arXiv:2601.12605v1 [math.GT] 18 Jan 2026

关于 3 阶超椭圆 Torelli 群的第二同调

IGOR SPIRIDONOV

摘要。设 s 是闭的、定向的 3 阶曲面 Σ_g 上一个固定的双曲对合。超椭圆 Torelli 群 $\mathcal{SI}_g$ 是映射类群 Mod(Σ_g) 的子群，由在 $H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ 上作用平凡且与 s 交换的元素组成。该群由关于 s-不变分离曲线的 Dehn 扭转生成，其上同调维数为 $g-1$。本文研究顶维同调群 $H_2(\mathcal{SI}_3;\mathbb{Z})$。对于每一对不相交的 s-不变分离曲线，在 $H_2(\mathcal{SI}_3;\mathbb{Z})$ 中都有一个自然关联的阿贝尔循环；我们称这类循环为 简单 阿贝尔循环。我们证明，简单阿贝尔循环与满足一个简单代数条件的、关于交叉形式正交的 $H_1(\Sigma_3;\mathbb{Z})$ 分裂一一对应，并证明这些阿贝尔循环在线性空间 $H_2(\mathcal{SI}_3;\mathbb{Z})$ 中线性无关。

1. 引言

1.1. 超椭圆 Torelli 群。 设 Σ_g 是一个紧致定向亏格 g 曲面。令 Mod(Σ_g) 表示 Σ_g的映射类群，定义为 $\text{Mod}(\Sigma_g)=\pi_0(\text{Homeo}^+(\Sigma_g))$，其中 $\text{Homeo}^+(\Sigma_g)$ 是 Σ_g的保定向同胚群。群 Mod(Σ_g) 作用于 $H=H_1(\Sigma_g,\mathbb{Z})$，并保持代数交叉形式，因此我们有一个表示 $\text{Mod}(\Sigma_g)\to\text{Sp}(2g,\mathbb{Z})$，众所周知，该表示是满射。这个表示的核 $\mathcal{I}_g$ 称为 *Torelli* 群。这可以写成如下短正合序列

$$1\to\mathcal{I}_g\to\text{Mod}(\Sigma_g)\to\text{Sp}(2g,\mathbb{Z})\to 1.$$

设 s 是 Σ_g上的某个固定双曲对合。超椭圆 *Torelli* 群 $\mathcal{SI}_g$是 $\mathcal{I}_g$ 的一个子群，由所有与 s交换的元素组成。注意，任何关于 $\mathcal{SI}_g$的 Dehn 扭转，因此该群包含于 *Johnson* 核 $\mathcal{K}_g$；后者是 $Mod(\Sigma_g)$的一个子群，由关于分离曲线的 Dehn 扭转生成；我们有如下包含链

$$\mathcal{SI}_g\subseteq\mathcal{K}_g\subseteq\mathcal{I}_g\subseteq\text{Mod}(\Sigma_g). \tag{1}$$

此外，Brendle、Margalit 和 Putman 证明了 [7] 该群 $\mathcal{SI}_g$ 由关于 s-不变分离曲线的 Dehntwist 生成。

若 $g=1$ 我们有 $\text{Mod}(\Sigma_1)\cong\text{SL}(2,\mathbb{Z})$，那么群 $\mathcal{SI}_1=\mathcal{K}_1=\mathcal{I}_1=\{\text{id}\}$ 是平凡的。对于 $g=2$，等式 $\mathcal{SI}_2=\mathcal{K}_2=\mathcal{I}_2$仍然成立。McCullough 和 Miller[24] 证明了群 $\mathcal{I}_2$ 不是有限生成的。后来，Mess [25]证明了$\mathcal{I}_2$，因此 $\mathcal{SI}_2$是一个无限生成的自由群。对于 $g\geq 3$，(1) 中的所有包含关系都是严格的。

2010 数学主题分类。20F34（主要）；20F36、57M07、20J05（次要）。1

1.2. 结果。 回顾一下，群 G的上同调维数 cd(G) 是所有满足以下条件的 n 的上确界：存在一个 G-模 M，使得 $H^n(G, M) \neq 0$。2013年，Bren- dle、Childers 和 Margalit [5] 证明了 cd($\mathcal{SI}_g$) $= g - 1$，并指出顶维同调群 $H_{g-1}(\mathcal{SI}_g, \mathbb{Z})$ 不是有限生成的。本文着重研究顶维同调群 $H_2(\mathcal{SI}_3, \mathbb{Z})$ 的结构。

回顾一下，对于群 G 中两两可交换的元素 n $h_1, \ldots, h_n$，可以按如下方式构造一个 阿贝尔循环 $\mathcal{A}(h_1, \ldots, h_n) \in H_n(G, \mathbb{Z})$。考虑同态 $\phi\colon \mathbb{Z}^n \to G$，它将第 i 个因子的生成元映射到 h_i。那么 $\mathcal{A}(h_1, \ldots, h_n) = \phi_*(\mu_n)$，其中 μ_n 是 $H_n(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ 的标准生成元。

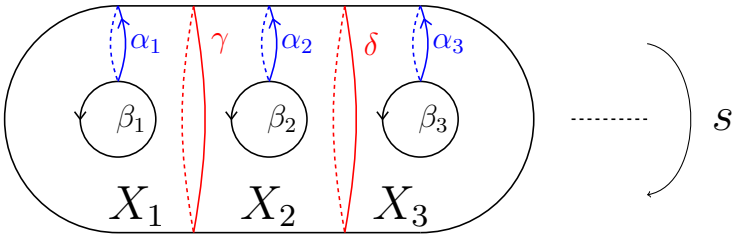


图 1. 曲面 Σ_3、对合 s 以及曲线 α_i 和 β_i。

我们用 T_γ 表示关于曲线 γ 的左 Dehn 扭转。若 γ 和 δ 是 Σ_3 上不相交且不同伦的分离曲线，则称 (γ, δ) 为分离对。若曲线 γ 和 δ 是 s-不变的，则称分离对 (γ, δ) 为对称。图 1 展示了这样一对曲线的例子。若 (γ, δ) 是对称分离对，则 Dehn 扭转 T_γ 和 T_δ 属于 $\mathcal{SI}_3$，且彼此可交换。因此，可以考虑相应的阿贝尔循环 $\mathcal{A}(T_\gamma, T_\delta) \in H_2(\mathcal{SI}_3, \mathbb{Z})$。这类阿贝尔循环称为简单的。根据 Brendle 和 Farb [6] 或 Gaifullin [16] 的结果，可以推得每个简单阿贝尔循环均非零且具有无限阶，见命题 4.1。本文的主要目标是研究群 $H_2(\mathcal{SI}_3, \mathbb{Z})$ 中简单阿贝尔循环之间的关系。

首先，我们应明确描述所有简单阿贝尔循环构成的集合。设 $V_1, V_2, V_3 \subset H = H_1(\Sigma_3, \mathbb{Z})$ 为秩为 2 的子群。若 $H = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$，且子群 V_1, V_2, V_3 关于交叉形式两两正交，则称 (V_1, V_2, V_3) 是 H 的一个正交分解。设 (γ, δ) 为一个分离对。记 X_1，X_2，X_3 为 $\Sigma_3 \setminus \{\gamma, \delta\}$ 的连通分支，如图 1 所示。对于 $i = 1$，记 $H^{X_i} = H_1(X_i, \mathbb{Z}) \subset H$，其中 2、3。于是 $(H^{X_1}, H^{X_2}, H^{X_3})$ 是 H 的一个正交分解；我们称此分解对应于分离对 (γ, δ)。若一个正交分解对应于某个对称分离对 (γ, δ)，则称其为对称的。在第 3 节中，我们证明以下结果。

命题 1.1. 设(γ, δ) 和(γ', δ') 是两个对称分离对，且它们对应的H 的正交分解相同。则(γ, δ) 和(γ', δ') 是 $\mathcal{SI}_3$-等价的。

设 (V_1, V_2, V_3) 是 H 的一个对称正交分解。设 (γ, δ) 是一个对称分离对，使得 (V_1, V_2, V_3) 对应于 (γ, δ)。命题 1.1 表明，所有此类对称分离对在 $\mathcal{SI}_3$ 意义下等价，因此简单阿贝尔循环 $\mathcal{A}_{V_1,V_2,V_3} = \mathcal{A}(T_\gamma, T_\delta) \in H_2(\mathcal{SI}_3, \mathbb{Z})$ 不依赖于曲线 γ 和 δ 的选取，因而定义良好。显然，任何简单阿贝尔循环都具有这种形式，其中 (V_1, V_2, V_3) 是某个对称正交分解。我们还有关系式 $\mathcal{A}_{V_1,V_2,V_3} = -\mathcal{A}_{V_3,V_2,V_1}$。

