arXiv:2601.12613v1 [math.CO] 18 Jan 2026

置换的 Eventown结果

Nathan Lindzey
孟菲斯大学数学科学系
nathan.lindzey@memphis.edu

摘要

若置换族 $\mathcal{F} \subseteq S_n$ 对所有 $\sigma, \pi \in \mathcal{F}$ 都满足 $\sigma\pi^{-1}$ 含有一个偶环，则称其为偶圈相交族。我们证明，若 $\mathcal{F} \subseteq S_n$ 是偶圈相交的置换族，则 $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{n-1}$；当 n 是 2 的幂且 $\mathcal{F}$ 是对称群 S_n 的某个 Sylow 2- 子群的双重平移时，等号成立。此结果可视为子集经典 Eventown 问题的一个类比，并证实了 J´anos K¨orner 关于对称群最大反转族的猜想。与此同时，我们证明，对于所有偶数 n，S_n 的典范相交族也是 S_n 的极值奇圈相交族。尽管后一个结果在组合学上的意义较小，其证明运用了一个有趣的新特征标论恒等式，或许本身也值得在《代数组合学》中研究。

1 引言

相交族是域 $\mathcal{X}$ 的子集 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$，其中任意两个元素的交都非空。Erd˝os–Ko–Rado 定理指出，若 $\mathcal{X}$ 是一个含有 n 个元素的集合中所有 k-元子集的集合，那么对于 $k < n/2$，相交族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$ 的大小不超过 $\binom{n-1}{k-1}$；当且仅当 $\mathcal{F}$ 是由所有包含某个固定元素 $i \in \{1, 2, \ldots, n\} =$的 k-元子集构成的族时，等号成立： $[n]$。此后，极值组合学中许多其他开创性成果也相继出现，并归入所谓的$Erd˝os–Ko–Rado$ 组合学范畴（全面介绍请参见 [22] ）。

近年来，对有限群中相交族的研究推动了极值组合学领域的若干有趣发展 [30, 28, 17]。人们研究了多种相交类型（例如， t-相交 [13], 集合相交 [14]、 λ-相交 [8]）。在这些情形中，相交的概念都是依据两个群元素 g{style id='11'>， $h \in G$之间{style id='7'>差 gh^{-1} 的组合性质来定义的。当然，群不仅具有组合结构，因此人们可以尝试通过研究相对于成对代数条件而言具有极值性质的子集，进一步理解群结构。沿着这一思路，我们提出了一种取决于{style id='14'>阶的代数相交概念，并将其建模为下述自然图中的非邻接关系。

定义 1（p-正则图 G）。设 G 为一个有限群，p 为整除 G的阶的素数。若 $g \in G$ 满足 $|g| \not\equiv 0 \bmod p$，则称元素 $g \in G$ 为 p-正则元素。令 $G_{p'} \subseteq G$ 表示其 p-正则元素集合。我们将 p-正则图 $\Gamma_{p'}(G) := \mathrm{Cay}(G, G_{p'} \setminus \{\mathrm{id}\})$定义为由 G 的非恒等 p-正则元素 $G_{p'} \setminus \{\mathrm{id}\}$生成的凯莱图。

若 gh^{-1} 是 p-奇异的，即 $|gh^{-1}| \equiv 0$模 p，则 $g, h \in G$ 在 $\Gamma_{p'}(G)$ 中不相邻。$\Gamma_{p'}(G)$ 的独立集是 G 中两两 p-奇异元素组成的族，我们称之为 G 的（两两）p-奇异族。G 的最大 p-奇异族是 G 中规模最大的 p-奇异族。按照定义，$\Gamma_{p'}(G)$ 的独立数记为 $\alpha(\Gamma_{p'}(G))$，等于 G 的最大 p-奇异族的规模。

由于 $G_{p'}$ 在 G 的共轭作用下封闭，p-正则图是一个正规凯莱图；因此，其特征值由 G 的特征标理论决定（例如参见 [9],）。Erd˝os 和 Tur´an [16] 给出了当 $G = S_n$ 为含有 n 个符号的对称群时，$\Gamma_{p'}(G)$ 的最大特征值（即度）的显式公式。Siemons 和 Zalesski [38] 考察了 $\Gamma_{p'}(G)$ 的补图，即由其 p-奇异元素 $G \setminus G_{p'}$ 生成的凯莱图。他们关注此类图的谱，以及谱与构造具有奇异邻接矩阵的凯莱图这一问题之间的联系。Ebrahimi [12] 也以类似的方式研究了 p-可解群的这一图。

除了是群上的 Erd˝os–Ko–Rado 问题的一种自然变体外，这些问题似乎还与 Sylow 理论有着密切联系，这也正如人们所预期的那样。例如，考虑群 S_n，并令 $p = 2$。若两个置换 σ，π 具有偶圈相交性质，我们就称它们是偶环相交的，即 $\sigma\pi^{-1}$ 含有一个偶环；等价地，$|\sigma\pi^{-1}| \equiv 0$ 模 2。我们的主要结果给出了 S_n 的最大 2-奇异族的大小上界，其中 $n = 2^\ell$。

定理 2 (主要结果)。若 $\mathcal{F} \subseteq S_n$ 是偶环相交的，则对所有 $n \geqslant 2$，都有 $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{n-1}$。当 $\mathcal{F}$ 是一个 *Sylow 2-* 子群且对某个 $\ell \in \mathbb{N}$ 有 $n = 2^\ell$ 时，这个界是紧的。

主要结果推出了子集的事件镇问题的一个对称群类比。若对于每个 $\pi \in \mathcal{F}$，都有 $|\pi| \equiv 0$ 模 2，且对于所有 σ，都有 $|\sigma \cap \pi| \equiv 0$ 模 2，则称一个族 $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ 为事件镇，$\pi \in \mathcal{F}$（例如，参见 [1, 第 1], 章）。为回答 Erd˝os 的一个问题，伯莱坎普 [2] 证明事件镇的最大大小为 $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$；当取所有满足对任意 $1 \leqslant i \leqslant n/2$ 均有 $2i \in S \Leftrightarrow 2i - 1 \in S$ 的子集 $S \in 2^{[n]}$ 时，可以达到等号。我们可以将族 $\mathcal{F} \subseteq S_n$ 定义为事件镇，若对非平凡的 $\pi \in \mathcal{F}$，有 $|\pi| \equiv 0$ 模 2，且对所有 σ，有 $|\sigma\pi^{-1}| \equiv 0$ 模 2，$\pi \in \mathcal{F}$。在这里，大小和交集自然分别由阶和差替代；由此可见，只要 n 是 2 的幂，Sylow 2-子群就是一个大小最大的事件镇。

