arXiv:2601.12620v1 [math.GR] 18 Jan 2026

自由群子群增长率的稠密性——另一种证明

´亚当·蒂´马尔´

2026年1月21日

摘要

我们给出 Louvaris、Wise 和 Yehuda 最近证明的定理的另一种证明： F_r 的有限生成子群的增长率在 $[1, 2r-1]$中稠密。

1 引言

固定秩为 $r \geq 2$ 的自由群 F_r 的自由生成集 S。对于子群 $H \leq F_r$，定义增长函数

$$\gamma_H(n) = \big|\{h \in H : |h|_S \leq n\}\big|,$$

其中 $|\cdot|_S$ 表示相对于 S 的 F_r 中的字长，而 H 的（指数）增长率定义为

$$\omega(H) = \lim_{n\to\infty} \gamma_H(n)^{1/n}.$$

由 Fekete 引理可知，该极限存在。

F_r 相对于自由基的增长率等于 $2r-1$。任意子群 $H \leq F_r$ 的增长率都落在区间 $[1, 2r-1]$ 内。理解该区间内哪些值可作为 F_r 的子群增长率出现，是一个自然的问题；这与子群和图浸入之间的对应关系以及非回溯算子的谱理论密切相关。关于相关结果的概述（包括增长率不稠密的群，即存在“增长间隙”的情形），参见 [6] ；关于有限生成群的凯莱图所关联的若干单调参数（如谱半径、渐近熵、渗流阈值）可能取值的结果，参见 [4] 。

定理 1（Louvaris-Wise-Yehuda， [6]）。 F_r 的有限生成子群的增长率集合在 $[1, 2r-1]$中稠密。

原始证明相当复杂，使用了具有指定的谱行为的图的概率构造，以及关于主特征值的集中性结果。

部分得到支持 由冰岛研究基金资助，资助编号为 239736-051；并由欧洲研究委员会资助，资助编号为 810115-DYNASNET .

本文旨在为该定理提供一个简短而基础的证明。

给定一个 G 度数属于 $\{2,\dots,2r\}$的有限连通图，可以通过选取一个基点、添加环使其成为 $2r$-正则图，然后适当地确定边的方向并用生成元为边标记，将其转化为 F_r 的施莱尔图（例如参见 [1]）。于是，该图上的闭非回溯游走将对应于 F_r中的一个子群的元素，因此，该子群在 F_r 的字度量下的增长率由 G的非回溯矩阵的主特征值（佩龙特征值） $\lambda_1(B_G)$给出。这一简单的约化表明，要证明定理 1，只需找到一族度数属于 $\{2,\dots,2r\}$ 的有限连通图，使得它们的非回溯矩阵的主特征值在 $[1,2r-1]$中稠密即可。这就是 [6]中的定理 3.2。

定理 2 (Louvaris-Wise-Yehuda, [6])。 对于每个 $1<r\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha\in(1,2r-1)$，以及 $\epsilon>0$，都存在一个有限图 G，其度数属于 $\{2,\dots,2r\}$，使得 $|\lambda_1(B_G)-\alpha|<\epsilon$。

如果一棵树 T 是强周期的，就称它为强周期树，当且仅当它是某个有限简单图的万有覆盖。这种树的增长率 $\lim_{n\to\infty}|B_n(T)|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}|S_n(T)|^{1/n}$ 总是存在，其中 $S_n(T)$ 和 $B_n(T)$分别表示以某个固定顶点为中心、半径为 n 的球面和球。 G 的非回溯矩阵的主特征值与 G的万有覆盖的增长率相同（例如，参见 [2]中的引理 6）。因此，该定理等价于：度数属于 $\{2,\dots,2r\}$ 的强周期树的增长率集合在 $[1,2r-1]$中稠密。

2 证明

引理 3. 设 $n\in\mathbb{N}$，且 T 是度至多为 d 的任意强周期树。设 $F\subset E(T)$ 是一组两两距离至少为 $n+1$ 的边。从 T 出发，对 F 中的每条边进行细分（即将其替换为一条长度为 2 的路径），构造 T'。那么，如果 T' 是强周期的，则 $\mathrm{gr}(T')\geq\mathrm{gr}(T)^{\frac{n}{n+1}}$，因此

$$0\leq \mathrm{gr}(T)-\mathrm{gr}(T')\leq \mathrm{gr}(T)(1-\mathrm{gr}(T)^{\frac{-1}{n+1}}).$$

证明。 将顶点集 $V(T')$ 看作由 $V(T)$ 和细分边时引入的新顶点组成。对于每个 $t\in\mathbb{N}$，都有 $V(S_{tn}(T))\subset V(S_{t(n+1)}(T'))$，因此

$$\mathrm{gr}(T')=\lim_{t\to\infty}|S_{t(n+1)}(T')|^{\frac{1}{t(n+1)}}\geq\lim_{t\to\infty}\left(|S_{tn}(T)|^{\frac{1}{tn}}\right)^{\frac{tn}{t(n+1)}}=\mathrm{gr}(T)^{\frac{n}{n+1}}.$$

