爱尔兰数学学会公报第96期,
2025年冬季，1–? ISSN
0791-5578

arXiv:2601.12599v1 [math.RA] 18 Jan 2026

环交换性定理的初等证明

MICHAEL KINYON 和 DESMOND MACHALE

Abstract. 雅各布森交换性定理指出，如果对于每个 x， $x^n = x$ 对某个 $n > 1$成立，则环是交换的。赫斯坦推广指出，该条件可以弱化为 $x^n - x$ 是中心的。在这两个定理中， n 可能依赖于 x。在本文中，对于 n 为固定常数的某些情形，我们为每个定理找到了等式证明。对于雅各布森定理的奇数指数情形 $n = 2k + 1$，我们的主要工具是这样一个引理：对于每个 x， x^k 是中心的。对于赫斯坦定理，我们考察 $n = 4$ 和 $n = 8$ 的情形，并借助自动定理证明器 Prover9获得证明。

1. Introduction

N. Jacobson 关于环 [14] 的著名交换性定理，以及 I. N. Herstein 对其的推广 [12]，表述如下：

雅各布森定理。设 R 是一个环，对于每个 $x \in R$，都存在一个整数 $n = n(x) > 1$，使得 $x^n = x$。那么 R 是交换的。

Herstein 定理。设 R 是一个环，对于每个 $x \in R$，都存在一个整数$n = n(x) > 1$，使得对于所有 $y \in R$， $[x^n - x, y] = 0$。那么 R 是交换的。

雅各布森定理是韦德伯恩小定理的推广；该定理指出，每个有限除环都是交换的。满足雅各布森定理假设的环有各种名称，例如幂等 环 [2, 23]、 J-环 [13], ，以及其他我们可能尚未听说的名称。采用第一个名称，雅各布森定理可以简洁地表述为幂等环是交换的。据我们所知，满足 Herstein 定理假设的环似乎从未被赋予单独的名称，这可能是因为该假设对于环为交换环而言既是必要条件也是充分条件。

如定理陈述中所述，这两个定理都允许幂的指数 n 依赖于 x。关于雅各布森定理，文献中有多种证明；或许最漂亮的证明是 J. W. Wamsley [25] 以及 T. Nagahara 和 H. Tominaga [22]分别独立给出的。

本文关注这两个定理在 n是一个固定整数、不依赖于 x的情形，也就是说，环 R 满足：存在整数 $n \geq 2$，使得$x^n = x$ 对所有 $x \in R$都成立。人们为这类环提出过多种名称： J-环[17, 18]（如前所述，该名称也用于幂等环 [13]）、雅各布森环 [10]、 n-环 [6]、n-幂等环 [1], ，当然可能还有其他我们不知道的名称。由于满足 $x^n = x$ （其中某个 n ）的元素x 常被称为 n-幂等元素，我们选择将这类环称为n-幂等环。我们主要是为了简化定理陈述而采用这一名称。

众所周知的布尔环类，正是我们所称的二幂等环。对于此类环，雅各布森定理是一个标准练习，只需进行简单的等式

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16U80, 03B35.
Key words and phrases. 环，交换性定理。收到日期：2025年7月24日。

证明（见下文定理 2.6 的第一个替代证明）。事实上，根据 Birkhoff 完备性定理和等式逻辑 [5] ，对于每个固定的 n，都存在一个关于雅各布森定理的等式证明。

在那些致力于证明特定固定 n[8, 11, 26, 27], 的雅各布森定理的论文中，我们尤其想特别指出 Y. Morita [21],的杰作：他为大多数偶数 ≤ 50 和所有奇数≤ 25给出了人工等式证明。

对于固定n的 Herstein 定理，等式证明无疑也同样引人关注，尽管相关文献没有那么丰富；例如参见 [7, 19]。

尝试借助计算机辅助，为固定 n [24, 26, 27]的情形生成这两个定理的等式证明，是很自然的做法。对于雅各布森定理，M. Brandenburg[6] 最近在这方面取得了一些令人振奋的进展。

本文分为两部分。在 §2 中，我们讨论雅各布森定理在某些较小 n情形下的结论。对于 n 为奇数的情形，我们的主要工具是一项有用且据我们所知为新的结果（引理 2.4）：若 R 是一个($2k+1$)幂等环，则对所有 $x \in R$， x^k 都是中心的。这项结果最初由 Stephen Buckley 发现（未发表）；我们的证明与他的不同。我们展示了该引理在 $n = 3$、5和7 的情形下如何发挥作用。我们还为若干偶数 n给出了一些（据我们所知）新的证明。§2 中的证明除一个以外，最初都是由人编写的；引理 2.2 的证明最初由自动定理证明器找到，随后经过人工整理。

