arXiv:2601.12783v1 [econ.TH] 19 Jan 2026

拟凹性、最优行动的凸性与局部单交叉性质

Kailin Chen

2026年1月19日

本文提出两个结果。首先，本文证明，在温和条件下，如果一个决策问题在每种信念下的最优行动集合都是凸集，那么该决策问题就是拟凹的。其次，本文证明，如果一个决策问题是拟凹的，那么对状态重新标记后，它满足局部单交叉性质。

1. 基本设定

一个决策问题 $\{\mathcal{A}, u\}$ 由以下两部分构成：(i) 行动集合 $\mathcal{A}$；(ii) 收益函数u：$\mathcal{A} \times \Theta \to \mathbb{R}$ （其中 $\Theta \subset \mathbb{R}$ 表示状态空间）。我们用 a 表示 $\mathcal{A}$中的任意行动。DM 选择一个行动 $a \in \mathcal{A}$，并在状态为 $\theta \in \Theta$时获得收益 $u(a, \theta)$。她对状态并不确定，并持有一个先验信念 $\boldsymbol{q}$。观察到某个实验发出的信号后，她依据贝叶斯法则更新信念，并选择使其期望收益最大的行动。

在本文中，我们令 $\Theta = \{\theta_0, \ldots, \theta_n\}$和 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$。为简单起见，我们假设以下两种情况之一成立：(i)$|\mathcal{A}| < \infty$，或 (ii) $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧区间，且 $u(a, \theta)$ 关于 a可微，对所有 θ均成立。

给定一个信念 $\boldsymbol{p}$，我们令 $u(a, \boldsymbol{p}) := \sum_{i=0}^{n} p_i u(a, \theta_i)$ 表示选择行动 a的期望收益。我们令 $\mathcal{A}^*(\boldsymbol{p}) := \arg\max_{a \in \mathcal{A}} u(a, \boldsymbol{p})$ 表示在$\boldsymbol{p}$下的最优行动集合。

定义 1：如果对于每个 $\boldsymbol{p} \in \Delta_n$，$\{\mathcal{A}, u\}$ 决策问题中的 $u(a, \boldsymbol{p})$ 作为 a 的函数是准-^凹的，那么该决策问题是准凹（*QCC*）。

陈：阿尔托大学，经济系，kailin.chen@aalto.fi。

2. 拟凹性与凸性的等价性

如果一个决策问题是 QCC，那么对于每个 $\boldsymbol{p}$，最优行动集合 $A^*(\boldsymbol{p})$ 相对于 A 是凸的。现在我们证明其逆命题。

2.1. 有限行动空间

考虑 $A=\{a_0,\ldots,a_k\}$。假设

$$\forall i\in\{0,\ldots,k\},\ \exists \boldsymbol{p}(i)\in\widehat{\Delta}_n \text{ such that } A^*(\boldsymbol{p}(i))=\{a_i\}. \tag{1}$$

根据Cheng 和 Borgers(2023) 中的定理1，(1) 等价于要求不存在弱支配行动。因此，可以通过迭代消除弱支配行动来施加条件 (1)，而不失一般性。

命题 1：如果 条件 (1) 成立，那么 $\{A,u\}$ 是 *QCC*，当且仅当 $A^*(\boldsymbol{p})$ 相对于 A 而言是凸的，对每个 $\boldsymbol{p}\in\Delta_n$均如此。

证明：对每个 $i\in\{0,\ldots,k-1\}$，令 $\mathcal{P}_i:=\{\boldsymbol{p}\in\Delta_n \mid u(a_i,\boldsymbol{p})>u(a_j,\boldsymbol{p})\ \forall j>i\}$，$\partial\mathcal{P}_i:=\partial\mathcal{P}_i\cap\text{int}\,\Delta_n$，并设 $\mathcal{P}_k:=\Delta_n$。对于 $i\neq j$，定义 $\mathcal{P}(i,j):=\{\boldsymbol{p}\in\Delta_n \mid u(a_i,\boldsymbol{p})=u(a_j,\boldsymbol{p})\}$。由于 $u(a,\boldsymbol{p})$ 关于 $\boldsymbol{p}$ 是仿射的，每个 $\{\boldsymbol{p} \mid u(a_i,\boldsymbol{p})>u(a_j,\boldsymbol{p})\}$都是一个开半空间，因此 $\mathcal{P}_0$ 是凸的，且 $\mathcal{P}_0\cap\text{int}\,\Delta_n$ 是开集。由 (1) 可得 $\mathcal{P}_0\neq\varnothing$；取 $\boldsymbol{p}(0)\in\mathcal{P}_0\cap\text{int}\ \Delta_n$。

