arXiv:2601.12741v1 [cs.PL] 19 Jan 2026

将 Razborov 旗代数作为极值图论证明系统的导论

Gyeongwon Jeong[1], Seonghun Park[2], 和 Hongseok Yang[3]

[1]韩国科学技术院计算机学院，韩国， jgyw0910@kaist.ac.kr[2]韩国科学技术院计算机学院，韩国， hun57@kaist.ac.kr[3]韩国科学技术院计算机学院，韩国， hongseok00@gmail.com

摘要

Razborov 旗代数是推导诱导子图密度之间渐近不等式的强大框架，为极值图论的诸多进展奠定了基础。本综述面向从事逻辑、编程语言、自动化验证和形式化方法研究的计算机科学家，介绍旗代数。我们从逻辑视角探讨旗代数，并以更接近形式逻辑的风格，从语法、语义和证明策略等方面加以阐述。一种常用的证明策略是：先在旗代数的带标记变体中证明不等式，再利用所谓的向下算子，将其传递到原始的无标记情形，从而推导出有效不等式。我们将详细说明这一策略，并指出其传递机制依赖于我们称为伴随对的概念；这一概念让人联想到伽罗瓦连接和范畴伴随，它们常见于自动化验证和编程语言领域的研究中。在此过程中，我们将分析一些有代表性的例子，包括曼特尔定理和关于拉姆齐重数的古德曼界，以展示如何在旗代数框架中以符号形式进行数学论证。

1 引言

Razborov旗代数 [17]是一个用于推理组合结构渐近（即大规模）性质的框架。在极值图论中，许多问题都在问：在满足某些约束（例如禁止某个子图）的所有大图中，固定有限模式（例如一条边、一个三角形或一个诱导圈）的密度最大或最小可能是多少。旗代数将这类问题转化为紧空间上的极限对象优化问题，并提供一种符号演算，用于推导这些有限模式密度之间成立的不等式。

自引入以来，旗代数框架已解决了极值图论中的若干重要问题，并在其他问题上取得了重大进展，其中包括最小三角形密度问题 [18],Erd˝os 五边形问题 [11, 8], 诱导 5 圈密度问题 [2], Tur´án 四面体问题 [19, 1],以及彩虹三角形密度问题 [3]。该框架中的许多关键证明步骤也已实现自动化： Flagmatic [6, 16] 是一种广泛使用的工具，为极值图论中的若干此类结果提供了支持。

本文面向从事逻辑、编程语言、自动化验证和形式化方法的计算机科学家，综述旗代数。虽然已有几篇优秀的旗代数综述 [20, 5, 9],，但它们主要面向数学家，将旗代数介绍为一种符号演算，用于处理熟悉的论证（例如双重计数和柯西–施瓦茨不等式的应用）。它们也着重强调旗代数的代数观点。相比之下，我们采用一种逻辑视角，以语法、语义和证明策略为框架介绍旗代数，风格更接近形式逻辑。我们还指出，一些核心构造（尤其是所谓的向下算子，它关联带标记情形与无标记情形）可以借助类似于伽罗瓦连接、更广义地说范畴伴随的思想来理解——这些概念

经常出现在自动化验证和编程语言领域。本综述文章所阐述的结果，例如引理及其证明，均出自 Razborov 关于旗代数的原始论文 [17]，不过本文采用了略有不同的风格来呈现这些内容，以突出逻辑视角并契合全文的叙述脉络。

本文其余部分安排如下。在本引言的剩余部分中，我们规定全文所使用的一些记号和术语。在第2节中，我们回顾诱导子图密度的概念，并利用它表述极值图论中的典型渐近问题。在第3节中，我们介绍极限图；极限图能够简洁地描述这些问题，并构成旗代数的语义基础。在第4节中，我们将旗代数呈现为一种逻辑系统，该系统包含两类项——密度表达式和断言——并以极限图为基础定义其语义。我们还通过两个例子说明，如何将标准的极值论证表达为该系统中的推导。这两个例子的关键步骤都依赖于一个非平凡不等式。在第5节中，我们描述一种证明此类不等式的策略：结合使用旗代数的带标号变体，以及通过所谓的向下算子将不等式从带标记情形转移到无标记情形的机制。最后，在第6节中，我们讨论旗代数为从事逻辑、编程语言、自动化验证和形式化方法研究的计算机科学家提供的研究机会。

在开始之前，我们先约定一些记号和术语。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们将 $[n]$ 写作集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$。对于集合 X 和非负整数 n，我们将 $\binom{X}{n}$ 写作所有 n 元素子集 X 的集合。在全文中，我们考虑顶点集为 $\mathbb{N}$ 的子集的有限简单无向图 G。这里，简单是指 G 既没有自环（即从某个顶点连向自身的边），也没有重边（即同一对顶点之间多于一条的边）。因此，这样的图 G 在形式上是由一个有限集 $V \subseteq \mathbb{N}$ 和一个集合 $E \subseteq \binom{V}{2}$ 组成的有序对。我们将这些对象简称为图，并用 $\mathcal{G}$ 表示所有图的集合。注意，$\mathcal{G}$ 是可数无穷的。对于图 G，我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示其顶点集和边集，并用 $v(G) \operatorname{def} = |V(G)|$ 和 $e(G) \operatorname{def} = |E(G)|$ 表示它们的基数。对于 $U \subseteq V(G)$，我们用 $G[U]$ 表示由 U 诱导的 G 的子图，即顶点集为 U、边集为 $E(G) \cap \binom{U}{2}$ 的图。我们对常见的图使用标准记号。顶点集为 $[n]$ 的完全图记为 K_n（因此 $E(K_n) = \binom{[n]}{2}$）；具有 n 个顶点的路径记为 P_n（即 $V(P_n) = [n]$ 和 $E(P_n) = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\}$）；具有 n 个顶点的无边图记为 I_n（即 $V(I_n) = [n]$ 和 $E(I_n) = \emptyset$）。

2 诱导子图密度

设 H 和 G 是满足 $v(H) \leq v(G)$ 的图。本综述文章的核心概念是 H 在 G 中的<穿插 id='7'>诱导子图密度，或者简称为 H-密度，定义为

$$p(H, G) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\big[G[\mathbf{U}] \simeq H\big],$$

其中，$\mathbf{U}$ 是从 $V(G)$ 中均匀随机选取的、大小为 $v(H)$ 的子集，$\simeq$ 表示图同构。换言之，$p(H, G)$ 是从 G 中均匀随机选取 $v(H)$ 个顶点后，由这些顶点诱导出一个与 H 同构的子图的概率。例如，如果 $H = K_2$ 和 $G = K_3$，那么 $p(H, G) = 1$，因为 G 中任意两个顶点上的诱导子图都与 H 同构。再例如，如果 $H = K_2$ 和 $G = P_3$，那么 $p(H, G) = \frac{2}{3}$，因为 G 在两个顶点上的三个诱导子图中，恰有两个与 H 同构。按照约定，如果 $v(H) > v(G)$，则令 $p(H, G) = 0$。

许多渐近极值问题都可以用诱导子图密度来表述。一个典型例子是 Turán 型问题的渐近诱导子图版本：给定一个图 H 和一个有限的禁图集合 $\mathcal{F}$，且至少存在一个不含 $\mathcal{F}$ 中任何图的图，求不含 $\mathcal{F}$ 中任何图的大图中 H 的最大可能密度。形式化地说，这个问题要求求出以下值

$$T(H, \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{n \to \infty} \max\{p(H, G) : v(G) = n \text{ and } p(F, G) = 0 \text{ for all } F \in \mathcal{F}\}.$$

当 $H = K_2$ 和 $\mathcal{F} = \{K_3\}$, $T(H, \mathcal{F})$ 是无三角形图的渐近最大边密度，且

曼特尔定理指出 $T(H,\ \mathcal{F}) = 1/2$ [14]。更一般地，当 $H = K_2$ 且 $\mathcal{F} = \{K_{r+1}\}$ 对整数 $r \geq 2$ 成立时，图兰定理给出 $T(H,\ \mathcal{F}) = 1 - \frac{1}{r}$ [21]。

另一个例子是拉姆齐重数问题，它是经典Ramsey数问题的一种计数类比。形式上，对于整数 $s, t \geq 2$，该问题要求求出

$$M(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{n\to\infty} \min\{p(K_s, G) + p(K_t, \overline{G}) : v(G) = n\},$$

其中 $\overline{G}$ 是 G 的补图（即 $V(\overline{G}) = V(G)$，且 $E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$）。直观地说，$G$ 和 $\overline{G}$ 对应于对 K_n 的边进行二染色（比如蓝色和红色），而 $p(K_s, G) + p(K_t, \overline{G})$ 表示 K_s 的蓝色副本与 K_t 的红色副本的合并密度。已知根据 Goodman 的结果，$M(3,3) = \frac{1}{4}$，但对于许多其他数对 (s,t)，这个问题仍未解决。旗代数框架已被用于确定某些情形下的精确值（例如 $M(3,4)$ 和 $M(3,5)$ [15]），并在其他情形下得到更优的下界（例如 $M(4,4)$、$M(4,5)$ 和 $M(5,5)$ [10, 15]）。