在 §3 中，我们将针对 $n = 2$、4 和 8 这几种特定情形讨论 Herstein 定理。这些证明是在 W. McCune [20]开发的自动定理证明器 Prover9 的帮助下找到的。事实上，作者二人合作的开端，是第二作者发邮件建议第一作者：为 Herstein 定理中关于 $n = 4$ 和 8 的情形寻找自动化证明会很有意思，然后再看看能否将这些证明恰当地人工化。

我们认为，对于 $n = 4$ （定理 3.7），人工化工作相当成功；对于 $n = 8$ （定理 3.8 ），则取得了一定成功。对于后一个证明，尽管有耐心的人确实可以逐步理解其中的步骤，但很难看清整体模式。我们不知道能否从这个证明中提炼出一种通用思路，甚至不知道是否存在这样的思路，可以应用于 2 的更高次幂。

我们以讨论一些约定来结束本引言。环均假定为结合的，但不假定具有单位元；也就是说，它们属于某些人依照 Jacobson 的建议（[15],第 155–156 页）所称的“无单位环”。

环 R 的中心是子环 $Z(R) = \{a \in R : ar = ra, \ \forall r \in R\}$。 $Z(R)$ 中的元素称为中心的。

在我们的证明中，尤其是 §3 中，我们将大量使用交换子 $[x, y] = xy - yx$。交换子本身是一种有趣的二元运算，但在这里我们主要将其用作计算工具。事实证明，在 Prover9 输入文件中引入交换子，并向程序提供有关交换子的基本事实，对寻找证明大有帮助。我们将在 §3 开始处讨论所需的交换子恒等式。

2. Jacobson's Theorem for n-potent rings

本节主要关注给出等式证明，证明对于不同的 n 值， n-幂等环是交换的。不过，对于一些预备性结果，证明约化环的性质基本不需要额外工作。若环 R 没有幂零元，则称其为约化环 。这也可以等价地描述为满足以下条件

$$x^2 = 0 \implies x = 0\,, \tag{1}$$

对所有 $x \in R$ 均成立。每个幂等环 R 都是约化环：若 $x \in R$ 满足 $x^2 = 0$，取 $n = n(x) > 1$使得 $x^n = x$。则 $x = x^n = x^2x^{n-1} = 0$。每个约化环都是整环的次直积 [3, 16], ，但使用这一相当深刻的结构性结果会违背本文的宗旨。

每个约化环 R 都满足条件

$$xy = 0 \implies yx = 0\,, \tag{2}$$

对所有 $x \in R$。事实上，若 $xy = 0$，则 $(yx)^2 = y(xy)x = 0$ ，因此由 (1) 得到 $yx = 0$ 。满足 (2) 的环称为 可逆 [9]。

约化环既不能用恒等式定义，也不能用恒等式刻画。因此，即使是约化环中的初等证明，也不可避免地要用到 (1)，严格来说并非等式证明。不过，在 n-幂等环中，很容易将这类证明改写为等式证明。例如，要直接证明一个 n-幂等环 ($n > 1$) 是可逆的，注意若 $xy = 0$，则 $yx = (yx)^n = y(xy)^{n-1}x = 0$。

约化环 R 中的幂等元 e （即满足 $e^2 = e$ 的元素）是中心的。这是一个众所周知的结论，其证明简短而标准：验证 $(ex - exe)^2 = 0$ 以及 $(xe - exe)^2 = 0$，于是 R 为约化环意味着 $ex - exe = 0$ 和 $xe - exe = 0$，从而$ex = exe = xe$。事实上，在一个温和的推广中也会出现相同的表达式。

引理 2.1. 在可逆环中，幂等元都是中心的。

证明. 若 e 是环 R中的幂等元，则对所有 $x \in R$, e，有（$x - ex$） $= 0$ 且（$x - xe$）$e = 0$。若 R 可逆，则由（2）可得（$x - ex$）$e = xe - exe = 0$ 且e（$x - xe$） $= ex - exe = 0$。因此 $xe = exe = ex$，也就是说， e 是中心的。□

在约化的情形下，下面这个有用的推广的证明比经典证明只复杂一点，并且基于相同的思路。

引理 2.2. 设 R 是一个约化环。若对于某个整数 t， $c \in R$ 满足 $c^2 = tc$ ，则 c 是中心的。

证明. 首先，对所有 $x \in R$, $c^2xc = tc \cdot xc = cx \cdot tc = cxc^2$，有 $c[c, x]c = c$。因此 $cx - xcc = 0$。特别地， $(c[c, x])^2 = 0$ 且 $([c, x]c)^2 = 0$。由于 R是约化环，由（1）可得$c[c, x] = 0$ 和 $[c, x]c = 0$。它们分别推出，

$$xc[c, x] = 0 \qquad \text{and} \tag{3}$$

$$[c, x]cx = 0\,. \tag{4}$$

将 (2) 应用于 (3)，得到

$$[c, x]xc = 0\,. \tag{5}$$

用 (4) 减去 (5)，得到 $[c, x]^2 = 0$。由于 R是约化环，对所有$x \in R$， $[c, x] = 0$ ，也就是说， $c \in Z(R)$。□