下一个问题是 H 的哪些正交分解是对称的。为了回答这个问题，我们需要回顾 Sp-二次型的阿尔夫不变量的定义。考虑群 $W \cong \mathbb{Z}^{2n}$，其上带有非退化辛形式 $J(x, y) = x \cdot y$，其行列式为 ± 1。回顾一下，定义在 W 上的 *Sp*-二次型 是一个映射 $\omega : W \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，满足

$$\omega(x \pm y) = \omega(x) + \omega(y) + (x \cdot y \mod 2).$$

阿尔夫不变量 的 ω 为

$$\mathrm{Arf}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega(x_i)\omega(y_i) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

其中，$\{x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n\}$ 是 W的一组辛基。阿尔夫不变量是良定义的，即不依赖于辛基的选取。注意，经典上，Sp-二次型定义在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$上的向量空间上。沿用这种方法，我们称 W 上的 Sp-二次型与 W 上的 Sp-二次型模 2 约化后相同。

令我们将 Σ_3 和 s 分别对应于图 1 所示的曲面和对合。我们还固定图 1 所示的曲线 α_i和 β_i，其中 $i = 1$，2，3。同调类$\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3\}$（其中 $a_i = [\alpha_i]$ 和 $b_i = [\beta_i]$）构成 H 的一组辛基。令我们固定 H 上由下式定义的 Sp-二次型 ω_0

$$\omega_0(a_1) = \omega_0(a_3) = \omega_0(b_1) = \omega_0(b_2) = \omega_0(b_3) = 1, \quad \omega_0(a_2) = 0.$$

我们将证明以下结果。

命题 1.2. 设(V_1, V_2, V_3) 是H的一个正交分解。当且仅当满足以下条件时，该分解是对称的。

$$\mathrm{Arf}(\omega_0|_{V_1}) = \mathrm{Arf}(\omega_0|_{V_3}) = 1, \quad \mathrm{Arf}(\omega_0|_{V_2}) = 0. \tag{2}$$

命题 1.1 和 1.2 表明，任意简单阿贝尔循环都具有形式 $\mathcal{A}_{V_1,V_2,V_3}$，其中 (V_1, V_2, V_3) 是 H 的一个正交分解，且满足条件 2。本文的主要结果如下。

定理1.3. 简单阿贝尔循环 $\mathcal{A}_{V_1,V_2,V_3} \in \mathrm{H}_2(\mathcal{SI}_3, \mathbb{Z})$，其中$(V_1, V_2, V_3)$ 遍历满足条件 *(2)* 的 H 的所有正交分解，在对关系 $\mathcal{A}_{V_1,V_2,V_3} = -\mathcal{A}_{V_3,V_1,V_2}$取商后，是$\mathbb{Z}$ 上线性无关的。

用 $\mathcal{A}_3 \subseteq \mathrm{H}_2(\mathcal{SI}_3, \mathbb{Z})$ 表示由所有简单阿贝尔循环生成的子群。下面的问题十分自然。

问题 1.4。 **</style}包含关系 H(，** $\mathbb{Z}$) 是否为严格包含？换言之，是否存在一个同调类属于 $\mathrm{H}_2(\mathcal{SI}_3, \mathbb{Z})$，且不能表示为简单阿贝尔循环的线性组合?

1.3. 历史。 群 Mod(Σ_g)、 $\mathcal{I}_g$ 和 $\mathcal{SI}_g$ 也以如下方式出现在代数几何中。假设 $g \geq 2$。回顾一下，*Teichmüller* 空间 Teich$_g$ 是复结构（或等价地，双曲度量）的模空间，定义在 Σ_g上。这个空间是可缩的；此外，我们有一个同胚 $\mathrm{Teich}_g \cong \mathbb{R}^{6g-6}$。Mod($\Sigma_g$) 对 Teich$_g$ 的自然作用具有有限稳定子，而商空间 $\mathcal{M}_g$ =Teich$_g$/Mod(Σ_g) 是光滑复曲线的模空间 。从拓扑角度看， $\mathcal{M}_g$ 是一个复轨形。 $\mathcal{I}_g$ 在 Teichmüller 空间上的作用是自由的，因此商空间 $\mathcal{T}_g = \mathrm{Teich}_g/\mathcal{I}_g$ 是一个流形；它称为*Torelli* 空间。它是带有同调标架的光滑复曲线的模空间，即带有一个

H 中固定的辛基。Torelli 空间是 Torelli 群的埃伦伯格–麦克莱恩空间：我们有 $H^*(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z}) \cong H^*(\mathcal{T}_g, \mathbb{Z})$。这些上同调群也可以解释为同调平凡曲面丛的特征类集合。记 $\mathfrak{h}_g$ 为西格尔上半空间。回顾一下，存在定义良好的周期映射$\mathcal{T}_g \to \mathfrak{h}_g$；在 $g \geq 3$ 的情况下，它是映到其像上的二重分支覆盖（如果 $g = 2$，则周期映射是一个嵌入）。对于 $g \geq 3$，周期映射的分支轨迹是 $\mathcal{T}_g$ 的一个子空间，由经自然映射 $\mathcal{T}_g \to \mathcal{M}_g$投影到超椭圆轨迹的所有点组成。分支轨迹并不连通。然而，其各个分支彼此微分同胚。事实证明，这些分支中的每一个都是超椭圆 Torelli 群 [19]的埃伦伯格–麦克莱恩空间。

一个自然的问题是研究 $\mathcal{I}_g$、$\mathcal{K}_g$ 和 $\mathcal{SI}_g$的同调。Johnson [21] 明确计算了 Torelli 群的第一同调。2007 年，Bestvina、Bux 和 Margalit [2] 构造了可缩圈复形 $\mathcal{B}_g$，Torelli 群 $\mathcal{I}_g$ 在其上胞腔地作用。利用与此作用相关的谱序列，他们证明该群 $\mathcal{I}_g$ 的上同调维数为 $3g-5$，且顶维同调群 $H^{3g-5}(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z})$ 不是有限生成的。Gaifullin [14] 于 2019 年证明，对于 $2g-3 \leq k \leq 3g-5$，同调群 $H_k(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z})$ 含有一个无限秩自由阿贝尔子群。2023 年，Minahan [26] 证明，对于 $g \geq 51$，向量空间 $H_2(\mathcal{I}_g; \mathbb{Q})$ 的维数有限。2025 年，Minahan 和 Putman [26] 将这一结果推广到 $g \geq 5$，并明确计算了 $g \geq 6$对应的群 $H_2(\mathcal{I}_g; \mathbb{Q})$。

关于 $g = 3$ 情形下 Torelli 群的同调，也有一些结果。Hain [17] 将分层莫尔斯理论应用于周期映射 $\mathcal{T}_3 \to \mathfrak{h}_3$ 的像，计算了超椭圆对合的作用下 $H_*(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z}[1/2])$ 的不变部分。Gaifullin 在 [15] 中取得了一项部分结果，支持如下猜想：$H_2(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$ 不是有限生成的。作者 [30] 显式计算了群 $H_4(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$。

对于 Johnson 核，Bestvina、Bux 和 Margalit [2] 证明了 $\mathcal{K}_g$ 的上同调维数等于 $2g-3$，而 Gaifullin [16] 证明顶维同调群 $H^{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$ 不是有限生成的。作者 [31] 显式计算了由简单阿贝尔循环生成的 $H^{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$ 子群。关于一阶同调，Dimca 和 Papadima [10] 最初证明了对于 $g \geq 4$，$H_1(\mathcal{K}_g, \mathbb{Q})$ 是有限维的。后来，根据 Ershov 和 He [11]，以及 Church、Ershov 和 Putman [8]，的研究可知，对于 $g \geq 4$，群 $\mathcal{K}_g$ 和 $H_1(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$ 均为有限生成的。最后，Gaifullin [12] 证明 $H_1(\mathcal{K}_3, \mathbb{Z})$ 也是有限生成的。

关于 $H_*(\mathcal{SI}_g, \mathbb{Z})$ 的已知结果要少得多。为了研究这些同调群，Brendle、Childers 和 Margalit [5] 于 2013年引入了另一种 CW复形 $\mathcal{SB}_g$，称为对称圈复形，$\mathcal{SI}_g$ 在其上胞腔地作用。借助与 [2]，类似的思路，他们证明了 $\mathrm{cd}(\mathcal{SI}_g) = g-1$，并指出顶维同调群 $H^{g-1}(\mathcal{SI}_g, \mathbb{Z})$ 不是有限生成的。