族 $\mathcal{F} \subseteq S_n$ 是二集合相交 当且仅当对于任意两个置换 σ，$\pi \in \mathcal{F}$，存在 $\{i, j\} \subseteq [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$，使得以下条件之一成立：

$$\sigma(i) = \pi(i) \quad \text{and} \quad \sigma(j) = \pi(j) \tag{1}$$
$$\sigma(i) = \pi(j) \quad \text{and} \quad \sigma(j) = \pi(i)\ . \tag{2}$$

为了回答 K¨orner 的一个问题，Ellis 证明，当 n 充分大时，S_n 中最大的 2-集合相交族是杨子群 $S_{n-2} \times S_2$ 的双重平移。

后来，Meagher 和 Razafimahatratra，以及 Chase、Dafni、Filmus 和 Lindzey [33, 4]证明，这一结论对所有 $n \geqslant 6$ 都成立。

如果我们规定上述条件中仅条件 (1) 成立，那么就意味着该族是*2*-相交族。Ellis、Friedgut 和 Pilpel 证明，当 n 足够大时，S_n 中最大的 2-相交族是杨子群的双重平移。这一结论也被证明对所有 $n \geqslant 5$ [33, 4] 都成立。

K¨orner 探讨了如果规定仅条件 (2) 成立会出现什么情况。在这里，如果对于任意 σ、$\pi \in \mathcal{F}$，条件 (2) 都成立，我们就称族 $\mathcal{F} \subseteq S_n$ 为反转族 。K¨orner 猜想，这样的族的大小不可能超过某个绝对常数 C，并通过取 S_n 的一个最大初等阿贝尔 2-子群，构造了一个大小为 $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 的事件镇型反转族。F¨uredi、Kantor、Monti 和 Sinaimeri [19, 20] 给出了 $8^{\lfloor n/5 \rfloor}$ 的下界，随后 Harcos 和 Solt´esz [24] 将其提高到 $4^{\lfloor n/3 \rfloor}$。F¨uredi 等人 [19, 20] 还研究了置换的无反转族 ，即一类置换族，其中任意一对成员都不满足条件 (2)；他们也提出了确定最大反转族大小的问题。利用无反转族的构造可以导出反转族上界这一事实，Cibulka [6] 改进了 F¨uredi 等人的结果，得到了最大反转族大小的上界 $n^{n/2+O(n/\log_2 n)}$ 。关于围绕 K¨orner 问题的其他组合学研究方向，请参阅 [24, 7, 3]。

由于反转族是偶圈相交的，定理 2 证明了 Ellis [15, 14] 与 $C = 2$交流的 K¨orner 猜想。

定理 3。 [14,猜想 4] 存在一个绝对常数 C ，使得对于任意$n \in \mathbb{N}$， S_n 中的反转族大小至多为 C^n。

值得注意的是，K¨orner 猜想的解决还带来了一些其他组合学推论，详见 [24, §5] 。我们认为定理 2 及其证明颇为出人意料，原因如下。

令 S 为 S_n的所有 Sylow 2-子群的并集。 S中任意元素的阶都是 2 的幂，这一条件比仅仅要求元素是 2-奇异要严格得多。Erd˝os 和 Tur´an [16] 指出，均匀随机抽取 S_n 的一个元素，它是 2-奇异元素的概率至少为 $(1 - 3/\sqrt{n})$。上述结果表明，尽管 2-奇异¯ ¯元素占多数，仍有 $\alpha(\Gamma_{2'}(S_{2^\ell}, S)) = \alpha(\mathrm{Cay}(S_{2^\ell}, S))$，尽管 $\Gamma_{2'}(S_{2^\ell}) \subset \mathrm{Cay}(S_{2^\ell}, S)$ 是一个稀疏得多的图。这种情况可以与 Mantel 定理相比较：看似更严格的禁止奇圈条件，结果与禁止三角形同样严格。

在极值组合学中，如果极值族由所有包含某个子结构的固定副本的对象组成，我们就称这类族为核型，也称为独裁者、联合族以及 Erd˝os–Ko–Rado 组合学中的平凡（典范）相交族。Erd˝os–Ko–Rado 组合学中的一个常见主题是，当 n足够大时，最大的 t-相交族属于核型。特征值方法在这一领域的发展中发挥了尤为关键的作用 [22]。定理 2 是一个罕见的例子：对于极值族并非核型的相交问题，特征值方法得出了精确结果。

对于素数 $p \neq 2$，可以验证，当 n 较小时， S_n 的 Sylow p-子群并不总是最大的 p-奇异族。如果不是因为对称群的 Sylow 2-子群往往具有特殊性质，这或许会令人意外。事实上，近期关于它们性质的研究十分活跃。例如，Diaconis、Giannelli、Guralnick、Law、Navarro、Sambale 和 Spink [10]证明， S_n 中一对随机的 Sylow p-子群几乎总是平凡相交（当 $p \neq 2$ 且 $n \to \infty$时）；而若 $p = 2$，则这类子群对以至少（$1 - \sqrt{e} + o(1)$）的概率非平凡相交。Eberhard [11] 随后给出了相匹配的上界，Renteln [37] 则找到了一个用于计数 S_n的 Sylow p-子群双陪集的高效算法。

在证明主要结果的过程中，我们还指出了双射组合学与特征标理论之间一些可能被忽视的联系。例如，我们证明了一个新的特征标理论恒等式（定理 8），它与 Regev [36, 命题 11], 互为补充，并由此导出了对 S_n极值奇循环相交族的刻画。我们的结果还与 Malle 和 Zalesski [32]最近引入的 Steinberg 型特征标存在一定联系。最后，我们提出了一些猜想、若干未解决问题以及未来工作的方向。