引理 2.3. 设 R 是约化环， $n > 1$ 是一个整数。若 $c \in R$ 满足$c^n = c$， 则 c^{n-1} 是中心幂等元。

证明。 若 $n = 2$，则 $c^{n-1} = c$；而若 $n > 2$，则 $c^{n-1}c^{n-1} = c^nc^{n-2} = cc^{n-2} = c^{n-1}$。无论哪种情形， c^{n-1} 都是幂等元，因此引理 2.2 适用。□

现在，我们将讨论范围从约化环缩小到 n-幂等环，这才是我们真正关注的对象。下面的结果将证明至关重要，也可视为在奇数 n的情形下对引理 2.3 的改进。

引理 2.4. 令 $k \geq 1$ 为一个整数，且令 R 为一个$(2k + 1)$-幂等环。那么，对于所有 $x \in R$， $x^k \in Z(R)$ 。

证明。 首先，根据引理 2.3， x^{2k} 是一个中心幂等元。接下来我们证明 $x^{3k} = x^k$。若 $k = 1$, 结论显然；若 $k > 1$, 则 $x^{3k} = x^{2k+1}x^{k-1} = xx^{k-1} = x^k$。最后，$(x^{2k} + x^k)^2 = (x^{2k})^2 + 2x^{3k} + x^{2k} = 2(x^{2k} + x^k)$。根据引理 2.2（取 $c = x^{2k} + x^k$,$t = 2$）， $x^{2k} + x^k \in Z(R)$, 因此对于所有 $x \in R$， $x^k = (x^{2k} + x^k) - x^{2k} \in Z(R)$，如所声称。□

当 n 为偶数时，有如下结论。

引理 2.5. 设 $n > 1$ 为偶整数， R 为 n-幂等环，则对所有 $x \in R$，均有 $2x = 0$。

证明。 对所有 $x \in R$， $-x = (-x)^n = x^n = x$。 □

本节接下来将针对不同的 n，证明 n-幂等环的交换性定理。我们先回顾一个经典结论：二幂等环与布尔环等价。

定理 2.6. 每个2-幂等环都是交换的。

证明。 这是引理 2.3 的情形 $n = 2$ 。 □

另外，这里给出经典证明。

替代证明 *1*。 设 R 是幂零指数为 2 的。对于所有 $x, y \in R$, $x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$。约去后，得到 $xy + yx = 0$，因此由引理 2.5 可得 $xy = -yx = yx$。 □

这里还给出 Brandenburg 的精彩证明 [6]。

替代证明 *2.* 对于所有 x, y 在环 R, $xy - yx =$

$$= ((x + y)^2 - (x + y)) - (x^2 - x) - (y^2 - y) + ((yx)^2 - yx) - ((-yx)^2 - (-yx)) .$$

如果 R 是幂零指数为 2 的，那么右边等于 0。 □

关于下一个结果的多种证明及变体，参见 [8]。

定理 2.7. 每个3-幂等环都是交换的。

证明. 这是引理 2.4 的情形 $k = 1$ 。 □

另一种证明. 设 R 是 3-幂等的。根据引理 2.3， x^2 对所有 $x \in R$ 都是中心的，因此 $2x = 2x^3 = (x^2 + x)^2 - x^4 - x^2$ 也是中心的。接下来，
$x^2 + x = (x^2 + x)^3 = x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 = x^2 + 3x + 3x^2 + x = 2 \cdot 2(x^2 + x) \in Z(R)$。
最后，对所有 $x \in R$， $x = (x^2 + x) - x^2 \in Z(R)$，也就是说， R 是交换的。 □

引理 2.8. 设 k 为整数， R 为一个环，且对所有 $x, y \in R$，都有 $k(xy + yx) \in Z(R)$。则对所有 , 都有 (R)。

证明。 我们有 $kx^2 \cdot y + kxyx = x \cdot k(xy + yx) = k(xy + yx) \cdot x = kxyx + y \cdot kx^2$, 因此消去 $kxyx$即可得到所需结果。□

引理 2.9. 若 R 是一个环，且对所有 $x \in R$ 都有 $x^2+x \in Z(R)$，则 R 是交换的 $ve.$

证明。 对所有 $x, y \in R$，我们有 $(x+y)^2+x+y \in Z(R)$，也就是说，$(x^2+x)+(y^2+y)+xy+yx \in Z(R)$。由此可得 $xy + yx \in Z(R)$，因此根据引理 2.8（取 $k = 1$） ，有 $x^2 \in Z(R)$。于是对所有 $x \in R$，都有 $x = (x^2 + x) - x^2 \in Z(R)$，即 R 是交换的。□