1.4. 论文结构。在第 2 节中，我们回顾关于对称映射类群和 Birman-Craggs 同态的一些结果。第 3 节给出命题 1.1 和 1.2 的证明。在第 4 节中，我们证明定理1.3；主要方法是利用与 $\mathcal{SI}_3$ 在 $\mathcal{SB}_3$ 上的作用相关联的谱序列。

1.5. 致谢。作者谨向其科研导师 A. Gai- fullin 致以谢意，感谢其对本工作的有益讨论和持续关注。

2. 对称映射类群的预备知识

2.1. Birman-Hilden 定理。 设 $\mathrm{SHomeo}^+(\Sigma_g)$ 为与双曲 involution s 对易的 Σ_g 的保定向同胚所成的群。注意到 s 在 Σ_g上有$2g+2$个不动点，因此商空间 Σ_g/s 是一个带有 $2g+2$ 个锥点的球面。由于锥点集合在 $\mathrm{SHomeo}^+(\Sigma_g)$ 的每个元素作用下均保持不变，我们得到一个短正合序列

$$1 \to \langle s \rangle \to \mathrm{SHomeo}^+(\Sigma_g) \to \mathrm{Homeo}^+(\Sigma_{0,2g+2}) \to 1.$$

定义对称映射类群$\mathrm{SMod}(\Sigma_g)$ 为 $\mathrm{SHomeo}^+(\Sigma_g)$ 的同伦类所成的群（我们不要求同伦保持 s 不变）。Birman-Hilden 定理 [4, 定理 7] 表明存在一个短正合序列

$$1 \to \langle s \rangle \to \mathrm{SMod}(\Sigma_g) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_{0,2g+2}) \to 1, \tag{3}$$

其中，$\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,\,n})$ 表示带有 n 个标记点的球面的映射类群。特别地，这意味着如果 $\mathrm{SHomeo}^+(\Sigma_g)$ 中的两个元素同伦，则它们之间存在保持 s 不变的同伦。显然，我们有 $\mathcal{SI}_g = \mathcal{I}_g \cap \mathrm{SMod}(\Sigma_g)$。

我们还需要描述 $\mathrm{SMod}(\Sigma_g)$ 在辛表示$\rho : \mathrm{Mod}(\Sigma_g) \to \mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z})$ 下的像。考虑对称群 S_{2g+2}，它可以实现为 $\Sigma_{0,\,2g+2}$ 上 $2g+2$ 个标记点的置换群。于是得到以下结果；作者感谢 Will Sawin [29] 指出这一点。

命题 2.1。 [1, 定理 1] 设 $g \geq 3$。则有

$$[\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) : \rho(\mathrm{SMod}(\Sigma_g))] = \frac{|\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})|}{|S_{2g+2}|} = \frac{2^{g^2}\prod_{i=1}^{g}\left(2^{2i}-1\right)}{(2g+2)!}.$$

推论 2.2。 设 $g \geq 3$。则 Σ_g 上双曲 *involutions* 的不同 $\mathcal{I}_g$-轨道数等于

$$\frac{2^{g^2}\prod_{i=1}^{g}\left(2^{2i}-1\right)}{(2g+2)!}.$$

特别地，对于情形 $g=3$，我们恰好得到 36 个不同的 $\mathcal{I}_3$-轨道 .

证明。 固定一个双曲 involution $s \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$。$\Sigma_g$ 上的每个双曲 involution 都与 s共轭，因此双曲 involutions 的集合 $\mathcal{H}_g$ 是一个 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$–共轭类。在共轭作用下， s 的稳定子就是它的中心化子，因此

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Mod}(\Sigma_g)}(s) = \mathrm{SMod}(\Sigma_g),$$

因此我们有一个 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$–等变的对应

$$\mathcal{H}_g \cong \mathrm{Mod}(\Sigma_g)/\mathrm{SMod}(\Sigma_g).$$

$\mathcal{H}_g$ 上的 $\mathcal{I}_g$ 作用对应于 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)/\mathrm{SMod}(\Sigma_g)$ 上 $\mathcal{I}_g$ 的左作用，因此 $\mathcal{I}_g$–轨道集合自然地对应于双陪集集合

$$\mathcal{I}_g \backslash \mathrm{Mod}(\Sigma_g)/\mathrm{SMod}(\Sigma_g).$$

由于 $\mathcal{I}_g \trianglelefteq \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$，该集合与陪集空间 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)/(\mathcal{I}_g\mathrm{SMod}(\Sigma_g))$ 一一对应，因此 $\mathcal{I}_g$–轨道的数量等于

$$[\mathrm{Mod}(\Sigma_g) : \mathcal{I}_g\mathrm{SMod}(\Sigma_g)].$$

利用 $\ker(\rho) = \mathcal{I}_g$，我们有 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)/\mathcal{I}_g \cong \mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z})$，且 $\mathcal{I}_g\mathrm{SMod}(\Sigma_g)$ 在此商中的像等于 $\rho(\mathrm{SMod}(\Sigma_g))$。因此

$$[\mathrm{Mod}(\Sigma_g) : \mathcal{I}_g\mathrm{SMod}(\Sigma_g)] = [\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) : \rho(\mathrm{SMod}(\Sigma_g))].$$

结论由命题 2.1 得出。 □

2.2. **Birman-Craggs 同态**。 给定 $\mathrm{H}_1(\Sigma_g,\mathbb{Z})$ 上的一个 Sp-二次型 ω，满足 $\mathrm{Arf}(\omega)=0$，Birman 和 Craggs [3] 构造了一个同态 $\rho_\omega\colon \mathcal{I}_g\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\widehat{\ }$，称为*Birman-Craggs* 同态。回顾一下，扩张的 *Torelli* 群 $\mathcal{I}_g$ 是通过任意双曲 involution 对 $\mathcal{I}_g$ 作扩张得到的。Gaifullin [13, 定理 1] 证明，一个$\widehat{\ }$Birman-Craggs 同态在群 $\mathcal{I}_g$上有一个自然扩张。此外，他证明了其在双曲 involution 上的取值可以通过一个简单公式显式计算。我们在情形 $g=3$ 以及图 1 所示的对合 s 下给出该公式：

$$\rho_\omega(s)=\sum_{1\le i<j\le 3}\omega(a_i)\omega(b_i)(\omega(a_i)+1)\omega(b_i).$$

回顾一下，$\mathrm{Arf}(\omega)=0$，因此

$$\rho_\omega(s)=$$

$$=\omega(a_1)\omega(b_1)(\omega(a_2)+1)\omega(b_2)+\omega(a_1)\omega(b_1)(\omega(a_3)+1)\omega(b_3)+\omega(a_2)\omega(b_2)(\omega(a_3)+1)\omega(b_3)=$$

$$=\omega(a_1)\omega(b_1)(\omega(a_2)+1)\omega(b_2)+\Big(\omega(a_1)\omega(b_1)+\omega(a_2)\omega(b_2)\Big)(\omega(a_3)+1)\omega(b_3)=$$

$$=\omega(a_1)\omega(b_1)(\omega(a_2)+1)\omega(b_2)+\Big(\mathrm{Arf}(\omega)+\omega(a_3)\omega(b_3)\Big)(\omega(a_3)+1)\omega(b_3)=$$

$$=\omega(a_1)\omega(b_1)(\omega(a_2)+1)\omega(b_2)+\omega(a_3)\omega(b_3)(\omega(a_3)+1)\omega(b_3)=$$

$$=\omega(a_1)\omega(b_1)(\omega(a_2)+1)\omega(b_2).$$

因此我们得到

$$\rho_\omega(s)=\omega(a_1)\omega(b_1)(\omega(a_2)+1)\omega(b_2). \tag{4}$$

公式 (4) 立即推出以下结果。

命题 2.3。对于 Σ_3 上的任意双曲 *involution* s'，存在唯一的 *Sp*-二次型 ω'，定义在 $\mathrm{H}_1(\Sigma_3,\mathbb{Z})$ 上，满足 $\mathrm{Arf}(\omega')=0$，并且满足 $\rho_{\omega'}(s')=1$。

例如，对于图 1 中所示的对合 s，命题 2.3 中的这个 Sp-二次型恰好是 ω_0。

推论 2.4。双曲 *involution* s' 的 $\mathcal{I}_3$-轨道由唯一的 *Sp*-二次型 ω' 唯一确定，该二次型定义在$\mathrm{H}_1(\Sigma_3,\mathbb{Z})$ 上，满足 $\mathrm{Arf}(\omega')=0$，并且满足 $\rho_{\omega'}(s')=1$。

