arXiv:2601.12558v1 [math.AG] 18 Jan 2026

关于叶状结构第二陈类的注记

ALAN MUNIZ

Abstract. 我们给出了余维一叶状结构切层的第二陈类的上界。等价地，我们给出了奇异概形纯余维二部分的次数上界。特别地，射影空间上的次数为d 的叶状结构，其奇异概形的余维二部分的次数至少为 $d+1$。此外，只有当叶状结构为类型 $(1, d+1)$ 的有理叶状结构时，等号才成立。这些界涉及对一个不变量的计数，该不变量与二维叶状奇点的一阶展开有关。

1. Introduction

复流形 X 上的余维一分布 $\mathscr{F}$ 由如下正合序列给出

$$0 \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathscr{F}} \longrightarrow \mathrm{T}X \longrightarrow \mathscr{I}_Z \otimes \mathrm{N}_{\mathscr{F}} \longrightarrow 0$$

其中 $\mathrm{T}_{\mathscr{F}}$ 是切层，$\mathrm{N}_{\mathscr{F}}$ 是法丛，而 $Z = \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ 是奇异概形。切层 $\mathrm{T}_{\mathscr{F}}$ 是秩为 $\dim X - 1$ 的自反层，且 $\mathrm{N}_{\mathscr{F}}$ 是线丛。根据弗罗贝尼乌斯定理，若 $\mathrm{T}_{\mathscr{F}}$ 在向量场的李括号作用下封闭，则 $\mathscr{F}$ 定义一个叶状结构。

研究分布的一种方法是考察 $\mathrm{T}_{\mathscr{F}}$ 的层论性质及其与奇异概形的相互作用；例如参见[3, 8, 10, 7]。一个重要的问题是，Frobenius 可积条件如何影响叶状结构的不变量。在这一方向上最著名的结果是鲍姆–博特定理 [1], ，该定理（尤其是）描述了 $\mathscr{I}_Z \otimes \mathrm{N}_{\mathscr{F}}$ 的特征类如何沿着 Z局部化。例如，若 $\operatorname{codim} Z \geq 3$，则有 $c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}})^2 = 0$。此外，只要 $\mathrm{N}_{\mathscr{F}}$ 是 ample，其 Z_2 的 Z 余维二部分必为连通的，参见 [4]。对于非可积分布，这一结论可能不成立，参见 [12, 例 4。6]。

在 [10], 中，我们观察到，与一般分布相比， $\mathbb{P}^3$ 上次数为 ≤ 2 的叶状结构，其第二陈类只能取某个较小范围内的值。等价地说，奇异轨迹中余维二部分的次数必须受到限制。在本文中，我们证实了这一预期。我们证明了当 X 为射影流形时，叶状结构 $\mathrm{T}_{\mathscr{F}}$ 的第二陈类满足一个界。随后，我们将讨论具体到射影空间的情形。我们的第一个主要结果给出了以下一般界。

Date: 2025 年 12 月 31 日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：37F75，32S65；次要分类：14J60。*Key words and phrases.*全纯叶状结构、全纯分布、陈类。

thm:A **定理 A.** 设 X 为复射影流形，且具有非常 *ample* 除子 H。设 $\mathscr{F}$ 为 X 上的叶状结构。则有以下不等式。

$$\delta(\mathscr{F},H)+P(\mathscr{F})\geq\int_X c_2(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})H^{n-2}\geq P(\mathscr{F})$$

where $P(\mathscr{F})=-(n-2)\int_X\left(c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}})+K_X+\frac{(n-1)}{2}H\right)H^{n-1}$.

$\delta(\mathscr{F},H)$这一数量在第 3 节定义如下。给定一个（闭）点$p\in S\subset X$，设 ω 是定义 $\mathscr{F}|_S$ 在 p附近的限制的 1-形式。于是$\delta(\mathscr{F}|_S,p)$是由 ω和$d\omega$的系数生成的理想的余长。于是 $\delta(\mathscr{F},H)$是同调类H^{n-2}中一般 S的 $\delta(\mathscr{F}|_S,p)$之和。局部指标 $\delta(\mathscr{F}|_S,p)$计数 p处叶状结构芽的一阶展开，见引理 2.5。此外，$\delta(\mathscr{F},H)$当且仅当 $\mathscr{F}$ 的非 Kupka 奇点的余维至少为 3；若 $n=3$，则称其为广义 Kupka。

对于 $X=\mathbb{P}^n$ 射影空间，我们得到一个更精确的结果。在这种情况下，$\delta(\mathscr{F},H)\leq d^2$，且等号成立当且仅当 $\mathscr{F}$有一个类型为 $(1,d+1)$ 的有理第一积分。与通常一样，我们将上同调类写成整数。

thm:B **定理 B.** 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^n$上的一个次数为 d的余维一叶状结构。那么，

$$d+1\leq\deg Z_2\leq d^2+d+1$$

或者，等价地，

$$d^2+\frac{(n-2)(n-1-2d)}{2}\geq c_2(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})\geq\frac{(n-2)(n-1-2d)}{2}.$$