在这两个例子中，密度函数 p 的两个参数G 发挥着不同的作用：第二个参数G 是所研究的图，而第一个参数 H 是规格的一部分，表示所测量密度的模式。极值图论中通常采用这一约定，旗代数的大多数应用也都以此为前提。因此，我们称 G 为宿主图，称 H 为模式图。通常，G 很大，而 H 很小；$p(H,\ G)$则刻画了 G的一种局部定量性质。

此外，密度函数 p 将图 G 表示为$[0,1]^{\mathcal{G}}$ 中的一个无限维向量，其指标由 $\mathcal{G}$中的所有图构成。这种表示在图同构意义下是单射：$p(G) = p(G')$当且仅当 $G \simeq G'$。它还使我们能够利用 $[0,1]^{\mathcal{G}}$ 上的乘积拓扑研究图序列的渐近性质，下面将对此作出说明。

3 极限图

设 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个图序列。若对所有 $n \in \mathbb{N}$，$v(G_n) < v(G_{n+1})$，则称该序列递增。若该序列递增，且对于每个图 H，$\lim_{n\to\infty} p(H, G_n)$ 都存在，则称其收敛。等价地，上一节末尾提到的向量表示序列 $(p(G_n))_n$ 在$[0,1]^{\mathcal{G}}$中逐点收敛。尽管这个定义看起来可能有些限制——因为它要求对每个图 H，极限都存在——但收敛实际上很常见：每个递增图序列都有一个收敛子序列。事实上，图的集合 $\mathcal{G}$ 是可数的[1]，，因此乘积空间 $[0,1]^{\mathcal{G}}$ 配备乘积拓扑后是紧的且可度量的。由此，它是序列紧的，而向量序列 $(p(G_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 存在一个收敛子序列。

函数 $\phi : \mathcal{G} \to [0,1]$ 是一个极限图[2]，当且仅当存在一个收敛图序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\phi(H) = \lim_{n\to\infty} p(H, G_n) \qquad \text{for every graph } H \in \mathcal{G}.$$

令 Φ 表示所有极限图的集合。一个有用的直观理解是（例如可通过图子 [13] 形式化）：极限图表示一个具有连续统多个顶点的随机无限无向图，而 $\phi(H)$ 给出模式 H 在这个无限宿主图中的平均诱导子图密度。每个收敛图序列 $(G_n)_n$ 都唯一确定一个极限图 ϕ，但同一个极限图可能由多个序列产生。

利用极限图，我们可以更清晰地重述第2节中的极值问题。[3] 渐近诱导子图型 Turán 型问题可以表述为如下优化问题

$$T(H, \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\phi(H) : \phi \in \Phi \text{ and } \phi(F) = 0 \text{ for all } F \in \mathcal{F}\}.$$

[1]请回顾，我们所说的图是指一个有限简单图 G，其 $V(G) \subseteq \mathbb{N}$。[2]在 [17], 中，这样的函数称为一个 *positive homomorphism*。我们避免使用这一术语，因为它在代数语境之外可能晦涩难懂，而且我们希望强调 ϕ 是一个表示无限图的极限对象。[3]这一改述的正确性可由 [17] 的推论3.4，以及渐近诱导子图 Turán 型问题可改写为无约束优化问题这一事实得出。

同样，由于 $p(K_t,\ \overline{G}) = p(I_t,\ G)$，拉姆齐重数问题可以写成 s

$$M(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\phi(K_s) + \phi(I_t) \,:\, \phi \in \Phi\}.$$

这里，I_t 表示一个具有 t个顶点的无边图。

本综述的一个核心观点是，旗代数为研究 Φ中的极限图提供了一个逻辑框架，尤其适用于证明渐近极值问题中的界。例如，它提供了一种语法，可用于表达如下界：

$$T(H,\mathcal{F}) \le c \qquad \text{and} \qquad M(s,t) \ge c'$$

对于 $c,\ c' \in \mathbb{R}$，以及一种以 Φ中的极限图为参数的语义。这样一来，这类界就成为关于极限图的断言。旗代数还提供了证明这些界的策略，其中一些可以自动化。接下来的两节将介绍这一逻辑的语法和语义，以及一种常用的证明策略。

4 旗代数的语法与语义

旗代数的语法由密度表达式 E 和断言 A构成。密度表达式推广了模式图 H ，并表示定义在极限图上的实值函数。断言则利用密度表达式和逻辑连接词来表达极限图的定性性质。

形式上，语法定义如下：

$$\begin{aligned} \text{Density Expressions} \quad & E ::= H \mid r \cdot E \mid 0 \mid E + E \mid 1 \mid E \cdot E, \\ \text{Assertions} \quad & A ::= \mathbf{false} \mid \mathbf{true} \mid E \ge E \mid \neg A \mid A \vee A, \end{aligned}$$

其中，H 遍历所有图，r 遍历实数。我们用 Expr 表示所有密度表达式的集合，用 Assn 表示所有断言的集合。密度表达式由模式图以及常数 0 和 1 通过数乘、加法和乘法构成。断言由布尔常量 **假** 和 **真**、密度表达式之间的比较、否定和析取构成。

否定和析取具有经典逻辑中的通常含义，并以标准方式诱导出其他逻辑连接词（例如合取和蕴含）：

$$A \wedge A' \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg A \vee \neg A') \qquad \text{and} \qquad (A \implies A') \stackrel{\text{def}}{=} \neg A \vee A'.$$

类似地，可以使用 $\ge$ 和逻辑连接词定义密度表达式之间的其他比较运算符（例如 $=$、$>$、$\le$和 $<$）。例如，

$$(E_1 = E_2) \stackrel{\text{def}}{=} (E_1 \ge E_2) \wedge (E_2 \ge E_1) \quad \text{and} \quad (E_1 < E_2) \stackrel{\text{def}}{=} \neg(E_1 \ge E_2).$$

最后，我们使用缩写 $-E$ 定义为$= (-1)\cdot E$ 和 $E_1 - E_2$ 定义为$= E_1 + (-E_2)$，并将实常数 $r \in \mathbb{R}$ 与密度表达式 $r \cdot 1$ 等同。

密度表达式 E 和断言 A 的语义具有如下形式

$$[\![E]\!] : \Phi \to \mathbb{R} \qquad \text{and} \qquad [\![A]\!] : \Phi \to \mathbb{B},$$

其中 $\mathbb{B}$ 定义$=$ {真、假}。它是通过依据 E 和 A 的结构进行归纳来定义的，所依据的是 $\mathbb{R}$ 的有序交换代数结构以及 $\mathbb{B}$的布尔代数结构。对于一个极限图 $\phi \in \Phi$,

$$\begin{aligned} [\![H]\!]\,\phi &\stackrel{\text{def}}{=} \phi(H), & [\![r \cdot E]\!]\,\phi &\stackrel{\text{def}}{=} r \cdot [\![E]\!]\,\phi, \\ [\![0]\!]\,\phi &\stackrel{\text{def}}{=} 0, & [\![E_1 + E_2]\!]\,\phi &\stackrel{\text{def}}{=} [\![E_1]\!]\,\phi + [\![E_2]\!]\,\phi, \\ [\![1]\!]\,\phi &\stackrel{\text{def}}{=} 1, & [\![E_1 \cdot E_2]\!]\,\phi &\stackrel{\text{def}}{=} [\![E_1]\!]\,\phi \cdot [\![E_2]\!]\,\phi, \end{aligned}$$

and

$$[\![\mathbf{false}]\!]\,\phi \stackrel{\text{def}}{=} \mathit{false}, \qquad [\![\mathbf{true}]\!]\,\phi \stackrel{\text{def}}{=} \mathit{true},$$

$$[\![E_1 \geq E_2]\!]\,\phi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathit{true} & \text{if } [\![E_1]\!]\,\phi \geq [\![E_2]\!]\,\phi, \\ \mathit{false} & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad [\![\neg A]\!]\,\phi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathit{true} & \text{if } [\![A]\!]\,\phi = \mathit{false}, \\ \mathit{false} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$[\![A_1 \vee A_2]\!]\,\phi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathit{true} & \text{if } [\![A_1]\!]\,\phi = \mathit{true} \text{ or } [\![A_2]\!]\,\phi = \mathit{true}, \\ \mathit{false} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