证明。 直接计算可知，$\mathrm{H}_1(\Sigma_3,\mathbb{Z})$ 上恰有 36 个不同的 Sp-二次型ω'，且 $\mathrm{Arf}(\omega')=0$。由推论 2.2 可知，Σ_3 上双曲 involution 的$\mathcal{I}_3$-轨道恰有 36 个不同的，因此由命题 2.3 可得结论。□

3. 简单阿贝尔循环的分类

本节的主要目标是证明命题 1.1 和 1.2。首先，我们需要证明一些辅助结果。从现在起，在本文余下部分中，我们将 $\mathrm{H}=\mathrm{H}_1(\Sigma_3,\mathbb{Z})$ 记为。

3.1. 精细欧几里得算法。考虑群 $\mathbb{Z}^2 = \langle a,\ b\rangle$，其辛形式由以下矩阵给出

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

考虑 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 的标准生成元

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

下面的引理是欧几里得算法的一个简单推论。

引理 3.1。 设 (a', b') 是 $\mathbb{Z}^2$ 的任意辛基。那么 (a', b') 与 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 等价于 (a, b)。

证明。 考虑矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

其中 $a' = x_1a + x_2b$ 和 $b' = y_1a + y_2b$。由于 (a', b') 是一个辛基，因此 $\det(X) = 1$。因此 $\gcd(x_1, y_1) = 1$。

我们需要通过从左侧作用的矩阵$R_1,\ R_2 \in \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$将 X 变换为单位矩阵 E，也就是对 X的各行应用标准欧几里得算法。由于$\gcd(x_1,\ y_1) = 1$，因此存在 $D \in \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$使得 $D(x_1,\ y_1)^T = (1,\ 0)^T$。由于$\det(X) = 1$，于是

$$DX = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

最后，我们得到$R_2^{-z}DX = E$。这就证明了该引理。 □

在 $\mathbb{Z}^2$ 上定义一个Sp-二次型 ν，使得 $\nu(a) = 0$以及 $\nu(b) = 1$。考虑子群 $G = \langle R_1^2,\ R_2\rangle \subset \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$。

我们证明引理 3.1的以下修正形式。

引理 3.2。 设（a'、b'）是 $\mathbb{Z}^2$ 的一个满足 ν（a'）$= 0$ 且 ν（b'）$= 1$的辛基。那么（a'、b'）与（a、b）G-等价。

证明。 与引理 3.1 的证明中一样，考虑矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

其中 $a' = x_1a + x_2b$ 和 $b' = y_1a + y_2b$。由于 (a', b') 是辛基，因此 $\det(X) = 1$，所以 $\gcd(x_1, y_1) = 1$。我们有

$$1 = \nu(b') = \nu(y_1a + y_2b) = (y_2 + y_1y_2 \mod 2) = ((y_1 + 1)y_2 \mod 2).$$

因此，y_1 是偶数，y_2 是奇数。

我们需要通过从左侧作用矩阵$R_1^2, R_2 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，将 X 变换为单位矩阵 E。我们应用以下“精细欧几里得算法”，该算法由重复执行以下步骤组成。

- 若 $y_1 = 0$，则停止，
- 若 $y_1 \neq 0$ 且 $|x_1| > |y_1|$，则应用 $R^{-}{}^{2}_{\text{sign}(x_1y_1)}$，
- 如果 $y_1 \neq 0$ 且 $|x_1| < |y_1|$，则应用 $R^{-2}{}_{\text{符号}(x_1y_1)}{}^{1}$。

首先，我们声称该算法定义良好。事实上，在每次迭代中，y_1 是偶数，y_2 是奇数，即 $\nu(y_1a + y_2b) = 1$。因此，情况 $|x_1| = |y_1|$ 不可能发生，因为 y_1 是偶数，且 $\det(X) = 1$。注意，$x_1 = 0$ 也不可能发生。

我们还声称该算法会在有限次迭代后停止。这是因为数值 $|x_1| + |y_1|$ 在每一步都严格递减，而我们有 $x_1 \neq 0$、$y_1 \neq 0$ 和 $|x_1| \neq |y_1|$。

此算法停止后，我们得到一个矩阵

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad X'' = \begin{pmatrix} -1 & z \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

在第一种情况下，我们有 $R_2^{-z} X' = E$。在第二种情况下，我们有

$$R_1^{-2} X'' = \begin{pmatrix} -1 & z \\ 2 & -1-2z \end{pmatrix}, \; R_2 R_1^{-2} X'' = \begin{pmatrix} 1 & -1-z \\ 2 & -1-2z \end{pmatrix},$$

$$R_1^{-2} R_2 R_1^{-2} X'' = \begin{pmatrix} 1 & -1-z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此 $R_2^{z+1} R_1^{-2} R_2 R_1^{-2} X'' = E$。这就证明了引理。 □

3.2. **命题 1.1 的证明**。 首先，我们证明下面的陈述。

引理 3.3。 设(γ, δ)和(γ', δ')是两个对称分离对。那么(γ, δ)和(γ', δ') 是$\mathrm{SMod}(\Sigma_3)$-等价的。

~ ~证明。记曲线 γ、 γ'、 δ 和 δ' 在投影 $\Sigma_3 \to \Sigma_3/s$ 下的像分别为 $\widetilde{\gamma}$、$\widetilde{\gamma}'$、 δ 和 δ' 。我们可以假设这些曲线不包含锥点，因此可以将它们视为 $\Sigma_{0,8}$ 上的曲线。考虑 $\Sigma_{0,8} \setminus \{\widetilde{\gamma}, \delta\}$ 的连通分支的闭包。其中两个是带有 3 个穿孔和一个边界分量的球面。第三个是带有 2 个穿孔和 2 个边界分量的球面。$\widetilde{\Sigma}_{0,8} \setminus \{\widetilde{\gamma}', \delta'\}$ 的连通分支的闭包也具有相同性质。因此，~ ~对 $(\widetilde{\gamma}, \delta)$ 和 $(\widetilde{\gamma}', \delta')$ 在 $\mathbf{Mod}(\Sigma_{0,8})$ 下等价。由 3 的正合性可知，(γ, δ) 和 (γ', δ') 在 $\mathbf{SMod}(\Sigma_3)$ 下等价。□

命题 *1.1* 的证明。 引理 3.3 表明，存在 $\phi \in \mathbf{SMod}(\Sigma_3)$，使得$\phi(\gamma') = \gamma$ 且 $\phi(\delta') = \delta$。引理 3.3 还表明，不失一般性，我们可以假设曲线 γ 和 δ 如图 1 所示。记 X_1、X_2 和 X_3 为图 1 所示的 $\Sigma_3 \setminus \{\gamma, \delta\}$ 的连通分支。我们有 $V_i = \mathbf{H}_1(X_i, \mathbb{Z})$。子群 $V_i \subset \mathbf{H}$ 是 ϕ-不变的。

考虑子群

$$K_1 = \langle T_{\alpha_1}, T_{\beta_1} \rangle \subset \mathrm{SMod}(\Sigma_3),$$
$$K_2 = \left\langle T_{\alpha_2} T_{s(\alpha_2)}, T_{\beta_2} \right\rangle \subset \mathrm{SMod}(\Sigma_3),$$
$$K_3 = \langle T_{\alpha_3}, T_{\beta_3} \rangle \subset \mathrm{SMod}(\Sigma_3).$$

对于每个 $i = 1, 2, 3$，群 K_i 作用于 $V_i \cong \mathbb{Z}^2 = \langle a_i, b_i \rangle$，因此我们有同态 $\tau_i \colon K_i \to \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$。我们有

$$\tau_1(T_{\alpha_1}) = R_1, \quad \tau_1(T_{\beta_1}) = R_2,$$
$$\tau_2(T_{\alpha_2} T_{s(\alpha_2)}) = R_1^2, \quad \tau_2(T_{\beta_2}) = R_2,$$
$$\tau_3(T_{\alpha_3}) = R_1, \quad \tau_3(T_{\beta_3}) = R_2.$$

我们得到 $\tau_1(K_1) = \tau_3(K_3) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ 和 $\tau_2(K_2) = G$，其中 $G = \langle R_1^2, R_2 \rangle \subset \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$。

注意，$([\phi(\alpha_1)],\ [\phi(\beta_1)])$ 是 V_1 的辛基。因此，引理 3.1 表明存在 $A_1 \in \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$，使得 $A_1[\phi(\alpha_1)] = a_1$ 和 $A_1[\phi(\beta_1)] = b_1$。选取$\psi_1 \in K_1$ 使得 $\tau_1(\psi_1) = A_1$。