此外，如果 $\deg Z_2=d+1$，那么 $\mathscr{F}$ 是类型为 $(1,d+1)$ 的有理叶状结构。

对于 $n=3$，这一结果改进了 [9, 命题˜2。6]，作者在该文中研究叶状结构的高斯映射的几何。Fassarella 的结果是本工作的出发点。

本文安排如下。在第 2 节中，我们讨论叶状结构的基本结果，并证明若干有助于证明主要结果的引理。在第 3节中，我们证明定理 A 和 B，分别参见定理 3.1 和推论3.2。

2. Preliminaries

sec:Prelim

设 X 是一个维数为 n 的复射影流形。余维一分布 $\mathscr{F}$ 在 X 上由如下正合序列定义

$$0\longrightarrow\mathrm{T}_{\mathscr{F}}\longrightarrow\mathrm{T}X\xrightarrow{\omega}\mathscr{I}_Z\otimes\mathrm{N}_{\mathscr{F}}\longrightarrow 0$$

层 $\mathrm{T}_{\mathscr{F}}$ 是秩为 $n-1$ 的自反层，称为 $\mathscr{F}$ 的切层；层 $\mathrm{N}_{\mathscr{F}}$ 是一个线丛，称为 $\mathscr{F}$ 的法丛；理想层$\mathscr{I}_Z$ 定义了 $\mathscr{F}$ 的奇异概形，它是扭曲1-形式 $\omega\in H^0(\Omega^1_X\otimes L)$ 的消失轨迹。 X 上的余维一叶状结构是满足可积条件 $[\mathrm{T}_{\mathscr{F}},\mathrm{T}_{\mathscr{F}}]\subset\mathrm{T}_{\mathscr{F}}$ 的上述分布，或者等价地，满足 $\omega\wedge d\omega=0$。

下面我们讨论后续各节所需的一些预备结果。

2.1. **提升到仿射锥**。设 H 是定义嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ 的非常 ample 除子，其中 X，并令 $C_X \subset \mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}$ 为 X 的仿射锥。径向向量场 $\mathrm{rad} = \sum_{j=0}^{N} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ 作用于 $\mathbb{C}^{N+1}$，并保持 C_X。扭曲微分形式 $\theta \in H^0(\Omega^p_X(kH))$ 可视为 C_X 上的微分形式，使得 $\mathrm{rad} \lrcorner \theta = 0$ 且 $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}\theta = k\theta$；其中

$$\mathcal{L}_v\theta = v \lrcorner d\theta + d(v \lrcorner \theta)$$

是作用在 C_X 上的李导数。这一构造使我们能够将 X 上扭曲形式的外微分视为 C_X 上的齐次微分形式。我们也可以将这些形式看作 X 上仿射余切丛的外幂的整体截面。

陈类 $c_1(H) \in H^{1,1}(X, \mathbb{C}) = H^1(\Omega^1_X)$ 定义了一个非平凡的扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{rad}} \widehat{\mathrm{T}X} \longrightarrow \mathrm{T}X \longrightarrow 0.$$

$\widehat{\ }$向量丛 $\mathrm{T}X$ 称为关于 H 的 X 仿射切丛。对于 $X = \mathbb{P}^n$ 和 H（超平面类），这恰好就是欧拉序列。特别地，$\widehat{\mathrm{T}\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1}$。

仿射余切丛是对偶丛 $\widehat{\Omega}^1_X := \widehat{\mathrm{T}X}^\vee$。我们也记 $\widehat{\Omega}^p_X := \bigwedge^p \widehat{\mathrm{T}X}^\vee$。我们有以下短正合列

$$0 \longrightarrow \Omega^p_X \longrightarrow \widehat{\Omega}^p_X \xrightarrow{\mathrm{rad}} \Omega^{p-1}_X \longrightarrow 0$$

通过这一构造，我们将 C_X 上的齐次微分形式与某个 $\widehat{\Omega}^p_X(kH)$ 的整体截面对应起来，其中 $k \geq 0$。

对于 $1 \leq p \leq n$，$\widehat{\Omega}^p_X(kH)$ 的秩严格大于 n。因此，一般的整体截面处处不消失。假设给定 $\theta \in H^0(\widehat{\Omega}^p_X(kH))$，使得 $\mathrm{rad} \lrcorner \theta \neq 0$，且其消失轨迹 W 非空。一个有趣的问题是，W 的次数是否存在最优上界。若 W 是零维的，则有以下上界。

lem:bound-domega

引理 2.1。设 $\theta \in H^0(\widehat{\Omega}^p_X(kH))$ 是一个截面，其消失轨迹是零维子概形 W。则 W 的长度有如下界