引理 2.10。 如果 n是2的幂，那么除 $k = 0$ 和 $k = n$外，每个二项式系数 $\binom{n}{k}$ 都是偶数。

证明。 用归纳法很容易证明这一点。 □

定理 2.11。 每个4-幂等环都是交换的。

证明。 设 R 是 4-幂等的。根据引理 2.5， $2x = 0$ 对所有 $x \in R$均成立。因此，利用引理 2.10，有 $(x^2 + x)^2 = x^4 + x^2 = x^2 + x$。根据引理 2.2， $x^2 + x$ 对所有 $x \in R$都是中心的，因此根据引理 2.9， R 是交换的。□

定理 2.12。 每个5-幂等环都是交换的。

证明。 设 R 是 5-幂等的。根据引理 2.4，对所有 $x \in R$， $x^2 \in Z(R)$ 均成立。因此，$(x^2 + x)^2 - x^4 - x^2 = 2x^3$ 对所有 $x \in R$都是中心的。接下来，对所有 x， $2x = 2x^5 = 2x^3 \cdot x^2 \in Z(R)$ 均成立。最后，

$$\begin{aligned} x^2 + x &= (x^2 + x)^5 \\ &= x^{10} + 5x^9 + 10x^8 + 10x^7 + 5x^6 + x^5 \\ &= x^2 + 5x + 10x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x \\ &= 2(5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 3x) \in Z(R)\,. \end{aligned}$$

根据引理 2.9， R 是交换的。 □

我们暂且搁置情形 $n = 6$。

定理 2.13。 每个7幂等环都是交换的。

证明。 设 R 是 7-幂等的。根据引理 2.4， $x^3 \in Z(R)$ 对所有 $x \in R$ 均成立。因此 $(x^2 + x)^3 - x^6 - x^3 = 3(x^5 + x^4) \in Z(R)$。两边乘以 x^3，得到 $3(x^2 + x) \in Z(R)$。由此可得

$$3((x + y)^2 + x + y) - 3(x^2 + x) - 3(y^2 + y) = 3(xy + yx) \in Z(R)\,.$$

根据引理 2.8（取 $k = 3$）， $3x^2 \in Z(R)$。因此，对所有$x \in R$， $3x = 3(x^2 + x) - 3x^2 \in Z(R)$。

接下来，我们有

$$\begin{aligned} x^2 + x &= (x^2 + x)^7 \\ &= x^{14} + 7x^{13} + 21x^{12} + 35x^{11} + 35x^{10} + 21x^9 + 7x^8 + x^7 \\ &= x^2 + 7x + 21x^6 + 35x^5 + 35x^4 + 21x^3 + 7x^2 + x\,. \end{aligned}$$

从两边消去 $x^2 + x$ 并整理各项，得到

$$0 = 3(2x + 7x^6 + 11x^5 + 11x^4 + 7x^3 + 2x^2) + x + 2x^5 + 2x^4 + x^2\,.$$

因此， $2x^5 + 2x^4 + x^2 + x \in Z(R)$。在这个最后的表达式中用 $-x$ 替换 x，再相加，得到 $4x^4 + 2x^2 \in Z(R)$。因此， $x^4 - x^2 = 4x^4 + 2x^2 - 3(x^4 + x^2) \in Z(R)$

由于 x^3 和 $x^4 - x^2$ 都是中心的，因此$(x^4 - x^2)^2 + 2(x^3)^2 = x^8 + x^4 = x^2 + x^4$也是中心的。因此，$2x^2 = (x^2 + x^4) - (x^4 - x^2) \in Z(R)$，于是 $x^2 = 3x^2 - 2x^2 \in Z(R)$。

最后，对所有 $x \in R$， $x = x^7 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^3 \in Z(R)$，证毕。 □

$x^n = x$ 的许多其他小 n 情形也可以用这些方法处理，其中较难的是 n 为奇数的情形（尽管引理 2.4 确实有所帮助）或为 2 的幂的情形。我们认为，我们的证明在某种意义上已接近最佳，并欢迎任何读者提出更简洁或更好的证明。

我们以另一个例子结束本节，该例在一个定理中涵盖了 $n = 6$、10、18、34、.....等情形。

定理 2.14。 设 $j \geq 1$ 为整数，并假设每个 2^{j+1}-幂等环都是交换的。设 $i > j$ 为整数，且 R 是一个 $2^i + 2^j$-幂等环。那么 R 是交换的。

证明。 根据引理 2.5，对于所有 $x \in R$，都有 $2x = 0$。现在

$$\begin{aligned} x^2 + x = (x^2 + x)^{2^i+2^j} &= (x^2 + x)^{2^i}(x^2 + x)^{2^j} \\ = (x^{2^{i+1}} + x^{2^i})(x^{2^{j+1}} + x^{2^j}) &= x^{2(2^i+2^j)} + x^{2^i+2^{j+1}} + x^{2^{i+1}+2^j} + x^{2^i+2^j} \\ = x^2 + x^{2^i+2^j+2^j} + x^{2^i+2^i+2^j} + x &= x^2 + x^{2^j+1} + x^{2^i+1} + x\,, \end{aligned}$$