类似地，存在 $A_3 \in \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$，使得 $A_3[\phi(\alpha_3)] = a_3$ 且 $A_3[\phi(\beta_3)] = b_3$。选取 $\psi_3 \in K_3$ 使得 $\tau_3(\psi_3) = A_3$。

最后，$([\phi(\alpha_2)],\ [\phi(\beta_2)])$ 是 V_2 的一个辛基。Sp-二次型 $\omega_0|_{V_2}$has 由 $\omega_0(a_2) = 0$ 和 $\omega_0(b_2) = 1$定义。由于 $\phi \in \mathrm{SMod}(\Sigma_3)$，因此$\omega_0([\phi(\alpha_2)]) = 0$且 $\omega_0([\phi(\beta_1)]) = 0$。因此，引理 3.2 蕴含存在$A_2 \in G \subset \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$，使得 $A_2[\phi(\alpha_2)] = a_2$ 且 $A_2[\phi(\beta_2)] = b_2$。选取 $\psi_2 \in K_2$ 使得 $\tau_2(\psi_2) = A_2$。

考虑元素 $\Phi = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \psi_3 \circ \phi \in \mathrm{SMod}(\Sigma_3)$。我们有 $\Phi(a_i) = a_i$ 和$\Phi(b_i) = b_i$，其中 $i = 1,2,3$。因此 $\Phi \in \mathcal{SI}_3$。此外，我们有 $\Phi(\gamma') = \gamma$和 $\Phi(\delta') = \delta$。这就证明了该命题。□

3.3. **命题 1.2 的证明。**

命题 *1.2* 的证明。 从左到右的推论是显然的。事实上，若 (V_1, V_2, V_3) 是与对称分离对 (γ, δ) 相对应的正交对称分解，则我们可以选取 H 的辛基 $\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3\}$，如图 1 所示。于是公式 (4) 推出所需结论。

现在证明另一个推论：若 (V_1, V_2, V_3) 是满足条件 2 的 H 的正交分解，则该分解是对称的。考虑一个分离对 (γ, δ)（不一定是对称的），使得 (V_1, V_2, V_3) 与 (γ, δ) 相对应。然而，存在另一个双曲 involution s'，使得 γ 和 δ 是 s'-不变的，见图 2。

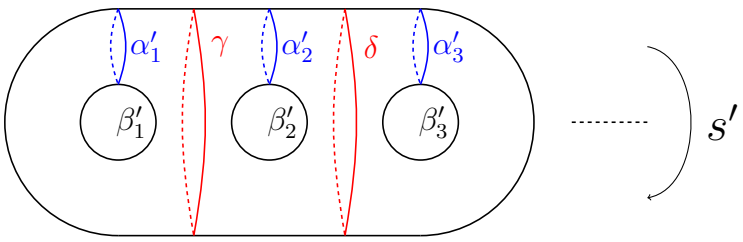


图2。

记 $a'_i = [\alpha'_i]$ 和 $b'_i = [\beta'_i]$。由于 $\mathrm{Arf}(\omega_0|_{V_1})$ =$\mathrm{Arf}(\omega_0|_{V_3})$ = 0，因此

$$\omega_0(a'_1) = \omega_0(b'_1) = \omega_0(a'_3) = \omega_0(b'_3) = 1.$$

此外，由于 $\mathrm{Arf}(\omega_0) = 0$，可能出现以下情况。

(1) $\omega_0(a'_2) = 0,\ \omega_0(b'_2) = 0$。

(2) $\omega_0(a'_2) = 0,\ \omega_0(b'_2) = 1$。

(3) $\omega_0(a'_2) = 1,\ \omega_0(b'_2) = 0$。

我们如下定义 $\mathrm{Mod}(\Sigma_3)$ 中的一个元素 $\phi \in$ 。

在情况 (1) 中，我们定义 $\phi = T_{\alpha'_2}$。在情况

(2) 中，我们定义 $\phi = \mathrm{id}$。在情况 (3) 中，

我们定义 $\phi = T_{\beta'_2} T_{\alpha'_2}$。

考虑对合 $s'' = \phi^{-1} \circ s' \circ \phi$。为了研究它，我们在图 3 中考虑 Σ_3 的嵌入，它与图 2 所示的嵌入相差一个 ϕ^{-1} 的代表元。

我们有 $\alpha''_2 = \phi(\alpha'_2)$ 和 $\beta''_2 = \phi(\beta'_2)$。记 $a''_2 = [\alpha''_2]$ 和 $b''_2 = [\beta''_2]$。直接计算可得，这些同调类如下所示。

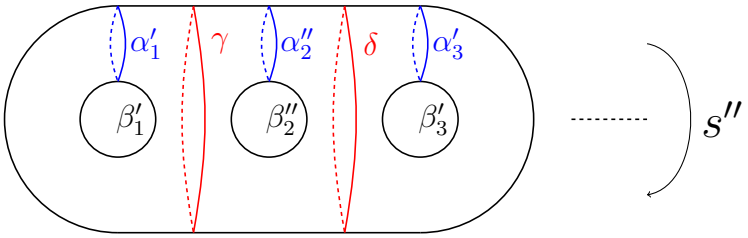


图3。

在情形（1）中，我们有 $a''_2 = a'_2$ 和 $b''_2 = b'_2 + a'_2$。在情形（2）中，我们有 $a''_2 = a'_2$ 和 $b''_2 = b'_2$。在情形（3）中，我们有 $a''_2 = a_2 + b'_2$ 和 $b''_2 = 2b'_2 + a'_2$。

直接计算可得 $\omega_0(a''_2) = 0$ 和 $\omega_0(b''_2) = 1$。公式 (4) 蕴含 $\rho_{\omega_0}(s'') = 1$。因此，由推论 2.4 可知，存在 $h \in \mathcal{SI}_3$ 使得 $h \circ s'' \circ h^{-1} = s$。于是，曲线 $h(\gamma)$ 和 $h(\delta)$ 在 s 作用下保持不变，因此分离对 $(h(\gamma)\ h(\delta))$ 是对称的。由于 $h \in \mathcal{SI}_3$，分裂 $(V_1,\ V_2,\ V_3)$ 对应于 $(h(\gamma)\ h(\delta))$。因此，$(V_1,\ V_2,\ V_3)$ 是对称的。□

4. 线性无关性的证明

本节的主要目标是证明定理1.3。首先，我们需要回顾对称循环复形的构造，该构造由 Brendle、Childers 和 Margalit 在 [5] 中引入。

4.1. 森田同态。 首先证明，每个简单阿贝尔循环$\mathcal{A}_{V_1,V_2,V_3} \in \mathrm{H}_2(\mathcal{SI}_3, \mathbb{Z})$ 都非零且具有无限阶。我们需要回顾森田同态的定义。回忆一下，*Johnson* 核 $\mathcal{K}_g$ 是由所有沿分离曲线的 Dehn 扭转生成的 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 的子群。由于群 $\mathcal{SI}_g$ 由沿 s-不变分离曲线 [7], 的 Dehn 扭转生成，因此它包含于 $\mathcal{K}_g$。

回顾森田同态 $\mathcal{K}_g \to \mathbb{Z}$ 的构造（见 [22, 23]）。对于定向同调3-球面 N，记 $\lambda(N) \in \mathbb{Z}$ 为 N 的 Casson不变量（见[28]）。设 $\sigma : \Sigma_g \hookrightarrow N$ 是一个 Heegaard嵌入。记 V_+ 和 V_- 为 $N \setminus f(\Sigma_g)$ 的连通分支，使得由 Σ_g 和 V_+ 的定向诱导的 $f(\Sigma_g) = \partial V_+$的定向一致。于是我们得到 Seifert双线性型

$$l_\sigma : \mathrm{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \times \mathrm{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

定义为

$$l_\sigma(x, y) = \mathrm{lk}(\sigma_*(x), \sigma_*(y)^+),$$

其中，$\sigma_*(y)^+$ 是将 $\sigma_*(y)$推入 V_- 中得到的，$\mathrm{lk}(\cdot,\ \cdot)$是链接数。我们有

$$l_\sigma(y, x) = l_\sigma(x, y) + x \cdot y.$$

对于 $h \in \mathcal{K}_g$，记由沿着 $\sigma(\Sigma_g)$ 通过映射 $\sigma^{-1} \circ h \circ \sigma$将 V_+ 与 V_-粘合所得的同调3-球面为 N_h。Morita [23, 定理2.2] 证明了，映射λ_σ：$\mathcal{K}_g \to \mathbb{Z}$ 由 $\lambda_\sigma(h) = \lambda(N_h) - \lambda(N)$ 给出，是一个良定义的群同态。此外，如果 γ 是 Σ_g上的一条分离曲线，则 $\lambda_\sigma(T_\gamma)$ 可以显式计算。