$$\ell(W) \leq ((n+1-p+k)H + K_X)^n.$$

证明。首先，W 由 $\theta^\vee : (\widehat{\Omega}^p_X(kH))^\vee \to \mathcal{O}_X$ 的像定义。此外，我们有自然同构 $(\widehat{\Omega}^p_X)^\vee \cong \widehat{\Omega}^{n+1-p}_X(-K_X)$。注意，对于 $N = h^0(\mathcal{O}_X(H))$，$\widehat{\mathrm{T}X} \hookrightarrow \mathcal{O}_X(H)^{N+1}$；因此 $\mathcal{O}_X(-tH)^{N+1} \twoheadrightarrow \widehat{\Omega}^t_X$。于是，

$$\mathcal{O}_X((p-n-1-k)H - K_X)^{\binom{N+1}{p}} \twoheadrightarrow \widehat{\Omega}^{n+1-p}_X(-kH - K_X) \twoheadrightarrow \mathscr{I}_W$$

因此，$\mathscr{I}_W(K_X + (n+1-p+k)H)$ 是整体生成的。在 W 的一点处局部化，可见 $h^0(\mathscr{I}_W(K_X + (n+1-p+k)H)) \geq \mathrm{codim}\ W$。于是，$W$ 包含于一个由 $K_X + (n+1-p+k)H$ 类的 n 个因子构成的完全交中，结论由贝祖定理得出。□

注2.2. 对于 $X = \mathbb{P}^n$ 和 H 超平面类，可得 $\ell(W) \leq (k-p)^n$。这是预料之中的，因为 $\widehat{\Omega}^p_{\mathbb{P}^n}(k) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-p)^{\binom{n+1}{p}}$。然而，对于其他簇，这个界的效果较差。*Fiz* $X \subset \mathbb{P}^3$ 一个超曲面，其

次数为 l，且 H 为超平面类。对于 $\theta \in H^0(\widehat{\ }\Omega^2_X(kH))$， W 包含于 $\operatorname{rad} \lrcorner\theta$ 的零点集中，其由 $c_2(\Omega^1_X(kH))$ 界定。于是可得

$$\int_X c_2(\Omega^1_X(kH)) - ((1+k)H + K_X)^2 = k(2-l) + 2l - 3.$$

因此，最高陈类为 $l \geq 3$ 给出了更好的界。我们想知道，在射影空间以外的其他流形上， $\ell(W)$ （零维情形）是否存在一个最优界。

我们的主要兴趣是研究给定 $\omega \in H^0(\Omega^p_X(kH))$ 时的 $d\omega$，尤其是它的消失轨迹。下面的引理是齐次多项式的欧拉关系的推论。

引理 2.3. 设 $\omega \in H^0(\Omega^p_X(kH))$。则 $d\omega \in H^0(\widehat{\ }\Omega^p_X(kH))$ 的消失轨迹的理想层局部由 ω 和 $d\omega$ 的系数生成。

证明。首先注意到， C_X 上的微分形式模由 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上的多项式微分形式取模 X 及其微分所得。因此，我们只需证明多项式齐次形式的情形。

设 ω 是变量 $x_0, \ldots, x_N$ 中总次数为 k 的齐次 p-形式。我们将其限制到仿射图 $\{x_0 = 1\}$，并比较限制前后系数所生成的理想。我们需要固定一些记号。

给定 $I = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset \{0, \ldots, N\}$，我们使用多重指标记法 $dx_I = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$。对于 $i \notin I$，定义符号 $dx_i \wedge dx_I = (-1)^{\sigma(i,I)} dx_{I\cup\{i\}}$。于是，对于次数为 $k-p$ 的 A_I 齐次多项式，我们记作 $\omega = \sum_{|I|=p} A_I dx_I$。方程 $\operatorname{rad} \lrcorner\omega = 0$ 可改写为:

eq:euler-relation
eq:euler-relation

$$\forall J \mid |J| = p-1, \quad \sum_{j \notin J} x_j A_{J\cup\{j\}} (-1)^{\sigma(j,J)} = 0. \tag{1}$$

此外，

$$d\omega = \sum_{|J|=p+1} \left(\sum_{i \in J} \frac{\partial A_{J\setminus\{i\}}}{\partial x_i} (-1)^{\sigma(i,J\setminus\{i\})} \right) dx_J. \tag{2}$$