在第三个等式中使用引理 2.10。消去后，我们得到 $x^{2^j+1} + x^{2^i+1} = 0$，也就是 $x^{2^i+1} = x^{2^j+1}$。最后，我们有

$$x = x^{2^i+2^j} = x^{2^i+1}x^{2^j-1} = x^{2^j+1}x^{2^j-1} = x^{2^j+1}$$

对所有 $x \in R$ 都成立。根据假设， R 是交换的。 □

推论 2.15。 设 R 是一个 (2^i+2)-幂等环，其中 $i > 1$。那么 R 是交换的。

证明。 在定理 2.14 中取 $j = 1$，并应用定理 2.11。 □

3. Herstein's Theorem for $n = 2$, 4, 8

在环 R 中，我们已经使用过环的交换子 $[x, y] = xy - yx$，并且在本节中会大量使用。在交换子满足的性质中，我们需要以下性质：

$$[x, x] = 0\,, \qquad [x, y] = -[y, x]\,, \qquad [x, y + z] = [x, y] + [x, z]$$

对所有 $x, y, z \in R$ 都成立。为了提高可读性，对每个 $x \in R$，引入映射 $\mathrm{ad}(x) : R \to R$，其定义为 $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$，对所有 $y \in R$ 都成立。此映射满足的性质包括：

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(x)(y + z) &= \mathrm{ad}(x)(y) + \mathrm{ad}(x)(z)\,, \\ \mathrm{ad}(x + y) &= \mathrm{ad}(x) + \mathrm{ad}(y)\,, \\ \mathrm{ad}([x, y]) &= \mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x)\,. \end{aligned}$$

对所有 $x, y, z \in R$ 都成立。第一个恒等式表明，$\mathrm{ad}(x)$ 是底层阿贝尔群 $(R, +)$ 的自同态。第二个恒等式表明，$\mathrm{ad}: (R, +) \to \mathrm{End}(R, +)$ 是阿贝尔群之间的同态。第三个恒等式正是符号“ad”的由来；该恒等式表明，$\mathrm{ad} : (R, [\cdot, \cdot]) \to \mathrm{End}(R, +)$ 是与 R 相关联的李环的伴随表示。不过，对我们而言，ad 只是一个记号上的简写；除了在计算中使用上述恒等式外，环的李环并不起任何作用。

如 §1 所述，我们关注满足 $[x^n - x, y] = 0$（对某个整数 $n > 1$ 及所有 $x, y \in R$）的环 R。我们特别关注 $n = 2$，4 或 8，因此先从更一般的假设开始：

$$[p(x) - x, y] = 0 \quad \text{for all } x, y \in R \tag{E}$$

其中 $p(t)$ 是一个整数系数多项式，满足 $p(t) = q(t^2)t^2$，其中 $q(t) \in \mathbb{Z}[t]$。

引理 3.1。 设 R 是一个满足 *(E)* 的环。则对于所有 $x \in R$，$2\mathrm{ad}(x) = 0$。

证明。 对于所有 $x \in R$，$-\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(-x) = \mathrm{ad}(p(-x)) = \mathrm{ad}(p(x)) = \mathrm{ad}(x)$。 □

粗略地说，在当前情形下，引理 3.1 的结论相当于在偶数 n 的 n 幂零情形下，R 具有特征 2。该结论也可以用多种等价形式表述，例如对所有 $x, y \in R$，$[x, y] = [y, x]$。

引理 3.2。 设 R 为一个环，使得对所有 $x \in R$ 都有 $2\mathrm{ad}(x) = 0$。那么对于每个非负整数 n，

$$\mathrm{ad}(x)^{2^n} = \mathrm{ad}(x^{2^n})\,.$$

证明。对于 $n = 0$，无需证明。假设目标对某个 $n \geq 0$成立。对于$x,\ y \in R$，令 $u = x^{2^n}$，从而 $\mathrm{ad}(u) = \mathrm{ad}(x)^{2^n}$。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(u^2)(y) &= [u^2, y] = u^2y - yu^2 \\ &= u^2y - uyu + uyu - yu^2 \\ &= [u, uy] + [u, yu] \\ &= \mathrm{ad}(u)(uy) + \mathrm{ad}(u)(yu) \\ &= \mathrm{ad}(u)(uy) - \mathrm{ad}(u)(yu) \\ &= \mathrm{ad}(u)([u, y]) \\ &= \mathrm{ad}(u)^2(y)\,.\end{aligned}$$

Thus

$$\mathrm{ad}(x^{2^{n+1}})(y) = \mathrm{ad}(u^2) = \mathrm{ad}(u)^2 = (\mathrm{ad}(x)^{2^n})^2(y) = \mathrm{ad}(x)^{2^{n+1}}(y)\,.$$

