arXiv:2601.12590v1 [math.CA] 18 Jan 2026

四个修正贝塞尔函数乘积的积分

Robert E. Gaunt*

摘要

我们计算涉及第一类和第二类修正贝塞尔函数的四函数乘积与幂函数的定积分。我们给出以 Meijer G-函数、广义超几何函数和 Lauricella F_C 函数表示的一般公式，并研究若干特殊情形；在这些情形下，积分可以用较简单的特殊函数表示，甚至可以写成初等形式。由此，我们推导出一些关于四个艾里函数乘积定积分的新公式。

关键词： 修正贝塞尔函数；积分；梅林变换；艾里函数；Meijer G- 函数；广义超几何函数

AMS 2020主题分类： 主要分类 33C10；33C20；33C60

1 引言

涉及贝塞尔函数乘积的定积分在文献中备受关注。两个和三个贝塞尔函数乘积的一般公式汇编于 [8, 12, 18, 21]等标准参考文献中。四个或更多贝塞尔函数乘积的一般公式较难找到，但这一主题也受到广泛关注（例如参见[3, 5, 7, 10, 11, 15, 17, 20, 25, 31]），其中一些公式收录于标准参考文献 [8, 12, 21]中。对（修正）贝塞尔矩 $\int_0^\infty x^k I_\alpha^m(x) K_\beta^n(x)\,\mathrm{d}x$, $\alpha,\ \beta \in \{0,1\}$, $k,\ m,\ n \in \mathbb{N}$的求值备受关注，这是因为这些积分出现在数学物理的多个领域中，包括凝聚态物理 [3, 19] 和量子场论 [4, 6]。这里，$I_\nu(x)$和 $K_\nu(x)$分别表示第一类和第二类修正贝塞尔函数。

对于含有四个或更多修正贝塞尔函数 $I_\nu(x)$ 和 $K_\nu(x)$ 乘积的积分，尽管 $\nu \in \{0,1\}$ 这一情形已受到广泛关注（例如前述物理学文献中的参考文献），但据作者所知，一般情形 $\nu \in \mathbb{C}$（只要积分存在）似乎尚未在文献中得到详细处理。本文通过计算涉及四个第一类和第二类修正贝塞尔函数乘积的一般定积分，填补了这一空白，即计算形如$\int_0^\infty x^{s-1}\{\prod_{i=1}^{4-n} I_{\mu_i}(a_i x)\}\{\prod_{j=1}^{n} K_{\nu_j}(b_j x)\}\,\mathrm{d}x$、 $n = 1, 2, 3, 4$ 的积分，其中参数满足积分收敛条件。在第 2.1 节中，我们给出用 Meijer G-函数、广义超几何函数和 Lauricella F_C 函数表示的一般公式，所有这些函数均在附录A中定义。对于某些参数值，应用 Meijer G-函数和广义超几何函数的约化公式，可以用更简单的特殊函数表示这些积分。我们在第 2.2 节中研究了若干此类情形，得到了一些相当优美的表达式，并指出了某些积分取初等形式的情形

*数学系，曼彻斯特大学，牛津路，曼彻斯特 M13 9PL，英国，robert.gaunt@manchester.ac.uk

。据作者所知，第2节中给出的积分公式大多是新的；对于文献中已有积分公式的情形，我们也明确指出。

涉及艾里函数乘积的定积分也出现在数学物理中[16, 26, 28] ，这些积分的求值一直是许多研究的主题；例如，参见 [1, 2, 13, 22, 23, 24, 27, 29]。在第3节中，我们应用第2节中的一些公式，推导出艾里函数四重乘积定积分的新公式。我们的公式补充了 [1, 13, 24] 中的结果，该文给出了涉及四个艾里函数乘积的定积分的闭式公式。第2节中各项结果的证明见第4节。最后，在附录A中，我们列出本文所用特殊函数的一些基本性质。

2 四个修正贝塞尔函数乘积的积分

2.1 一般公式

在下面的定理中，我们求出四个修正贝塞尔函数乘积的梅林变换。公式以 Meijer G-函数、正则化广义超几何函数和 Lauricella F_C 函数表示，它们均在附录A中定义。定理2.1的证明推迟到第4节，与第2节所有定理的证明一样。

定理2.1。 *1.* 假设$\operatorname{Re} a$、$\operatorname{Re} b>0$、$\operatorname{Re} s>|\operatorname{Re}\alpha|+|\operatorname{Re}\beta|+|\operatorname{Re}\gamma|+|\operatorname{Re}\delta|$。那么

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x^{s-1}K_\alpha(ax)K_\beta(ax)K_\gamma(bx)K_\delta(bx)\,\mathrm{d}x\\&\quad=\frac{\pi}{8a^s}G^{4,4}_{6,6}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{2-\gamma-\delta}{2},\frac{2+\gamma-\delta}{2},\frac{2+\gamma-\delta}{2},\frac{2+\gamma+\delta}{2},\frac{s}{2},\frac{s+1}{2}\\ \frac{s+\alpha+\beta}{2},\frac{s-\alpha+\beta}{2},\frac{s+\alpha-\beta}{2},\frac{s-\alpha-\beta}{2},\frac12,1\end{matrix}\right).\end{aligned}\tag{2.1}$$

2. 假设$\operatorname{Re} a$、$\operatorname{Re} b>0$、$\operatorname{Re} s>|\operatorname{Re}\beta|+|\operatorname{Re}\gamma|+|\operatorname{Re}\delta|-\operatorname{Re}\alpha$。那么

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x^{s-1}I_\alpha(ax)K_\beta(ax)K_\gamma(bx)K_\delta(bx)\,\mathrm{d}x\\&\quad=\frac{1}{8a^s}G^{2,6}_{6,6}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{2-\gamma-\delta}{2},\frac{2+\gamma-\delta}{2},\frac{2+\gamma-\delta}{2},\frac{2+\gamma+\delta}{2},\frac{s}{2},\frac{s+1}{2}\\ \frac{s+\alpha+\beta}{2},\frac{s+\alpha-\beta}{2},\frac{s-\alpha+\beta}{2},\frac{s-\alpha-\beta}{2},\frac12,1\end{matrix}\right).\end{aligned}\tag{2.2}$$

3. 假设$\operatorname{Re} b>\operatorname{Re} a>0$、$\operatorname{Re} s>|\operatorname{Re}\gamma|+|\operatorname{Re}\delta|-\operatorname{Re}(\alpha+\beta)$，或者$\operatorname{Re} b=\operatorname{Re} a>0$和$|\operatorname{Re}\gamma|+|\operatorname{Re}\delta|-\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<s<2$。那么

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x^{s-1}I_\alpha(ax)I_\beta(ax)K_\gamma(bx)K_\delta(bx)\,\mathrm{d}x\\&\quad=\frac{1}{4a^s}\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda+s}\Gamma\tfrac{\lambda+1}{2}\Gamma\tfrac{\lambda+2}{2}\Gamma\tfrac{s+\lambda+\gamma+\delta}{2}\Gamma\tfrac{s+\lambda-\gamma+\delta}{2}\Gamma\tfrac{s+\lambda+\gamma-\delta}{2}\Gamma\tfrac{s+\lambda-\gamma-\delta}{2}\\&\qquad\times{}_6\tilde F_5\left(\begin{matrix}\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2},\frac{s+\lambda+\gamma+\delta}{2},\frac{s+\lambda-\gamma+\delta}{2},\frac{s+\lambda+\gamma-\delta}{2},\frac{s+\lambda-\gamma-\delta}{2}\\ \alpha+1,\beta+1,\lambda+1,\frac{s+\lambda}{2},\frac{s+\lambda+1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right),\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中 $\lambda=\alpha+\beta$。

4. 设 $\operatorname{Re} a$，$\operatorname{Re}\ b$，$\operatorname{Re}\ c$，$\operatorname{Re} d>0$。假设 $\operatorname{Re}\ d>\operatorname{Re}(a+b+c)$ 且 $\operatorname{Re}\ s>|\operatorname{Re}\ \delta|-\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma)$，或 $\operatorname{Re} d=\operatorname{Re}(a+b+c)$ 且 $|\operatorname{Re}\ \delta|-\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma)<s<2$。则

$$\int_0^\infty x^{s-1}I_\alpha(ax)I_\beta(bx)I_\gamma(cx)K_\delta(dx)\,\mathrm{d}x=\frac{2^{s-2}}{d^2}\left(\frac{a^2}{d^2}\right)^\alpha\left(\frac{b^2}{d^2}\right)^\beta\left(\frac{c^2}{d^2}\right)^\gamma\times$$
$$\times F_C^{(3)}\left(\frac{s+\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2},\frac{s+\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2};\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;\frac{a^2}{d^2},\frac{b^2}{d^2},\frac{c^2}{d^2}\right).\qquad(2.4)$$

注 2.2. 通过考察修正贝塞尔函数 $I_\nu(z)$和 $K_\nu(z)$在极限 $z\to 0$和 $z\to\infty$下的极限行为（见附录 *A.1* 中的极限形式（*A.69*）–（*A.73*）及其后续讨论），即可清楚看出定理*2.1*的积分公式成立所需的参数 s、 a、 b以及 α、β、γ、δ的条件。类似的说明也适用于下文所有积分公式。

积分公式（2.4）实际上是下述定理所给公式（2.5）的一个特例。

定理 2.3. 设 $n\geq 1$，并假设对于 $k=1,\ldots,n$，实部 $a_k>0$。进一步假设实部 $b>\sum_{k=1}^n$实部 a_k且实部 $s>|$实部 $b|-\sum_{k=1}^n$实部 α_k，或者实部$b=\sum_{k=1}^n$实部 a_k且 $|$实部 $b|-\sum_{k=1}^n$实部 $\alpha_k<s<2$。则

$$\int_0^\infty x^{s-1}\left\{\prod_{k=1}^n I_{\alpha_k}(a_kx)\right\}K_\beta(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{2^{s-2}}{b^2}\left\{\prod_{k=1}^n\left(\frac{a_k^2}{b^2}\right)^{\alpha_k}\right\}\times$$
$$\times F_C^{(n)}\left(\frac{s+\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta}{2},\frac{s+\alpha_1+\cdots+\alpha_n-\beta}{2};\alpha_1+1,\ldots,\alpha_n+1;\frac{a_1^2}{b^2},\cdots,\frac{a_n^2}{b^2}\right).\quad(2.5)$$

对于某些参数值，定理2.1第1、2和3部分给出的积分公式可化为 Meijer G-函数和低阶广义超几何函数。以下推论给出了一些例子。

Co推论2.4。 *1.* 假设 实部 a，实部 $b>0$且实部 $s>2|$实部 $\alpha|+2|$实部$\beta|$。则 n

$$\int_0^\infty x^{s-1}K_\alpha^2(ax)K_\beta^2(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8a^s}G_{4,4}^{3,3}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1+\beta,1-\beta,1,\frac{s+1}{2}\\ \frac{s}{2}+\alpha,\frac{s}{2}-\alpha,\frac{s}{2},\frac{1}{2}\end{matrix}\right).\qquad(2.6)$$

