda). \qquad (6.7.4)
\end{aligned}$$

对于每个 $\lambda\in\Lambda$，等式

$$\begin{aligned}
\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi_\lambda) &= \partial^{\mathrm{Conn}}(\Psi(\partial_\lambda))\\
&= \Psi(\partial^{\mathrm{Der}}(\partial_\lambda))\\
&= \Psi\left((-1)^{|u_\lambda|+1}\sum_{\upsilon>\lambda} c_{\lambda\upsilon}\partial_\upsilon\right)\\
&= (-1)^{|u_\lambda|+1}\sum_{\upsilon>\lambda} c_{\lambda\upsilon}\psi_\upsilon \qquad (6.7.5)
\end{aligned}$$

成立。此外，由于对于所有 λ，$\mu\in\Lambda$都有 $|c_{\lambda\mu}| = |u_\mu| - |u_\lambda| - 1$，我们有

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda(x)\otimes_B \partial^\Omega(u_\lambda) &= \sum_{\nu<\lambda}\psi_\lambda(x)\otimes_B u_\nu c_{\nu\lambda}\\
&= \sum_{\nu<\lambda}(-1)^{(|u_\nu|+|x|+1)(|u_\lambda|-|u_\nu|-1)}c_{\nu\lambda}\psi_\lambda(x)\otimes_B u_\nu. \qquad (6.7.6)
\end{aligned}$$

将 (6.7.5) 和 (6.7.6) 代入 (6.7.4) 的最后一个等式，可以看出 $(\partial^{\mathrm{Conn}}(\psi))(x) = 0$，如所要求。

(ix) $\Longrightarrow$(vii)：如果 Kodaira-Spencer 同态 κ 是零伦的，那么存在一个分次 B-模同态 h：${}^*\mathrm{Der}_A(B) \to {}^*\mathrm{End}_B(N)$，使得 $\kappa(D) = -h(\partial^{\mathrm{Der}}(D)) + \partial^{\mathrm{End}}(h(D))$，对于所有 $D\in{}^*\mathrm{Der}_A(B)$。这意味着

$$[\partial^N, \varphi(D)] - \varphi([d^B, D]) = [\partial^N, h(D)] - h([d^B, D]).$$

因此，令 $\psi(D) = (\varphi - h)(D)$，我们看到 $\psi(D)$ 是沿着 B 作用在 N 上的一个 D-联络，并满足等式 $[\partial^N, \psi(D)] = \psi([d^B, D])$。于是可得，$\psi$：${}^*\mathrm{Der}_A(B) \to {}^*\mathrm{Conn}(N)$ 是一个 DG B-模同态，使得 $\nu\circ\psi = \mathrm{id}_{{}^*\mathrm{Der}_A(B)}$，因此 $\mathcal{E}_N(B)$ 分裂。

(vii) $\Longrightarrow$ (ix)：这个蕴含关系可通过逆向遵循 (ix) $\Longrightarrow$(vii) 的证明步骤得证。□

与定理 5.3 不同，我们不知道朴素可提升性是否能够由定理 6.5 的条件刻画。因此，我们以如下问题作为本文的结尾：

问题 6.8. 在定理 6.5 的假设下，条件 (i)-(ix) 是否等价于 N 可朴素提升至 A?