接下来，我们限制到仿射图 $\{x_0 = 1\}$，并比较由 $d\omega$ 定义的理想。令 $a_J = A_J|_{x_0=1}$。注意，将 ω 和 $d\omega$ 限制到 $\{x_0 = 1\}$ 后，所有含有 dx_0 的项都会消失。令 $\mathcal{I} \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ 表示由 $d\omega$ 的系数模 $(x_0 - 1)$ 生成的理想，并令 $\mathcal{I}_0$ 表示由 $d\omega|_{x_0=1}$ 的系数生成的理想。于是

$$\mathcal{I}_0 = \left(\sum_{i \in J} \frac{\partial a_{J\setminus\{i\}}}{\partial x_i} (-1)^{\sigma(i,J\setminus\{i\})} \,\middle|\, |J| = p+1,\ 0 \notin J \right),$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 + \left(\frac{\partial A_{J\setminus\{0\}}}{\partial x_0}\Big|_{x_0=1} + \sum_{i \in J\setminus\{0\}} \frac{\partial a_{J\setminus\{i\}}}{\partial x_i} (-1)^{\sigma(i,J\setminus\{i\})} \,\middle|\, 0 \in J \right).$$

我们要证明 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 + (a_K \mid 0 \notin K)$。取满足$|K| = p$的 $K \in \{1, \ldots, N\}$。我们将证明上面显示的 $J = \{0\} \cup K$ 项具有

如下形式 $k\,a_K+\mathcal{I}_0$。由欧拉关系和收缩方程（1），可得

$$\frac{\partial A_K}{\partial x_0}\Big|_{x_0=1}=(k-p)a_K-\sum_{j=1}^{N}x_j\frac{\partial a_K}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial a_{\{0\}\cup K\setminus\{i\}}}{\partial x_i}=-a_K(-1)^{\sigma(i,K\setminus\{i\})}-\sum_{j\notin\{0\}\cup K\setminus\{i\}}x_j\frac{\partial a_{\{j\}\cup K\setminus\{i\}}}{\partial x_i}(-1)^{\sigma(j,K\setminus\{i\})}.$$

因此，结合这些等式，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_K}{\partial x_0}\Big|_{x_0=1}&+\sum_{i\in K}\frac{\partial a_{\{0\}\cup K\setminus\{i\}}}{\partial x_i}(-1)^{\sigma(i,\{0\}\cup K\setminus\{i\})}=\\&=k\,a_K-\sum_{j\notin\{0\}\cup K}(-1)^{\sigma(j,K)}x_j\sum_{i\in K\cup\{j\}}\frac{\partial a_{\{j\}\cup K\setminus\{i\}}}{\partial x_i}(-1)^{\sigma(i,\{j\}\cup K\setminus\{i\})}\\&=k\,a_K+\mathcal{I}_0,\end{aligned}$$

由此得证。 □

2.2. 分布的陈类。 设 $\mathscr{F}$ 是复射影流形 X上的余维一分布。考虑正合序列

$$0\longrightarrow \mathrm{T}_{\mathscr{F}}\longrightarrow \mathrm{T}X\xrightarrow{\omega}\mathscr{I}_Z\otimes \mathrm{N}_{\mathscr{F}}\longrightarrow 0$$

可以看出，$\mathrm{T}_{\mathscr{F}}$ 的陈类与 Z的不变量相关。事实上，可以立即得到关于陈特征的一个等式

$$ch(\mathcal{O}_Z)=ch(\mathcal{O}_X)-(ch(\mathrm{T}X)-ch(\mathrm{T}_{\mathscr{F}}))ch(\mathrm{N}^{\vee}_{\mathscr{F}})$$

设 Z_2 表示 Z 的纯余维二子概形。相对于丰沛因子 H，Z_2 的次数为交乘积

$$\deg_H(Z_2)=\int_X[Z_2]H^{n-2}$$

这与 $\mathcal{O}_Z$times $(n-2)!$ 的希尔伯特多项式的首项系数一致。注意， Z 的低维分支不会影响首项系数。由赫尔泽布鲁赫-黎曼-罗赫定理可得 $\deg_H(Z_2)=\int_X ch_2(\mathcal{O}_Z)H^{n-2}$。利用陈特征的可加性，还可进一步得到

$$\deg_H(Z_2)=\int_X(ch_2(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})-ch_2(\mathrm{T}X)+ch_2(\mathrm{N}_{\mathscr{F}}))H^{n-2}$$

于是我们可以将其改写为

eq:c2tfeq:c2tf

$$\int_X c_2(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})H^{n-2}=\int_X(K_Xc_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}})+c_2(\mathrm{T}X)+c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}})^2)H^{n-2}+\\-\deg_H(Z_2).\tag{3}$$

Z_2 的次数不超过 $\mathscr{F}$限制在类为 H^{n-2}的一般曲面上的奇点数。因此，我们得到以下一般不等式。

lem:lower-bound

引理 2.4. 设 $\mathscr{F}$ 是复射影流形 X上的余维一分布，且 H 是非常 *ample* 除子。那么

eq:bound-C2eq:bound-C2

$$\int_X c_2(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})H^{n-2} \geq -(n-2)\int_X \left(c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}}) + K_X + \frac{(n-1)}{2}H\right)H^{n-1}. \tag{4}$$