2 预备知识

我们简要概述图的独立数的一些标准界。对于任意图 $X = (V, E)$，众所周知，*Lovász* ϑ-函数 $\vartheta(X)$给出了 X独立数的一个半正定规划松弛：

$$\alpha(X) \leqslant \vartheta(X) = \begin{cases} \min \theta \\ A \succeq 0, \quad A \in \mathrm{Mat}^{n\times n}(\mathbb{R}) \\ A_{i,i} = \theta - 1 \text{ for every } i \in V \\ A_{i,j} = -1 \text{ if } i \not\sim j \ . \end{cases} \tag{3}$$

为了证明定理 2，我们对所有为 2 的幂的 n，求解 S_n 的 2-正则图上的规划（3）（事实上，我们给出了相应谱体的一个整数极点）。

如果 X 是正则图，那么我们可以通过以下 Delsarte–Hoffman 的著名结果，得到 $\vartheta(X)$ 的谱上界。

定理 4 (Delsarte–Hoffman)。 设 A 是一个具有常数行和的正则图 $X = (V、 E)$ 的加权邻接矩阵。设 $\eta_{\max}$ 和 $\eta_{\min}$ 分别是 A 的最大特征值和最小特征值。那么

$$\alpha(X) \leqslant \vartheta(X) \leqslant |V| \left(\frac{-\eta_{\min}}{\eta_{\max} - \eta_{\min}} \right).$$

此外，若等号成立，则 S 的特征向量 $1_S \in \mathbb{R}^V$ 属于 A 中对应于 $\eta_{\max}$ 和 $\eta_{\min}$ 的特征子空间的直和。

如果 $X = \mathrm{Cay}(G, S)$ 是一个正规凯莱图，也就是说，其生成集 $S \subseteq G$ 在共轭作用下封闭，那么根据舒尔引理，我们可以通过计算不可约特征标来确定其特征值（例如，参见 [9], ）。

定理 5. 设 G 是一个有限群，$\{\chi^{(i)}\}_{i=1}^{m}$ 是 G 的不可约特征标集合。那么，正规凯莱图 $X = \mathrm{Cay}(G, S)$ 的邻接矩阵的特征值为

$$\eta^{(i)} = \frac{1}{\chi^{(i)}(1)} \sum_{s \in S} \chi^{(i)}(s) \quad \textit{for all } i = 1, \ldots, m$$

其中 $\eta^{(i)}$ 的重数为 $\chi^{(i)}(1)^2$。

当 G 是交错群时，其特征标可按以下组合方式计算。令 χ^{λ} 表示 S_n 中与形状 $\lambda \vdash n$ 对应的特征标。若一个斜形状 λ/ν 是连通的，且不包含形状 $\boxplus$，则称其为一个边条。边条 λ/ν 的腿长 $ll(\lambda/\nu)$ 等于行数减 1。

定理 6 (Murnaghan–Nakayama)。设 $\sigma \in S_n$ 是一个循环类型为 $\mu \vdash n$ 的置换。设 $\alpha = \alpha_1$、α_2、…、α_ℓ 是 n 的一个整数拆分，即 μ 的任意重排。设 $\alpha' = \alpha_2$、…、α_ℓ 和 $\lambda \vdash n$。则

$$\chi^{\lambda}(\sigma) = \chi^{\lambda}_{\mu} = \chi^{\lambda}_{\alpha} = \sum_{\nu} (-1)^{ll(\lambda/\nu)} \chi^{\nu}_{\alpha'}$$

其中求和遍历所有满足 λ/ν 是由 α_1 个单元格组成的边条的 ν。

令 $G = S_n$, $S = G_{2'} \setminus \{\mathrm{id}\}$，并回顾 $\Gamma_{2'}(S_n) = \mathrm{Cay}(G, S) =: X$。此时证明定理 2 的标准方法，是运用 Murnaghan–Nakayama 规则确定 X 的邻接矩阵的最小特征值，并注意到 Delsarte–Hoffman 界取等号。对于较小的 n，可以通过计算验证这种方法行不通，而且 Delsarte–Hoffman 界实际上对 S_n 的 2-正则图的独立数给出了相当差的界。这促使我们考虑 X 的种种边赋权；难点在于找到一种赋权，使加权邻接矩阵的特征值达到 Delsarte–Hoffman 界的等号情形。我们通过选择 X 的一种边赋权，在这片大海捞针般的搜寻中找到了这根针；这种赋权受到置换上的一个奇特民间双射的启发，而该双射显然与对称群的 Sylow 2-子群有着紧密联系。

3 双射

我们首先回顾一对关于置换的互补恒等式，它们看起来像是民间恒等式。为供后人参考，我们将其记录于此（更多讨论见 [5, 25, 42] ）。第一个恒等式涉及对称群 S_n 中仅含奇圈的元素：

$$n! = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ |\sigma_i| \neq 0 \bmod 2 \ \forall i}} 2^{\#\mathrm{cyc}(\sigma) - 1} \tag{4}$$

其中 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$ 是构成 σ 的各个不相交循环，且 $\#\mathrm{cyc}(\sigma) = m$。为说明这一点，我们按如下方式对 S_n 的置换进行规范排序。首先，将每个循环循环移位

使每个循环中的最大元素都位于首位。接着，按照各不相交循环的首个符号，以升序排列。我们称这样的置换为规范排序的。对于每个仅含奇圈的规范排序的 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m \in S_n$，我们关联任意一个长度为 $m-1$的比特串 $b = b_1b_2\cdots b_{m-1}$。我们将循环与比特交错排列

$$\sigma_1 b_1 \sigma_2 b_2 \cdots \sigma_{m-1} b_{m-1} \sigma_m$$

并按照以下规则从左向右处理它们：如果 $b_i = 1$，则从 σ_i 中移除最后一个符号，并将其放到 σ_{i+1}的末尾；否则，不对 σ_i做任何处理。所得置换 $\pi \in S_n$ 是规范排序的。此外，给定一个规范排序的置换 $\pi \in S_n$，可以逆向执行这一过程，得到唯一一个具有 m 个圈且所有圈长度均为奇数的置换σ，并与唯一一个比特串 $b_1\cdots b_{m-1}$配对。这说明上述过程给出了一个双射，因此方程（4）成立。

对于仅由偶环组成的 S_n 中的元素，只要 n 为偶数，也有类似的恒等式：

$$n! = \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ |\sigma_i|\equiv 0 \bmod 2 \ \forall i}} 2^{\#\mathrm{cyc}(\sigma)}. \tag{5}$$

双射与之前相同，只不过现在我们为每个循环关联一个比特 e.