2. 假设 实部 a，实部 $b>0$且实部$s>2|$实部 $\beta|+|$实部$\alpha|-$实部α。则

$$\int_0^\infty x^{s-1}I_\alpha(ax)K_\alpha(ax)K_\beta^2(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8a^s}G_{4,4}^{2,4}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1+\beta,1-\beta,1,\frac{s+1}{2}\\ \frac{s}{2}+\alpha,\frac{s}{2},\frac{s}{2}-\alpha,\frac{1}{2}\end{matrix}\right).\qquad(2.7)$$

3. 假设实部$b>$实部$a>0$且实部 $s>2|$实部 $\beta|-2$实部α，或者实部 $b=$实部$a>0$且 $2|$实部 $\beta|-2$实部$\alpha<s<2$。则

$$\int_0^\infty x^{s-1}I_\alpha^2(ax)K_\beta^2(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4a^s}\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha+s}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\beta+\frac{s}{2}\right)$$
$$\times\,{}_4\tilde{F}_3\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\beta+\frac{s}{2},\alpha+\frac{s}{2},\alpha-\beta+\frac{s}{2}\\ \alpha+1,2\alpha+1,\alpha+\frac{s+1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right).\qquad(2.8)$$

证明。 取给定的参数值，将 Meijer G 函数的约化公式 (A.89) 和 (A.90) 应用于积分公式 (2.1) 和 (2.2)，分别得到公式 (2.6) 和 (2.7)。取给定的参数值，将约化公式 (A.77) 应用于积分公式 (2.3)，即可得到公式 (2.8)。

□

2.2 化简为更简单的特殊函数和初等形式

本节将详细研究若干情形：第 2.1 节中的积分公式在这些情形下形式更为简单，且积分的求值可用广义超几何函数或更简单的特殊函数表示。我们还指出了若干积分可化为初等形式的情形。

我们的一些积分公式是用双伽马函数表示的。对于 $z \in \mathbb{C}$，该函数定义为 $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$。一些积分公式还用多重对数表示。对于 $s \in \mathbb{C}$ 和 $z \in \mathbb{C}$，其定义为 $\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^s$；对于满足 $\operatorname{Re} s > 1$ 的固定 s，该级数在 $|z| \le 1$ 时收敛，并可通过解析延拓定义于其他位置。函数 $\mathrm{Li}_2(z)$ 和 $\mathrm{Li}_3(z)$ 分别称为 二重对数函数和三重对数函数。下文中，我们用 $\gamma = 0.57721\ldots$ 表示欧拉–马歇罗尼常数。

定理 2.5。 设 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，并假设 $\operatorname{Re} a$，$\operatorname{Re} b > 0$。

1. 令 $|\operatorname{Re}\alpha| < 1/4$。则

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty K_\alpha^2(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x \\
&\quad= \frac{\pi^4}{8b}\csc(2\pi\alpha)\Bigg\{\frac{\csc(\pi\alpha)\Gamma(2\alpha+\frac12)}{\Gamma(\frac12-\alpha)\Gamma^3(1+\alpha)}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2\alpha}{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac12,\alpha+\frac12,\alpha+\frac12,2\alpha+\frac12\\ 2\alpha+1,\alpha+1,\alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\\
&\qquad+\frac{\csc(\pi\alpha)\Gamma(\frac12-2\alpha)}{\Gamma(\alpha+\frac12)\Gamma^3(1-\alpha)}\left(\frac{a}{2b}\right)^{-2\alpha}{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac12,\frac12-2\alpha,\frac12-\alpha,\frac12-\alpha\\ 1-2\alpha,1-\alpha,1-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\\
&\qquad-\frac{2}{\pi\alpha}{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac12,\frac12,\alpha+\frac12,\frac12-\alpha\\ 1,1-\alpha,\alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\Bigg\}.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

2. 假设 $|\operatorname{Re}\alpha| < 1/2$。若 $a \neq b$，则

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xK_\alpha^2(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8a^2}\csc^2(\pi\alpha)\Bigg\{&\frac{(a/b)^{2+2\alpha}}{1+2\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac12+\alpha\\ \frac32+\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\\
&+\frac{(a/b)^{2-2\alpha}}{1-2\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac12-\alpha\\ \frac32-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)-\frac{2a}{b}\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\Bigg\},
\end{aligned}\tag{2.10}$$

且若 $a = b$，则

$$\int_0^\infty xK_\alpha^4(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{16a^2}\csc^2(\pi\alpha)\left\{\psi\left(\frac12-\alpha\right)+\psi\left(\frac12+\alpha\right)+4\ln(2)+2\gamma\right\}.\tag{2.11}$$

现在假设 $\alpha = 0$。不失一般性，设 $|a/b| \le 1$。那么，对于 $a \neq b$，

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xK_0^2(ax)K_0^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2ab}\Bigg\{&\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)-\ln\left(\frac{a}{b}\right)\left[\mathrm{Li}_2\left(\frac{a}{b}\right)-\mathrm{Li}_2\left(-\frac{a}{b}\right)\right]\\
&+\mathrm{Li}_3\left(\frac{a}{b}\right)-\mathrm{Li}_3\left(-\frac{a}{b}\right)\Bigg\},
\end{aligned}\tag{2.12}$$

并且，对于 $a = b$，

$$\int_0^\infty xK_0^4(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{8a^2}\zeta(3),\tag{2.13}$$

其中 $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^3$，这是黎曼ζ函数的一个特殊值。

注 2.6. *1.* 当 $\alpha = 0$ 时，积分公式 *(2.9)* 不成立。不过，当 $\alpha = 0$且 $a = b$ 时，该积分可以表示为一个单一的广义超几何函数：

$$\int_0^\infty K_0^4(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{4a}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1,1,1\end{matrix}\,\middle|\,1\right)$$

（见 *[4]*）。积分公式（*2.13*）此前也由 *[4]*推导得到。

2. 对于 α 的某些取值，积分公式（*2.10*）和（*2.11*）可化为初等形式。将约化公式（*A.84*）和（*A.85*）应用于积分公式（*2.10*），并利用基本恒等式化简所得表达式

$$\ln(z^{1/3}+z^{1/6}+1)-\ln(z^{1/3}-z^{1/6}+1) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{z^{1/6}}{1+z^{1/3}}\right)$$

可得到初等形式的结果

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xK_{1/3}^2(ax)K_{1/3}^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6ab}\Bigg\{&2\tanh^{-1}\left(\frac{a^{1/3}}{b^{1/3}}\right)-2\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\\ &+\tanh^{-1}\left(\frac{(ab)^{1/3}}{a^{2/3}+b^{2/3}}\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

应用加法公式

$$\tanh^{-1}(u)\pm\tanh^{-1}(v) = \tanh^{-1}\left(\frac{u\pm v}{1\pm uv}\right) \tag{2.14}$$

（见 *[18,* 方程 *4.38*。*17]*）可得到一个用单个反双曲正切表示的更简单表达式：

$$\int_0^\infty xK_{1/3}^2(ax)K_{1/3}^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2ab}\tanh^{-1}\left(\frac{(ab)^{1/3}}{a^{2/3}+b^{2/3}}\right). \tag{2.15}$$

类似地，将约化公式（*A.84*）和（*A.85*）应用于积分公式，可得到初等表达式 *(2.10)*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xK_{1/4}^2(ax)K_{1/4}^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi^2}{2ab}\left\{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)-\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right\}\\ &= \frac{\pi^2}{2ab}\coth^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right),\end{aligned}$$

其中，第二个等式再次利用加法公式（*2.14*）和基本关系 双曲正切$^{-1}(1/z)$ =双曲余切$^{-1}(z)$ 得到。

3. 现在我们考虑一些可以从积分公式 *(2.11)* 推导出的其他初等积分公式。为此，我们注意到双伽马函数的以下特殊值。若 p、q 为整数，且 $0<p<q$，则

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma-\ln(q)-\frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi p}{q}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2\pi kp}{q}\right)\ln\left(2-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right) \tag{2.16}$$

（参见 *[18, 方程 5.4.19]*）。设 $m \geq 3$ 为正整数，则

$$\psi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)+\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right)=\psi\left(\frac{m-2}{2m}\right)+\psi\left(\frac{m+2}{2m}\right)$$
$$=-2\gamma-2\ln(2m)+\sum_{k=1}^{q-1}(-1)^k\cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\ln\left(2-2\cos\left(\frac{\pi k}{m}\right)\right), \tag{2.17}$$

其中，在得到第二个等式时，我们应用了公式 *(2.16)* 和基本三角恒等式

$$\cot\left(\frac{\pi(m-2)}{2m}\right)+\cot\left(\frac{\pi(m+2)}{2m}\right)=0$$

and

$$\cos\left(\frac{\pi k(m-2)}{m}\right)+\cos\left(\frac{\pi k(m+2)}{m}\right)=2\cos(\pi k)\cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right)=2(-1)^k\cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

将公式 *(2.17)* 应用于积分公式 *(2.11)*，计算三角函数，并利用基本公式 双曲余切$^{-1}(x)$ $=$ $(1/2)$ 自然对数$((x+1)/(x-1))$（其中 $x>1$），可得以下初等积分公式：

$$\int_0^\infty xK_{1/3}^4(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4a^2}\ln(3),$$
$$\int_0^\infty xK_{1/4}^4(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4a^2}\ln(2),$$
$$\int_0^\infty xK_{1/6}^4(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4a^2}\ln\left(\frac{27}{16}\right),$$
$$\int_0^\infty xK_{1/8}^4(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4a^2}(2+\sqrt{2})\big(2\ln(2)-\sqrt{2}\coth^{-1}(\sqrt{2})\big),$$
$$\int_0^\infty xK_{1/10}^4(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{16a^2}(3+\sqrt{5})\left(\ln\left(\frac{3125}{256}\right)-2\sqrt{5}\coth^{-1}(\sqrt{5})\right),$$
$$\int_0^\infty xK_{1/12}^4(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4a^2}(2+\sqrt{3})\big(\ln(108)-4\sqrt{3}\coth^{-1}(\sqrt{3})\big).$$

定理 2.7。 设 $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，并且 实部 a，实部 $b>0$。

1. 设 $-1/4<$ 实部 $\alpha<1/2$。则

$$\int_0^\infty I_\alpha(ax)K_\alpha(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi^2}{8b}\left\{\frac{\sec(\pi\alpha)}{\alpha}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\alpha\\1,\alpha+1,1-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(2\alpha+\frac{1}{2})\csc(\pi\alpha)}{\Gamma^3(\alpha+1)}\left(\frac{a}{2b}\right)^\alpha{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2},2\alpha+\frac{1}{2}\\\alpha+1,\alpha+1,2\alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\right\}. \tag{2.18}$$

2. 假设 $-1/2<\mathrm{Re}\,\alpha<1$。那么，对于 $a\neq b$,

$$\int_0^\infty xI_\alpha(ax)K_\alpha(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi\csc(\pi\alpha)}{4b^2}\left\{\frac{b}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)-\frac{(a/b)^{2\alpha}}{1+2\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}+\alpha\\\frac{3}{2}+\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\right\}, \tag{2.19}$$

并且如果 $a=b$,

$$\int_0^\infty xI_\alpha(ax)K_\alpha^3(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8a^2}\csc(\pi\alpha)\left\{\psi\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)+2\ln(2)+\gamma\right\}. \tag{2.20}$$