可以要求 H 仅为 ample，并对某个 $a \gg 0$使用 aH。唯一的问题是，右侧在 a上不是齐次的，因此得到的结果较弱。

证明。设 S 是类 H^{n-2} 中的一般曲面，且与 $\mathscr{F}$横截。那么$Z_2 \cap S \subset \mathrm{Sing}(\mathscr{F}|_S)$。特别地，

$$\deg_H(Z_2) = \int_S [Z_2 \cap S] \leq \ell(\mathrm{Sing}(\mathscr{F}|_S)) = \int_S c_2(\Omega^1_S \otimes \mathrm{N}_{\mathscr{F}}).$$

另一方面， S 的余法丛正合列为

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-H)^{n-2} \longrightarrow \Omega^1_X|_S \longrightarrow \Omega^1_S \longrightarrow 0.$$

由伴随公式， $K_S = (K_X + (n-2)H)|_S$。于是，

$$\begin{aligned}\int_S c_2(\Omega^1_S \otimes \mathrm{N}_{\mathscr{F}}) &= \int_S \frac{c_1(\Omega^1_S \otimes \mathrm{N}_{\mathscr{F}})^2}{2} - ch_2(\Omega^1_S \otimes \mathrm{N}_{\mathscr{F}}) \\ &= \int_X \Bigg((c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}}) + (n-2)H + K_X)c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}}) + \\ &\qquad + c_2(\mathrm{T}X) + (n-2)K_X H + \frac{(n-2)(n-1)}{2}H^2\Bigg)H^{n-2}.\end{aligned}$$

因此，由方程（3）及以上讨论，

$$\begin{aligned}\int_X c_2(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})H^{n-2} &\geq \int_X (K_X c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}}) + c_2(\mathrm{T}X) + c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}})^2)H^{n-2} \\ &\qquad - \int_S c_2(\Omega^1_S \otimes \mathrm{N}_{\mathscr{F}}) \\ &= -(n-2)\int_X \left(c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}}) + K_X + \frac{(n-1)}{2}H\right)H^{n-1}.\end{aligned}$$

□

回顾一下，秩为 F 的凝聚层 r 的判别式为 $\Delta(F) = 2r\,c_2(F) - (r-1)^2 c_1(F)^2$。若 F是无挠且 μ_H-半稳定的，则它满足 Bogomolov不等式 $\int_X \Delta(F)H^{n-2} \geq 0$。由引理2.4 可推出以下较弱的不等式，而无需半稳定性假设：

eq:disc-bound
eq:disc-bound

$$\int_X \Delta(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})H^{n-2} \geq -(n-2)\int_X (K_X + c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}}) + (n-1)H)^2 H^{n-2}. \tag{5}$$

对于 $X=\mathbb{P}^n$， H 超平面类，以及 $c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}})=(d+2)H$，等式和不等式，(3)4) 和 (5) 可写为

eq:c22tfP Neq:c tfPN

$$c_2(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})=d^2+\frac{(n-3)(n-2d)}{2}+2-\deg(Z_2), \tag{6}$$

$$c_2(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})\geq\frac{(n-2)(n-1-2d)}{2} \tag{7}$$

$$\Delta(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})\geq-(n-2)d^2. \tag{8}$$

就我们的目的而言，只需考虑第二陈类。不过，若能用 $\mathscr{F}$ 来描述 Z 的高阶陈类，也会很有意义。对于 $X=\mathbb{P}^3$ 的情形，参见 [3]。

ssec:Loc

2.3. 一个局部不变量。考虑余维一叶状结构的一个芽 $\mathscr{G}$，它定义在（$\mathbb{C}^2$, 0）上，由一个1-形式的芽 η 定义，且在原点处奇异。定义整数

eq:delta-local eq:delta-local

$$\delta(\mathscr{G},0):=\ell\left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{J(\eta,d\eta)}\right)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{J(\eta,d\eta)}, \tag{9}$$

其中 $J(\eta,d\eta)$ 表示由 η 和 $d\eta$ 的系数生成的理想。这个数不依赖于定义 $\mathscr{G}$ 的 η 的选取，并且是一个解析不变量。

局部不变量 $\delta(\mathscr{G},0)$ 显然不大于米尔诺数 $\mu(\mathscr{G},0)=\ell\left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}/J(\eta)\right)$。此外，它与 $\mathscr{G}$ 的一阶展开有关。按照 Suwa [14], , 定义

$$I(\eta)=\{\,h\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}\mid hd\eta=\eta\wedge\theta,\ \text{for some}\,\theta\in\Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}\,\}.$$

这个理想有时称为持续奇点理想；参见 [5] 及其中的参考文献。若 $\eta=\underline{a}\,dx+\underline{b}\,dy$，则 $d\eta=f\,dx\wedge dy$ 其中 $f=\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}$。因此，

$$I(\eta)=(J(\eta):(f))=(J(\eta):J(\eta,d\eta)).$$

$\mathscr{G}$ 的一阶展开由集合 $U(\mathscr{G})=I(\eta)/J(\eta)$ 参数化，参见 [14, §4]。

lem:unfol-delta

引理 2.5。 设 $\mathscr{G}$ 是 $(\mathbb{C}^2,0)$ 上的一个叶状结构芽。则， $\ell(U(\mathscr{G}))=\delta(\mathscr{G},0)$。