方程（4）可以在特征标层面推广。令 $h_{k,\,n} := \chi^{(n-k,1^k)}$，并定义 $H_n := \sum_{k=0}^{n-1} h_{k,\,n}$ 为钩特征之和。下面的定理可由 Murnaghan–Nakayama 规则推出；不过，Regev [36] 最先利用李超代数理论，以更一般的形式证明了该结果。随后，Taylor [39] 利用对称群的斜特征标，给出了 Regev 一般性结果的另一种证明；之后，Wildon [40]利用外代数简短地证明了下述定理。为求完整起见，我们在此给出初等证明，并不声称有任何原创性。

定理 7. 对于所有 $\sigma \in S_n$，我们有

$$H_n(\sigma) = \begin{cases} 2^{\#\mathrm{cyc}(\sigma)-1} & \text{if } \sigma \text{ has no even cycle;} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

的证明　定理 7. 我们对 m:= #cyc(σ)（环的数量）进行归纳。

如果 σ 是一个奇圈，那么根据定理 6，我们有 H_n(σ) = 1。类似地，如果 σ 是一个偶环，那么 H_n(σ) = 0。

假设 $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_m$ 没有偶环，$|\sigma_1| = l$，并且 $\sigma' := \sigma_2\cdots\sigma_m$。定理 6 给出

$$H_n(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{k,n}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{k-l,n-l}(\sigma') + h_{k,n-l}(\sigma')$$

注意到，默认情况下，若 $k < l$，则 $h_{k-l,\,n-l}$(σ') = 0；若 $n-k \leqslant l$，则 $h_{k,\,n-l}$(σ') = 0。由此得到

$$H_n(\sigma) = \sum_{k=l}^{n-1} h_{k-l,n-l}(\sigma') + \sum_{k=0}^{n-l-1} h_{k,n-l}(\sigma') = 2\sum_{j=0}^{n-l-1} h_{j,n-l}(\sigma') = 2H_{n-l}(\sigma') = 2^{\#\mathrm{cyc}(\sigma)-1}$$

其中最后一个等式由归纳法得出。

假设 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m$ 含有一个偶环 σ_1，不失一般性。令 $|\sigma_1| = l$ 和 $\sigma' := \sigma_2, \sigma_3 \cdots, \sigma_m$。由定理 6 可得

$$H_n(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{k,n-l}(\sigma') - h_{k-l,n-l}(\sigma').$$

Sim类似地，这给出 $H_n(\sigma) = H_{n-l}(\sigma') - H_{n-l}(\sigma') = 0$，从而完成证明 f. □

我们尚未发现有先前的工作从特征标层面推广方程（5），因此现在证明与上述定理互补的结果。这里，我们用 $b_{k,\ n} := \chi^{(n-k,k)}$ 表示一个两行特征标，并令 $B_n := \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k b_{k,\ n}$。

定理 8。 设 n 为偶数。对于所有 $\sigma \in S_n$，我们有

$$B_n(\sigma) = \begin{cases} 2^{\#\mathrm{cyc}(\sigma)} & \textit{if } \sigma \textit{ has no odd cycle;} \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 我们对 $m := \#\mathrm{cyc}(\sigma)$（环的数量）使用归纳法。令 σ 为一个偶环。由定理 6 可得

$$B_n(\sigma) = b_{0,n}(\sigma) - b_{1,n}(\sigma) + \sum_{k=2}^{n/2-2} b_{k,n}(\sigma) = 1 - (-1) + 0 = 2.$$

假设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2, \cdots, \sigma_m$ 没有奇圈，且 $m \geqslant 2$。不失一般性，令 $|\sigma_1| = l \leqslant n/2$，并令 $\sigma' := \sigma_2 \cdots, \sigma_m$。

对于 B_n 中满足 $l \leqslant n - 2k$ 的每个求和项 $(-1)^k b_{k,n}$，从第一行移去 l 个单元格，得到 $b_{k,n-l}$。这产生一个腿长为 0 的边钩，总贡献为 $B_{n-l}(\sigma')$。对于 B_n 中满足 $l \leqslant k$ 的每个求和项 $(-1)^k b_{k,n}$，从第二行移去 l 个单元格，得到 $b_{k-l,n-l}$。这产生一个腿长为 0 的边钩，进而得到贡献

$$\sum_{k=0}^{n/2-l} (-1)^k b_{k,n-l}(\sigma').$$

唯一剩下需要考虑的边钩是腿长为 1 的边钩。允许存在此类边钩的形状是满足 $n - 2k + 2 \leqslant l$ 的 $b_{k,n}$'s。由于腿长为 1，移去边钩后，B_n 中的每个此类求和项 $(-1)^k b_{k,n}$ 都会给出 $(-1)^{k+1} b_{k',n-l}$，其中某个 $k' \neq k$ 模 2。特别地，我们得到的总贡献为

$$\sum_{k=n/2-l+1}^{(n-l)/2} (-1)^k b_{k,n-l}(\sigma').$$

将这三种情况相加，便得到 $2B_{n-l}(\sigma') = 2^m$，由归纳法可证。

假设 $\sigma = \sigma_1\sigma_2, \cdots, \sigma_m$ 含有一个奇圈 σ_1。由于 n 为偶数，因此有 $l := |\sigma_1| \leqslant n/2$。令 $\sigma' := \sigma_2 \cdots, \sigma_m$。类似的论证表明 $B_n(\sigma) = 0$。为方便起见，定义$B'_n(\sigma) := B_n(\sigma) - (-1)^{n/2} b_{n/2,\, n}$。