当 $\alpha=0$ 时，对于 $|a/b|\le 1$ 和 $a\ne b$，有

$$\int_0^\infty xI_0(ax)K_0(ax)K_0^2(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4ab}\left\{\mathrm{Li}_2\left(\frac{a}{b}\right)-\mathrm{Li}_2\left(-\frac{a}{b}\right)-2\ln\left(\frac{a}{b}\right)\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right\}, \tag{2.21}$$

对于 $|a/b|\ge 1$ 和 $a\ne b$，有

$$\int_0^\infty xI_0(ax)K_0(ax)K_0^2(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4ab}\left\{\frac{\pi^2}{2}-\mathrm{Li}_2\left(\frac{b}{a}\right)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{b}{a}\right)+2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\tanh^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right\}, \tag{2.22}$$

并且，对于 $a=b$,
有

$$\int_0^\infty xK_0^3(ax)I_0(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{16a^2}. \tag{2.23}$$

注 2.8。 *1.* 当 $\alpha=0$时，积分公式 *(2.18)* 不成立。然而，在 $\alpha=0$ 且 $a=b$ 的情况下， *[4]* 推导出了该积分的以下无穷级数表示:

$$\int_0^\infty I_0(at)K_0^3(at)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2a}\sum_{k=0}^\infty\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{8n}}\left\{\frac{1}{4n+1}+\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{2}{2j+1}\right\}.$$

积分公式 *(2.23)* 此前也由 *[4]* 推导出。

2. 我们注意到，积分公式 *(2.21)* 和 *(2.22)* 实际上对所有满足$\mathrm{Re}\ a$、$\mathrm{Re}\ b>0$的 $a\ne b$ 均成立，这是由于恒等式

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_2(z)-\mathrm{Li}_2(-z)-2\ln(z)\tanh^{-1}(z)\\&\quad=\frac{\pi^2}{2}-\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right)+2\ln\left(\frac{1}{z}\right)\tanh^{-1}\left(\frac{1}{z}\right),\quad \mathrm{Re}\,z>0,\end{aligned} \tag{2.24}$$

由此可知，对于所有满足 $\mathrm{Re}\ a$,$\mathrm{Re}\ b>0$ 的 $a\ne b$，方程 *(2.21)* 和 *(2.22)* 的右端相等。等式 *(2.24)* 很容易验证如下。分别用 $L(z$ z -1 z 2 z $=$ $)$ 和 $R()$ 表示 *(2.24)* 的左端和右端。然后，利用求导公式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}(\mathrm{Li}\,(\,))$ 自然对数$(1-z)/z$（见方程 *25.12.2*）以及标准导数 $\tanh(z)=1/(1-z^2)$，可得

$$L'(z)=R'(z)=\frac{2\ln(z)}{z^2-1}.$$

现在，令 $F(z):=L(z)-R(z)$。于是 $F'(z)=0$，因此 $F(z)$ 是一个常数。根据二重对数函数 $\mathrm{Li}_2(1)=\pi^2/6$ 和 $\mathrm{Li}_2(-1)=-\pi^2/12$ 的标准特殊值，以及基本极限 $\lim_{z\to1}\ln(z)\tanh^{-1}(z)=0$，我们得到 $L(1)=R(1)=\pi^2/4$，因此 $F(1)=0$，由此可得，对于 $\mathrm{Re}\ z>0$，$F(z)=0$，这验证了恒等式 *(2.24)* 对 $\mathrm{Re}\,z>0$ 确实成立。

3. 分别将约化公式 *(A.83)*、*(A.86)* 和 *(A.87)* 应用于积分公式 *(2.19)*，得到以下初等求值结果：

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xI_{1/2}(ax)K_{1/2}(ax)K_{1/2}^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{4ab}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right),\\
\int_0^\infty xI_{1/4}(ax)K_{1/4}(ax)K_{1/4}^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi\sqrt{2}}{4ab}\left\{\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)-\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right\}\\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{4ab}\left\{\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)-\coth^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right\},\\
\int_0^\infty xI_{-1/4}(ax)K_{1/4}(ax)K_{1/4}^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi\sqrt{2}}{4ab}\left\{\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)-\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)+\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right\}\\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{4ab}\left\{\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+\coth^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

在推导最后一个积分公式时，我们使用积分公式 *(2.19)* 计算积分$\int_0^\infty xI_{-1/4}(ax)K_{-1/4}(ax)K_{-1/4}^2(bx)\mathrm{d}x$，然后利用 $K_{-1/4}(x) = K_{1/4}(x)$（见方程 *(A.67)*），推导出积分 $\int_0^\infty xI_{-1/4}(ax)K_{1/4}(ax)K_{1/4}^2(bx)\mathrm{d}x$ 的公式。

4. 通过与本注释第 *2* 部分类似的考虑，我们可以利用方程 *(2.17)* 给出的双伽马函数特殊值，从积分公式 *(2.20)* 得到以下初等求值：

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xI_{1/2}(ax)K_{1/2}^3(ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{4a^2}\ln(2),\\
\int_0^\infty xI_{1/3}(ax)K_{1/3}^3(ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{8a^2}\big(\pi-\sqrt{3}\ln(3)\big),\\
\int_0^\infty xI_{-1/3}(ax)K_{1/3}^3(ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{8a^2}\big(\pi+\sqrt{3}\ln(3)\big),\\
\int_0^\infty xI_{1/4}(ax)K_{1/4}^3(ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi\sqrt{2}}{16a^2}\big(\pi-2\ln(2)\big),\\
\int_0^\infty xI_{-1/4}(ax)K_{1/4}^3(ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi\sqrt{2}}{16a^2}\big(\pi+2\ln(2)\big).
\end{aligned}$$

定理 2.9。 *1.* 假设 实部 $b \geq$ 实部 $a > 0$ 且 实部 $\alpha > -1/2$。则

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty I_\alpha^2(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{4b}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(2\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma^3(\alpha+1)}\\
&\quad\times {}_4F_3\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2},2\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \alpha+1,2\alpha+1,\alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right).
\end{aligned}\tag{2.25}$$

2. 假设 实部 $b >$ 实部 $a > 0$ 且 实部 $\alpha > -1$。则

$$\int_0^\infty xI_\alpha^2(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{(a/b)^{2\alpha}}{2b^2(1+2\alpha)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2},1\\ \alpha+\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right).\tag{2.26}$$

注 2.10. *1.* 假设 $\mathrm{Re}\,b \geq \mathrm{Re}\,a > 0$。那么在积分公式 *(2.25)* 中令 $\alpha = 0$，得到

$$\int_0^\infty I_0^2(ax)K_0^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4ab}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1,1,1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\tag{2.27}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/2)_k}{k!}\right)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^{2k}$$
$$= \frac{\pi^2}{4ab} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k}^4 \left(\frac{a}{16b}\right)^{2k}, \tag{2.28}$$

这里用到了基本关系 $(1/2)_k = (2k)!/(4^k k!)$。*(2.27)* 和 *(2.28)* 式将 *[4]* 给出的公式推广到了 $a = b$ 的情形。

2. 假设 $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a > 0$，并令 $n = 0$、1、2、.....。然后，将约化公式 *(A.82)* 应用于积分公式 *(2.26)*，即可得到初等求值

$$\int_0^\infty x I_n^2(ax) K_n^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2b^2}\left\{\frac{b}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a/b)^{2k}}{2k+1}\right\},$$

而将约化公式 *(A.83)* 应用后则得到

$$\int_0^\infty x I_{n+1/2}^2(ax) K_{n+1/2}^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4ab}\left\{-\ln\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(a/b)^{2k}}{k}\right\}.$$

这里我们约定空和等于 *0*。

3 四个艾里函数乘积的积分

艾里函数 Ai(z) 和 Bi(z) 可以用第一类和第二类修正贝塞尔函数表示：对于 $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{z}{3}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \tag{3.29}$$
$$\mathrm{Bi}(z) = \sqrt{\frac{z}{3}}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right] \tag{3.30}$$

（参见 [18] 中的方程 9.6.1 和 9.6.3）。因此，我们可以应用第2节中的积分公式，得到艾里函数四次乘积的积分公式。在下面的定理中，我们给出若干这样的公式，并认为它们都是新的。

定理 3.1。*1.* 当 $\operatorname{Re} a$，$\operatorname{Re} b > 0$,

$$\int_0^\infty \mathrm{Ai}^2(ax)\mathrm{Ai}^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12\pi^2\sqrt{ab}}\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right). \tag{3.31}$$

2. 当 $\operatorname{Re} a$，$\operatorname{Re} b > 0$,

$$\int_0^\infty \mathrm{Bi}(ax)\mathrm{Ai}(ax)\mathrm{Ai}^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{10ab^2}\left\{5\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{6},1\\ \frac{7}{6}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^3}{b^3}\right) - \frac{a^2}{b^2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{5}{6},1\\ \frac{11}{6}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^3}{b^3}\right)\right\}. \tag{3.32}$$

当 $|a/b| < 1$ 时，积分可写成初等形式：

$$\int_0^\infty \mathrm{Bi}(ax)\mathrm{Ai}(ax)\mathrm{Ai}^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12\pi^2\sqrt{ab}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3ab}}{b-a}\right). \tag{3.33}$$

3. 当 实部$b>$实部$a>0$ 时,

$$\int_0^\infty \mathrm{Bi}^2(ax)\mathrm{Ai}^2(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12\pi^2\sqrt{ab}}\left\{\tanh^{-1}\left(\frac{a^{3/2}}{b^{3/2}}\right)+3\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right\}. \tag{3.34}$$

4. 当 实部$b>3$实部 $a>0$ 时,

$$\int_0^\infty \mathrm{Bi}^3(ax)\mathrm{Ai}(bx)\,\mathrm{d}x=I(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})+3I(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3})+3I(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3})+I(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3}), \tag{3.35}$$

其中

$$I(p,q,r)=\frac{1}{3\pi}\left(\frac{a}{b}\right)^{2(p+q+r)+1}\times \\ \times F_C^{(3)}\left(\frac{p+q+r}{2}+\frac{2}{3},\frac{p+q+r}{2}+\frac{1}{3};p+1,q+1,r+1;\frac{a^2}{b^2},\frac{a^2}{b^2},\frac{a^2}{b^2}\right).$$

注释 3.2。 令 $b=1$ ，然后在积分公式 *(3.31)* 和 *(3.33)* 中取极限 $a\to 1^-$ （利用基本结果: $\tanh^{-1}(1/2)=\ln(3)/2$ ，以及 $\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}(x)=\pi/2$）可得到简洁的计算结果

$$\int_0^\infty \mathrm{Ai}^4(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\ln(3)}{24\pi^2},$$
$$\int_0^\infty \mathrm{Ai}^3(x)\mathrm{Bi}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{24\pi}.$$

这些积分公式此前分别由 *[13]* 和 *[24],* 得到。

在推导积分公式 (3.33) 时，我们将需要以下关于两个超几何函数之差的初等计算结果。

引理 3.3。对于 $|z|<1$,

$$D(z):=5\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{6},1\\ \frac{7}{6}\end{matrix}\,\middle|\,z\right)-z^{2/3}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{5}{6},1\\ \frac{11}{6}\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=\frac{5}{\sqrt{3}z^{1/6}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}z^{1/6}}{1-z^{1/3}}\right). \tag{3.36}$$