我们在 $g=3$的情形下给出这一公式。令 $\{a,b\}$ 为由 γ界定的亏格一分支的第一同调群的一组辛基。于是

$$\lambda_\sigma(T_\gamma)=(l_\sigma(a,a)l_\sigma(b,b)-l_\sigma(a,b)l_\sigma(b,a)). \tag{5}$$

命题 4.1。 每个简单阿贝尔循环 $\mathcal{A}_{V_1,\ V_2,\ V_3}\in \mathrm{H}_2(\mathcal{SI}_3、\ \mathbb{Z})$ 均非零且具有无限阶。

证明。 我们将证明，对于任意两条非同伦不相交分隔曲线 γ 和 δ，在Σ_3 上的阿贝尔循环 $\mathcal{A}(T_\gamma,\ T_\delta)\ \in \mathrm{H}_2(\mathcal{K}_3,\ \mathbb{Z})$均非零且具有无限阶。我们将使用森田同态，并遵循 [6] 和 [16]的思想。

令 $\sigma:\ \Sigma_3\hookrightarrow S^3$ 为标准嵌入，并令 $\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3\}$ 为图 1 中所示的 H 的辛基（在此情形下， V_+ 位于 Σ_3内部）。于是我们有

$$l_\sigma(a_i,a_j)=l_\sigma(b_i,b_j)=l_\sigma(a_i,b_j)=0\ \text{ for all }\ 1\le i,j\le 3,$$

$$l_\sigma(b_i,a_i)=1\ \text{ for all }\ 1\le i\le 3,$$

$$l_\sigma(b_i,a_j)=0\quad \text{for all }\ i\ne j\ \text{ and }\ 1\le i,j\le 3.$$

以下思路取自 Gaifullin 的论文 [16] 。考虑元素$\phi_1,\ \phi_3\in \mathrm{Mod}(\Sigma_3)$，使得它们在 $\mathrm{Sp}(6,\ \mathbb{Z})$ 中的像 $(\psi_1)_*$ 和 $(\psi_3)_*$ 在标准基 $\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3\}$ 下由以下矩阵给出。

$$(\psi_1)_*=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&0\\1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad (\psi_3)_*=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

对于任意元素 $\phi\in \mathrm{Mod}(\Sigma_3)$，我们有 $l_{\sigma\circ\phi}(x,\ y)=l_\sigma(\phi_*(x)\ \phi_*(y))$。因此，由 (5) 可得

$$\lambda_{\sigma\circ\phi_1}(T_\gamma)=(l_\sigma(a_1+a_2+b_2,a_1+a_2+b_2)l_\sigma(a_1+b_1,a_1+b_1)-$$

$$-l_\sigma(a_1+a_2+b_2,a_1+b_1)l_\sigma(a_1+b_1,a_1+a_2+b_2))=1,$$

$$\lambda_{\sigma\circ\phi_1}(T_\delta)=(l_\sigma(a_3,a_3)l_\sigma(b_3,b_3)-l_\sigma(a_3,b_3)l_\sigma(b_3,a_3))=0,$$

$$\lambda_{\sigma\circ\phi_3}(T_\gamma)=(l_\sigma(a_1,a_1)l_\sigma(b_1,b_1)-l_\sigma(a_1,b_1)l_\sigma(b_1,a_1))=0,$$

$$\lambda_{\sigma\circ\phi_3}(T_\delta)=(l_\sigma(a_2+b_2+a_3,a_2+b_2+a_3)l_\sigma(a_3+b_3,a_3+b_3)-$$

$$-l_\sigma(a_2+b_2+a_3,a_3+b_3)l_\sigma(a_3+b_3,a_2+b_2+a_3))=1.$$

考虑同调类 $\Theta=\lambda_{\sigma\circ\phi_1}\cdot\lambda_{\sigma\circ\phi_3}\in \mathrm{H}^2(\mathcal{K}_3,\ \mathbb{Z})$。我们得到

$$\langle\Theta,\mathcal{A}(T_\gamma,T_\delta)\rangle=-\det\begin{pmatrix}\lambda_{\sigma\circ\phi_1}(T_\gamma)&\lambda_{\sigma\circ\phi_1}(T_\delta)\\\lambda_{\sigma\circ\phi_3}(T_\gamma)&\lambda_{\sigma\circ\phi_3}(T_\delta)\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=-1.$$

这意味着阿贝尔循环 $\mathcal{A}(T_\gamma,\ T_\delta)\in \mathrm{H}_2(\mathcal{K}_3,\ \mathbb{Z})$ 非零且具有无限阶。由于 $\mathcal{SI}_3$ 是 $\mathcal{K}_3$ 的子群，这便推出命题 4.1。□

4.2. 对称圈复形。我们回顾 Brendle、Childers 和 Margalit 在 [5] 中引入的对称圈复形 $\mathcal{SB}_g(x)$ 的构造。对于 Σ_g 上的一条定向曲线 c，我们用 $\overleftarrow{c}$ 表示 c 的反向曲线。我们将 $\mathcal{C}$ 记为 Σ_g 上所有定向非分离简单闭曲线的同伦类所构成的集合。

一个斜对称曲线对 是由一对不相交定向闭曲线组成的 $\{c_1, c_2\}$，位于 Σ_g 上，满足 $s(c_1) = \overleftarrow{c_2}$ 且 $s(c_2) = \overleftarrow{c_1}$。注意，$c_1$ 和 c_2 可以是同伦的，但不能是同调平凡的。一个斜对称多曲线 是由非空的斜对称曲线对组成的集合，其中任意两对彼此不相交且不同伦。

固定一个非零同调类 $x \in \mathrm{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$。$x$ 的一个*1*-圈 是一个有限形式和

$$c = \sum_{i=1}^{n} k_i c_i,$$

其中 $k_i \geq 0$、$c_i \in \mathcal{C}$ 和 $\sum_{i=1}^{n} k_i [c_i] = x$。集合 $\{c_i\}$ 称为 c的支集 。x 的一个基反对称*1*-循环 是一个1-圈

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{2}(c_i + s(\overleftarrow{c_i})),$$

其中支集 $\{c_i, s(\overleftarrow{c_i})\}$ 是一个斜对称多曲线，且同调类 $[c_i]$ 线性无关。

记 $\mathcal{SM}$ 为由 x 的基斜对称圈的支集之并构成的斜对称多曲线的同伦类集合。设 $M = \{c_1, s(\overleftarrow{c_1}) \ldots, c_m, s(\overleftarrow{c_m})\} \in \mathcal{C}$ 是一条斜对称多曲线。考虑一个凸多胞体

$$P_M = \{(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{\mathcal{C}} \mid \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{2}(c_i + s(\overleftarrow{c_i})) \text{ is a skew-symmetric cycle for } x\}.$$

对称圈复形定义如下

$$\mathcal{SB}_g(x) = \bigcup_{M \in \mathcal{SM}} P_M \subset \mathbb{R}^{\mathcal{C}}.$$

记 $\mathcal{SM}_0 \subset \mathcal{SM}$ 为对应于 $\mathcal{SB}_g(x)$. 的 0-胞腔的斜对称多曲线子集。

定理4.2。 [5, 定理2。1] 设 $g \geq 1$，并令 $x \in \mathrm{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ 为任意非零本原元。则 $\mathcal{SB}_g(x)$ 是可缩的。

4.3. CW复形上群作用的谱序列。 设群 G 在可缩的 CW-复形 X 上胞腔地作用，且不含旋转。则存在相应的谱序列（参见 [9, 第七节.7] 中的 (7.7)），其形式为

$$E^1_{p,q} \cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{X}_p} \mathrm{H}_q(\mathrm{Stab}_G(\sigma)) \Rightarrow \mathrm{H}_{p+q}(G, \mathbb{Z}), \tag{6}$$

其中 $\mathcal{X}_p$ 是一个集合，其中包含 X的每个 G-轨道中 p-胞腔的一个代表元 .