证明。若 $\mathscr{G}$ 是正则的，则 $\ell(U(\mathscr{G}))=\delta(\mathscr{G},0)=0$。假设 $\mathscr{G}$ 是奇异的。考虑代数 $A=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}/J(\eta)$。由于 a 和 b 没有公因子， A 是一个零维完全交环，因此是阿廷-戈伦斯坦的。此外， $U(\mathscr{G})$ 是一个有限 A-模，并且我们有

$$U(\mathscr{G})=\mathrm{Ann}_A(\overline{f})=\mathrm{Hom}_A(A/(\overline{f}),A).$$

因此，由 Matlis 对偶 [2, 命题 3.2。12],

$$\ell(U(\mathscr{G}))=\ell(\mathrm{Hom}_A(A/(\overline{f}),A))=\ell(A/(\overline{f}))=\delta(\mathscr{G},0).$$

□

满足 $U(\mathscr{G})=0$ 的叶状结构因此是刚性的，即每个展开都是平凡的，见 [14, §6]。根据上面的引理，这意味着要么 $\mathscr{G}$ 是正则的，要么 $d\eta(0)\neq0$，是一个 Kupka 奇点。另一方面，如果 $\delta(\mathscr{G},0)=$

$\mu(\mathscr{G},0)$，那么 $U(\mathscr{G})=A$，并且存在一个全纯1形式 θ 使得$d\eta=\eta\wedge\theta$，或者等价地， η 允许一阶展开

$$\widetilde{\eta}=\eta+t\theta+dt$$

对应于 $1\in U(\mathscr{G})$ 的类。如果该展开可扩展为 η的无穷小展开，那么 $\eta=gdf$ 对于某些全纯函数f， g参见 [13, 命题 6。14]。

不变量 $\delta(\mathscr{G},0)$ 在我们的主要结果中起着重要作用。下面是我们的关键引理。

引理：关键引理

引理 2.6。 设 $\mathscr{F}$ 是 $(\mathbb{C}^n,0)$ 上沿纯余维二子概形 Z奇异的余维一叶状结构芽。设 $(S,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ 是与 $\mathscr{F}$横截的光滑曲面芽。那么交数 $(Z\cdot S)_0$ 满足

$$\mu(\mathscr{F}|_S,0)\geq(Z\cdot S)_0\geq\mu(\mathscr{F}|_S,0)-\delta(\mathscr{F}|_S,0),$$

其中 μ 表示米尔诺数。

证明。 设 $\omega=\sum_{j=1}^n a_jdx_j\in\Omega^1_{\mathbb{C}^n,0}$ 是定义 $\mathscr{F}$ 的可积1形式的一个芽。经过坐标变换后，不妨设 $S=V(x_3,\ldots,x_n)$，并记 a_j 为 a_j 模掉 $(x_3,\ldots,x_n)$ 后的等价类。设 $W=\mathrm{Sing}(\mathscr{F}|_W)$。于是

$$I_{(Z\cap S)}=(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\quad\text{and}\quad I_W=(\overline{a_1},\overline{a_2}).$$

不等式 $\mu(\mathscr{F}|_S,0)\geq(Z\cdot S)_0$ 可直接得出。

考虑商环 $A=\mathcal{O}_S/I_W=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(a_1,a_2,x_3,\ldots,x_n)$ 和理想 $J=I_{(Z\cap S)}\cdot A=I_{(Z\cap S)}/I_W$。由短正合列可得

$$0\longrightarrow J\longrightarrow A\longrightarrow\mathcal{O}_S/I_{(Z\cap S)}\longrightarrow 0$$

可得

$$(Z\cdot S)_0=\ell(\mathcal{O}_S/I_{(Z\cap S)})=\ell(\mathcal{O}_S/I_W)-\ell(J)=\mu(\mathscr{F}|_S,0)-\ell(J).$$

最后，我们只需证明 $\ell(J)\leq\delta(\mathscr{F}|_S,0)$。注意到，对 $f=\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}$， $\mathscr{F}|_S$ 由 $\omega=a_1dx_1+a_2dx_2$ 和 $d\omega=fdx_1\wedge dx_2$ 定义。于是

$$\delta(\mathscr{F}|_S,0)=\ell\left(\frac{\mathcal{O}_S}{(\overline{a_1},\overline{a_2},f)}\right)=\ell\left(A/(f)\right).$$

另一方面，可积性方程 $\omega\wedge d\omega=0$ 转化为

$$a_k\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)-a_j\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)+a_i\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j}-\frac{\partial a_j}{\partial x_k}\right)=0,\quad\forall i<j<k.$$