注释 3.4. 条件 $|z|<1$ 并非只是为了完成证明而要求的技术性条件。数值检验表明，对于 $|z|>1$, 等式 *(3.36)* 一般并不成立。

证明。 我们首先注意到，对于 $|z|<1$ 和 $\mathrm{Re}\,b>0$,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\ b+1\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(1)_n(b)_n}{(b+1)_n}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^\infty\frac{bz^n}{b+n}=\frac{b}{z^b}\int_0^z\frac{x^{b-1}}{1-x}\,\mathrm{d}x,$$

由此我们得到

$$D(z)=\frac{5}{6z^{1/6}}\int_0^z\frac{x^{-5/6}-x^{-1/6}}{1-x}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{z^{1/6}}\int_0^{z^{1/6}}\frac{1-t^4}{1-t^6}\,\mathrm{d}t,$$

其中我们进行了换元 $x=t^6$。利用因式分解 $1-t^4=(1-t^2)(1+t^2)$ 和 $(1-t^6)=(1-t^2)(1+t^2+t^4)$，再进行部分分式分解和标准积分，可得

$$D(z)=\frac{5}{z^{1/6}}\int_0^{z^{1/6}}\frac{t^2+1}{t^4+t^2+1}\,\mathrm{d}t=\frac{5}{2z^{1/6}}\int_0^{z^{1/6}}\left(\frac{1}{t^2-t+1}+\frac{1}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{5}{2z^{1/6}} \int_0^{z^{1/6}} \left(\frac{1}{(t-1/2)^2+3/4} + \frac{1}{(t+1/2)^2+3/4} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{5}{2z^{1/6}} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) + \tan^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \right]_0^{z^{1/6}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{3}z^{1/6}} \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{2z^{1/6}-1}{\sqrt{3}} \right) + \tan^{-1}\left(\frac{2z^{1/6}+1}{\sqrt{3}} \right) \right\}.
\end{aligned}
$$

将加法公式 $\tan^{-1}(u) + \tan^{-1}(v) = \tan^{-1}((u+v)/(1-uv))$（见 [18,方程 4.24.15]）应用于上述表达式，可得所需公式 (3.36)。 □

定理 *3.1* 的证明。 1. 利用关系式 (3.29)，将艾里函数 $\mathrm{Ai}(x)$ 表示为第二类修正贝塞尔函数，可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{Ai}^2(ax)\mathrm{Ai}^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{ab}{9\pi^4} \int_0^\infty x^2 K_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}(ax)^{3/2} \right) K_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}(bx)^{3/2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{ab}{6\pi^4} \int_0^\infty y K_{1/3}^2(a^{3/2}y) K_{1/3}^2(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y, \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

其中我们作了换元 $y = 2x^{3/2}/3$。现在利用公式 (2.15) 计算积分 (3.37)，得到积分公式 (3.31)。

2. 我们仿照证明第 1 部分中的方法，利用关系式 (3.29) 和 (3.30)，将艾里函数 $\mathrm{Ai}(z)$ 和 $\mathrm{Bi}(z)$ 表示为第一类和第二类修正贝塞尔函数，从而得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{Bi}(ax)\mathrm{Ai}(ax)\mathrm{Ai}^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{ab}{6\pi^3} \left\{ \int_0^\infty y K_{1/3}^2(b^{3/2}y) K_{1/3}(a^{3/2}y) I_{1/3}(a^{3/2}y)\,\mathrm{d}y \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty y K_{1/3}^2(b^{3/2}y) K_{1/3}(a^{3/2}y) I_{-1/3}(a^{3/2}y)\,\mathrm{d}y \right\} \\
&= \frac{ab}{6\pi^3} \left\{ \int_0^\infty y K_{1/3}^2(b^{3/2}y) K_{1/3}(a^{3/2}y) I_{1/3}(a^{3/2}y)\,\mathrm{d}y \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty y K_{-1/3}^2(b^{3/2}y) K_{-1/3}(a^{3/2}y) I_{-1/3}(a^{3/2}y)\,\mathrm{d}y \right\}, \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

其中在第二步中，我们用到了 $K_{1/3}(z) = K_{-1/3}(z)$（参见方程 (A.67)）。利用积分公式 (2.19) 计算积分 (3.38)，再进行化简，得到

$$
\int_0^\infty \mathrm{Bi}(ax)\mathrm{Ai}(ax)\mathrm{Ai}^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{10ab^2} \left\{ 5\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, 1 \\ \frac{7}{6} \end{matrix} \,\middle|\, \frac{a^3}{b^3} \right) - \frac{a^2}{b^2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{5}{6}, 1 \\ \frac{11}{6} \end{matrix} \,\middle|\, \frac{a^3}{b^3} \right) \right\}, \qquad (3.39)
$$

由此完成积分公式 (3.32) 的推导。当 $|a/b| < 1$ 时，我们可以利用引理 3.3 的公式 (3.36) 化简表达式 (3.39)，得到积分公式 (3.33)。

3. 由关系式（3.30）可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{Bi}^2(ax)\mathrm{Ai}^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{ab}{6\pi^2} \left\{ \int_0^\infty y I_{1/3}^2(a^{3/2}y) K_{1/3}^2(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y \right. \\
&\quad \left. + 2\int_0^\infty y I_{1/3}(a^{3/2}y) I_{-1/3}(a^{3/2}y) K_{1/3}^2(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y \right.
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^\infty yI_{-1/3}^2(a^{3/2}y)K_{1/3}^2(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\Big\}. \tag{3.40}$$

利用关系式（A.68）可得 $I_{-1/3}(z) = I_{1/3}(z) + (\sqrt{3}/\pi)K_{1/3}(z)$，将此公式应用于方程（3.40）可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{Bi}^2(ax)\mathrm{Ai}^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{ab}{6\pi^2}\Big\{3\int_0^\infty yI_{1/3}^2(a^{3/2}y)K_{1/3}^2(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\\ &\quad+\int_0^\infty yI_{-1/3}^2(a^{3/2}y)K_{1/3}^2(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\\ &\quad+\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\int_0^\infty yI_{1/3}(a^{3/2}y)K_{1/3}(a^{3/2}y)K_{1/3}^2(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\Big\}\\ &= \frac{ab}{6\pi^2}\Big\{4\int_0^\infty yI_{1/3}^2(a^{3/2}y)K_{1/3}^2(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\\ &\quad+\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\int_0^\infty yI_{1/3}(a^{3/2}y)K_{1/3}(a^{3/2}y)K_{1/3}^2(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\\ &\quad+\frac{3}{\pi^2}\int_0^\infty yK_{1/3}^2(a^{3/2}y)K_{1/3}^2(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\Big\}. \end{aligned}\tag{3.41}$$

利用积分公式（2.26）、（2.19）和（2.15）计算式（3.41）中的积分，得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{Bi}^2(ax)\mathrm{Ai}^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{ab}{6\pi^2}\Big\{\frac{6(a/b)}{5b^3}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{5}{6}\\ \frac{11}{6}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^3}{b^3}\right)\\ &\quad+\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{3}b^3}\left[\frac{b^{3/2}}{a^{3/2}}\tanh^{-1}\left(\frac{a^{3/2}}{b^{3/2}}\right)-\frac{3(a/b)}{5}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{5}{6}\\ \frac{11}{6}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^3}{b^3}\right)\right]\\ &\quad+\frac{3}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{2(ab)^{3/2}}\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)\Big\}\\ &= \frac{1}{12\pi^2\sqrt{ab}}\Big\{4\tanh^{-1}\left(\frac{a^{3/2}}{b^{3/2}}\right)+3\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)\Big\}, \end{aligned}\tag{3.42}$$

并化简　　利用加法公式（2.14）化简式（3.42）中的表达式，得到公式（3.34）　　.

4. 与前面同理，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{Bi}^3(ax)\mathrm{Ai}(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{ab}{6\pi}\Big\{\int_0^\infty yI_{1/3}^3(a^{3/2}y)K_{1/3}(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\\ &\quad+3\int_0^\infty yI_{1/3}^2(a^{3/2}y)I_{-1/3}(a^{3/2}y)K_{1/3}(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\\ &\quad+3\int_0^\infty yI_{1/3}(a^{3/2}y)I_{-1/3}^2(a^{3/2}y)K_{1/3}(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\\ &\quad+\int_0^\infty yI_{-1/3}^3(a^{3/2}y)K_{1/3}(b^{3/2}y)\,\mathrm{d}y\Big\}, \end{aligned}$$

and 使用积分公式（2.4）计算积分可得公式（3.35）　　. □

第2节中的4个证明

定理*2.1*的证明。 1. 我们首先注意到，应用 [12], 的积分公式6.576(4)，函数$f_{\mu、\nu、\alpha}(x) = K_\mu($$ax)K_\nu(ax)$ 的梅林变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f_{\mu,\nu,a}\}(s) &= \int_0^\infty x^{s-1}K_\mu(ax)K_\nu(ax)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2^{s-3}}{a^s\Gamma(s)}\Gamma\left(\frac{s+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\mu-\nu}{2}\right),\end{aligned} \tag{4.43}$$

该式在 $\operatorname{Re} a > 0$ 和 $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Re}\nu|$ 时存在。

因此，根据两个函数乘积的梅林变换标准公式，对于 $\operatorname{Re}\ a$，$\operatorname{Re} b > 0$ 和 $\operatorname{Re}\ s > |\operatorname{Re}\alpha| + |\operatorname{Re}$ $\beta| + |\operatorname{Re}\ \gamma| + |\operatorname{Re}\ \delta|$，有:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\infty x^{s-1}K_\alpha(ax)K_\beta(ax)K_\gamma(bx)K_\delta(bx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\mathcal{M}\{f_{\alpha,\beta,a}\}(s-r)\mathcal{M}\{f_{\gamma,\delta,b}\}(r)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{2^{s-6}}{a^s}\left(\frac{a}{b}\right)^r\frac{1}{\Gamma(s-r)\Gamma(r)} \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{s-r+\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-r-\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-r+\alpha-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-r-\alpha-\beta}{2}\right) \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{r+\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+\gamma-\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-\gamma-\delta}{2}\right)\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

其中 $c > |\operatorname{Re}\ \gamma| + |\operatorname{Re}\delta|$。应用倍增公式

$$\Gamma(2z) = \pi^{-1/2}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2), \quad 2z \notin \mathbb{Z} \tag{4.44}$$

（参见 [18, 第5.5(iii)节]），现在可得

$$\begin{aligned}I &= \frac{\pi}{16a^s}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^r\frac{1}{\Gamma((s-r)/2)\Gamma((s-r+1)/2)\Gamma(r/s)\Gamma((r+1)/2)} \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{s-r+\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-r-\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-r+\alpha-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-r-\alpha-\beta}{2}\right) \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{r+\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+\gamma-\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-\gamma-\delta}{2}\right)\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{8a^s}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^t\frac{1}{\Gamma(s/2-t)\Gamma((s+1)/2-t)\Gamma(t)\Gamma(t+1/2)} \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{s+\alpha+\beta}{2}-t\right)\Gamma\left(\frac{s-\alpha+\beta}{2}-t\right)\Gamma\left(\frac{s+\alpha-\beta}{2}-t\right)\Gamma\left(\frac{s-\alpha-\beta}{2}-t\right) \\ &\quad\times\Gamma\left(t+\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(t+\frac{-\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(t+\frac{\gamma-\delta}{2}\right)\Gamma\left(t+\frac{-\gamma-\delta}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{8a^s}G^{4,4}_{6,6}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{2-\gamma-\delta}{2},\frac{2+\gamma-\delta}{2},\frac{2+\gamma-\delta}{2},\frac{2+\gamma+\delta}{2},\frac{s}{2},\frac{s+1}{2}\\ \frac{s+\alpha+\beta}{2},\frac{s-\alpha+\beta}{2},\frac{s+\alpha-\beta}{2},\frac{s-\alpha-\beta}{2},1,\frac{1}{2}\end{matrix}\right),\end{aligned}$$