如果断言 A 对每个极限图 $\phi \in \Phi$都为有效，即 $[\![A]\!]\,\phi = \text{真}$，我们就称它为有效。请注意，旗代数的语法和语义与实数上的标准一阶逻辑无量词片段中的算术表达式和公式相一致。密度表达式中的图 H 扮演实值变量的角色，密度表达式是关于这些变量的算术表达式，而断言则是关于这些算术表达式的公式。因此，许多标准一阶逻辑的推理原理都可直接应用于旗代数。例如，以下断言对所有极限图 $\phi \in \Phi$都成立：

$$\Big(H_1 \cdot (H_3 + H_2) + (4 \cdot H_3) \cdot H_1\Big) = \Big(H_1 \cdot H_2 + 5 \cdot (H_1 \cdot H_3)\Big),$$
$$\Big((H_1 + H_2 \geq 0) \wedge (0 \geq H_2 - H_3)\Big) \implies H_1 + H_3 \geq 0.$$

引理 4.1. 有序交换代数的规则对旗代数中的密度表达式成立。此外，布尔代数的规则是旗代数中的有效断言。

与实数上的普通一阶逻辑相比，旗代数的特殊之处在于，“变量”（即图 H）不能被赋予任意实数值：它们的取值必须同时来自同一个极限图 ϕ，因此彼此相关。一个简单的推论是，表示同构图的两个变量始终取值相同。

引理 4.2. 若图 H 与 H' 同构，则方程 $H = H'$ 成立。

证明. 令 ϕ 为任意一个极限图。于是，存在一个图的收敛序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有图 $F \in \mathcal{G}$，$\lim_{n\to\infty} p(F, G_n) = \phi(F)$。由于 H与 H'同构，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有$p(H, G_n) = p(H', G_n)$。因此，$\phi(H) = \lim_{n\to\infty} p(H, G_n) = \lim_{n\to\infty} p(H', G_n) = \phi(H')$。由于 ϕ 是任意的，方程 $H = H'$ 成立。 □

下列有用的推论源于极限图与概率论之间的联系。对于每个图 H 和极限图 ϕ，值 $\phi(H)$直观上表示：如果我们在由 ϕ表示的无限图中，均匀随机地选取一个包含 $v(H)$ 个顶点的子集，那么所选顶点上的诱导子图与 H同构的概率。由此直觉可知，$\phi(H) \in [0, 1]$，并且对于固定顶点集 $[n]$ 上的所有非同构图 H'，$\phi(H')$之和等于 1。对于 $\mathbb{N}$的有限子集 V，若图集 $\mathcal{H}_V$ 满足上的完全图集的条件，即顶点集为 V 的每个图都与 $\mathcal{H}_V$中的恰好一个图同构，则称 $\mathcal{H}_V$ 为上的完全图集。使用这一术语，我们在下列引理中正式重述上述观察结果。

引理 4.3. 断言 $1 \geq H \wedge H \geq 0$ 对每个图 H都成立。

证明。 考虑任意一个极限图 ϕ。那么，存在一个由图组成的收敛序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有图 $F \in \mathcal{G}$，$\lim_{n\to\infty} p(F, G_n) = \phi(F)$。由于对所有 $n \in \mathbb{N}$，$1 \geq p(H, G_n) \geq 0$，我们有

$$[\![1]\!]\,\phi = 1 \geq \lim_{n\to\infty} p(H, G_n) = \phi(H) = [\![H]\!]\,\phi, \text{ and}$$
$$[\![H]\!]\,\phi = \phi(H) = \lim_{n\to\infty} p(H, G_n) \geq 0 = [\![0]\!]\,\phi.$$

由于 ϕ 是任意的，断言 $1 \geq H \wedge H \geq 0$ 成立。 □

引理 4.4. 设 V 是 $\mathbb{N}$ 的有限子集，且 $\mathcal{H}_V$ 是定义在 V 上的完全图集。那么

$$\sum_{H\in\mathcal{H}_V} H = 1$$

成立。

证明。令 ϕ 为任意一个极限图。那么，存在一个图的收敛序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有图 $F\in\mathcal{G}$，都有 $\lim_{n\to\infty} p(F, G_n) = \phi(F)$。由于 $\mathcal{H}_V$是 V上的完全图集，因此我们有

$$\sum_{H\in\mathcal{H}_V} p(H, G_n) = 1$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$均成立。因此，

$$\left[\!\!\left[\sum_{H\in\mathcal{H}_V} H\right]\!\!\right]\phi = \sum_{H\in\mathcal{H}_V}\phi(H) = \sum_{H\in\mathcal{H}_V}\lim_{n\to\infty} p(H,G_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{H\in\mathcal{H}_V} p(H,G_n) = 1 = [\![1]\!]\,\phi.$$

由于 ϕ 是任意的，等式 $\sum_{H\in\mathcal{H}_V} H = 1$ 成立。 □

我们还指出旗代数在应用中常用的另外两个推论。它们说明，图 G 的密度表达式 G 可以写成较大图的线性组合，并且可以消去密度表达式中的乘法单位元 1 和乘法。在下文的引理中，令 V为 $\mathbb{N}$的有限子集，并令 $\mathcal{H}_V$为 V上的完全图集。

引理 4.5。 对于每个带有 H $v(H) \le |V|$ 的图，

$$H = \sum_{H'\in\mathcal{H}_V} p(H,H')\cdot H'$$

均成立。

证明。在证明中，我们使用来自 [17] 的引理 2.2。

令 ϕ 为任意极限图。于是，存在一个图的收敛序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对于所有图 $F\in\mathcal{G}$，$\lim_{n\to\infty} p(F, G_n) = \phi(F)$。取 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $v(G_{n_0}) \ge |V|$。那么，由于 $\mathcal{H}_V$ 是 V 上的完全图集，根据来自 [17]，的引理 2.2，我们有

$$p(H,G_n) = \sum_{H'\in\mathcal{H}_V} p(H,H')\cdot p(H',G_n)$$

对于所有 $n\ge n_0$ 均成立。因此，

$$\begin{aligned}
[\![H]\!]\,\phi = \phi(H) &= \lim_{n\to\infty} p(H,G_n)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{H'\in\mathcal{H}_V} p(H,H')\cdot p(H',G_n)\\
&= \sum_{H'\in\mathcal{H}_V} p(H,H')\cdot\lim_{n\to\infty} p(H',G_n)\\
&= \sum_{H'\in\mathcal{H}_V} p(H,H')\cdot\phi(H')\\
&= \sum_{H'\in\mathcal{H}_V} p(H,H')\cdot[\![H']\!]\,\phi = \left[\!\!\left[\sum_{H'\in\mathcal{H}_V} p(H,H')\cdot H'\right]\!\!\right]\phi.
\end{aligned}$$

由于 ϕ 是任意的，等式 $H = \sum_{H'\in\mathcal{H}_V} p(H, H')\cdot H'$ 成立。 □

引理 4.6。 如果 $\emptyset$ 是空顶点集上的图，那么

$$1 = \emptyset$$

是有效的。此外，对于 每一对图 H_1 和 H_2，若满足 $v(H_1) + v(H_2) \leq |V|$，则有如下有效等式

$$H_1 \cdot H_2 = \sum_{H \in \mathcal{H}_V} r_H \cdot H,$$

其中

$$r_H \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\big[H[\mathbf{U}_1] \simeq H_1 \text{ and } H[\mathbf{U}_2] \simeq H_2\big],$$

其中 $\mathbf{U}_1$ 和 $\mathbf{U}_2$ 是从 $V(H)$ 中分别均匀随机选取的大小为 $v(H_1)$ 和 $v(H_2)$的不相交子集。

证明。 在证明的第二部分中，我们使用了 [17] 中的引理 2.2 和引理 2.3。

设 ϕ 为任意一个极限图，并设 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个收敛图序列，使得对于所有图 $F \in \mathcal{G}$，均有 $\lim_{n\to\infty} p(F, G_n) = \phi(F)$。

由于对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $p(\emptyset, G_n) = 1$，因此我们有

$$[\![1]\!]\,\phi = 1 = \lim_{n\to\infty} p(\emptyset, G_n) = \phi(\emptyset) = [\![\emptyset]\!]\,\phi.$$

$1 = \emptyset$ 的有效性源于 ϕ 的任意性。

取满足 $v(G_{n_0}) \geq |V|$ 的 $n_0 \in \mathbb{N}$。然后，对于所有 $n \geq n_0$，应用 [17] 中上述引理可得

$$\left| p(H_1, G_n) \cdot p(H_2, G_n) - \sum_{H \in \mathcal{H}_V} r_H \cdot p(H, G_n) \right| \leq \frac{(v(H_1) + v(H_2))^C}{v(G_n)}$$

对于某个常数 C。由于当 $n \to \infty$ 时 $v(G_n) \to \infty$，因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} (p(H_1, G_n) \cdot p(H_2, G_n)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{H \in \mathcal{H}_V} r_H \cdot p(H, G_n).$$