因此，对于每个 $k\geq 3$ ，我们都有 $\overline{a_k}f=0\in A$。这意味着 $J\subset\mathrm{Ann}_A(f)$；特别地， $\ell(J)\leq\ell(\mathrm{Ann}_A(f))$。与引理 2.5 的证明一样，我们得到

$$\ell(J)\leq\ell(\mathrm{Ann}_A(f))=\delta(\mathscr{F}|_S,0).$$

□

注意到， $\mathscr{F}$可以看作是 $\mathscr{F}|_S$的一个展开。若 $\delta(\mathscr{F}|_S,0)=0$，则 $\eta=0$具有一个 Kupka 奇点。特别地， Z 必定光滑，并且 $\mathscr{F}$ 双全纯等价于由二元 1-形式给出的叶状结构，即一个平凡展开。

按照引理 2.6 的证明，可以看出，若 Z 是一个（局部）完全交，则 $\mu(\mathscr{F}|_S, 0) = (Z \cdot S)_0$。

最后，我们指出 $\delta(\mathscr{G},0)$ 经适当修改后，也可定义于具有一个孤立奇点的 $(\mathbb{C}^n,0)$ 上的一维叶状结构。于是，引理 2.5 的相应版本也成立，尽管它与展开之间的关系不那么清楚。对于这种情形，引理 2.6 的类似结果目前尚未找到。

3. Main Results

sec:Main

首先，我们定义不变量 δ 的全局对应物。给定曲面 S 上的叶状结构$\mathscr{G}$，定义

$$\delta(\mathscr{G}) := \sum_{p\in \mathrm{Sing}(\mathscr{G})} \delta(\mathscr{G}, p).$$

给定具有非常 ample 除子 H 的 $n \geq 3$ 维复射影流形 X 上的叶状结构 $\mathscr{F}$，定义

$$\delta(\mathscr{F}, H) := \delta(\mathscr{F}|_S)$$

对于类为 S H^{n-2}的一般曲面。

thm:general

定理 3.1。 *[定理 A]* 设 X 是一个带有非常 *ample* 除子 H的复射影流形。设 $\mathscr{F}$ 是 X上的叶状结构。则有如下不等式。

$$\delta(\mathscr{F}, H) + P(\mathscr{F}) \geq \int_X c_2(\mathrm{T}_{\mathscr{F}})H^{n-2} \geq P(\mathscr{F})$$

where $P(\mathscr{F}) = -(n-2)\int_X \left(c_1(\mathrm{N}_{\mathscr{F}}) + K_X + \frac{(n-1)}{2}H\right) H^{n-1}$.

证明。 设 S 是类为 H^{n-2}的一般完全交曲面，使得 $\mathscr{F}$与 S横截。因此，$\mathscr{F}|_S$的法丛为 $\mathrm{N}_{\mathscr{F}}|_S$，且$S$ 与 Z_2 横截相交，并避开 Z的低维分支。根据引理 2.6，

$$c_2(\Omega^1_S \otimes \mathrm{N}_{\mathscr{F}}) \geq \deg_H(\mathrm{Sing}(\mathscr{F})_2) \geq c_2(\Omega^1_S \otimes \mathrm{N}_{\mathscr{F}}) - \delta(\mathscr{F}, H) \tag{10}$$

然后，由引理 2.4，我们得到下界。上界则由引理 2.4 中的相同论证及上述不等式得到。□

对于 $X = \mathbb{P}^n$， H 超平面类和 $\mathrm{N}_{\mathscr{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+2)$ 我们可以得到更多结果。事实上，在这种情况下，我们可以应用引理 2.1。

cor:boundPN

推论 3.2。 *[定理B]* 设 $\mathscr{F}$ 为次数为-d 余维一叶状结构，定义在 $\mathbb{P}^n$上。则

$$d+1 \leq \deg Z_2 \leq d^2 + d + 1$$

或者，等价地，

$$d^2 + \frac{(n-2)(n-1-2d)}{2} \geq c_2(\mathrm{T}_{\mathscr{F}}) \geq \frac{(n-2)(n-1-2d)}{2}.$$

此外，若 $\deg\ Z_2 = d+1$，则 $\mathscr{F}$是类型为 $(1, d+1)$的有理叶状结构。

构造有理第一积分的论证沿用了 [9, 命题3c˜ao 2.6], 的证明，该证明借鉴了 [11, 命题 5。1]。

证明。 首先，这些不等式由定理 3.1 和 $\delta(\mathscr{F}, H) \leq d^2$可得，这是引理2.1的结果。

设 L 是相对于 $\mathscr{F}$处于一般位置的一个一般二维平面，且 ω是定义 $\mathscr{F}|_L$ 的齐次 1-形式。我们可以写成

$$d\omega = Adx_1 \wedge dx_2 - Bdx_0 \wedge dx_3 + Cdx_0 \wedge dx_1,$$

其中 A、B、C的次数均为 d。若 deg $Z_2 = d+1$，则 $\delta(\mathscr{F}|L) = d^2$。于是，由诺特 AF+BG 定理可得一个非平凡关系 $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$，其中$\alpha$、$\beta$、$\gamma \in \mathbb{C}$不全为零。定义 $E = \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2$。于是 $d\omega \wedge dE = 0$，因此对某个齐次 1-形式 θ，有 $d\omega = \theta \wedge dE$。与径向向量场作内积，得到

$$(d+2)\omega = \mathrm{rad} \lrcorner d\omega = (\mathrm{rad} \lrcorner \theta)dE - E\theta.$$