现在，令$E^*_{*,*}$ 为作用于某个本原元 $0 \neq x \in \mathrm{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$的 $\mathcal{SB}_g(x)$上的 $\mathcal{SI}_g$ 的作用所对应的谱序列 (6)。由 Ivanov 的结果 [18, 定理 1.2]可知，$\mathcal{SI}_g$ 在 $\mathcal{SB}_g(x)$上的作用没有旋转。Brendle、Childers 和 Margalit 在 [5, 命题 4.12] 中证明，对于每个胞腔 $\sigma \in \mathcal{SB}_g(x)$，有

$$\dim(\sigma) + \mathrm{cd}(\mathrm{Stab}_{\mathcal{SI}_g}(\sigma)) \leq g - 1. \tag{7}$$

这立即推出$E^1_{p,\ q} = 0$ 对于 $p + q > g - 1$。因此，群$E^1_{0,\ g-1}$ 上的所有微分 d^1，d^2，... 都是平凡的，所以$E^1_{0,\ g-1} = E^\infty_{0,\ g-1}$。因此我们得到以下结果。

命题4.3. 设 $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{SM}_0(x)$ 是由来自彼此不同的 $\mathcal{SI}_g$-轨道的斜对称多重曲线组成的子集。那么包含映射稳定子$_{\mathcal{SI}_g}(M) \subseteq \mathcal{SI}_g$，其中 $M \in \mathfrak{M}$，诱导出一个单射同态

$$\bigoplus_{M\in\mathfrak{M}} \mathrm{H}_{g-1}(\mathrm{Stab}_{\mathcal{SI}_g}(M),\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{H}_{g-1}(\mathcal{SI}_g),\mathbb{Z}).$$

4.4. 单 puncture 和双 puncture 环面上的对称曲线。考虑一个带有标记点 p 的环面 $\mathbb{T}$，其上配备了一个稳定 p 的双曲 involution s。为了便于讨论，我们将考虑标记点而非 puncture，因为我们将从无 puncture 环面的同调群出发进行研究。

引理4.4。任意非零本原同调类 $w \in \mathrm{H}_1(\mathbb{T},\mathbb{Z})$ 都可以由一条s-不变的简单闭曲线实现，且该曲线与 p不相交。

证明。设 $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\Gamma$，其中 $\Gamma = 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$。考虑对合 $s\colon (x,y) \mapsto (2-x, 2-y) \bmod \Gamma$ 以及标记点 $p = (1,1) \bmod \Gamma$ 较为方便。任意本原同调类都可以由曲线 $ax + by + c = 0 \bmod 2$ 实现，其中 $a,b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}$ 且 $\gcd(a,b) = 1$。我们断言，这条曲线对称当且仅当 $c = 0 \mod 2$ 或 $c = 1 \mod 2$。事实上，$a(2-x)+b(2-y)+c = -ax-by-c+2a+2b+2c = -(ax+by+c)+2(a+b)+2c = 2c$ 模 2，因为 $2(a+b) = 0$ 模 2。因此我们需要 $2c = 0$ 模 2，这意味着 $c = 0$模 2 或 $c = 1$ 模 2。

如果 $a + b = 1$ 模 2，那么我们取 $c = 0$。让我们验证在这种情况下曲线$ax + by = 0$ 与 p不相交。事实上，如果 $(1,1)$ 满足此方程，那么 $a + b = 0$模 2，这就产生了矛盾。

如果 $a + b = 0$ 模 2，那么我们取 $c = 1$。让我们验证在这种情况下曲线$ax + by = 1$ 与 p 不相交。事实上，如果 $(1,1)$ 满足此方程，那么 $a+b+1 = 1$模 2，这同样是矛盾。□

现在考虑一个带有两个标记点 p和 q的环面 $\mathbb{T}$，其上配备一个双曲 involution s，分别稳定点 p 和 q。选取 $\mathrm{H}_1(\mathbb{T},\mathbb{Z})$ 的一个辛基 $\{e_1, e_2\}$，使得 e_2 可由 $\mathbb{T}$ 上一条与 p 和 q不相交、且在 s作用下不变的简单闭曲线实现。在 $\mathrm{H}_1(\mathbb{T},\mathbb{Z})$ 上定义一个 Sp-二次型 ν，使得 $\nu(e_1) = 0$ 且 $\nu(e_2) = 1$。

引理 4.5。任意非零本原同调类 $w \in \mathrm{H}_1(\mathbb{T},\mathbb{Z})$ 满足 $\nu(y) = 1$，都可由 $\mathbb{T}$ 上一条与 p 和 q不相交、且在 s作用下不变的简单闭曲线实现。

证明。 如引理4.4的证明，令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\Gamma$，其中 $\Gamma = 2\mathbb{Z}\oplus 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$。对合为 $s\colon (x,y) \mapsto (2-x, 2-y) \bmod \Gamma$。现在取 $p = (1,1)$ 和 $q = (1,0)$。我们可以假设 $e_1 = (2,0)$且 $e_2 = (0,2)$。容易验证，曲线 $ax + by + c = 0$ 定义了一个同调类 w，且 $\nu(w) = 1$ 当且仅当 $a = 1$模2且 $b = 0$ 模2。

取 $c = 0$。只需验证在此情形下，定义同调类 w 且满足 $\nu(w) = 1$ 的曲线 $ax + by = 0$ 与 p 不相交，并且 q （我们已在引理4.4的证明中表明，这样的曲线是对称的）。事实上，将$p = (1,1)$和 $q = (1,0)$代入方程 $ax + by = 0$后，我们得到 $a + b = 0$模2且$a = 0$ 模2。 这两个条件都不成立，因为我们有 $a = 1$ 模2且$b = 0$ 模2。□

引理 4.6。任意非零本原同调类 $w \in \mathrm{H}_1(\mathbb{T},\mathbb{Z})$，若满足 $\nu(w) = 0$，则可由 ζ上的一条简单闭曲线表示；该曲线与 p及 q不相交，并且满足 $\zeta \cap s(\zeta) = \varnothing$，且 ζ与 $s(\zeta)$ 在 $\mathbb{T} \setminus \{p,q\}$上不同伦。

证明。设 $\mathbb{T}$、对合 s、点 p, q 以及同调类 e_1, e_2 与引理 4.6 的证明中相同。考虑曲线 ζ，它表示本原同调类w，满足 $\nu(w) = 0$，并由方程 $ax + by + \frac{1}{2} = 0$定义。由于 $s(\zeta)$由方程 $ax + by + \frac{3}{2} = 0$给出，因此 $\zeta \cap s(\zeta) = \varnothing$。此外，$\zeta$ 与 p 及 q不相交。只需验证 ζ 与 $s(\zeta)$不同伦。

由于 w是一个本原元，因此存在 $z \in \mathrm{H}_1(\mathbb{T}, \mathbb{Z})$，使得$(w, z)$是$\mathrm{H}_1(\mathbb{T}, \mathbb{Z})$的一个辛基。令 $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$为一个矩阵，使得 $Ae_1 = w$ 且$Ae_2 = z$。由于 $\nu(w) = 0$，因此 $a = 0$ 模2或 $b = 1$ 模2。于是 A 模2具有以下形式之一：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

考虑由矩阵 A^{-1}给出的 $\mathbb{T}$ 的线性自同构。曲线 $A^{-1}(\zeta)$和 $A^{-1}(s(\zeta))$分别由方程 $y = \frac{1}{2}$ 和 $y = \frac{3}{2}$ 给出。由于 $A = A^{-1}$模2，我们有集合 $\{A^{-1}(p),\ A^{-1}(q)\}$ 与对应于矩阵 (8)的以下集合之一重合：

$$\{(1,1),(1,0)\},\ \ \{(0,1),(1,0)\},\ \ \{(1,0),(1,1)\}.$$

在上述每种情形下，曲线 $A^{-1}(\zeta)$和 $A^{-1}(s(\zeta))$在 $\mathbb{T}\setminus\{A^{-1}(p),\ A^{-1}(q)\}$上不同伦。因此我们得到，$\zeta$和 $s(\zeta)$在 $\mathbb{T} \setminus \{p, q\}$上也不同伦。□

4.5. **定理1.3的证明**。

Proof 定理*1.3*的证明。假设逆命题成立，并考虑一个非平凡关系

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{A}_{V_1^i, V_2^i, V_3^i} = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

其中 $\{(V_1^i,\ V_2^i,\ V_3^i) \mid i = 1,\ \ldots\ldots,\ n\}$ 是 H 的一族正交分解，它们作为无序分解两两不同，并满足条件 (2)。对于每个元素 $x \in \mathrm{H}$，都存在唯一的分解

$$x = x_1^i + x_2^i + x_3^i, \qquad x_j^i \in V_j^i,\ \ i = 1, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, 3.$$

下述结果已在 [16] 中针对任意亏格得到证明。

引理 4.7。 [16, 引理 4.5] 存在一个非零本原同调类 $x \in \mathrm{H}$，使得

(1) 所有同调类 x_j^i均非零，$i = 1$、……、n、 $j = 1$、2、3；*(2)* 若 $1 \le s < t \le n$，则无序集合 $\{x_1^s, x_2^s, x_3^s\}$ 与 $\{x_1^t, x_2^t, x_3^t\}$ 不相同。