因此，

$$\begin{aligned}
[\![H_1 \cdot H_2]\!]\,\phi = \phi(H_1) \cdot \phi(H_2) &= \lim_{n\to\infty} p(H_1, G_n) \cdot \lim_{n\to\infty} p(H_2, G_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (p(H_1, G_n) \cdot p(H_2, G_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{H \in \mathcal{H}_V} r_H \cdot p(H, G_n) \\
&= \sum_{H \in \mathcal{H}_V} r_H \cdot \lim_{n\to\infty} p(H, G_n) = \sum_{H \in \mathcal{H}_V} r_H \cdot \phi(H) = \left[\!\!\left[\sum_{H \in \mathcal{H}_V} r_H \cdot H \right]\!\!\right] \phi.
\end{aligned}$$

由于 ϕ 是任意的，方程

$$H_1 \cdot H_2 = \sum_{H \in \mathcal{H}_V} r_H \cdot H$$

正如所声称的，这一推导是有效的。 □

现在，我们通过表达第2节中的渐近极值问题，来说明旗代数的语法和语义。对于一个图 H 和一个禁图有限集 $\mathcal{F}$，且至少存在一个不含 $\mathcal{F}$中任何图的图，Tur´an 型问题是要找出最小的 $c \in \mathbb{R}$，使得蕴含式

$$\left(\bigwedge_{F \in \mathcal{F}} F = 0 \right) \implies H \leq c \tag{1}$$

在旗代数中成立，即对所有极限图 ϕ均成立。其中， c 是密度表达式 $c \cdot 1$的缩写。前件 $\bigwedge_{F \in \mathcal{F}} F = 0$ 表示 ϕ 不含 $\mathcal{F}$中的任何禁图，而后件 $H \leq c$ 则表明， ϕ 中 H 的密度至多为 c。

对于拉姆齐重数问题，给定整数 $s, t \geq 2$，我们寻求使下列不等式在旗代数中成立的最大 $c' \in \mathbb{R}$：

$$K_s + I_t \geq c'. \tag{2}$$

这里， I_t 表示具有 t 个顶点的无边图。

旗代数如何帮助我们求解方程 (1) 和 (2) 中寻找这类最优常数 c 和 c' 的问题？答案在于用于推导旗代数中有效断言的推理原理。下面通过两个例子，简要介绍这一方面。

考虑关于 $H = K_2$ 和 $\mathcal{F} = \{K_3\}$ 的 Turán 型问题，该问题旨在求出无三角形图渐近边密度的最佳上界。用旗代数的语言来说，我们要寻找使下列蕴含成立的最小c:

$$K_3 = 0 \implies K_2 \leq c$$

成立。根据 曼特尔定理 [14], ，最优常数为 $c = 1/2$。我们证明 $c = 1/2$ 时该结论成立 .

分别用 、 和 表示顶点集为 $[3]$, 的无边图、单边图、双边图和完全图 K_3。[4] 我们使用以下两个有效断言：

$$K_2 = \left(0 \cdot + \tfrac{1}{3} \cdot + \tfrac{2}{3} \cdot + 1 \cdot \right), \tag{3}$$

$$\left(- \tfrac{1}{3} \cdot - \tfrac{1}{3} \cdot + \right) \geq 0. \tag{4}$$

第一个是定理 4.5 的一个实例；第二个可以使用下一节中解释的推理原则证明。假设 $K_3 = 0$，我们如下推导所需的界（每一步对所有满足 $\phi(K_3) = 0$ 的 $\phi \in \Phi$ 都成立）：

$$\begin{aligned}
K_2 &= 0 \cdot + \tfrac{1}{3} \cdot + \tfrac{2}{3} \cdot + 1 \cdot && \text{根据公式 (3)} \\
&\leq \left(0 \cdot + \tfrac{1}{3} \cdot + \tfrac{2}{3} \cdot + 1 \cdot \right) && \text{by Equation (4) and Theorem 4.1} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \cdot \left(- \tfrac{1}{3} \cdot - \tfrac{1}{3} \cdot + \right) && \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot + \tfrac{1}{6} \cdot + \tfrac{1}{2} \cdot + \tfrac{3}{2} \cdot && \text{根据定理 4.1} \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot + \tfrac{1}{6} \cdot + \tfrac{1}{2} \cdot + \tfrac{1}{2} \cdot && \text{因为 } = K_3 = 0 \\
&\leq \tfrac{1}{2} \cdot + \tfrac{1}{2} \cdot + \tfrac{1}{2} \cdot + \tfrac{1}{2} \cdot && \text{根据定理 4.1 和 4.3} \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \left(+ + + \right) && \text{由定理 4.1} \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 1 && \text{由定理 4.4} \\
&= \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

作为第二个例子，考虑含有 $s = t = 3$ 的拉姆齐重数问题，它要求求出满足以下条件的最大 c'

$$I_3 + K_3 \geq c'$$

在旗代数中是有效的。根据 Goodman 的结果， [7], 最优常数为 $c' = 1/4$。我们证明以下内容有效：

[4]这些记号中的点与标签 1，2，3 之间的确切对应关系并不重要；任何固定的选择都会得到同构图。

$c' = 1/4$ 如下：

$$
\begin{aligned}
I_3 + K_3 &= 1 \cdot \graph{3}{1,2} + 0 \cdot \graph{3}{1,2,2} + 0 \cdot \graph{3}{1,2,1} + 1 \cdot \graph{3}{1,2,3} \\
&\geq \left(1 \cdot \graph{3}{1,2} + 0 \cdot \graph{3}{1,2,2} + 0 \cdot \graph{3}{1,2,1} + 1 \cdot \graph{3}{1,2,3}\right) && \text{by Equation (4) and Theorem 4.1} \\
&\quad - \tfrac{3}{4} \cdot \left(\graph{3}{1,2} - \tfrac{1}{3} \cdot \graph{3}{1,2,2} - \tfrac{1}{3} \cdot \graph{3}{1,2,1} + \graph{3}{1,2,3}\right) \\
&= \tfrac{1}{4} \cdot \graph{3}{1,2} + \tfrac{1}{4} \cdot \graph{3}{1,2,2} + \tfrac{1}{4} \cdot \graph{3}{1,2,1} + \tfrac{1}{4} \cdot \graph{3}{1,2,3} && \text{by Theorem 4.1} \\
&= \tfrac{1}{4} \cdot (\graph{3}{1,2} + \graph{3}{1,2,2} + \graph{3}{1,2,1} + \graph{3}{1,2,3}) && \text{by Theorem 4.1} \\
&= \tfrac{1}{4} \cdot 1 && \text{by Theorem 4.4} \\
&= \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

两个示例都使用了一个尚未得到论证的步骤，即公式（4）中的不等式。下一节将解释旗代数中的一种推理原则，该原则可以用来推导此类不等式，以及向下算子——应用这一原则的关键工具。

5 使用向下算子推导不等式

本节将介绍旗代数中一种常见的证明策略。它可以用来证明诸如公式（4）这样的非平凡不等式。其主要工具是向下算子，它将带标记情形中证明的不等式转移回原始的无标记情形。

从总体上看，这一策略通过引入一系列旗代数的带标记变体来展开，并为每个变体提供一种可靠的机制，将该变体中成立的不等式转化为原始旗代数中成立的不等式。选择每个变体的目的，是使某些不等式更容易证明。随后，人们在适当的变体中证明这些“容易”的不等式，再将其转移到无标记情形中。例如，在公式（4）的推导中，我们使用了其中一个顶点带有标记的变体。

为使其表述严谨，我们需要一些额外的定义。型 τ 是顶点集为 $[k]$（其中 $k \in \mathbb{N}$）的图；我们称 k 为 τ的大小 。 τ-标记图 是一个二元组 $G^\tau = (G, \theta)$，由一个图 G和一个单射 $\theta\colon [k] \to V(G)$组成，使得 θ是将 τ嵌入 G的嵌入，即，对于所有 $i, j \in [k]$，

$$\{i, j\} \in E(\tau) \quad \text{if and only if} \quad \{\theta(i), \theta(j)\} \in E(G).$$

我们称 τ为 G^τ的型，并将 G记作 $|G^\tau|$的底层无标记图。我们还分别用 $V(G^\tau)$、 $E(G^\tau)$、$v(G^\tau)$ 和 $e(G^\tau)$ 表示 $V(G)$ 、 $E(G)$ 、 $v(G)$ 和 $e(G)$。对于固定的型 τ，我们将所有 τ- 标记图的集合记为 $\mathcal{G}^\tau$。注意，$\mathcal{G}^\tau$是可数无穷的，因为本综述文章中所考虑的每个图都具有包含于 $\mathbb{N}$ 中的有限顶点集。