有理 1-形式 $\frac{\omega}{E^{d+2}}$ 是闭的。~~应用~~ [6, 引理 9], , 存在一个闭有理 1-形式 η 延拓 $\frac{\omega}{E^{d+2}}$，并在其极除子 $\mathscr{F}$ $(\eta)_\infty$之外定义。由于 L 是一般的，$(\eta)_\infty$ 支撑在一个超平面 H上。此外， $\eta|_{\mathbb{P}^n \setminus H}$ 是恰当且正则的。因此， $\mathscr{F}$ 具有如下形式的第一积分 F/H^{d+1}。 □

References

[1] P. Baum 和 R. Bott。全纯叶状结构的奇点。 *J. Differ. Geom.*，7：279–342，1972。doi:10.4310/jdg/1214431158。[2] W. Bruns 和 J. Herzog。 *Cohen-Macaulay rings* 39 *Cambridge Studies in*，第 卷。 *Advanced Mathematics* 1993 剑桥大学出版社，剑桥，。[3] O. Calvo-Andrade、M. Corrˆea 和 M. Jardim。射影三空间上的余维一全纯分布。 *Int. Math. Res. Not.*，2020 9074，2020 23 9011 10 1093 251 ( )：–。doi: . /imrn/rny 。[4] O. Calvo-Andrade、M. Corrˆea、M. Jardim 和 J. Seade。论全纯叶状结构奇异集的连通性。预印本，arXiv:2506.08942 [math.AG] (2025)，2025。网址：https://arxiv.org/abs/2506.08942。[5] O. Calvo-Andrade、A. Molinuevo 和 F. Quallbrunn。论 $\mathbb{P}^n$中余维一叶状结构奇异轨迹的几何。 *Rev. Mat. Iberoam.*，35(3)：857–876，2019。doi:10.4171/rmi/1073。[6] C. Camacho、A. Lins Neto 和 P. Sad。具有代数极限集的叶状结构。 *Ann. of*，( )：–。 *Math. (2)* 136 2 429 446, 1992 10 2307 2946610 doi: . / 。[7] A. Cavalcante、M. Corrˆea 和 S. Marchesi。论法诺三维簇上的全纯分布。 *J. Pure Appl. Algebra*，224(6)：20，2020。编号/No 106272。网址：hdl.handle.net/1843/EABA-AXHJ22，doi:10.1016/j.jpaa.2019.106272。[8] M. Corrˆea、M. Jardim 和 A. Muniz。通过奇异概形研究分布的模空间。*Math. Z.*，301(3)：2709–2731，2022。doi:10.1007/s00209-022-03001-y。[9] F. F. do Amaral. *Sobre a aplicacao de Gauss de foliacoes holomorfas em espacos projetivos* 2008 2017 。博士论文，IMPA，。网址：https://impa.br/wp-content/uploads/ / 08/tese dout thiago fassarella amaral.pdf。[10] H. Galeano、M. Jardim 和 A. Muniz。三维射影空间上次数 2 的余维一分布。 *J. Pure Appl. Algebra*，226(2)：32，2022。编号/No 106840。doi:10.1016/j.jpaa.2021.106840。[11] A. Lins Neto 和 J. V. Pereira。射影平面叶状结构的鲍姆-博特映射的一般秩。 *Compos. Math.*，142(6)：1549–1586，2006。doi:10.1112/S0010437X06002326。[12] A. Muniz。由合成关系构造的 p-形式。2025。网址：https://www.openstarts.units.it/ handle/10077/37300，doi:10.13137/2464-8728/37300。[13] T. Suwa。带奇点的复解析叶状结构的展开。 *Jpn. J. Math.*， *New Ser.* 9 181 206, 1983 ，：–。

[14] T. Suwa。余维一复解析叶状结构奇点的展开。载于
Singularity theory. Proceedings of the symposium Trieste Italy August 19– Septem-，，，，，第–页。新加坡：世
ber 6 1991 817 865 1995
界科学出版社，。

Departamento de Matemática、 Centro de Ciências Exatas e da Natureza、
Universidade Federal de Pernambuco、 Recife - PE、 CEP 50740-560、 Brasil
Email address: alan.nmuniz@ufpe.br