类似于上述论证，顶行中腿长为 0 的边钩合计贡献 $B'_{n-l}(\sigma')$。但由于 l 是奇数，底行中腿长为 0 的边钩现在合计贡献

$$-\sum_{k=0}^{n/2-l} (-1)^k b_{k,n-l}(\sigma').$$

同样地，其余腿长为 1 的边钩现在贡献

$$-\sum_{k=n/2-l+1}^{(n-l)/2-1} (-1)^k b_{k,n-l}(\sigma').$$

总而言之，这给出 $B'_{n-l}(\sigma') - B'_{n-l}(\sigma') = 0$，正如所需。 □

注意，方程（4）和方程（5）可由正交关系恢复，即 $\langle 1_{S_n},\ H_n\rangle_{S_n} = n! = \langle 1_{S_n},\ B_n\rangle_{S_n}$ 其中 1_{S_n} 表示 S_n的平凡表示。在第4节中，我们利用这些特征标证明定理 2，以及另一个虽不那么令人意外但同样新颖的、关于奇圈相交置换的组合结果。

4 定理 2 的证明

如果一个置换族中的任意两个元素之差含有一个奇圈，我们就称该置换族为奇圈相交的。如果 n为奇数，那么 S_n 本身就是奇圈相交的，因此我们假设 n 为偶数。

定理9。设 n 为偶数。若 $\mathcal{F} \subseteq S_n$ 是奇圈相交的，则 $|\mathcal{F}| \leqslant (n-1)!$。当且仅当 $\mathcal{F}$ 是杨子群 $S_{n-1} \times S_1$ 的双重平移时，等号成立。

证明。设 H_λ 为 $\lambda \vdash n$ 的钩积，并令 $E_\lambda := (H_\lambda^{-1}\chi^\lambda(\sigma\pi^{-1})_{\pi,\sigma})$ 表示到 S_n 上实值函数空间的 λ 同型分量上的正交投影。令 $\mathcal{E}_n \subseteq S_n$ 为不含奇圈的置换集合。任何奇圈相交族都是 Cay$(S_n, \mathcal{E}_n)$ 的独立集。根据定理 8，$n! \times n!$ 矩阵 $\mathrm{EC}_n := \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k H_{b_{k,n}} E_{b_{k,\, n}}$ 是 Cay$(S_n, \mathcal{E}_n)$ 的加权邻接矩阵，且行和为常数。容易验证，$H_{(n)}$ 和 $H_{(n-1,1)}$ 是求和中出现的最大和次大钩积，因此最大特征值为 $n!$，最小特征值为 $-n!/(n-1)$。Delsarte–Hoffman 给出

$$|S| \leqslant n! \frac{n!/(n-1)}{n! + n!/(n-1)} = (n-1)!.$$

杨子群 $S_{n-1} \times S_1$ 都具有一个奇数长度（单元素）循环，因此该界等号成立。后者意味着，任何最大的奇循环相交族的特征向量都属于 (n) 与 $(n-1,\ 1)$ 同型分量的直和。

Ellis、Friedgut 和 Pilpel [13] 证明了，位于该子空间中且含有 $(n-1)!$ 个 1 的唯一二进制向量是 $S_{n-1}\times S_1$ 的双重平移，从而完成了证明。 □

这里的组合结果有些出人意料，因为 EC_n 也是错排图的加权子图，也就是说，它是由其错排生成的 S_n 上的凯莱图。众所周知，其最大独立集是 $S_{n-1}\times S_1$的双重平移（例如参见 [22], ），而且已有研究指出，在取许多自然的共轭封闭子图时，其独立数不会增加（见 [29, 18]）。尽管表面看来如此，前述结果并非集合 [1]的*Oddtown* 问题的类比。

在开始证明定理 2 之前，我们先回顾一些关于对称群 Sylow 2-子群的基本事实。更多细节请读者参见 [37, 41]。根据定义，Sylow p-子群 $P_n\leqslant S_n$ 中每个元素的阶都是 p的幂。对于$p=2$，众所周知， P_n 可以视为由 m棵完全二叉树组成的森林F 的自同构群，这些树有 n 个叶节点，即

$$P_n\cong \mathrm{Aut}(F)\cong \mathrm{Aut}(T_1)\times\cdots\times\mathrm{Aut}(T_m)\subseteq S_n.$$

特别地，写作 $n=2^{h_1}+\cdots+2^{h_m}$，其中 $h_1>\cdots>h_m\geqslant 0$。每个 h_i 表示 T_i的高度，而 $\mathrm{Aut}(T_i)$ 是形如 $C_2\wr\cdots\wr C_2$的 h_i 重迭代绕积，其中 C_2 是阶为 2 的循环群。勒让德公式给出了整除 $n!$ 的最大素数幂中素数 p 的指数；对于 $p=2$，我们得到

$$|P_n|=2^{\sum_{i\geqslant 1}\lfloor n/2^i\rfloor}.$$

当 n 是 2 的幂时，该指数达到最大，设 $n=2^\ell$，此时我们有

$$|P_n|=2^{1+2+\cdots+2^{\ell-1}}=2^{2^\ell-1}=2^{n-1}.$$

我们将上述观察归纳为以下命题。

命题 10. *任意 Sylow 2-子群 $P_n\leqslant S_n$ 都是一个 2-奇异置换族，使得 $|P_n|\leqslant 2^{n-1}$，且当且仅当 n 是 2 的幂时等号成立。*

现在我们可以给出定理 2 的证明了。

定理 2 的证明。 如前所述，设 H_λ 是 $\lambda\vdash n$ 的钩积，并设 $E_\lambda=(H_\lambda^{-1}\chi^\lambda(\sigma\pi^{-1}))_{\pi,\sigma}$ 是到 λ-同型分量的正交投影，该分量属于 S_n 上实值函数空间。定义 $n!\times n!$ 矩阵

$$\mathrm{OC}_n:=\sum_{k=0}^{n-1}H_{h_{k,n}}E_{h_{k,n}}=(\chi^\lambda(\sigma\pi^{-1})_{\pi,\sigma}).$$