由归纳法可得所需结果。 □

引理 3.3。设 R 是满足 *(E)* 的环。则对于所有的 $x, y \in R$,

$$[x, [x, y]] = 0 \implies [x, y] = 0\,,$$

或等价地,

$$\mathrm{ad}(x)^2(y) = 0 \implies \mathrm{ad}(x)(y) = 0\,.$$

证明。假设对于某个 $x, y \in R$，有 $[x, [x, y]] = \mathrm{ad}(x)^2(y) = 0$。由引理 3.1 和引理 3.2，$\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(p(x)) = p(\mathrm{ad}(x))$。由于对于某个 $q(t) \in \mathbb{Z}[t]$，有 $p(t) = q(t^2)t^2$，因此 $\mathrm{ad}(x)(y) = q(\mathrm{ad}(x)^2)\mathrm{ad}(x)^2(y) = 0$。□

引理 3.4。设 R 是满足 *(E)* 的环。则对于所有的 $x, y \in R$,

$$[x, [x, y]] = [x, y] \implies [x, y] = 0\,,$$

或者等价地,

$$\mathrm{ad}(x)^2(y) = \mathrm{ad}(x)(y) \implies \mathrm{ad}(x)(y) = 0\,.$$

证明。设 $x, y \in R$满足 $[x, [x, y]] = [x, y]$。那么

$$[[x, y], [[x, y], x]] = -[[x, y], [x, [x, y]]] = -[[x, y], [x, y]] = 0\,.$$

由引理 3.3，$[[x, y], x] = 0$。因此 $[x, y] = [x, [x, y]] = 0$。 □

定理 3.5。设 R 是一个环，并且对所有 $x, y \in R$都满足 $[x^2 - x, y] = 0$。那么 R 是交换的。

证明。由于 (E) 成立，引理 3.1 和引理 3.2 得出，对于所有 $x, y \in R$，$\mathrm{ad}(x)(y) = \mathrm{ad}(x^2)(y) = \mathrm{ad}(x)^2(y)$。由引理 3.4，对于所有 $x, y \in R$，$\mathrm{ad}(x)(y) = 0$，也就是说，R是交换的。（另见引理 2.9。）□

引理 3.6。设 R 是一个环，设 n 是一个正整数，并假设对于所有 x、$y \in R$，$[x^{2^n} - x, y] = 0$成立。那么对于所有 x、$y \in R$，$[x^{2^{n-1}} + \cdots + x^2 + x, y] = 0$ 成立。

证明。 对于所有 $x \in R$，根据引理 3.1 和引理 3.2，$\mathrm{ad}(x)^{2^n} = \mathrm{ad}(x^{2^n}) = \mathrm{ad}(x)$。现在对于所有 $x \in R$ （并使用引理 3.1），

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(x^{2^{n-1}} + \cdots + x^2 + x)^2 &= (\mathrm{ad}(x^{2^{n-1}}) + \cdots + \mathrm{ad}(x^2) + \mathrm{ad}(x))^2 \\
&= (\mathrm{ad}(x)^{2^{n-1}} + \cdots + \mathrm{ad}(x)^2 + \mathrm{ad}(x))^2 \\
&= \mathrm{ad}(x)^{2^n} + \mathrm{ad}(x)^{2^{n-1}} + \cdots + \mathrm{ad}(x)^4 + \mathrm{ad}(x)^2 \\
&= \mathrm{ad}(x) + \mathrm{ad}(x)^{2^{n-1}} + \cdots + \mathrm{ad}(x)^4 + \mathrm{ad}(x)^2 \\
&= \mathrm{ad}(x^{2^{n-1}}) + \cdots + \mathrm{ad}(x^2) + \mathrm{ad}(x) \\
&= \mathrm{ad}(x^{2^{n-1}} + \cdots + x^2 + x)
\end{aligned}$$

根据引理 3.4，$\mathrm{ad}(x^{2^{n-1}} + \cdots + x^2 + x) = 0$。这就证明了所需的结果。 □

定理 3.7。 设 R 是一个环，对所有的 x、$y \in R$都满足 $[x^4 - x, y] = 0$。则 R 是交换的。

证明。 这可由在引理 3.6 中取 $n = 2$ 并使用定理 3.5 得出。 □

最后，我们回到开启这项工作的那个结果。我们很清楚，在本文所有证明中，这个证明最像是由自动演绎工具生成的。我们已将证明简化到可以逐步理解每个步骤的程度，但我们也完全同意，很难看出人类会如何找到这个证明。

定理 3.8。 设 R 是一个环，对所有的 x、$y \in R$都满足 $[x^8 - x, y] = 0$。则 R 是交换的。

证明。我们将直接使用引理 3.1，而不作明确引用。由引理 3.6，$[x^4 + x^2 + x,\ y] = 0$ 对所有 x，$y \in R$均成立，即 $\mathrm{ad}(x)^4 + \mathrm{ad}(x)^2 + \mathrm{ad}(x) = 0$。