其中，在得到第二个等式时，我们进行了变量替换 $r = 2t$；在得到最后一个等式时，我们使用了 Meijer G-函数的围道积分表示 (A.88)。由此我们推导出了公式 (2.1)。

2. 我们首先指出，应用 [12], 的积分公式 6.576(5)，函数 $g_{\mu,\ \nu,\ a,\ d}(x) = K_\mu(ax)I_\nu(dx)$ 的梅林变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{g_{\mu,\nu,a,d}\}(s) &= \int_0^\infty x^{s-1}K_\mu(ax)I_\nu(dx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2^s d^\nu}{4a^{s+\nu}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_2F_1\left(\frac{s+\mu+\nu}{2},\frac{s-\mu+\nu}{2};\nu+1;\frac{d^2}{a^2}\right),\end{aligned}$$

它在 $\mathrm{Re}\ a > \mathrm{Re}\, d > 0$ 且 $\mathrm{Re}\ s > \mathrm{Re}(|\mu| - \nu)$ 时存在。仿照第 (i) 部分的论证，我们得到

$$\begin{aligned}I(d,a,b,b) &= \int_0^\infty x^{s-1}I_\alpha(dx)K_\beta(ax)K_\gamma(bx)K_\delta(bx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\mathcal{M}\{g_{\beta,\alpha,a,d}\}(s-r)\mathcal{M}\{f_{\gamma,\delta,b}\}(r)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{2^{s-5}}{a^s}\left(\frac{d}{a}\right)^\alpha\left(\frac{a}{b}\right)^r\frac{\Gamma\left(\frac{s-r+\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-r+\alpha-\beta}{2}\right)}{\Gamma(r)\Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{r+\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+\gamma-\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-\gamma-\delta}{2}\right) \\ &\quad\times{}_2F_1\left(\frac{s-r+\alpha+\beta}{2},\frac{s-r+\alpha-\beta}{2};\alpha+1;\frac{d^2}{a^2}\right)\mathrm{d}r,\end{aligned}\tag{4.45}$$

其中 $c > |\mathrm{Re}\ \beta| - \mathrm{Re}\,\alpha$。令 $d \to a^-$ 代入 (4.45)，得到

$$\begin{aligned}I(a,a,b,b) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{2^{s-5}}{a^s}\left(\frac{a}{b}\right)^r\frac{\Gamma\left(\frac{s-r+\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-r+\alpha-\beta}{2}\right)}{\Gamma(r)\Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{r+\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+\gamma-\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-\gamma-\delta}{2}\right) \\ &\quad\times{}_2F_1\left(\frac{s-r+\alpha+\beta}{2},\frac{s-r+\alpha-\beta}{2};\alpha+1;1\right)\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{2^{s-5}}{a^s}\left(\frac{a}{b}\right)^r\frac{\Gamma(r-s+1)}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma\left(\frac{s-r+\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-r+\alpha-\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s+r+\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-s+r+\alpha-\beta}{2}\right)} \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{r+\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+\gamma-\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-\gamma-\delta}{2}\right)\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{8a^s}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^t\frac{\Gamma\left(t+\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(t+\frac{2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\alpha+\beta}{2}-t\right)\Gamma\left(\frac{s+\alpha-\beta}{2}-t\right)}{\Gamma(t)\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-s+\alpha+\beta}{2}+t\right)\Gamma\left(\frac{2-s+\alpha-\beta}{2}+t\right)} \\ &\quad\times\Gamma\left(t+\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(t+\frac{-\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma\left(t+\frac{\gamma-\delta}{2}\right)\Gamma\left(t-\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{4.46}$$

其中，第二个等号是利用恒等式 (A.80) 得到的，最后一个等号则是利用伽马函数的倍增公式 (4.44) 和变量替换 $r = 2t$ 得到的。将表达式 (4.46) 与 G-函数的积分表示 (A.88) 进行比较，便得到公式 (2.2)。

3. 我们首先　　回顾两个修正贝塞尔函数乘积的幂级数表示

第一类函数（[18, 方程 10.31.3]）：

$$I_\nu(x)I_\mu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu+\mu+k+1)_k}{k!\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(\mu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

写成

$$(a+k)_k=\frac{\Gamma(a+2k)}{\Gamma(a+k)}=\frac{2^{a+2k-1}\Gamma(k+\frac{a}{2})\Gamma(k+\frac{a+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+a)}$$

我们可以得到乘积 $I_\nu(x)I_\mu(x)$ 的另一种表达式，这对我们的目的很有用：

$$I_\nu(x)I_\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\big(k+\frac{\nu+\mu+1}{2}\big)\Gamma\big(k+\frac{\nu+\mu+2}{2}\big)}{k!\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(\mu+k+1)\Gamma(\nu+\mu+k+1)}x^{2k+\mu+\nu}. \tag{4.47}$$

应用方程 (4.47)，并交换积分与求和的顺序，即可得到如下表达式

$$\begin{aligned}I&=\int_0^\infty x^{s-1}I_\alpha(ax)I_\beta(ax)K_\gamma(bx)K_\delta(bx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+\lambda}\Gamma\big(k+\frac{\lambda+1}{2}\big)\Gamma\big(k+\frac{\lambda+2}{2}\big)}{k!\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+k+1)\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^\infty x^{2k+\lambda+s-1}K_\gamma(bx)K_\delta(bx)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用梅林变换公式 (4.43) 计算积分，再应用倍增公式 (4.44)，可得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{8a^s\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\big(k+\frac{\lambda+1}{2}\big)\Gamma\big(k+\frac{\lambda+2}{2}\big)}{k!\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(k+\lambda+1)\Gamma(2k+\lambda+s)}\\&\quad\times\Gamma\big(k+\tfrac{\lambda+\gamma+\delta}{2}\big)\Gamma\big(k+\tfrac{\lambda-\gamma+\delta}{2}\big)\Gamma\big(k+\tfrac{\lambda+\gamma-\delta}{2}\big)\Gamma\big(k+\tfrac{\lambda-\gamma-\delta}{2}\big)\left(\frac{2a}{b}\right)^{2k+\lambda+s}\\&=\frac{1}{4a^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\big(k+\frac{\lambda+1}{2}\big)\Gamma\big(k+\frac{\lambda+2}{2}\big)}{k!\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(k+\lambda+1)\Gamma\big(k+\frac{\lambda+s}{2}\big)\Gamma\big(k+\frac{\lambda+s+1}{2}\big)}\\&\quad\times\Gamma\big(k+\tfrac{\lambda+\gamma+\delta}{2}\big)\Gamma\big(k+\tfrac{\lambda-\gamma+\delta}{2}\big)\Gamma\big(k+\tfrac{\lambda+\gamma-\delta}{2}\big)\Gamma\big(k+\tfrac{\lambda-\gamma-\delta}{2}\big)\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+\lambda+s}.\end{aligned}$$

利用关系式 $\Gamma(u+k)=\Gamma(u)(u)_k$ 将伽马函数表示为 Pochhammer 函数，并将所得表达式与正则化广义超几何函数的级数表示进行比较（见 (A.74) 和 (A.75)），即可得到所需的积分公式 (2.3)。

4. 这是定理 2.3 中公式 (2.5) 的一个特例。 □

定理 *2.3* 的证明。使用修正贝塞尔函数的幂级数表示 (A.65)，并交换积分与求和的顺序，可得表达式

$$I=\int_0^\infty x^{s-1}\Big\{\prod_{k=1}^{n}I_{\alpha_k}(a_kx)\Big\}K_\beta(bx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!\Gamma(\alpha_1+k_1+1)\cdots k_n!\Gamma(\alpha_n+k_n+1)} \times \int_0^{\infty} x^{s-1}\left(\frac{a_1 x}{2}\right)^{\alpha_1+2k_1} \cdots \left(\frac{a_n x}{2}\right)^{\alpha_n+2k_n} K_\beta(bx)\,\mathrm{d}x.$$

使用积分公式计算该积分

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}K_\nu(x)\,\mathrm{d}x = 2^{\mu-2}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right), \quad \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\mu$$

（见 [18, 方程 10.43.19]）可得

$$I = \frac{2^{s-2}}{b^s} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\big(k_1+\cdots+k_n+\frac{s+\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta}{2}\big)\Gamma\big(k_1+\cdots+k_n+\frac{s+\alpha_1+\cdots+\alpha_n-\beta}{2}\big)}{\Gamma(\alpha_1+k_1+1)\cdots\Gamma(\alpha_n+k_n+1)(k_1!\cdots k_n!)} \times \left(\frac{a_1}{b^2}\right)^{\alpha_1+k_1} \cdots \left(\frac{a_n}{b^2}\right)^{\alpha_n+k_n}.$$

利用关系式 $\Gamma(u+k) = \Gamma(u)(u)_k$ 将伽马函数表示为 Pochhammer 函数，并将所得表达式与 Lauricella 函数的级数表示 (A.78) 进行比较， F_C 即可得到积分公式 (2.5)。

□

定理 *2.5* 的证明。 1. 将公式 (A.91) 应用于积分公式 (2.6)（其中 $\alpha=\beta$ 和 $s=1$），可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} K_\alpha^2(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{8a}G_{4,4}^{3,3}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1+\alpha,1-\alpha,1,1\\ \frac{s}{2}+\alpha,\frac{s}{2}-\alpha,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\\ &= \frac{\pi}{8a}\Bigg\{\frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-2\alpha)\Gamma(\frac12)\Gamma(\frac12+\alpha)\Gamma(\frac12+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\frac12-\alpha)}\left(\frac{a}{2}\right)^{1+2\alpha}{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac12,\alpha+\frac12,\alpha+\frac12,2\alpha+\frac12\\ 2\alpha+1,\alpha+1,\alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\\ &\quad+\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)\Gamma(\frac12)\Gamma(\frac12-\alpha)\Gamma(\frac12-2\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\frac12+\alpha)}\left(\frac{a}{b}\right)^{1-2\alpha}{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac12,\frac12-2\alpha,\frac12-\alpha,\frac12-\alpha\\ 1-2\alpha,1-\alpha,1-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\\ &\quad+\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)\Gamma(\frac12)\Gamma(\frac12-\alpha)\Gamma(\frac12+\alpha)}{\Gamma(1)\Gamma(\frac12)}\left(\frac{a}{b}\right){}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac12,\frac12,\alpha+\frac12,\frac12-\alpha\\ 1,1-\alpha,\alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.48}$$