定理 2 意味着 $\mathrm{OC}'_n:=\mathrm{OC}_n-2^{n-1}I$ 是 S_n 的具有恒定行和与列和的 2-正则图的加权邻接矩阵。特别地，我们有

$$\mathrm{OC}'_n=\sum_{k=0}^{n-1}(n\cdot(n-k-1)!\cdot k!-2^{n-1})\,E_{h_{k,n}}+\sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \lambda\text{ not a hook}}}-2^{n-1}E_\lambda,$$

因此， -2^{n-1}是最小特征值，而 $n!-2^{n-1}$是 OC_n'的最大特征值。Delsarte–Hoffman 给出

$$|S| \leqslant n! \cdot \frac{2^{n-1}}{n! - 2^{n-1} + 2^{n-1}} = 2^{n-1}.$$

现在设 $n = 2^\ell$，并令 $S = P_n \leqslant S_n$ 为一个 Sylow 2-子群。命题 10 表明，Sylow 2-子群及其双重平移，即某个 σ， $\pi \in S_n$ 的 $\sigma P_n \pi$，是 S_n 的 2-正则图中的最大独立集。证明至此完成。□

现在我们来汇总定理 2 的几个推论。令 $n! \times n!$ 全 1 矩阵为 J，容易看出，当 n 是 2 的幂时，$\mathrm{OC}_n - J$ 是半定规划 (3) 的一个令人惊讶的 整数可行解，且使目标函数达到最小值。由于 $\Gamma_{2'}(S_n)$ 是正规凯莱图，定理 2 和 Schrijver 的一个著名结果表明，当 n 是 2 的幂时，$\vartheta(\Gamma_{2'}(S_n)) = n!/2^{n-1}$。定理 2 的另一个推论是对 Giannelli 关于 Sylow 2-子群的平凡表示的诱导表示结果的一个简明证明（例如，参见 [31, 命题 3.5]）。

推论 11 (Giannelli [21])。设 n 是 *2* 的幂，且 $P_n \leqslant S_n$ 是 S_n的一个 *Sylow 2*-子群。那么， S_n 的非平凡钩形不可约表示不是 S_n 作用于 S_n/P_n的置换表示的不可约成分。

证明。在定理 2 的证明中，Delsarte–Hoffman 界取等；因此，任意 Sylow 2-子群 P_n 的特征向量都与由非平凡钩形所标记的不可约表示的直和正交；也就是说，诱导表示 $1\uparrow_{P_n}^{S_n}$中不含任何非平凡钩形。□

5 Steinberg 型特征标

钩和特征的重要性并未被群论学家忽视，因为它与 $\mathrm{GL}_{n,\,q} := \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$的一个特殊不可约特征标有一些显著的相似之处，该特征标称为斯坦伯格特征标。对于任意特征为 p的有限域 $\mathbb{F}_q$，众所周知，斯坦伯格特征标在 $\mathrm{GL}_{n,\,q}$ 的 p-奇异元上取值为零，且其度等于 $\mathrm{GL}_{n,\,q}$ 的最大 Sylow p-子群的阶（例如参见 [26], ）。在特征 2 下，钩和特征确实模仿了斯坦伯格特征标的性质，这引出了一个问题：对于不同的素数，是否还有其他特征标能映照斯坦伯格特征标的性质？为此，Malle 和 Zalesski [32]提出了以下问题。

定义 12 (Syl$p$-正则、 p-消失、Steinberg 型 [32])。设 G 是一个有限群， p 是一个素数， $S \leqslant G$ 是其 Sylow p-子群。若特征 χ 在其 Sylow p-子群 S 上的限制是 S的正则表示的特征，则称 χ 是 Syl$p$-正则的。此外，若 χ 是p-消失的，即对所有 p-奇异元素 $g \in G$，都有 $\chi(g) = 0$，则称 χ是*Steinberg* 型。

如 [32], 所述，钩和特征 H_n 是关于 $p = 2$的 Steinberg 型特征。不难看出，定理 2 可推广至群的任意 Steinberg 型特征。

定理 13. 若 χ 是群 G的 *Steinberg* 型特征，且相对于某个素数 p和 $\langle \chi, 1\rangle = 1$，则其 *Sylow* p-子群是 G的最大 p-奇异族。

证明。令 $P \leqslant G$ 为 G 的一个 Sylow p-子群。考虑图 $\Gamma_{p'}(G)$，并考虑由 χ 诱导的矩阵 A_χ，即 $(A_\chi)_{\sigma\pi} := \chi(\sigma\pi^{-1})$。由于 χ 是 Steinberg 型的，因此 $\tilde{}$ 可知，$A_\chi := A_\chi - |P|I$ 是 Γ 的加权邻接矩阵。

由于 $\langle \chi, 1\rangle = 1$，$A_\chi$ 的最大特征值为 $|G| - |P|$。由于 $\chi(1) \geqslant \chi(g)$，$A_\chi$ 的最小特征值为 $-|P|$。Delsarte–Hoffman 界给出

$$|S| \leqslant |G| \frac{|P|}{|G| - |P| + |P|} = |P|,$$

因此，p-奇异族 $S \subseteq G$ 的大小不超过 $|P|$。Sylow p-子群是p-奇异的，由此完成证明。□

这提供了一种组合方法，可排除关于 p 且满足附加条件 $\langle \chi, 1\rangle = 1$ 的 Steinberg 型特征标。特别地，若存在一个大于 Sylow p-子群的 p-奇异族，则这类特征标不可能存在。