现在，我们将前面几节中的概念推广到 τ-标记图。对于 τ-标记图$H^\tau = (H, \iota)$ 和 $G^\tau = (G, \theta)$，函数 $h\colon V(H) \to V(G)$ 称为 τ-同态，如果它是从 H 到 G 的同态，并且对所有 $i \in [k]$都满足 $h(\iota(i)) = \theta(i)$。如果存在一个从 H^τ到 G^τ的双射 τ-同态，且其逆映射也是一个从 G^τ 到 H^τ的 τ-同态，我们就称 H^τ 和 G^τ 是 τ-同构，记作$H^\tau \simeq_\tau G^\tau$。

对于 τ-标记图 $H^\tau = (H, \iota)$ 和 $G^\tau = (G, \theta)$， H^τ在 G^τ中的诱导 τ-标记子图密度（或简称为 G^τ中的 H^τ-密度）定义为

$$p_\tau(H^\tau, G^\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\Big[\big(G\big[\theta([k]) \cup \mathbf{U}\big], \theta\big) \simeq_\tau H^\tau\Big],$$

其中，$\mathbf{U}$是从 $V(G) \setminus \theta([k])$ 中均匀随机选取的大小为 $v(H^\tau) - k$ 的子集。若 $v(G_n^\tau) < v(G_{n+1}^\tau)$，则一列 τ-标记图 $(G_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$称为递增的。若它是递增的，且对每个 τ-标记图 $H^\tau \in \mathcal{G}^\tau$，$\lim_{n\to\infty} p_\tau(H^\tau, G_n^\tau)$ 都存在，则称其收敛。若存在收敛序列 $(G_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $H^\tau \in \mathcal{G}^\tau$， $\phi(H^\tau) = \lim_{n\to\infty} p_\tau(H^\tau, G_n^\tau)$，则称函数 $\phi\colon \mathcal{G}^\tau \to [0,1]$ 是一个 τ-标记极限图。与无标记情形一样， ϕ （非正式地）可视为一个随机无限图；但现在，这个无限图中的 k 个指定顶点在这

个无限图中标记为 1，……，k，这些标记确定了 τ 到该无限图中的一个嵌入。我们用 Φ^τ 表示所有 τ-标记极限图的集合。

旗代数的 τ 标记变体的定义与原始版本类似，分别将图、诱导子图密度、收敛图序列和极限图替换为 τ 标记图、诱导 τ 标记子图密度、τ 标记图的收敛序列和 τ 标记极限图。其语法由基于 τ 标记图构造并在 Φ^τ 上解释的密度表达式和断言组成。为方便起见，我们回顾一下其语法：

$$\text{Density Expressions} \quad E^\tau ::= H^\tau \mid r \cdot E^\tau \mid 0^\tau \mid E^\tau + E^\tau \mid 1^\tau \mid E^\tau \cdot E^\tau,$$
$$\text{Assertions} \quad A^\tau ::= \mathbf{false} \mid \mathbf{true} \mid E^\tau \geq E^\tau \mid \neg A^\tau \mid A^\tau \vee A^\tau,$$

其中，H^τ 遍历 τ 标记图，r 遍历实数。我们用 Expr^τ 表示该变体中密度表达式的集合，用 Assn^τ 表示断言的集合。

定理4.1至4.6在 τ 标记变体中同样成立，只需作显而易见的修改（将图替换为 τ 标记图，将诱导子图密度替换为诱导 τ 标记子图密度）。我们记录定理 4.1 和定理4.6 的带标记版本的一个直接推论，以供后续使用。

Co推论 5.1。设 τ 是一个大小为 k 的型。则对于 Expr^τ 中的任意表达式 E_1^τ、…、E_m^τ，

$$\Big(\sum_{i\in[m]} E_i^\tau \cdot E_i^\tau\Big) \geq 0^\tau$$

这是旗代数的 τ-带标记变体中的一个有效断言。

引理5.2。设 τ 是一个大小为 k 的型。则等式

$$1^\tau = (\tau, \mathrm{id}_{[k]})$$

在旗代数的 τ-带标记变体中成立。此外，设 $V \subseteq \mathbb{N}$ 是有限的，且 $|V| \geq k$，并设 $\mathcal{H}_V^\tau$ 是定义在 V 上的一组 τ-带标记图，使得定义在 V 上的每个 τ-带标记图都与 $\mathcal{H}_V^\tau$ 中恰好一个元素 τ-同构。则对于任意一对 τ- 带标记图 H_1^τ 和 H_2^τ（$v(H_1^\tau) + v,\ H_2^\tau) - k \leq |V|$），下列等式成立：

$$H_1^\tau \cdot H_2^\tau = \sum_{(H,\theta)\in\mathcal{H}_V^\tau} r_{(H,\theta)} \cdot (H,\theta),$$

其中

$$r_{(H,\theta)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\big[H\big[\theta([k]) \cup \mathbf{U}_1\big] \simeq_\tau H_1^\tau \text{ and } H\big[\theta([k]) \cup \mathbf{U}_2\big] \simeq_\tau H_2^\tau\big],$$

其中 $\mathbf{U}_1$ 和 $\mathbf{U}_2$ 分别是从 $V(H) \setminus \theta([k])$ 中均匀随机选取的、互不相交的子集，其大小分别为 $v(H_1^\tau) - k$ 和 $v(H_2^\tau) - k$。

从 τ 带标记变体到原始旗代数的传递机制是向下算子。我们通过一种通用方法来定义它，该方法通过我们所称的函数伴随对将变体与原始旗代数联系起来。接下来我们将说明这种方法，然后将其具体化以得到向下算子。

固定一个型 τ，并考虑函数 $\gamma\colon \mathcal{G} \to \mathsf{FinMea}(\mathcal{G}^\tau)$ 和 $\alpha\colon \mathcal{G}^\tau \to \mathsf{FinMea}(\mathcal{G})$。这里，我们将 $\mathcal{G}$和 $\mathcal{G}^\tau$ 视为配备离散 σ-代数的可测空间，并用 $\mathsf{FinMea}(\mathcal{G})$ 和 $\mathsf{FinMea}(\mathcal{G}^\tau)$ 分别表示 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^\tau$上的有限测度集合。直观地说，对于 $G \in \mathcal{G}$，测度 $\gamma(G)$ 在 $\mathcal{G}^\tau$上定义了一个未归一化的概率分布；对于 $H^\tau \in \mathcal{G}^\tau$，测度 $\alpha(H^\tau)$ 在 $\mathcal{G}$上定义了一个未归一化的概率分布。我们称 (α, γ) 为伴随对，如果对于所有 $H^\tau \in \mathcal{G}^\tau$ 和 $G \in \mathcal{G}$，

$$p(\alpha(H^\tau), G) = p_\tau(H^\tau, \gamma(G)), \tag{5}$$

其中

$$p(\alpha(H^\tau), G) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{G}} p(H, G)\,\Big(\alpha(H^\tau)(dH)\Big),$$
$$p_\tau(H^\tau, \gamma(G)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{G}^\tau} p_\tau(H^\tau, G^\tau)\,\Big(\gamma(G)(dG^\tau)\Big).$$

公式（5）让人联想到伽罗瓦连接或范畴伴随。[5] 在自动化验证中，伽罗瓦连接用于关联编程语言或逻辑系统的不同解释；在编程语言中，范畴伴随则用于关联不同的语义环境。类似地，我们使用伴随对来关联原始旗代数及其 τ带标记变体。

设 (α, γ) 是型 τ 的一个伴随对。我们称 α 具有有限支撑，如果对每个 $H^\tau \in \mathcal{G}^\tau$，其支撑

$$\operatorname{supp}(\alpha(H^\tau)) \stackrel{\text{def}}{=} \{H \,:\, \alpha(H^\tau)(\{H\}) > 0\}$$

都是有限的。此条件使我们能够定义如下映射 $\alpha^\dagger$ ：将 $\mathbf{Expr}^\tau$ 中无乘法且无 1^τ 的表达式映射为原旗代数中的密度表达式：

$$\alpha^\dagger(H^\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{H \in \operatorname{supp}(\alpha(H^\tau))} \alpha(H^\tau)(\{H\}) \cdot H, \qquad \alpha^\dagger(r \cdot E^\tau) \stackrel{\text{def}}{=} r \cdot \alpha^\dagger(E^\tau),$$

$$\alpha^\dagger(0^\tau) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \qquad \alpha^\dagger(E_1^\tau + E_2^\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^\dagger(E_1^\tau) + \alpha^\dagger(E_2^\tau).$$

我们还称 γ 可扩展到极限图，如果存在函数 $\gamma_\infty : \Phi \to \mathbf{FinMea}(\Phi^\tau)$，使得对于每个收敛图序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和每个极限图 $\phi \in \Phi$，

$$\Big(\forall H \in \mathcal{G},\ \lim_{n\to\infty} p(H, G_n) = \phi(H)\Big) \implies \Big(\forall H^\tau \in \mathcal{G}^\tau,\ \lim_{n\to\infty} p_\tau(H^\tau, \gamma(G_n)) = \int_{\Phi^\tau} \phi^\tau(H^\tau)\left(\gamma_\infty(\phi)(d\phi^\tau)\right)\Big).$$