利用反射公式化简 (4.48) 中给出的伽马函数之比，即可得到公式 (2.9)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}, \tag{4.49}$$

（见 [18, 方程 5.5.3]），由此可得

$$\Gamma(\tfrac12+z)\Gamma(\tfrac12-z) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}, \quad z+1/2 \notin \mathbb{Z}, \tag{4.50}$$

倍增公式 (4.44)、标准特殊值 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$ 以及恒等式 $\sin(2\pi z) = 2\sin(\pi z)\cos(\pi z)$。

2. 我们采用与推导公式 (2.9) 类似的方法推导积分公式 (2.10)，但过程更为简洁，省略了部分计算细节。通过将

约化公式 (A.89) 应用于积分公式 (2.6) 中的 G-函数（其中 $\alpha=\beta$ 和 $s=2$），可得

$$\int_0^\infty xK_\alpha^2(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8a^2}G_{4,4}^{3,3}\left(\frac{a^2}{b^2}\;\middle|\;\begin{matrix}1+\alpha,1-\alpha,1,\frac{3}{2}\\1+\alpha,1-\alpha,1,\frac{1}{2}\end{matrix}\right). \tag{4.51}$$

我们可以应用方程 (A.91)，将 (4.51) 中的 G-函数表示为三个 ${}_4F_3$ 函数之和，方法与推导积分公式 (2.9) 时类似。这里，由于存在重复因子， ${}_4F_3$ 函数可根据约化公式 (A.76) 化简为 ${}_2F_1$ 函数。例如，我们有

$${}_4F_3\left(\begin{matrix}1-\alpha,1+\alpha,1,\frac{1}{2}\\1-\alpha,1+\alpha,\frac{3}{2}\end{matrix}\;\middle|\;\frac{a^2}{b^2}\right)={}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{matrix}\;\middle|\;\frac{a^2}{b^2}\right)=\frac{b}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right),$$

其中第二个等号由约化公式 (A.82) 得出。综合这些考虑，我们得到所需的公式 (2.10)。

通过对 (2.10) 中的$a/b\to 1^-$ 取极限，我们推导出积分公式 (2.11)。为此，我们将应用渐近近似 (A.81) 以及以下基本渐近近似

$$\ln(1-z^2)=\ln(1-z)+\ln(1+z)=\ln(1-z)+\ln(2)+o(1),\quad z\to 1^-, \tag{4.52}$$

and

$$\tanh^{-1}(z)=\frac{1}{2}\big(\ln(1+z)-\ln(1-z)\big)=\frac{1}{2}\big(\ln(2)-\ln(1-z)\big)+o(1),\quad z\to 1^-. \tag{4.53}$$

将方程 (2.10) 中的积分记为 $I(\alpha,z)$，其中 $z=a/b$，于是得到

$$\begin{aligned}\lim_{z\to1^-}I(\alpha,z)=\frac{\pi^2}{8a^2}\csc^2(\pi\alpha)\lim_{z\to1^-}\Bigg\{&-\frac{1}{1+2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\left(\ln(1-z^2)+\psi(1)+\psi\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+2\gamma\right)\\&-\frac{1}{1-2\alpha}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)}\left(\ln(1-z^2)+\psi(1)+\psi\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)+2\gamma\right)-2\tanh^{-1}(z)\Bigg\}\\=-\frac{\pi^2}{16a^2}\csc^2(\pi\alpha)&\left\{\psi\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)+\psi\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)+4\ln(2)+2\gamma\right\},\end{aligned}$$

其中，我们利用 $\Gamma(3/2\pm\alpha)/\Gamma(1/2\pm\alpha)=1/2\pm\alpha$、渐近近似 (4.52) 和 (4.53)，以及标准公式 $\psi(1)=-\gamma$，得到了第二个等号。

现在我们推导积分公式 (2.12)。除了假设 $\mathrm{Re}\ a$，$\mathrm{Re}\ b>0$之外，我们还假设 $a\neq b$ 和 $|a/b|\le 1$。我们将通过在积分公式 (2.10) 中取极限 $\alpha\to 0$ 来推导积分公式 (2.12)。首先注意到

$$\csc^2(\pi\alpha)=\frac{1}{\pi^2\alpha^2}+O(1),\quad \alpha\to 0. \tag{4.54}$$

为简化记号，在本证明的其余部分我们将令 $z=a/b$。现在我们求出的渐近展开为

$$J(\alpha,z):=\frac{z^{2\alpha}}{1+2\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}+\alpha\\\frac{3}{2}+\alpha\end{matrix}\;\middle|\;z^2\right)+\frac{z^{-2\alpha}}{1-2\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}-\alpha\\\frac{3}{2}-\alpha\end{matrix}\;\middle|\;z^2\right)-\frac{2}{z}\tanh^{-1}(z).$$

直接进行渐近分析可知，当 $\alpha \to 0$ 时，

$$\frac{z^{2\alpha}}{1+2\alpha} = 1 + 2(\ln(z)-1)\alpha + 2(\ln^2(z) - 2\ln(z) + 2)\alpha^2 + O(\alpha^3). \tag{4.55}$$

现在我们转而讨论超几何函数的渐近分析。首先注意到

$$\frac{(\frac{1}{2}+\alpha)_n}{(\frac{3}{2}+\alpha)_n} = \frac{1+2\alpha}{2n+1+2\alpha} = \frac{1}{2n+1} + \frac{4n\alpha}{(2n+1)^2} - \frac{8n\alpha^2}{(2n+1)^3} + O(\alpha^3), \quad \alpha \to 0. \tag{4.56}$$

因此，当 $\alpha \to 0$ 时，

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1, \frac{1}{2}+\alpha \\ \frac{3}{2}+\alpha\end{matrix}\,\middle|\, z^2\right) = S_0(z) + 4S_1(z)\alpha - 8S_2(z)\alpha^2 + O(\alpha^3),$$

其中

$$S_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n+1} = \frac{\tanh^{-1}(z)}{z}, \quad S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{2n}}{(2n+1)^2}, \quad S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{2n}}{(2n+1)^3}.$$

（注意，在我们的假设下，这些无穷级数是收敛的，即 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $z > 0$、$z \neq 1$ 和 $|z| \leq 1$。）
综合以上结果可得，当 $\alpha \to 0$ 时，

$$\begin{aligned} J(\alpha, z) &= \big(1 + 2(\ln(z)-1)\alpha + 2(\ln^2(z) - 2\ln(z) + 2)\alpha^2\big)\big(S_0(z) + 4S_1(z)\alpha - 8S_2(z)\alpha^2\big) \\ &\quad + \big(1 - 2(\ln(z)-1)\alpha + 2(\ln^2(z) - 2\ln(z) + 2)\alpha^2\big)\big(S_0(z) - 4S_1(z)\alpha - 8S_2(z)\alpha^2\big) \\ &\quad - \frac{2}{z}\tanh^{-1}(z) + O(\alpha^3) \\ &= T(z)\alpha^2 + O(\alpha^3), \end{aligned} \tag{4.57}$$

其中

$$T(z) = 4\big((\ln^2(z) - 2\ln(z) + 2)S_0(z) + 4(\ln(z)-1)S_1(z)) - 4S_2(z)\big).$$

最后，由渐近展开 (4.54) 和 (4.57) 可得

$$\int_0^{\infty} xK_0^2(ax)K_0^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8b^2}\lim_{\alpha\to 0}\csc^2(\pi\alpha)J(\alpha, z) = \frac{\pi^2}{8b^2}\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot T(z) = \frac{1}{8b^2}T(z). \tag{4.58}$$

为了完成积分公式 (2.12) 的推导，只需再求出级数 $S_1(z)$ 和 $S_2(z)$ 的闭式公式。为此，我们注意到如下公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n+1)^s} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)^s} = \frac{1}{2z}\big[\mathrm{Li}_s(z) - \mathrm{Li}_s(-z)\big], \quad \mathrm{Re}\, s > 1,\ |z| \leq 1.$$

于是得到

$$\begin{aligned} S_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{2n}}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{4z}\big[2\tanh^{-1}(z) - (\mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_2(-z))\big] \end{aligned} \tag{4.59}$$

同样地,

$$S_2(z) = \frac{1}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n+1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n+1)^3}\Big]$$
$$= \frac{1}{4z}\big[\mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_2(-z) - (\mathrm{Li}_3(z) - \mathrm{Li}_3(-z))\big]. \tag{4.60}$$

结合方程 (4.58)、(4.59) 和 (4.60) 并化简后，我们得到积分公式 (2.12)。

最后，通过对积分公式 (2.12) 取极限 $a/b \to 1^-$，并使用基本极限 $\lim_{z\to 1^-} \ln^2(z)\tanh^{-1}(z) = 0$ 以及标准公式 $\mathrm{Li}_3(1) = \zeta(3)$ 和 $\mathrm{Li}_3(-1) = -3\zeta(3)/4$，我们得到积分公式 (2.13)。 □

定理 *2.7* 的证明。 1. 将方程 (A.91) 应用于积分公式 (2.7)（其中 $\alpha = \beta$ 和 $s = 1$），可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty I_\alpha(ax)K_\alpha(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8a}G_{4,4}^{2,4}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1+\alpha, 1-\alpha, 1, 1\\ \frac{1}{2}+\alpha, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}\end{matrix}\right) \\
&= \frac{1}{8a}\left\{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{a}{b}\right){}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha\\ 1, \alpha+1, 1-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma^2(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(2\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha+1}{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{1}{2}\\ \alpha+1, \alpha+1, 2\alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

通过化简上述表达式中的伽马函数之比，我们得到积分公式 (2.18)。我们利用标准公式 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ 和 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 以及恒等式 (4.50) 化简第一个比值；同时，利用特殊值 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$、反射公式 (4.49) 和倍增公式 (4.44) 化简第二个比值。

2. 根据积分公式 (2.7)（其中 $\alpha = \beta$ 和 $s = 2$），我们得到

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x I_\alpha(ax)K_\alpha(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8a^2}G_{4,4}^{2,4}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1+\alpha, 1-\alpha, 1, \frac{3}{2}\\ 1+\alpha, 1, 1-\alpha, \frac{1}{2}\end{matrix}\right) \\
&= \frac{1}{8a^2}G_{3,3}^{2,3}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1+\alpha, 1, \frac{3}{2}\\ 1+\alpha, 1, \frac{1}{2}\end{matrix}\right),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

其中，在第二步中我们使用方程 (A.89) 化简了第二个 G-函数的阶数。通过对方程 (4.61) 中的 G-函数应用约化公式 (A.91)，我们得到积分公式 (2.19)。这与本证明第 1 部分中的处理方式类似，因此省略细节。不过需要注意的是，由于存在重复因子，${}_3F_2$ 函数根据公式 (A.76) 化简为 ${}_2F_1$ 函数，其一个例子如下:

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}1-\alpha, 1, \frac{1}{2}\\ 1-\alpha, \frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{b}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right),$$