基于一系列论文，Malle 和 Zalesski [32] 基本上分类了有限单群的 Steinberg 型特征标。对于素数 $p \neq 2$，许多自然的群类并不存在这类特征标；事实上，$n = 2^\ell$（限制在 A_n 上）的钩和特征的存在，正是未能完成全面分类的原因 [32]。Malle 和 Zalesski 将一个未解决问题留了下来：S_n 的 Steinberg 型特征标是否存在于 $p = 2$ 和 $n \neq 2^\ell$。我们注意到，如果进一步要求矩阵属于任意有限群的群共轭类关联方案的 Bose–Mesner 代数，那么半定规划 (3) 就会变成一个线性规划；因此，原则上，对于较小的 n，通过求解一个规模相对较小的整数线性规划，可以判定是否存在满足 $\langle \chi, 1\rangle = 1$ 的 $G = S_n$ 的 Steinberg 型特征标，其中 $p = 2$。就我们的目的而言，我们注意到，整数性约束并非必要。事实上，若存在由不可约特征标构成的锥组合 f，它在 p-奇异元素上取零值，且同时满足 $\langle f, 1\rangle = 1$和 $f(1) = |P|$，则 Sylow p-子群就是 G的最大 p-奇异族。这引出了一个问题：单群是否存在 Steinberg 型特征标的这类松弛形式？我们将此作为一个未解决问题留待后续研究。

当有限群 G 具有一个（不可约的）斯坦伯格特征标 St 时，自然会问这对最大 p-奇异族的大小意味着什么。不难证明，当 q 是 p的幂时，St 为 $\mathrm{GL}_{n,q}$ 的最大 p-奇异族的大小给出了一个非平凡的界。为此，我们还需要另一个与 Lov´asz-ϑ和 Delsarte–Hoffman 不可比的、基于矩阵秩的界。

定理 *14*（*Haemers* [23]）。对于任意图 $X = (V, E)$ 和域 K，若一个 $|V| \times |V|$矩阵 M 的元素属于 K，则称其拟合 X，如果对于所有 $i \in V$ 和 $m_{i,j} = m_{j,i} = 0$，当 $ij \notin E$时都有 $m_{i,i} = 1$。令 $M_K(X)$ 表示所有拟合 X 的 K 上矩阵的集合。那么$\alpha(X) \leqslant \mathcal{H}_K(X) := \min\{\mathrm{rank}_K(M) : M \in M_K(X)\}$。

定理 15. 设 $q = p^a$，其中 p 是某个素数且 $a \in \mathbb{N}$。那么对所有 $n \geqslant 2$，都有

$$\alpha(\Gamma_{p'}(\mathrm{GL}_{n,q})) \leqslant q^{n^2-n} = o(|\mathrm{GL}_{n,q}|).$$

证明. 众所周知，若 g 的阶与 p 互素，则 St 在元素 g 上的特征标值的绝对值等于 g 的中心化子的一个西洛子群的阶；若 g 的阶能被 p 整除，则该绝对值为零（例如见 [26], ）。因此，投影到 St-型分量上的正交投影矩阵 E_{St} 是一个 $|\mathrm{GL}_n(q))| \times |\mathrm{GL}_n(q))|$ 矩阵；将其缩放至对角线元素均为 1 后，它符合图 $\Gamma_{p'}(\mathrm{GL}_n(q))$。斯坦伯格特征标的度等于一个西洛 p-子群的阶，而该子群同构于其幺三角矩阵子群。因此我们有 $\mathrm{St}(1) = q^{\binom{n}{2}}$，这表明 $\mathrm{rank}(E_{\mathrm{St}}) = \chi(1)^2 = q^{n^2-n}$。Haemers 界给出

$$\alpha(\Gamma_{p'}(\mathrm{GL}_n(q))) \leqslant q^{n^2-n} = o(|\mathrm{GL}_n(q)|)$$

对于固定的 q 和 $n \to \infty$。注意 $|\mathrm{GL}_n(q)| = q^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n}(q^i - 1)$ 和 $\prod_{i=1}^{n}(q^i - 1) \approx q^{\binom{n+1}{2}}$。 □

类似的界也适用于具有 Steinberg 表示的其他有限经典群 n.

6 猜想与未来工作

我们的主要结果证明，K¨orner 猜想对于 $C = 2$成立，但我们认为常数 C 可以进一步改进。我们还认为，对于所有 $n \geqslant 2$， S_n 的 Sylow 2-子群恰好是极值族。

猜想 16. 对于所有 $n \geqslant 2$，Sylow 2-子群及其双重平移是 S_n 的极值偶圈相交族。

对于奇素数， p-奇异 S_n 最大族的大小上界尚不明确；但对于有限一般线性群，我们猜想如下。

猜想 17. 设 $p \in \mathbb{N}$ 是素数， q 是 p的幂。那么，Sylow p-子群及其双重平移是 $\mathrm{GL}_{n,q}$ 在所有 $n \geqslant 2$ 下的极值 p- 奇异族。

沿着 Regev 的推广定理 7 [36]的思路，将定理 8 推广到交错群 S_n 的其他表示族，或许会很有意义。利用特征2下钩形 Specht 模与两行 Specht 模之间的联系（例如参见 [27, 34, 35], ），或许可以给出一个类似于 Wildon 的 [40] 的定理 8 证明。

最后，置换是否存在一个有说服力的“奇镇”类比? 例如，满足对于所有 $\pi \in \mathcal{F}$ 都有 $|\pi| \equiv 1$ 模 2，且对于所有 σ都有 $|\sigma\pi^{-1}| \equiv 0$ 模 2 的族 $\mathcal{F} \subseteq S_n$ ，其最大大小是多少, $\pi \in \mathcal{F}$?