Acknowledgments

第二位和第三位作者感谢佐治亚南方大学数学科学系在他们于 2024 年 3 月访问期间给予的热情接待；本研究的部分工作正是在此期间完成的。

References

1. M. Auslander、S. Ding 和 Ø. Solberg, *Liftings and weak liftings of modules*, 《代数杂志》, **156** (1993), 273–317。2. L. L. Avramov, *Infinite free resolutions*, 《交换代数六讲》(贝拉特拉, 1996), 《数学进展》, 第 166 卷, Birkh¨auser, 巴塞尔, 1998 年, 第 1–118 页。3. L. L. Avramov、H.-B. Foxby 和 S. Halperin, *Differential graded homological algebra*, 准备中。4. L. L. Avramov、S. B. Iyengar、S. Nasseh、K. Sather-Wagstaff, *Homology over trivial extensions of commutative DG algebras* **47** 2019 2341 2356 , 《通讯代数》, (), –。5. E. Cartan, *Sur les variétés à connexion projective*, 《法国数学会通报》, **52** (1924), 205–241。6. E. Cartan, *Les espaces à connexion conforme*, 《波兰数学会年刊》, **2** (1923), 171–221。7. E. B. Christoffel, *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Von Herrn E. B. Christoffel in Zürich* ¨ **70** 1869 , 《纯粹与应用数学杂志》, (), 46–70。8. A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, 《高等科学研究所数学出版物》, **62**(1985), 257–360。9. J. Cuntz 和 D. Quillen, *Algebra extensions and nonsingularity*, 《美国数学会杂志》, **8**(1995), 第 2 期, 251–289。10. C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré diffrentiable*, 《拓扑学研讨会》, CBRM, 布鲁塞尔, 第 29–55 页, (1950)。11. C. Ehresmann, *Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable*, 《法国科学院报告》, 第 216 卷, **216** (1943), 628–630。12. E. Eriksen, *Connections on modules over quasi-homogeneous plane curves*, 《通讯代数》, **36** (2008), 第 8 期, 3032–3041。13. E. Eriksen 和 T. S. Gustavsen, *Connections on modules over singularities of finite and tame CM representation type* 2009, 99 108 , 施普林格出版社, 柏林, 第 – 页。14. Y. F´elix、S. Halperin 和 J.-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, 《数学研究生教材》, 第 205 卷, 施普林格出版社, 纽约, 2001 年。15. Tor H. Gulliksen 和 G. Levin, *Homology of local rings*, 《女王大学纯粹与应用数学论文集》第 20 号(1969), 女王大学, 金斯顿, 安大略, 加拿大。16. J. L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algebres de Lie*, 《法国数学会通报》, **78** (1950), 65–127。17. T. Levi-Civita 和 G. Ricci, *Méthodes de calcul diffrential absolu et leurs applications*, 《数学年刊 B》, **54** (1901), 125–201。18. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *Diagonal tensor algebra and naïve liftings*, 《纯粹与应用代数杂志》, **229**(2025), 第 1 期, 论文编号 107808。19. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *Obstruction to naïve liftability of DG modules*, 《交换代数杂志》, **16** (2024), 第 4 期, 459–475。20. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *On the semifree resolutions of DG algebras over the enveloping DG algebras* **52** 2024 2, 657 667 , 《通讯代数》, (), 第 – 期。

21. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *Naïve liftings of DG modules*, 《数学杂志》, **301** （2022）, 第 1 期, 1191–1210。22. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *The theory of f-operators with application to (weak) liftings of DG modules* **605** 2022 199 225 , 《代数杂志》, （）, –。23. S. Nasseh 和 S. Sather-Wagstaff, *Liftings and Quasi-Liftings of DG modules*, 《代数杂志》, **373** （2013）, 162–182。24. S. Nasseh 和 Y. Yoshino, *Weak liftings of DG modules*, 《代数杂志》, **502** （2018）, 233–248。25. M. Ono 和 Y. Yoshino, *A lifting problem for DG modules*, 《代数杂志》, **566** （2021）, 342–360。26. Y. Yoshino, *The theory of L-complexes and weak liftings of complexes*, 《代数杂志》, **188**（1997）, 第 1 期, 144–183。

Department of Mathematical Sciences, Georgia Southern University, Statesboro,GA 30460, U.S.A.*Email address*: snasseh@georgiasouthern.eduDepartment of Mathematics, Okayama University, 3-1-1 Tsushima-naka, Kita-ku, Okayam

A

700-8530, Japan*Email address*: onomaiko.math@okayama-u.ac.jp
Graduate School of Environmental, Life, Natural Science and Technology, Okayama University, Okayama 700-8530, Japan*Email address*: yoshino@math.okayama-u.ac.jp