选取满足引理 4.7 中条件 (1) 和 (2) 的本原同调类 $x \in \mathrm{H}$。则每个 x_j^i 都可以唯一地写成 $x_j^i = n_j^i a_j^i$，其中 $n_j^i \in \mathbb{N}$ 和$a_j^i \in \mathrm{H}$ 是一个本原同调类。这一陈述也在任意亏格的 [16] 中得到证明。

引理4.8。 [16, 引理4.证明之后。5] 如果 $1 \le s < t \le n$，则无序集合$\{a_1^s, a_2^s, a_3^s\}$ 和 $\{a_1^t, a_2^t, a_3^t\}$ 不相同。

对于每个 i，设 (γ^i, δ^i) 是非对称分离对，使得分裂 (V_1^i, V_2^i, V_3^i) 对应于 (γ^i, δ^i)。令 X_1^i, X_2^i, X_3^i 为 $\Sigma_3 \setminus \{\gamma^i, \delta^i\}$ 的连通分支，使得对于 $j = 1,2,3$，有 $V_j^i = \mathrm{H}_1(X_j^i, \mathbb{Z})$。由于 X_1^i 是单孔环面，因此根据

引理4.4，同调类 a_1^i 可以由 X_1^i 上一条与 γ^i 不相交的曲线 η_1^i 表示。类似地，同调类 a_3^i 可以由 X_3^i 上一条与 δ^i 不相交的曲线 η_3^i 表示。

对于同调类 a_2^i，我们有两种可能性：要么 $\omega_0(a_2^i) = 1$，要么 $\omega_0(a_2^i) = 0$。如果 $\omega_0(a_2^i) = 1$，那么根据引理 4.5 a_2^i，可以在 X_2^i 上找到一条 s-不变的简单闭曲线 η_2^i，使其与 γ^i 和 δ^i 不相交。如果 $\omega_0(a_2^i) = o$，那么根据引理 4.6 a_2^i，可以在 $\mathbb{T}$ 上找到一条与 p 和 q 不相交的简单闭曲线 η_2^i，满足 $\eta_2^i \cap s(\nu_2^i) = \varnothing$，并且 η_2^i 与 $s(\eta_2^i)$ 不同伦。

对于每个 i，考虑由下式定义的 x 的基反对称1-循环

$$C_i = \sum_{i=j}^{3} \frac{n_j}{2}\left(\nu_j^i + s(\overleftarrow{\nu_j^i})\right).$$

记 M^i 为其支集。我们将在下一节证明以下陈述。

现在我们来完成定理1.3的证明。由命题4.3，包含映射 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{SI}_3}(M^i) \hookrightarrow \mathcal{SI}_3$ 诱导出一个单射同态

$$\iota : \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{H}_2(\mathrm{Stab}_{\mathcal{SI}_3}(M^i), \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{H}_2(\mathcal{SI}_3), \mathbb{Z}). \tag{10}$$

由于 $\iota\left(\mathcal{A}(T_{\gamma^i}, T_{\delta^i})\right) = \mathcal{A}_{V_1^i,\ V_2^i,\ V_3^i}$，因此我们的假设 (9) 蕴含

$$\iota(\sum_{i=1}^{n} \lambda \mathcal{A}(T_{\gamma^i}, T_{\delta^i})) = 0.$$

由命题 4.1，我们得到，对于每个 i，同调类

$$\mathcal{A}(T_{\gamma^i}, T_{\delta^i}) \in \mathrm{H}_2(\mathrm{Stab}_{\mathcal{SI}_3}(M^i), \mathbb{Z})$$

非零且具有无限阶，因此 $\lambda_i = 0$ 对所有 $i = 1$，……，n均成立。至此，定理1.3的证明完成。□

参考文献

[1] N. A'Campo，《辫子、单值化与辛群》，《瑞士数学评论》54（1979），318–327。[2] M. Bestvina、K.-U. Bux、D. Margalit，《Torelli 群的维数》，《美国数学学会杂志》23:1（2010），61–105，arXiv:0709.028[3] J. S. Birman、R. Craggs，《3-流形的 μ不变量及闭定向2-流形同胚群的某些结构性质》，《美国数学学会汇刊》237（1978）：283–309。[4] J. S. Birman 和 H. M. Hilden，《关于作为覆盖空间的闭曲面映射类群》，载于《黎曼曲面理论进展》（会议论文集，纽约州石溪，1969），《数学年刊研究》66，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1971，第81–115页。[5] T. Brendle、L. Childers 和 D. Margalit，《超椭圆 Torelli 群的上同调》，《以色列数学杂志》195.2（2013）：613–630。[6] T. Brendle 和 B. Farb，《Birman–Craggs–Johnson 同态与 Torelli 群中的阿贝尔循环》，《数学年刊》338.1（2007）：33–53。[7] T. Brendle、D. Margalit 和 A. Putman，《超椭圆 Torelli 群及 Burau 表示在 $t = -1$处的核的生成元》，《数学发明》200.1（2015）：263–310。[8] T. Church、M. Ershov、A. Putman，《关于 Johnson 滤子的有限生成性》，《欧洲数学学会杂志》24:8（2022），2875–2914；arXiv:1711.04779。[9] K. S. Brown，《群的上同调》，《数学研究生教材》第87卷，Springer-Verlag，纽约，1982。[10]A. Dimca、S. Papadima，《算术群对称性与 Torelli 群的有限性性质》，《数学年刊》177:2（2013），395–423；arXiv:1002.0673。

[11] M. Ershov、S. He，《关于 Johnson 滤子的有限性性质》，《杜克数学杂志》167:9（2018），1713–1759；arXiv:1703.04190。[12] A.A. Gaifullin，《亏格 3 Johnson 核的阿贝尔化及 Out(F_3) 的 Torelli 群换位子子群的有限生成性》，arXiv 预印本 arXiv:2507.20710（2025）。[13] A.A. Gaifullin，《关于 Birman–Craggs–Johnson 同态的一个扩展》，《俄罗斯数学评论》72.6（2017）：1171。[14] A. A. Gaifullin，《关于 Torelli 群的无限生成同调》，《圣彼得堡数学杂志》35.6（2024），第959–993页。[15] A.A. Gaifullin，《关于亏格 3 Torelli 群作用于圈复形的谱序列》，《数学汇报》，2021，85。[16] A.A. Gaifullin，《关于 Johnson 核的顶维同调群》，《莫斯科数学杂志》22:1（2022）[17] R. Hain，《阿贝尔三维簇模空间的有理上同调环》，《数学研究快报》9:4（2002），473–491，arXiv:0203057。[18] N.V. Ivanov，《Teichmüller 模群的子群》，《数学专著译丛》115，美国数学学会，1992，xii+127 页。[19] K. Kordek，《Torelli 空间中超椭圆轨迹的无限拓扑》，《奉献几何学》187.1（2017）：89–105。[20] D. Johnson，《Torelli 群综述》，载于《低维拓扑》（加利福尼亚州旧金山，1981），《当代数学》第20卷，第165–179页，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1983。[21] D. Johnson，《Torelli 群的结构 III：I 的阿贝尔化》，《拓扑学》24:2（1985），127–144。[22] S. Morita，《同调3-球面与曲面丛的特征类的 Casson 不变量 I》，《拓扑学》28:3（1989），305–323。[23] S. Morita，《关于 Torelli 群的结构与 Casson 不变量》，《拓扑学》30:4（1991），603–621。[24] D. McCullough、A. Miller，《亏格 2 Torelli 群不是有限生成的》，《应用拓扑学》22:1（1986），43–49。[25] G. Mess，《亏格 2 和 3 曲面的 Torelli 群》，《拓扑学》31:4（1992），775–790。[26] D. Minahan，《Torelli 群的第二有理同调是有限生成的》（2023），arXiv:2307.07082。[27]D. Minahan 和 A. Putman，《Torelli 群的第二有理同调》（2025），arXiv:2504.00211。[28] N. Saveliev，《3-流形拓扑讲义：Casson 不变量导论》，Walter de Gruyter，柏林—纽约，1999，ix+199页。[29] Will Sawin（https://mathoverflow.net/users/18060/will-sawin），《超椭圆映射类群在整数辛群中的像的指标》，网址（版本：2025-10-23）：https://mathoverflow.net/q/502008[30] I. Spiridonov，《亏格 3 Torelli 群的顶维同调群》，《拓扑学杂志》16(3)（2023），1048–1092。[31] I. Spiridonov，《关于 Johnson 核顶维同调群的结构》，《代数与几何拓扑》24，第7期（2024）：3641–3668。

俄罗斯国立高等经济大学，俄罗斯莫斯科 119048电子邮箱地址：spiridonovia@ya.ru