对于每个 $\boldsymbol{p}\in\partial\mathcal{P}_0$，由连续性可得，对于所有 $j\geq 1$，$u(a_0,\ \boldsymbol{p})\geq u(a_j,\ \boldsymbol{p})$；又因为 $\boldsymbol{p}\notin\mathcal{P}_0$，存在 $i\geq 1$ 使得 $u(a_0,\ \boldsymbol{p})=u(a_i,\ \boldsymbol{p})$。因此 $\{a_0,a_i\}\subseteq A^*(\boldsymbol{p})$；由 $A^*(\boldsymbol{p})$ 关于 A 的凸性，$a_1\in A^*(\boldsymbol{p})$。所以 $\partial\mathcal{P}_0\subseteq\mathcal{P}(0,\ 1)\cap\text{int}\,\Delta_n$。

设 $L_{i,j}(\boldsymbol{p}):=u(a_i,\boldsymbol{p})-u(a_j,\boldsymbol{p})$，其中 $i\neq j$。那么 $\mathcal{P}(i,j)=\{\boldsymbol{p}\in\text{int}\,\Delta_n \mid L_{i,\ j}(\boldsymbol{p})=0\}$是一个仿射超平面，而 $\mathcal{P}(0,1)$ 将 int Δ_n 分成 $\{L_{0,1}>0\}$ 和 $\{L_{0,1}<0\}$。注意 $\mathcal{P}_0\subseteq\{L_{0,1}>0\}$。我们断言 $\{L_{0,1}>0\}\subseteq\mathcal{P}_0$。否则，取 $\boldsymbol{p}^*\in\{L_{0,1}>0\}\setminus\mathcal{P}_0$，并考察 $\boldsymbol{p}^t=(1-t)\boldsymbol{p}(0)+t\boldsymbol{p}^*$。由于 $\mathcal{P}_0$ 是凸的，$\mathcal{P}_0\cap\text{int}\ \widehat{\Delta}_n$ 是开集，且$\boldsymbol{p}(0)\in\text{int}\ \widehat{\Delta}_n$，因此存在 $t\in(0,1)$，使得 $\boldsymbol{p}^t\in\partial\mathcal{P}_0$ 且 $\boldsymbol{p}\in\text{int}\ \widehat{\Delta}_n$。于是，$\boldsymbol{p}^t\in\widehat{\partial\mathcal{P}}_0$。那么$\boldsymbol{p}^t\in\mathcal{P}(0,1)\cap\text{int}\ \widehat{\Delta}_n$，所以 L_0,1$(\boldsymbol{p}^t)=0$，但 L_0,1 是仿射的，且 L_0,1$(\boldsymbol{p}(0))>0$, L_0,1$(\boldsymbol{p}^*)>0$，因此 L_0,1$(\boldsymbol{p}^t)>0$，矛盾。因此 $\mathcal{P}_0=\{L_{0,1}>0\}$，且 $\widehat{\partial\mathcal{P}}_0=\mathcal{P}(0,1)\cap\text{int}\ \widehat{\Delta}_n$。

我们声称，对于每个 $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}(0,\ 1)\cap\text{int},\ A^*(\boldsymbol{p})=\{a_0,a_1\}$ 成立。等价地，对于每个 $i>1$，(i) $\mathcal{P}(0,\ i)=\mathcal{P}(0,\ 1)$ 与 (ii) $\mathcal{P}(0,\ i)$ 均不会在某个 $\boldsymbol{p}\in\text{int}\ \Delta_n$ 处与 $(0,\ 1)$ 相交，

cur。对于 (i)：由于 $L_{0,j}$ 是仿射的，$\mathcal{P}(0,i) = \mathcal{P}(0,1)$ 蕴含 $L_{0,i} = \alpha L_{0,1}$ with $\alpha \neq 0$。于是，对所有 $\boldsymbol{p}$，$u(a_i,\boldsymbol{p}) = (1-\alpha)u(a_0,\boldsymbol{p}) + \alpha u(a_1,\boldsymbol{p})$，这意味着要么 a_i 永远不是唯一最优的 ($\alpha \in [0,1]$)，要么使得 a_1 ($\alpha > 1$) 或 a_0 ($\alpha < 0$) 永远不是唯一最优的——这与 (1) 矛盾。因此，$\mathcal{P}(0,i) \neq \mathcal{P}(0,1)$。对于 (ii)：令 $\boldsymbol{p}^\times \in \mathcal{P}(0,1) \cap \mathcal{P}(0,i) \cap \operatorname{int}\Delta_n$。由于这些超平面彼此不同，存在 v with $L_{0,i}(v) = 0$ and $L_{0,1}(v) > 0$。对于足够小的 $t > 0$，$\boldsymbol{p}^t := \boldsymbol{p}^\times + tv \in \operatorname{int}\widehat{\Delta}_n$ 满足 $L_{0,i}(\boldsymbol{p}^t) = 0$ and $L_{0,1}(\boldsymbol{p}^t) > 0$，因此 $\boldsymbol{p}^t \in \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}(0,i)$，这与 $\mathcal{P}_0 = \{\boldsymbol{p} \mid u(a_0,\boldsymbol{p}) > u(a_j,\boldsymbol{p})\ \forall j \geq 1\}$ 矛盾。因此