其中，在第二步中我们使用了约化公式 (A.82)。

通过应用渐近展开 (A.81)，令积分公式 (2.19) 中的 $a/b \to 1^-$ in 取极限，我们得到积分公式 (2.20)。这一过程与

定理 2.5 的证明中从积分公式 (2.11) 推导积分公式 (2.10) 的过程非常相似，因此我们省略细节。

现在我们推导积分公式 (2.21)。除了假设 $\operatorname{Re} a,\operatorname{Re} b>0$之外，我们现在还假设 $a\neq b$ 和 $|a/b|\leq 1$。我们通过在积分公式 (2.19) 中取极限 $\alpha\to 0$ 来推导积分公式 (2.21)。回忆定理 2.5 的证明中记号 $S_0(z)$ 和 $S_1(z)$，并令 $z=a/b$。于是，应用渐近展开 (4.55) 和 (4.56)，我们得到，当 $\alpha\to 0$时，

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\alpha,z)&:=\frac{\tanh^{-1}(z)}{z}-\frac{z^{2\alpha}}{1+2\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}+\alpha\\ \frac{3}{2}+\alpha\end{matrix}\,\middle|\, z^2\right)\\&=\frac{\tanh^{-1}(z)}{z}-\big(1+2(\ln(z)-1)\alpha\big)\big(S_0(z)+4S_1(z)\alpha\big)+O(\alpha^2)\\&=2\big((1-\ln(z))S_0(z)-2S_1(z)\big)\alpha+O(\alpha^2).\end{aligned}\tag{4.62}$$

我们还有

$$\csc(\pi\alpha)=\frac{1}{\pi\alpha}+O(\alpha),\quad \alpha\to 0.\tag{4.63}$$

将渐近展开 (4.62) 和 (4.63) 应用于积分公式 (2.19)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xI_0(ax)K_0(ax)K_0^2(bx)\,\mathrm{d}x&=\frac{\pi}{4b^2}\lim_{\alpha\to 0}\csc(\pi\alpha)\mathcal{J}(\alpha,z)\\&=\frac{\pi}{4b^2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot 2\big((1-\ln(z))S_0(z)-2S_1(z)\big)\\&=\frac{1}{2b^2}\big((1-\ln(z))S_0(z)-2S_1(z)\big),\end{aligned}$$

并利用 $S_0(z)=z^{-1}\tanh^{-1}(z)$ 以及关于和 $S_1(z)$ 的公式 (4.59)，即可得到所需的积分公式 (2.21)。

现在我们推导积分公式 (2.22)，具体做法是改编积分公式 (2.21) 的推导过程。现在假设 $a\neq b$ 和 $|a/b|\geq 1$，即 $z\neq 1$ 和 $|z|\geq 1$（以及始终成立的假设 $\operatorname{Re} z>0$）。首先注意到，根据恒等式 (A.79)，我们有

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}+\alpha\\ \frac{3}{2}+\alpha\end{matrix}\,\middle|\, z^2\right)&=\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+\alpha)\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+\alpha)}(-z^2)^{-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}-\alpha\\ \frac{3}{2}-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{z^2}\right)\\&\quad+\Gamma(\tfrac{3}{2}+\alpha)\Gamma(\tfrac{1}{2}-\alpha)(-z^2)^{-1/2-\alpha}\\&=\frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}z^{-2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}-\alpha\\ \frac{3}{2}-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{z^2}\right)+\frac{\pi(1+2\alpha)}{2\cos(\pi\alpha)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(1/2+\alpha)}z^{-1-2\alpha},\end{aligned}$$

其中我们使用了 o 们通常的方法来化简伽马函数的比值和乘积。由于

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(1/2+\alpha)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}=-\mathrm{i}\cos(\pi\alpha)-\sin(\pi\alpha),$$

我们有

$$\mathcal{J}(\alpha,z)=\frac{1}{z^2}\left\{z\left(\tanh^{-1}(z)+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\tan(\pi\alpha)\right)-\frac{z^{2\alpha}}{1-2\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}-\alpha\\ \frac{3}{2}-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{z^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{z^2}\biggl\{z\biggl(\tanh^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{\pi}{2}\tan(\pi\alpha)\biggr)-\frac{z^{2\alpha}}{1-2\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}-\alpha\\ \frac{3}{2}-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{z^2}\right)\biggr\}.$$

令 $w=1/z$。那么，按照前面的论证，我们有，当 $\alpha\to 0$ 时，

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\alpha,z) &= w^2\biggl\{\frac{\tanh^{-1}(w)}{w}+\frac{\pi\tan(\pi\alpha)}{2w}-(1+2\alpha)\bigl(1-2\ln(w)\alpha\bigr)\bigl(S_0(w)-4S_1(w)\alpha\bigr)\biggr\}+O(\alpha^2)\\ &= w^2\biggl\{\frac{\pi^2}{2w}+2\bigl(2S_1(w)+(\ln(w)-1)S_0(w)\bigr)\biggr\}\alpha+O(\alpha^2).\end{aligned}\tag{4.64}$$

（注意，$\operatorname{Re} w>0$, $|w|\le 1$ 和 $w\ne 1$，这确保级数 $S_0(w)$ 和 $S_1(w)$ 收敛。）将渐近展开 (4.63) 和 (4.64) 应用于积分公式 (2.19)，即可得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xI_0(ax)K_0(ax)K_0^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{4b^2}\lim_{\alpha\to 0}\csc(\pi\alpha)\mathcal{J}(\alpha,z)\\ &= \frac{\pi}{4b^2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2 w}{2}+2w^2\bigl(2S_1(w)+(\ln(w)-1)S_0(w)\bigr)\right)\\ &= \frac{\pi^2}{8ab}+\frac{1}{2a^2}\bigl(2S_1(w)+(\ln(w)-1)S_0(w)\bigr),\end{aligned}$$

并利用 $S_0(z)=z^{-1}\tanh^{-1}(z)$ 以及求和 $S_1(z)$ 的公式 (4.59)，即可得到积分公式 (2.22)。

最后，在积分公式 (2.21) 中取极限 $a/b\to 1^-$，并利用极限 $\lim_{z\to 1^-}\ln(z)\tanh^{-1}(z)=0$ 以及二重对数函数 $\operatorname{Li}_2(1)=\pi^2/6$ 和 $\operatorname{Li}_2(-1)=-\pi^2/12$的标准特殊值，即可推导出积分公式 (2.23)。

□

T 的证明　定理 *2.9.* 1. 在积分公式 (2.8) 中令 $\alpha=\beta$ 和 $s=1$，可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty I_\alpha^2(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha+1}&\frac{\Gamma^2(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}\\ &\times{}_4F_3\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2},2\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \alpha+1,2\alpha+1,\alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right),\end{aligned}$$

利用倍增公式 (4.44) 和标准公式 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ 化简伽马函数之比，即可得到所需公式 (2.25)。

2. 现在在积分公式 (2.8) 中令 $\alpha=\beta$ 和 $s=2$，并应用约化公式 (A.76)，可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xI_\alpha^2(ax)K_\alpha^2(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha+2}\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2},2\alpha+1,\alpha+1,1\\ \alpha+1,2\alpha+1,\alpha+\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right)\\ &= \frac{(a/b)^{2\alpha}}{2b^2(1+2\alpha)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2},1\\ \alpha+\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{a^2}{b^2}\right),\end{aligned}$$

如所需。

□

A 特殊函数

在本附录中，我们定义第一类和第二类修正贝塞尔函数、广义超几何函数、Lauricella 函数 F_C 以及 Meijer G-函数，并陈述它们的一些相关基本性质。除非另有说明，所有这些性质均可在标准参考文献 [14, 18]中找到。

A.1 修正贝塞尔函数

第一类修正贝塞尔函数对 $\nu \in \mathbb{C}$ 和 $z \in \mathbb{C}$，定义为以下幂级数

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{A.65}$$

第一类修正贝塞尔函数对 $\nu \in \mathbb{C}$ 和 $\operatorname{Re} z > 0$，可定义为以下积分

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-z\cosh t} \cosh(\nu t)\, \mathrm{d}t.$$

对于 $n \in \mathbb{Z}$、$\nu \in \mathbb{C}$ 和 $z \in \mathbb{C}$，以下恒等式成立：

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \tag{A.66}$$
$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z), \tag{A.67}$$

且关系式 (A.66) 可推广为

$$I_{-\nu}(z) = I_\nu(z) + \frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi} K_\nu(z), \quad \nu \in \mathbb{C}. \tag{A.68}$$

令 $\operatorname{Re} z > 0$，并固定 $\nu \in \mathbb{C}$。那么函数 $I_\nu(z)$ 和 $K_\nu(z)$ 具有以下渐近行为：

$$I_\nu(z) \sim \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad z \to 0,\ \nu \notin \{-1,-2,-3,\ldots\}, \tag{A.69}$$
$$K_\nu(z) \sim 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) z^{-\nu}, \quad z \to 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0, \tag{A.70}$$
$$K_0(z) \sim -\ln(z), \quad z \to 0, \tag{A.71}$$
$$I_\nu(z) \sim \frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad z \to \infty, \tag{A.72}$$
$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \mathrm{e}^{-z}, \quad z \to \infty. \tag{A.73}$$

当 $\nu \in \{-1,-2,-3,\ldots\}$ 时，我们可以利用关系式 (A.66) 确定 $I_\nu(z)$ 在 $z \to 0$ 时的极限行为；当 $\operatorname{Re}\nu < 0$ 时，我们可以利用关系式 (A.67) 推知 $K_\nu(z)$ 在 $z \to 0$ 时的极限行为。如果 $\nu \neq 0$ 是纯虚数，那么当 $z \to 0$ 时，$K_\nu(z) = O(1)$（见 [18, 方程 10.45.2 和 10.45.7]）。

A.2 广义超几何函数及相关函数

该广义超几何函数由幂级数定义

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{A.74}$$

当 $|z|<1$ 时成立，在其他情况下则由解析延拓定义。*Pochhammer* 符号 定义为 $(v)_k=v(v+1)\cdots(v+k-1)$。函数 ${}_2F_1(a,b;\,c;\,z)$ 称为（高斯）超几何函数。正则化广义超几何函数 定义为

$$ {}_p\tilde{F}_q\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_q\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=\frac{1}{\Gamma(b_1)\cdots\Gamma(b_q)}\,{}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_q\end{matrix}\,\middle|\,z\right). \tag{A.75}$$

由级数表示 (A.74) 可直接看出，若某个 a_h、 $h=1$，……， p 等于某个 b_j、 $j=1$，……， q，则广义超几何函数和正则化广义超几何函数会降阶。例如，对于 p， $q\geq 1$，

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_{q-1},a_p\end{matrix}\,\middle|\,z\right)={}_{p-1}F_{q-1}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_{p-1}\\ b_1,\dots,b_{q-1}\end{matrix}\,\middle|\,z\right), \tag{A.76}$$

$$ {}_p\tilde{F}_q\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_{q-1},a_p\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=\frac{1}{\Gamma(a_p)}\,{}_{p-1}\tilde{F}_{q-1}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_{p-1}\\ b_1,\dots,b_{q-1}\end{matrix}\,\middle|\,z\right). \tag{A.77}$$

该*Lauricella* 函数 F_C 定义为

$$ F_C^{(n)}(a,b;c_1,\dots,c_n;z_1,\dots,z_n)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{k_1+\cdots+k_n}(b)_{k_1+\cdots+k_n}}{(c_1)_{k_1}\cdots(c_n)_{k_n}}\frac{z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}}{k_1!\cdots k_n!}, \tag{A.78}$$