致谢

我们感谢 J´anos K¨orner、William Linz 和 Yuval Wigderson，他们提出的宝贵意见改进了本文的表述；也感谢 John Byrne 让我们关注到置换的反转族。

参考文献

[1] L. Babai 和 P. Frankl。《组合学中的线性代数方法及其在几何学和计算机科学中的应用》。芝加哥大学，1992年。[2] E.R. Berlekamp。关于交集具有偶数基数的子集。《加拿大数学公报》，12(4):471–474，1969年。[3] John Byrne 和 Michael Tait。改进偶数圈生成哈密顿路径的上界。《离散数学》，347(10):114107，2024年。[4] Gilad Chase、Neta Dafni、Yuval Filmus 和 Nathan Lindzey。2-相交置换族与完美匹配的唯一性。《代数组合学（已接收）》，2026年。[5] William Y.C. Chen。打破循环：奇数与偶数。《计数组合学与应用》，4(3)，2024年。[6] Josef Cibulka。无逆序置换集的最大规模。《*SIAM*离散数学杂志》，27(1):232–239，2013年。[7]G´erard Cohen、Emanuela Fachini 和 J´anos K¨orner。交锁置换。*SIAM*离散数学杂志，33(3):1662–1668，2019年。[8] Neta Dafni、Yuval Filmus、Noam Lifshitz、Nathan Lindzey 和 Marc Vinyals。对称群及更广范围上的复杂度度量。《组合理论》，2026年。已接受发表。[9] Persi Diaconis。《概率与统计中的群表示》。数理统计学会讲义——专著系列，第11卷。数理统计学会，美国加利福尼亚州海沃德，1988年。[10]Persi Diaconis、Eugenio Giannelli、Robert M. Guralnick、Stacey Law、Gabriel Navarro、Benjamin Sambale 和 Hunter Spink。关于对称群的西洛子群双陪集的数量与大小。《代数杂志》，689:62–86，2026年。[11] Sean Eberhard。对称群中 Sylow 2-子群的交集。《群论杂志》，已接受发表。[12] Mahdi Ebrahimi。有限群的奇异 Cayley 图与 p-块。《代数杂志》，687:477–491，2026年。[13] D. Ellis、E. Friedgut 和 H. Pilpel。置换的相交族。《美国数学会杂志》，24:649–682，2011年。[14] David Ellis。置换的集合相交族。《组合理论杂志 *A*辑》，119(4):825–849，2012年。[15] David Ellis。置换的集合相交族。《*arXiv:1106.0725*》，2019年。[16] Paul Erd˝os 和 Paul Tur´an。关于统计群论的一些问题。II。《匈牙利科学院数学学报》，18:151–163，1967年。

[17]Alena Ernst 和 Kai-Uwe Schmidt. 有限一般线性群的交集定理. 剑桥哲学学会数学会刊, 175(1):129–160, 2023年.[18] Yuval Filmus 和 Nathan Lindzey. 关于“错排图某些正则子图的最大独立集”的注记. 《代数组合论杂志》, 59(3):575–579, 2024年2月.[19] Zoltan F¨uredi, Ida Kantor, Angelo Monti 和 Blerina Sinaimeri. 关于无逆码与置换. 《SIAM离散数学杂志》, 24(3):964–978, 2010年.[20] Zolt´an F¨uredi, Ida Kantor, Angelo Monti 和 Blerina Sinaimeri. 无逆码与置换. 《离散数学电子札记》, 38:383–387, 2011年。第六届欧洲组合学、图论与应用会议，Eu-roComb 2011。[21] Eugenio Giannelli. 对称群的奇数次数特征标. 《伦敦数学学会杂志》, 96(1):1–14, 2017年.[22] C. Godsil 和 K. Meagher. Erd ˝os–Ko–Rado 定理：代数方法. 剑桥高级数学研究. 剑桥大学出版社, 2015年.[23] W.H. Haemers. 关于 Lov´asz 提出的有关图的香农容量的一些问题. 《IEEE信息论汇刊》, 25:231–232, 1979年.[24] Gergely Harcos 和 Daniel Solt´esz. 利用扩张图得到产生偶圈的哈密顿路径的新界. 《组合学》, 40(3):435–454, 2020 年 6 月 .[25] Sam Hopkins. 关于置换的一个双射 . MathOverflow.（版本：2021-12-29）.[26] J. E. Humphreys. 斯坦伯格表示. 《美国数学会通报（新系列）》, 16(2):247–263, 1987年.[27] Zain Ahmed Kapadia. 特征 2 下钩斯佩希特模的子模结构. 博士论文，伦敦玛丽女王大学，2025年.[28] Nathan Keller、Noam Lifshitz、Dor Minzer 和 Ohad Sheinfeld. 关于置换的 t-交叉族. 《数学进展》, 445:109650, 2024年.[29] Cheng Yeaw Ku、Terry Lau 和 Kok Bin Wong. 错排图某些正则子图的最大独立集. 《代数组合论杂志》, 44(1):81–98, 2016年8月.[30] Andrey Kupavskii 和 Dmitrii Zakharov. 禁止交集问题的扩散近似. 《数学进展》, 445:109653, 2024年.[31] Stacey Law 和 Yuji Okitani. 关于复合积与西洛分支系数. 《代数组合学》, 6(2):321–357, 2023年.[32] Gunter Malle 和 Alexandre Zalesski. 有限单群的 Steinberg 型特征标. 《群论杂志》, 23(1):25–78, 2020年.[33] Karen Meagher 和 Andriaherimanana Sarobidy Razafimahatratra. 置换的 2-点相交与 2-集合相交排列的 Erd˝os–Ko– Rado 定理. 《组合学电子杂志》, 28, 2021年10月。

[34] Gwendolen Murphy. 某些 Specht 模的子模结构. 《代数杂志》, 74(2):524–534, 1982年.[35] M. H. Peel. 对称群的钩表示. 《格拉斯哥数学杂志》, 12(2):136–149, 1971年.[36] Amitai Regev. 李超代数与 S_n 的某些特征标. 《以色列数学杂志》, 195(1):31–35, 2013年6月.[37] Paul Renteln. 对称群中西洛双陪集的计数. 《离散数学》, 347(10):114109, 2024 年 .[38] Johannes Siemons 和 Alexandre Zalesski. 关于奇异凯莱图以及单群的消失元素的评论. 《代数组合学杂志》, 50(4):379–401, 2019年12月.[39] Jay Taylor. 关于对称群斜特征标的注记. 《以色列数学杂志》, 221:435–43, 2017年.[40] Mark Wildon. 所有钩特征标之和. Wildon 的博客.[41] Mark Wildon. 对称群的西洛子群. Wildon 的博客.[42] Qiaochu Yuan. 所有圈长度均为奇数的置换与所有圈长度均为偶数的置换. MathOverflow.（版本：2015-05-19）.