这里，Φ^τ 配备了由 $[0,1]^{\mathcal{G}^\tau}$ 上的乘积拓扑所诱导的 σ-代数，因此它是一个可测空间；而 $\gamma_\infty(\phi)$ 是 Φ^τ 上的有限测度。

下一个引理指出，如果 α 具有有限支撑，且 γ 可扩展到极限图，那么伴随对 (α, γ) 给出一个可靠的迁移原理。

引理 5.3. 设 (α, γ) 是型 τ的一个伴随对。假设 α 具有有限支撑，并令 $\alpha^\dagger$ 为将 α 诱导扩展到不含 1^τ的无乘法表达式所得的扩展。还假设 γ 可扩展到极限图。那么，对于带 τ标记变体中的每个有效不等式 $E^\tau \geq 0^\tau$，其中 E^τ 是无乘法的且不含 1^τ，不等式 $\alpha^\dagger(E^\tau) \geq 0$ 在原旗代数中有效。

证明。令 $\gamma_\infty : \Phi \to \mathbf{FinMea}(\Phi^\tau)$ 为 γ 可扩展到极限图的见证。考虑任意一个极限图 $\phi \in \Phi$。我们需要证明 $[\![\alpha^\dagger(E^\tau)]\!]\,\phi \geq 0$。通过对 E^τ作结构归纳，我们将证明

$$[\![\alpha^\dagger(E^\tau)]\!]\,\phi = \int_{\Phi^\tau} [\![E^\tau]\!]\,\phi^\tau \left(\gamma_\infty(\phi)(d\phi^\tau)\right). \tag{6}$$

由该等式即可得到所需结论，因为 $E^\tau \geq 0^\tau$ 在带 τ标记变体中有效，因此对每个 $\phi^\tau \in \Phi^\tau$，被积函数 $[\![E^\tau]\!]\,\phi^\tau$均非负。

假设 E^τ 是一个 τ 标记的图 H^τ。根据极限图的定义，存在一个收敛图序列（G_n）$_n$，使得

$$\phi(H) = \lim_{n\to\infty} p(H, G_n) \quad \text{for all } H \in \mathcal{G}. \tag{7}$$

[5]熟悉泛函分析的读者或许也能看出它与伴随线性算子的相似之处。

利用这一点，我们推导出方程（6）：

$$
\begin{aligned}
\left[\!\left[\alpha^{\dagger}(H^{\tau})\right]\!\right]\phi &= \left[\!\left[\sum_{H\in\mathrm{supp}(\alpha(H^{\tau}))}\alpha(H^{\tau})(\{H\})\cdot H\right]\!\right]\phi && \text{by the definition of } \alpha^{\dagger}\\
&= \sum_{H\in\mathrm{supp}(\alpha(H^{\tau}))}\alpha(H^{\tau})(\{H\})\cdot\phi(H) && \text{by the definition of } [\![-]\!]\\
&= \sum_{H\in\mathrm{supp}(\alpha(H^{\tau}))}\alpha(H^{\tau})(\{H\})\cdot\lim_{n\to\infty}p(H,G_n) && \text{by Equation (7)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{H\in\mathrm{supp}(\alpha(H^{\tau}))}\alpha(H^{\tau})(\{H\})\cdot p(H,G_n) && \text{by the finiteness of } \mathrm{supp}(\alpha(H^{\tau}))\\
&= \lim_{n\to\infty}p(\alpha(H^{\tau}),G_n) && \text{by the definition of } p(\alpha(H^{\tau}),G_n)\\
&= \lim_{n\to\infty}p_{\tau}(H^{\tau},\gamma(G_n)) && \text{by the adjointness of } (\alpha,\gamma)\\
&= \int_{\Phi^{\tau}}\phi^{\tau}(H^{\tau})\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right) && \text{by the extendibility of } \gamma\\
&= \int_{\Phi^{\tau}}[\![H^{\tau}]\!]\,\phi^{\tau}\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right) && \text{by the definition of } [\![-]\!].
\end{aligned}
$$

接下来考虑 $E^{\tau}=0^{\tau}$ 的情况。于是，

$$
\left[\!\left[\alpha^{\dagger}(0^{\tau})\right]\!\right]\phi=[\![0]\!]\,\phi=0=\int_{\Phi^{\tau}}0\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right)=\int_{\Phi^{\tau}}[\![0^{\tau}]\!]\,\phi^{\tau}\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right).
$$

其余情况可以通过归纳假设和积分的线性性证明。我们先推导出关于 $E^{\tau}=r\cdot F^{\tau}$ 的目标方程：

$$
\begin{aligned}
\left[\!\left[\alpha^{\dagger}(r\cdot F^{\tau})\right]\!\right]\phi &= [\![r\cdot\alpha^{\dagger}(F^{\tau})]\!]\,\phi && \text{by the definition of } \alpha^{\dagger}\\
&= r\cdot\left(\left[\!\left[\alpha^{\dagger}(F^{\tau})\right]\!\right]\phi\right) && \text{by the definition of } [\![-]\!]\\
&= r\cdot\int_{\Phi^{\tau}}[\![F^{\tau}]\!]\,\phi^{\tau}\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right) && \text{by the induction hypothesis}\\
&= \int_{\Phi^{\tau}}r\cdot\left([\![F^{\tau}]\!]\,\phi^{\tau}\right)\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right) && \text{by the linearity of integration}\\
&= \int_{\Phi^{\tau}}[\![r\cdot F^{\tau}]\!]\,\phi^{\tau}\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right) && \text{by the definition of } [\![-]\!].
\end{aligned}
$$

接下来，我们处理 $E^{\tau}=E_1^{\tau}+E_2^{\tau}$ 的情形：

$$
\begin{aligned}
&\left[\!\left[\alpha^{\dagger}(E_1^{\tau}+E_2^{\tau})\right]\!\right]\phi\\
&= \left[\!\left[\alpha^{\dagger}(E_1^{\tau})+\alpha^{\dagger}(E_2^{\tau})\right]\!\right]\phi && \text{by the definition of } \alpha^{\dagger}\\
&= \left[\!\left[\alpha^{\dagger}(E_1^{\tau})\right]\!\right]\phi+\left[\!\left[\alpha^{\dagger}(E_2^{\tau})\right]\!\right]\phi && \text{by the definition of } [\![-]\!]\\
&= \int_{\Phi^{\tau}}[\![E_1^{\tau}]\!]\,\phi^{\tau}\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right)+\int_{\Phi^{\tau}}[\![E_2^{\tau}]\!]\,\phi^{\tau}\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right) && \text{by the induction hypothesis}\\
&= \int_{\Phi^{\tau}}\left([\![E_1^{\tau}]\!]\,\phi^{\tau}+[\![E_2^{\tau}]\!]\,\phi^{\tau}\right)\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right) && \text{by the linearity of integration}\\
&= \int_{\Phi^{\tau}}[\![E_1^{\tau}+E_2^{\tau}]\!]\,\phi^{\tau}\left(\gamma_{\infty}(\phi)(d\phi^{\tau})\right) && \text{by the definition of } [\![-]\!].
\end{aligned}
$$

□

我们现在可以为每个型 τ 定义向下算子。给定一个表达式 $E^\tau \text{in } \mathsf{Expr}^\tau$，我们首先使用定理 5.2 消去所有乘法以及常数 $1^\tau \text{ in } E^\tau$ 的出现，从而得到一个不含乘法且不含 1 的表达式 F^τ；该表达式在旗代数的 τ-带标记变体中等于 E^τ。尽管这一步消去的具体方式没有明确规定，但通常是从最内层的子表达式开始，逐层向外进行。随后，向下算子将 F^τ 映射为 $\alpha_d^\dagger(F^\tau)$，其中 α_d 是下文定义的、针对型 τ 的特定伴随对 (α_d, γ_d) 的一部分。这个伴随对满足定理 5.3 中的条件。因此，如果 $E^\tau \geq 0^\tau$ 是旗代数 τ-带标记变体中的有效不等式，那么 $\alpha_d^\dagger(F^\tau) \geq 0$ 在原始旗代数中也是有效的。

为定义上文提到的伴随对 (α_d, γ_d)，考虑一个 τ-标记图 $H^\tau \in \mathcal{G}^\tau$ 和一个未标记图 $G \in \mathcal{G}$。对每个 $G^\tau \in \mathcal{G}^\tau$，令 $\boldsymbol{\theta}_{G^\tau}$ 为从 $[k]$ 到 $V(G^\tau)$ 的均匀随机单射，并且令

$$q_{G^\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\Big[\boldsymbol{\theta}_{G^\tau} \text{ is an embedding from } \tau \text{ to } |G^\tau| \text{ and } (|G^\tau|, \boldsymbol{\theta}_{G^\tau}) \simeq_\tau G^\tau\Big].$$