对于 $|z_1|^{1/2}+\cdots+|z_n|^{1/2}<1$。

超几何函数满足恒等式

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,z\right)&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,a-c+1\\ a-b+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{z}\right)\\ &\quad+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}b,-c+1\\ b-a+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{z}\right). \end{aligned} \tag{A.79}$$

若 $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$，则

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,1\right)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \tag{A.80}$$

超几何函数具有以下渐近展开。当 $z\to 1^-$ 时，

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=-\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\ln(1-z)-\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\big(\psi(a)+\psi(b)+2\gamma\big)+o(1) \tag{A.81}$$

（参见 http://functions.wolfram.com/07.23.06.0014.01）。

对于 $|z|<1$ 且 $a\in\mathbb{N}$ 为非负整数时，超几何函数呈现初等形式：

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+\frac{1}{2},1\\ a+\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,z\right)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+\frac{1}{2})_k}{(a+\frac{3}{2})_k}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2a+1}{2k+2a+1}z^k\\ &=\frac{2a+1}{z^a}\left(\frac{\tanh^{-1}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}-\sum_{k=0}^{a-1}\frac{z^k}{2k+1}\right), \end{aligned} \tag{A.82}$$

其中，最后一个等式成立是因为 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/(2k+1) = z^{-1/2}\tanh^{-1}(\sqrt{z})$。下面给出另一种初等形式。对于 $|z|<1$ 且 $n\in\mathbb{Z}^+$,

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} n, 1 \\ n+1 \end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(n+1)_k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nz^k}{n+k} = \frac{n}{z^n}\left(-\ln(1-z) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^k}{k}\right). \tag{A.83} $$

超几何函数的其他特殊情形为

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, 1 \\ \frac{7}{6} \end{matrix}\,\middle|\, z\right) &= \frac{1}{12z^{1/6}}\big(4\tanh^{-1}(z^{1/6}) + 2\sqrt{3}\tan^{-1}(1-z^{1/3}, \sqrt{3}z^{1/6}) \\ &\quad + \ln(z^{1/3}+z^{1/6}+1) - \ln(z^{1/3}-z^{1/6}+1)\big), \end{aligned} \tag{A.84} $$

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{5}{6}, 1 \\ \frac{11}{6} \end{matrix}\,\middle|\, z\right) &= \frac{5}{12z^{5/6}}\big(4\,\text{双曲正切}^{-1}(z^{1/6}) - 2\sqrt{3}\,\text{正切}^{-1}(1-z^{1/3},\ \sqrt{3}z^{1/6}) \\ &\quad + \ln(z^{1/3}+z^{1/6}+1) - \ln(z^{1/3}-z^{1/6}+1)\big), \end{aligned} \tag{A.85} $$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{4}, 1 \\ \frac{5}{4} \end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \frac{1}{2z^{1/4}}\big(\tanh^{-1}(z^{1/4}) + \tan^{-1}(z^{1/4})\big), \tag{A.86} $$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{3}{4}, 1 \\ \frac{7}{4} \end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \frac{3}{2z^{3/4}}\big(\tanh^{-1}(z^{1/4}) - \tan^{-1}(z^{1/4})\big); \tag{A.87} $$

分别参见 http://functions.wolfram.com/07.23.03.0299.01、http://functions.wolfram.com/07.23.03.0387.01、http://functions.wolfram.com/07.23.03.ai1i.01 和 http://functions.wolfram.com/07.23.03.aitp.01。这里，对于 $x,\ y\in\mathbb{C}$，双参数反正切表示为

$$ \tan^{-1}(x,y) = -\mathrm{i}\ln\left(\frac{x+\mathrm{i}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) $$

（参见 http://functions.wolfram.com/01.15.02.0001.01）。

A.3 Meijer G函数

对于 $z\in\mathbb{C}$，*Meijer* G函数由围道积分定义为

$$ G_{p,q}^{m,n}\left(z\,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-r)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+r)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-r)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+r)} z^r\,\mathrm{d}r, \tag{A.88} $$

其中，积分路径 L 将因子 $\Gamma(b_j-s)$ 的极点与因子$\Gamma(1-a_j+s)$ 的极点分开。我们约定空积为 1。

如果 a_h 中的某一个（$h=1$、……、n）等于 b_j 中的某一个（$j=m+1$、……、q），或者 a_h 中的某一个（$h=n+1$、……、p）等于b_j中的某一个（$j=1$、……、m），Meijer G函数就会化简为低阶函数。例如，

$$ G_{p,q}^{m,n}\left(z\,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_{q-1},a_1 \end{matrix}\right) = G_{p-1,q-1}^{m,n-1}\left(z\,\middle|\, \begin{matrix} a_2,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_{q-1} \end{matrix}\right), \quad n,p,q\geq 1, \tag{A.89} $$

$$ G_{p,q}^{m,n}\left(z\,\middle|\, \begin{matrix} a_1、\ldots\ldots、a_{p-1}、b_1 \\ b_1、\ldots\ldots、b_q \end{matrix}\right) = G_{q-1}^{m-1,p-1}\left(z\,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_{p-1} \\ b_2,\ldots,b_q \end{matrix}\right), \quad m,p,q\geq 1. \tag{A.90} $$

在满足某些条件时，G-函数可以表示为广义超几何函数的有限和。[18], 中的方程 16.17.2 给出了一个例子，我们

现在回顾这个例子。假设 $p \le q$，且 b_h 各项 $h = 1, \ldots\ldots, m$ 之间的差都不是整数或零，并且所有极点都是单极点。那么

$$G^{m,n}_{p,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) = \sum_{h=1}^{m} A^{m,n}_{p,q,h}(z)\, {}_pF_{q-1}\left(\begin{matrix} 1+b_h-a_1, \ldots, 1+b_h-a_p \\ 1+b_h-b_1, \ldots * \ldots, 1+b_h-b_q \end{matrix} \,\middle|\, (-1)^{p-m-n} z\right), \tag{A.91}$$

其中

$$A^{m,n}_{p,q,h}(z) = \frac{\prod_{j=1,\, j\neq h}^{m} \Gamma(b_j - b_h) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1+b_h-a_j) z^{b_h}}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1+b_h-b_j) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j-b_h)}.$$

这里，记号 $*$ 表示省略了条目 $1+b_h-b_h$。

致谢

作者的部分经费由英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）拨款 EP/Y008650/1 资助。

参考文献

[1] Abramochkin, E. G. 和 Razueva, E. V. 平移艾里函数四次乘积的梅林变换。 *Integral Transforms Spec. Funct.* **27** (2015年), 454–467。[2] Ansaria, A. 和 Masomi, M. R. 涉及艾里函数积分变换的一些结果。 *Integral Transforms and Spec. Funct.* **26** 2015 539 549 ( ), –。[3] Bailey, D. H., Borwein, D., Borwein, J. M. 和 Crandall, R. E. 伊辛类积分的超几何形式。*Exp. Math.* **16** (2007), 257–276。[4] Bailey, D. H., Borwein, J. M., Broadhurst, D. 和 Glasser, M. L. 贝塞尔矩的椭圆积分求值及其应用。 *J. Phys. A-Math. Theor.* **41**(2008), 205203。[5] Bailey, W. N. 涉及贝塞尔函数的一些无穷积分。 *J. Lond. Math. Soc.* **11** (1936), 16–20。[6] B¨onisch, K., Fischbach, F., Klemm, A., Nega, C. 和 Safari, R. 所有圈数香蕉积分的解析结构。 *J. High Energy Phys.* 2021(5), 第66期, 1–41。[7] Crucean, C. 一个包含四个贝塞尔函数乘积的积分。 *arXiv:0912.3659*, 2009。[8] Erd´elyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. 和 Tricomi, F. G. *Tables of integral transforms.* McGraw-Hill，纽约，1954。[9] Exton, H. *Handbook of Hypergeometric Integrals: Theory, Applications, Tables, Computer Programs*。Halsted Press，纽约，1978。[10] Fabrikant, V. 对多个球贝塞尔函数、幂函数和指数函数乘积的无穷积分进行初等精确求值。 *Quart. Appl. Math.* **71** (2013), 573–581。[11] Glasser, M. L. 一个四个贝塞尔函数积分的奇异行为。 *Scientia* **23** (2012), 99–101。[12] Gradshteyn, I. S. 和 Ryzhik, I. M. *Table of Integrals, Series and Products.* 7版。Academic Press，2007。[13] Laurenzi, B. J. 艾里函数幂次的矩积分。 *Z. Angew. Math. Phys.* **44** (1993), 891–908。[14] Luke, Y. L. *The Special Functions and Their Approximations*，第1卷。纽约：Academic Press，1969。[15] Mehrem, R. 对四个球贝塞尔函数的无穷积分进行解析求值。 *Appl. Math. Comput.* **219** 2013 10506 10509 ( ), –。[16] Miles, J. W. 关于第二类 Painlev´e 超越函数。 *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **361** (1978), 277–291。[17] Miller, A. R. 四个贝塞尔函数的一个无穷积分（ML Glasser）。 *SIAM Rev.* **36** (1994), 285–287。[18] Olver, F. W. J., Lozier, D. W., Boisvert, R. F. 和 Clark, C. W. *NIST Handbook of Mathematical Functions.* 剑桥大学出版社, 2010。[19] Ouvry, S. 随机阿哈罗诺夫–玻姆涡旋及若干可精确求解的积分族。 *J. Stat. Mech.* (2005), P09004。[20] Philcox, O. H. 和 Slepian, Z. 贝塞尔函数乘积的一个精确积分到求和关系。 *Proc. Roy. Soc. A* **477** 2021 20210376 ( ), 。[21] Prudnikov, A. B., Brychkov, Y. A. 和 Marichev, O. I. *Integrals and Series: Volume 2.* CRC Press，1992。

[22] Reid, W. H. 艾里函数乘积的积分表示。 *Z. Angew. Math. Phys.* **46**(1995年), 159–170。[23] Reid, W. H. 艾里函数乘积的积分表示。II. 三次乘积。 *Z. Angew. Math.* ( ), – 。
Phys. **48** 1997 646 655
[24] Reid, W. H. 艾里函数乘积的积分表示。III. 四次乘积。
Z. Angew. Math. ( ), – 。[25] Saxena, R.
Phys. **48** 1997 656 664
K. 涉及贝塞尔函数乘积的积分。 *Glasgow Math. J.* **6** (1964年), 130–132。[26] Torre, A. 传播中的艾里小波相关图样。 *J. Opt.* **17** (2015年), 075604。[27] Vall
´
Z. ee, O., Soares, M. 和 de
Angew. Math. Phys. **48** 1997 156 160
Izarra, C. 艾里函数乘积的一个积分表示。( ), – 。[28] Vall´ee, O. 和 Soares, M. *Airy Functions and Applications to Physics.*第二版，帝国理工学院出版社，伦敦，2010。[29] Varlamov, V. 涉及艾里函数、其导数和贝塞尔函数乘积的积分。
J. Math. ( ), – 。[30] Watson, G.
Anal. Appl. **370** 2010 687 702
N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*。剑桥大学出版社，1922年。[31] Zhou, Y. 维克旋转、艾希勒积分与多圈费曼图。
Commun. Num. Theor. Phys. ( ), – 。
12 2018 127 192