首先，对所有 u，$v \in R$，

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}(u)^2 + \mathrm{ad}(v)^2)([u,v]) &= (\mathrm{ad}(u)^2 + \mathrm{ad}([u,v]) + \mathrm{ad}(v)^2)([u,v]) \\
&= (\mathrm{ad}(u)^2 + \mathrm{ad}(u)\mathrm{ad}(v) + \mathrm{ad}(v)\mathrm{ad}(u) + \mathrm{ad}(v)^2)([u,v]) \\
&= (\mathrm{ad}(u) + \mathrm{ad}(v))^2([u,v]) \\
&= \mathrm{ad}(u+v)^2([u,v]) \\
&= \mathrm{ad}(u+v)^2([u+v,v]) \\
&= \mathrm{ad}(u+v)^3(v)\,.
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(u+v)(\mathrm{ad}(u)^2 + \mathrm{ad}(v)^2)([u,v]) &= \mathrm{ad}(u+v)^4(v) \\
&= \mathrm{ad}(u+v)^2(v) + \mathrm{ad}(u+v)(v) \\
&= \mathrm{ad}(u+v)([u+v,v] + v) \\
&= \mathrm{ad}(u+v)(v + [u,v])\,.
\end{aligned}$$

重新整理可得 $\mathrm{ad}(u+v)\mathrm{ad}(v)^2([u,v]) = \mathrm{ad}(u+v)(v + [u,v] + \mathrm{ad}(u)^2([u,v]))$，即，

$$\mathrm{ad}(u+v)\mathrm{ad}(v)^3(u) = \mathrm{ad}(u+v)(v + \mathrm{ad}(u)(v) + \mathrm{ad}(u)^3(v))\,.$$

在这个最后的等式中，将 v 替换为 $[u,v]$，得到

$$[u + [u,v], \mathrm{ad}([u,v])^3(u)] = [u + [u,v], \mathrm{ad}(u)(v) + \mathrm{ad}(u)^2(v) + \mathrm{ad}(u)^4 v] = 0\,. \qquad (6)$$

现在令 $u=[x^2,y^2+y]$ 和 $v=y^2+y$。则

$$\begin{aligned}[u,v]&=\mathrm{ad}(y^2+y)^2(x^2)\\&=(\mathrm{ad}(y)^2+\mathrm{ad}(y))^2(x^2)\\&=(\mathrm{ad}(y)^4+\mathrm{ad}(y)^2)(x^2)\\&=\mathrm{ad}(y)(x^2)\\&=[x^2,y]\,,\end{aligned}$$

以及 $u+[u,v]=[x^2,y^2]$。将这些全部代入（6），得到

$$[[x^2,y^2],\mathrm{ad}([x^2,y])^3([x^2,y^2+y])]=0\,. \tag{7}$$

Now

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}([x^2,y])^3([x^2,y^2+y])&=\mathrm{ad}([x^2,y])^2([[x^2,y],[x^2,y^2]+[x^2,y]])\\&=\mathrm{ad}([x^2,y])^3([x^2,y^2])\\&=\mathrm{ad}([x^2,y])^3\mathrm{ad}(y)^2(x^2)\\&=\mathrm{ad}([x^2,y])^3\mathrm{ad}(y)([x^2,y])\\&=\mathrm{ad}([x^2,y])^3[[x^2,y],y])\\&=\mathrm{ad}([x^2,y])^4(y)\\&=\mathrm{ad}([x^2,y])^2(y)+\mathrm{ad}([x^2,y])(y)\\&=\mathrm{ad}([x^2,y])\mathrm{ad}(y)^2(x^2)+\mathrm{ad}(y)^2(x^2)\\&=[[x^2,y],[x^2,y^2]]+[x^2,y^2]\,.\end{aligned}$$

因此，（7）的左侧可化简为

$$[[x^2,y^2],[[x^2,y],[x^2,y^2]]+[x^2,y^2]]=[[x^2,y^2],[[x^2,y],[x^2,y^2]]=\mathrm{ad}([x^2,y^2])^2([x^2,y])\,.$$

因此，（7）化为

$$\mathrm{ad}([x^2,y^2])^2([x^2,y])=0$$

对于所有 $x,\ y\in R$。根据引理 3.3,

$$0=\mathrm{ad}([x^2,y^2])([x^2,y])=\mathrm{ad}([x^2,y])\mathrm{ad}(y)^2(x^2)=\mathrm{ad}([x^2,y])^2(y)\,.$$

再次根据引理 3.3，$\mathrm{ad}([x^2,y])(y)=0$，也就是说，$\mathrm{ad}(y)^2(x^2)=0$。再次根据引理 3.3，$\mathrm{ad}(y)(x^2)=[x^2,y]=\mathrm{ad}(x)^2(y)=0$。最后一次应用引理 3.3，$[x,y]=0$。因此 R 是交换的。□