注意，$(\tau, \mathrm{id}_{[k]})$ 是一个 τ-标记图，其底层图就是 τ 本身；并且 $q_{(\tau,\mathrm{id}_{[k]})} = |\mathrm{Aut}(\tau)|/v(\tau)!$ 其中 $\mathrm{Aut}(\tau)$ 是 τ 上所有自同构的集合。利用这一记号，我们定义有限测度 $\alpha_d(H^\tau) \in \mathsf{FinMea}(\mathcal{G})$ 和 $\gamma_d(G) \in \mathsf{FinMea}(\mathcal{G}^\tau)$ 如下：

$$\alpha_d(H^\tau)(\{H\}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} q_{H^\tau} & \text{if } |H^\tau| = H \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\gamma_d(G)(\{G^\tau\}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \big(q_{(\tau,\mathrm{id})} \cdot p(\tau, G)\big) \div \big|\{G_0^\tau \in \mathcal{G}^\tau \,:\, |G_0^\tau| = G\}\big| & \text{if } |G^\tau| = G \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在定理 5.3 的条件中，很容易看出，对每个 $H^\tau \in \mathcal{G}^\tau$，$\alpha_d(H^\tau)$ 都具有有限支撑。此外，可以证明 γ_d 可扩展到极限图，尽管证明较为复杂。详情请参见 [17] 中的定理 3.5 的证明。最后，下面的引理确立了 (α_d, γ_d) 的伴随性。

引理 5.4. 上文定义的对 (α_d, γ_d) 是型 τ 的一个伴随对。

证明. 我们通过大幅扩展 [17] 中引理 3.11 的证明论证，并将扩展后的版本调整到我们的情形，来证明该引理。

任取一个 τ-标记图 $H^\tau \in \mathcal{G}^\tau$ 和任意一个未标记图 $G \in \mathcal{G}$。我们证明

$$p(\alpha_d(H^\tau), G) = p_\tau(H^\tau, \gamma_d(G)).$$

我们先化简左端：

$$p(\alpha_d(H^\tau), G) = \int_{\mathcal{G}} p(H, G)\,\big(\alpha_d(H^\tau)(dH)\big) = q_{H^\tau} \cdot p(|H^\tau|, G) \qquad \text{by the definition of } \alpha_d(H^\tau).$$

Let

$$Z_G \stackrel{\text{def}}{=} \big|\{G^\tau \in \mathcal{G}^\tau \,:\, |G^\tau| = G\}\big|.$$

若 $Z_G = 0$，则 $p(\tau, G) = 0$（不存在将 τ 嵌入 G 的嵌入），因此 $\gamma_d(G)$ 是零测度，进而 $p_\tau(H^\tau, \gamma_d(G)) = 0$。此外，由于 H^τ 在带标记的顶点上包含 τ，G 中若有 $|H^\tau|$ 的诱导子图副本，就必然也包含 τ 的诱导子图副本，这与 $p(\tau, G) = 0$ 矛盾；因此 $p(|H^\tau|, G) = 0$，左端也为 0。因此，我们可以假设 $Z_G > 0$。

在此假设下，我们将右侧化简为：

$$\begin{aligned} p_\tau(H^\tau, \gamma_d(G)) &= \int_{\mathcal{G}^\tau} p_\tau(H^\tau, G^\tau)\,\big(\gamma_d(G)(dG^\tau)\big) \\ &= \sum_{\substack{G^\tau \in \mathcal{G}^\tau \\ |G^\tau| = G}} p_\tau(H^\tau, G^\tau) \cdot \frac{q_{(\tau,\mathrm{id})} \cdot p(\tau, G)}{Z_G} \qquad \text{by the definition of } \gamma_d(G) \\ &= \big(q_{(\tau,\mathrm{id})} \cdot p(\tau, G)\big) \cdot \sum_{\substack{G^\tau \in \mathcal{G}^\tau \\ |G^\tau| = G}} \frac{1}{Z_G}\, p_\tau(H^\tau, G^\tau). \end{aligned}$$

因此，只需证明

$$q_{H^\tau} \cdot p(|H^\tau|, G) = \big(q_{(\tau,\mathrm{id})} \cdot p(\tau, G)\big) \cdot \sum_{\substack{G^\tau \in \mathcal{G}^\tau \\ |G^\tau| = G}} \frac{1}{Z_G}\, p_\tau(H^\tau, G^\tau). \tag{8}$$

设 $k = v(\tau)$、 $m = v(H^\tau)$ 和 $n = v(G)$。定义 $\boldsymbol{\theta}$ 为从 $[k]$ 到 $V(H^\tau)$ 的均匀随机单射，并定义 $\boldsymbol{\theta}'$ 为从 $[k]$ 到 $V(G)$ 的均匀随机单射。此外，令 $\mathbf{U}$ 为 $V(G)$ 的大小为 m 的均匀随机子集，并令 $\mathbf{U}'$ 为 $V(G) \setminus \boldsymbol{\theta}'([k])$ 的大小为 $m-k$ 的均匀随机子集。利用这些随机变量，我们定义如下两个事件： E 和 E' ：

- E 是以下事件： $\boldsymbol{\theta}$ 是从 τ 到 $|H^\tau|$ 的嵌入， τ 标记的图（$|H^\tau|$， $\boldsymbol{\theta}$）与 τ-同构于 H^τ，且诱导子图 $G[\mathbf{U}]$ 与 $|H^\tau|$ 同构。
- E' 是以下事件： $\boldsymbol{\theta}'$ 是从 τ 到 G 的嵌入，且 τ 标记的图（$G[\mathbf{U}' \cup \boldsymbol{\theta}'([k])]$， $\boldsymbol{\theta}'$）与 H^τ τ-同构。

方程（8）的左侧等于 E 的概率。随机变量 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\mathbf{U}$ 相互独立，而 q_{H^τ} 和 $p(|H^\tau|, G)$ 分别是事件 E 中 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\mathbf{U}$ 满足各自条件的概率。同样，方程（8）的右侧等于 E' 的概率。右侧的因子 $q_{(\tau,\mathrm{id})} \cdot p(\tau, G)$ 是事件 E'' 的概率，即 $\boldsymbol{\theta}'$ 是从 τ 到 G 的嵌入，而剩余因子等于条件概率 $\mathbb{P}[E' \mid E'']$。

因此，只需证明 $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E']$。注意， $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{U})$ 的联合分布是在所有形如 (θ, U) 的对组成的集合上的均匀分布，其中 θ 是从 $[k]$ 到 $V(H^\tau)$ 的单射，且 U 是 $V(G)$ 的子集，其大小为 m。类似地， $(\boldsymbol{\theta}', \mathbf{U}')$ 的联合分布是在所有形如 (θ', U') 的对组成的集合上的均匀分布，其中 θ' 是从 $[k]$ 到 $V(G)$ 的单射，且 U' 是 $V(G)$ 的子集 $\setminus \theta'([k])$，其大小为 $m-k$。初等计数证实，这两个样本空间具有相同的基数 $n!/((n-m)!(m-k)!)$。因此，对于这样的 (U, θ) 和 (U', θ')，有

$$\mathbb{P}\big[(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{U}) = (\theta, U)\big] = \mathbb{P}\big[(\boldsymbol{\theta}', \mathbf{U}') = (\theta', U')\big] = \frac{(n-m)!(m-k)!}{n!}.$$

因此，要证明 $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E']$，我们只需在满足 E 的 (θ, U) 集合与满足 E' 的 (θ', U') 集合之间构造一个双射。对于每个大小为 m、且 $G[U_0]$ 与 $|H^\tau|$ 同构的 $U_0 \subseteq V(G)$，我们固定一个从 $|H^\tau|$ 到 $G[U_0]$ 的同构 f_{U_0}： $V(H^\tau) \to U_0$。利用这一同构，我们构造所需的双射。给定一对满足 E 的 (θ, U)，我们按如下方式定义相应的一对满足 E' 的 (θ', U')。根据 E 的定义， $G[U]$ 与 $|H^\tau|$ 同构。因此，我们有一个从 $|H^\tau|$ 到 $G[U]$ 的同构 f_U。我们定义 θ'： $[k] \to V(G)$ 为 $\theta' \mathrel{\mathsf{def}=} f_U \circ \theta$，并定义 $U' \mathrel{\mathsf{def}=} U \setminus \theta'([k])$。于是， (θ', U') 满足事件 E'。此外，这一构造是可逆的：给定一对满足 E' 的 (θ', U')，令 $U \mathrel{\mathsf{def}=} U' \cup \theta'([k])$ 和 $\theta \mathrel{\mathsf{def}=} f_U^{-1} \circ \theta'$，即可还原相应的一对满足 E 的 (θ, U)。至此，我们完成了等式 (8) 的证明，也就完成了引理的证明。