不等式 $0\leq\mathrm{gr}(T)-\mathrm{gr}(T')$ 可通过直接计算得到，也可由以下事实得出：对每条被细分的边收缩一条边，就能从 T' 得到 T；并且只要每个被收缩顶点的原像集有限，临界渗流概率 $p_c=\frac{1}{\text{分枝数}}=\frac{1}{\text{增长率}}$ 在边收缩下单调递减。（注意，分枝数 br 总是等于 p_c^{-1}；对于 T 和 T' 这样的周期树，它也等于 gr，参见 [5]。）

□

定理 *2* 的证明。 如定理 2 后所述，该命题等价于所有强周期树的增长率构成稠密集。只需证明，对于每个 $K\in\mathbb{N}$和 $(a,\ a+\epsilon)\subset\left((d-1)^{\frac{1}{2K}},\ (d-1)^{\frac{1}{K}}\right)$, $\epsilon>0$，都存在一棵增长率属于 $(a,\ \overline{a}+\epsilon)$ 的强周期树。

固定 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$(d-1)^{\frac{1}{K}} - (d-1)^{\frac{n}{K(n+1)}} = (d-1)^{\frac{1}{K}}(1-(d-1)^{\frac{-1}{K(n+1)}}) < \epsilon.$$

将 d 正则树的每条边替换为长度为 K 的路径，得到一棵强周期树 $\mathcal{T}_K$，其增长率为 $(d-1)^{\frac{1}{K}}$。若 H 是有限图，且 $\mathcal{T}_K$ 是 $\neg H$ 的万有覆盖，先取 H 的一个提升 H'，使其围长至少为 $n+1$。（这样的提升存在，见 [3]。）显然， $\mathcal{T}_K$ 也是 H' 的万有覆盖。现在，取合适的 N，为 H' 的每条边分配颜色集 $\{1,\dots,N\}$ 中一个互不相同的颜色，并通过覆盖映射将这种着色拉回，从而得到 $\mathcal{T}_K$ 的边的一种着色，颜色取自 $\{1,\dots,N\}$，且同色边之间的距离至少为 $n+1$。从 $T^0 := \mathcal{T}_K$ 开始，递归地通过细分 T^{i-1} 中所有颜色为 i 的边来定义 T^i。每个 T^i 都是强周期的，因为它是这样一个有限图的万有覆盖：该有限图由 H' 细分颜色为 $\{1,\dots,i\}$ 的边得到。根据引理，

$$(d-1)^{\frac{1}{K}} = \mathrm{gr}(\mathcal{T}_K) = \mathrm{gr}(T^0) \geq \mathrm{gr}(T^1) \geq \ldots \geq \mathrm{gr}(T^{N-1}) \geq \mathrm{gr}(T^N) = (d-1)^{\frac{1}{2K}},$$

and

$$\mathrm{gr}(T^i) - \mathrm{gr}(T^{i+1}) \leq \mathrm{gr}(T^i)(1-\mathrm{gr}(T^i)^{\frac{-1}{n+1}}) \leq \mathrm{gr}(T^0)(1-\mathrm{gr}(T^0)^{\frac{-1}{n+1}}) \leq (d-1)^{\frac{1}{K}}(1-(d-1)^{\frac{-1}{K(n+1)}}) < \epsilon,$$

其中，第二个不等式源于 $x(1-x^{n+1})^{-1}$ 在 $[1,\infty)$ 上单调递增这一事实。因此，随着 $\mathrm{gr}(T^i)$ 从 $(d-1)^{\frac{1}{K}}$ 变化到 $(d-1)^{\frac{1}{2K}}$，且每次变化都小于 ϵ，必有一个 $\mathrm{gr}(T^i)$ 的值落在 $(a,\ a+\epsilon)$ 内。

□

由定理 2 之前的论证可得定理 1。

参考文献

[1] Cannizzo, J.（2015）。关于不变的 Schreier结构。《L'Enseignement Math´e matique》，60(3)，397-415。[2] Eisner, I., Hoory, S.（2024）。熵与万有覆盖树的增长率。arXiv 预印本 arXiv:2410.10337。[3] G. Exoo, R. Jajcay（2011）。关于电压图提升的围长，《*European Journal of Combi- natorics*》，**32**，4，554–562。[4] Kassabov, M., Pak, I.（2024）。有限生成群的凯莱图上的单调参数。arXiv 预印本 arXiv:2404.10870。[5] Lyons, R., Peres, Y.（2017）。《树与网络上的概率》（第 42 卷）。剑桥大学出版社。[6] Louvaris, M., Wise, D. T., Yehuda, G.（2024）。自由群子群增长率的密度与配置模型的非回溯谱。arXiv 预印本 arXiv:2404.07321。

数学系，科学研究所，冰岛大学，雷克雅未克，冰岛；以及匈牙利布达佩斯的
HUN-REN Alfr´ed R´enyi 数学研究所。madaramit[at]gmail.com