References

[1] A. N. Abyzov、P. V. Danchev 和 D. T. Tapkin，《含有 x^n+x x^n-x *J. Algebra* 或幂零元的环》，*Appl.* **22** 2023 1, 2350024, 14（），第 期，论文编号，第 页。[2] D. D. Anderson 和 P. V. Danchev，《关于 Jacobson 周期环相关定理的一则注记》，*Proc. Amer. Math. Soc.* **148** (2020年)，5087–5089。[3] V. A. Andrunakievič 和 Ju. M. Rjabuhin，《无幂零元的环及完全素理想》，*Dokl. Akad. Nauk SSSR* **180** (1968年)，9–11。[4] R. Ayoub 和 C. Ayoub，《论环的交换性》，*Amer. Math. Monthly* **71** (1964年)，267–271。[5] G. Birkhoff，《论抽象代数的结构》，*Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31** (1935年)，433–454。

[6] 2310 05301 M. Brandenburg，《

[7] Jacobson 定理的方程证明》，arxiv: 。S. M. Buckley 和 D. MacHale，《中心化子与环交换性》，*J. Math. Sci. Adv. Appl.* **15** (2012年)，139–161。[8] S. M. Buckley 和 D. MacHale，《主题变奏：满足 $x^3=x$ 的环是交换的》，*Amer. Math. Monthly* **120** (2013年)，430–440。[9] P. M. Cohn，《可逆环》，*Bull. London Math. Soc.* **31**，641–648。[10] S. W. Dolan，《Jacobson 定理的一个证明》，*Canad. Math. Bull.* **19** (1976年)，59–61。

[11] A. Forsythe 和 N. H. McCoy, 《某些环的交换性》, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946年), 523–526。[12] I. N. Herstein, 《Jacobson 定理的推广 III》, *Amer. J. Math.* **75** (1953年), 105–111。[13] M. S. Huzurbazar 和 K. Sivaramakrishnan, 《雅各布森环交换性定理》, *Aligarh Bull. Math.* **1** 1971 9 12 ( ), –。[14] N. Jacobson, 《有界次数代数的结构理论》, *Ann. of Math.* **46** (1945年), 695–707。[15] N. Jacobson, 《雅各布森定理》（第 2 版）, 纽约: W.H. Freeman, 1989年。[16] A. Klein, 《约化环定理的一个简单证明》, *Canad. Math. Bull.* **23** (1980年), 495–496。[17] J. Luh, 《关于 J-环的结构》, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967年), 164–166。[18] J. Luh, 《关于 J-环的交换性》, *Canadian J. Math.* **19** (1967年), 1289–1292。[19] D. MacHale, 《近布尔环 III》, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* **86**A（1986年）, 31–33。[20] W. W. McCune, *Prover9 and Mace4*, 版本 2009-11A。http://www.cs.unm.edu/~mccune/ prover9/ [21] Y. Morita, 《满足 $x^n = x$ *Memoirs Def. Acad.* 的环的交换性的 *Jap.* 1978 1 23 初等证明》, XVIII（ ）, –。[22] T. Nagahara、H. Tominaga, 《韦德伯恩定理和雅各布森定理的初等证明》, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **41** (1974年), 72–74。
[23] 2023 324 327 G. Oman, 《幂等环的刻
[24] 画》, *Glasgow Math. J.* **65** ( ), – R. Padmanabhan 和 Y. Zhang, 《环论中的自动演绎》, 载于: G.M. Greuel、T. Koch、P. Paule、A. Sommese（编）, *Mathematical Software – ICMS 2016*, 《计算机科学讲义》第 9725 卷（2016年）, 施普林格。[25] J. W. Wamsley, 《环交换条件》, *J. Lond. Math. Soc.* **2** (1971年), 331–332。[26] J. J. Wavrik, 《交换性定理: 寻求算法的例子》, *Proceedings of the 1999 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Vancouver, BC)* 31 36 , –。*Association for Computing Machinery (ACM) New York* 1999 , , 。[27] H. Zhang, 《用代数方法自动证明环交换性问题》, *J. Symbolic Comput.* **9** 1990 423 427 ( ), –。

Michael Kinyon 是丹佛大学的数学教授。他的数学研究兴趣包括拟群理论和半群理论, 并尤其热衷于使用自动演绎软件证明定理。

Desmond MacHale是科克大学的数学荣誉教授, 曾在那里任教四十年。他主要的数学兴趣是群和环, 不过也涉猎数论、欧几里得几何、三角不等式、组合几何、问题提出与求解以及数学幽默。他撰写过几本关于乔治·布尔的传记类书籍。

(Kinyon) Department of Mathematics, University of Denver, Denver, CO 80122, USA

(Machale) School of Mathematical Sciences, University College Cork, Cork, T12 XF62,Ireland*E-mail address*, Kinyon: michael.kinyon@du.edu*E-mail address*, Machale: d.machale@ucc.ie