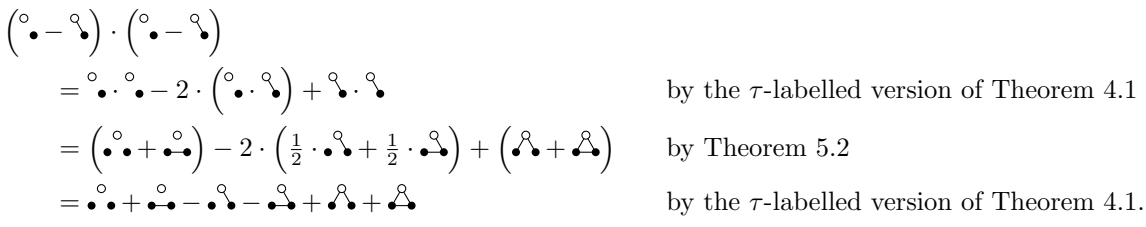
□

我们通过运用向下算子推导公式（4），来说明向下算子的用法。设 τ 为大小为 1 的唯一类型，即只有一个顶点且没有边的图。一个带 τ 标记的图（G， θ）也可以等价地视为一个带有指定顶点的图 G （即 $\theta(1)$）；下文我们采用这种观点。根据定理 5.1，不等式

$$\left(\begin{array}{c}\circ\\ \bullet\end{array} - \begin{array}{c}\circ\\ \bullet\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c}\circ\\ \bullet\end{array} - \begin{array}{c}\circ\\ \bullet\end{array}\right) \geq 0^\tau$$

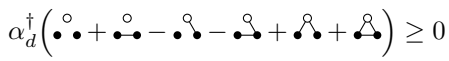
在旗代数的 τ 标记变体中成立。这里， 和 分别是顶点集为 $[2]$、 的 τ 标记无边图和 τ 标记单边图；指定顶点以空心圆表示。

我们展开乘积，然后利用成立的等式消去所有乘法：

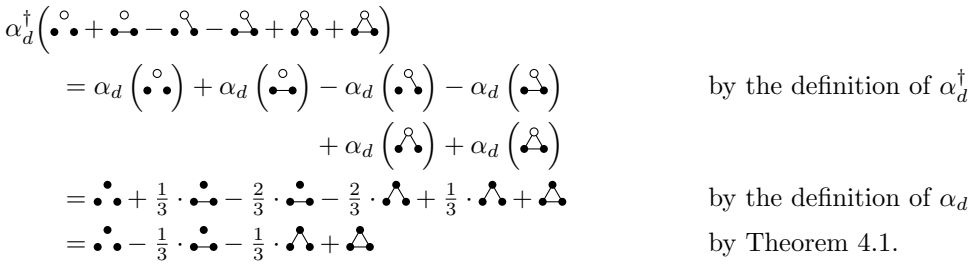

by the τ-labelled version of Theorem 4.1
by Theorem 5.2
by the τ-labelled version of Theorem 4.1.

这里，  和是顶点集为 [3] 的六个带 τ标记的图，其边集显而易见；与上文一样，特殊顶点用空心圆表示。

因此，根据定理 5.3，



是原始旗代数中的一个有效不等式。这个不等式蕴含公式（4）中的不等式，因为如下列一系列有效等式所示，前者的左边等于后者的左边：


by the definition of $\alpha_d^\dagger$
by the definition of α_d
by Theorem 4.1.

6 最后说明

我们从研究逻辑、编程语言、自动化验证和形式化方法的计算机科学家的视角介绍了旗代数。我们的介绍强调，旗代数构成了一个逻辑系统，可用于建立极值图论中的渐近不等式，并具有定义明确的语法、语义和证明策略。我们详细介绍了一种常见的证明策略：在旗代数的带标记变体中证明不等式——通常从显然有效的平方和不等式入手——然后使用向下算子将其传递到无标记情形。我们还指出，这种传递机制依赖于伴随对的概念，与伽罗瓦连接和范畴伴随颇为相似。正如这些概念关联了编程语言或逻辑的不同解释，伴随对也关联了旗代数的不同变体。

这一视角为逻辑与形式化方法领域的研究者指明了若干研究方向。首先，为旗代数发展一套证明论将会很有意义。文献已经分析了基于向下算子的策略的优势与局限。例如，已知当该策略被限定为从定理 5.1 中的平方和不等式出发时，它并不完备 [12, 4]。对 Razborov 最初提出的其他证明策略 [17]——例如基于向上算子或图微分的策略——开展类似分析，也将很有价值。更广泛地说，设计兼具良好证明论性质且在实践中仍然有效的旗代数证明系统，是一个颇具吸引力的研究方向。

其次，开发更有效的自动化方法和软件工具，以构造旗代数中的证明并求解由此产生的优化问题，将会很有意义。正如引言中所述，Flagmatic 在许多极值问题上取得了巨大成功，但它主要依赖于采用平方和起始不等式的向下算子方法，并且难以扩展到中等大小的模式图。因此，开发超越向下算子／平方和范式的可扩展自动化方法，是一项重要挑战。

致谢

我们谨此感谢 Joonkyung Lee、Sang-il Oum、Hyunwoo Lee、Taeyoung Kim 和 Jaewon Moon，感谢他们帮助我们理解 Razborov旗代数。本研究得到韩国国家研究基金会（NRF）资助，该基金由韩国政府（科学技术信息通信部）拨款支持（编号：RS-2023-00279680）。

参考文献

[1] Rahil Baber与John M. Talbot. 3-图的新Tur´an密度. Electron. J. Comb., 19(2):22, 2012年.[2] J´ozsef Balogh、Ping Hu、Bernard Lidick´y与Florian Pfender. 诱导5-圈的最大密度由5-圈的迭代膨胀实现. Eur. J. Comb., 52:47–58, 2016年.[3] J´ozsef Balogh、Ping Hu、Bernard Lidick´y、Florian Pfender、Jan Volec与Michael Young. 三着色图中的彩虹三角形. J. Comb. Theory B, 126:83–113, 2017年.[4] Grigoriy Blekherman、Annie Raymond、Mohit Singh与Rekha R Thomas. 不存在平方和证明的简单图密度不等式. Combinatorica, 40(4):455–471, 2020年.[5] Marcel K de Carli Silva、Fernando M´ario de Oliveira Filho与Cristiane Maria Sato. 旗代数：初览. Nieuw Arch. Wiskd.(5), 17(3):193–199, 2016年.[6] Victor Falgas-Ravry与Emil R. Vaughan. 半定方法在3-图Tur´an密度问题上的应用. Comb. Probab. Comput., 22(1):21–54, 2013年.[7] A. W. Goodman. 论任意聚会上的熟人与陌生人集合. Amer. Math. Monthly, 66(9):778– 783, 1959年.[8] Andrzej Grzesik. 论无三角形图中五圈的最大数目. J. Comb. Theory B, 102(5):1061–1066, 2012年.[9] Andrzej Grzesik. 极值图论中的旗代数. 博士论文, 雅盖隆大学, 2015年.[10] Andrzej Grzesik、Joonkyung Lee、Bernard Lidick˙y与Jan Volec. 论三部公共图. Combinatorics, Probability and Computing, 31(5):907–923, 2022年.[11] Hamed Hatami、Jan Hladk´y、Daniel Kr´al'、Serguei Norine与Alexander A. Razborov. 论无三角形图中五边形的数目. J. Comb. Theory A, 120(3):722–732, 2013年.[12] Hamed Hatami与Serguei Norine. 图同态密度中线性不等式的不可判定性. Journal of the American Mathematical Society, 24(2):547–565, 2011年.[13] L´aszl´o Lov´asz. 《大型网络与图极限》, Colloquium Publications第60卷. 美国数学学会, 2012年.[14] Willem Mantel. 问题28. Wiskundige Opgaven, 10:60–61, 1907年.[15] Olaf Parczyk、Sebastian Pokutta、Christoph Spiegel与Tibor Szab´o. 新的Ramsey重数界与搜索启发式方法. 计算数学基础, 25(5):1777–1814, 2025年.[16] Oleg Pikhurko、Jakub Sliacan与Konstantinos Tyros. 由旗代数计算得到的稳定性的强形式. J. Comb. Theory B, 135:129–178, 2019年.[17] Alexander A. Razborov. 旗代数. J. Symb. Log., 72(4):1239–1282, 2007年.[18] Alexander A. Razborov. 论图中三角形的最小密度. Comb. Probab. Comput., 17(4):603–618, 2008年.

[19] Alexander A. Razborov. 关于禁止出现4顶点构型的3-超图。*SIAM* 离散数学杂志，24(3):946–963，2010年。[20] Alexander A Razborov. 什么是旗代数？美国数学学会通讯，60(10):1324–1327，2013年。P´al Tur´an. 关于图论中的一个极值问题。*Matematikai ´es Fizikai Lapok*，48:436–452，1941年。