$$u(a_1,\boldsymbol{p}) > u(a_j,\boldsymbol{p}) \quad \forall \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}(0,1) \cap \operatorname{int}\widehat{\Delta}_n,\ \forall j > 1. \tag{2}$$

我们断言 $\{L_{0,1} > 0\} \subseteq \{L_{1,j} > 0\}$ 对每个 $j > 1$都成立。否则，取 $j > 1$ 和 $\boldsymbol{p}' \in \{L_{0,1} > 0\}$，使得 $L_{1,j}(\boldsymbol{p}') \leq 0$。根据（1），并在必要时进行小幅扰动，取 $\boldsymbol{p}(j) \in \operatorname{int}\widehat{\Delta}_n$，使得 $A^*(\boldsymbol{p}(j)) = \{a_j\}$。对于每个 $\boldsymbol{p} \in \{L_{0,1} > 0\}$，我们都有 $A^*(\boldsymbol{p}) = \{a_0\}$，因为 $\{L_{0,1} > 0\} = \mathcal{P}_0$；此外，由于 L_0 的连续性，对于每个 $\boldsymbol{p} \in \{L_{0,1} = 0\}$，我们都有 $a_0 \in A^*(\boldsymbol{p})$。因此 $\boldsymbol{p}(j) \in \{L_{0,1} < 0\}$，所以 $L_{0,1}(\boldsymbol{p}(j)) < 0$。又因为 $A^*(\boldsymbol{p}(j)) = \{a_j\}$，这意味着 $L_{1,j}(\boldsymbol{p}(j)) < 0$。考虑 $\boldsymbol{p}^t = (1-t)\boldsymbol{p}(j) + t\boldsymbol{p}'$。由于 $\widehat{\Delta}_n$是凸的，且 $\boldsymbol{p}(j) \in \operatorname{int}\widehat{\Delta}_n$，我们对所有 $t \in [0,1)$ 都有 $\boldsymbol{p}^t \in \operatorname{int}\widehat{\Delta}_n$。因为 $L_{0,1}(\boldsymbol{p}(j)) < 0 < L_{0,1}(\boldsymbol{p}')$，存在 $t \in (0,1)$，使得 $L_{0,1}(\boldsymbol{p}^t) = 0$，且 $\boldsymbol{p}^t \in \mathcal{P}(0,1) \cap \operatorname{int}\widehat{\Delta}_n$。根据（2），$L_{1,j}(\boldsymbol{p}^t) > 0$。然而，$L_{1,j}$是仿射的，且 $L_{1,j}(\boldsymbol{p}(j)) < 0, L_{1,j}(\boldsymbol{p}') \leq 0$，因此 $L_{1,j}(\boldsymbol{p}^t) \leq 0$，矛盾。

因此 $\mathcal{P}_1 = \cap_{j>1}\{L_{1,j} > 0\}$，又由于对所有 $j > 1$ 都有 $\mathcal{P}_0 = \{L_{0,1} > 0\} \subseteq \{L_{1,j} > 0\}$，我们得到 $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_1$。将同样的论证应用于 (1, 2)（以 (1) $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 替换 (0, 1)，针对 $i = 1$，并通过小幅扰动取 $\boldsymbol{p}(1) \in \operatorname{int}\Delta_n$），可得 $\partial\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(1,2) \cap \operatorname{int}\Delta_n$，以及 $\mathcal{P}_1 = \{L_{1,2} > 0\}$。对 $i = 0, \ldots, k-1$ 反复应用此论证，得到链 $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}_k$（其中 $\mathcal{P}_k = \Delta_n$），并将每个区域确定为 $\mathcal{P}_i = \{L_{i,i+1} > 0\}$（对 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$）。

因此，相邻比较半空间是嵌套的：$\{L_{0,1} > 0\} \subseteq \{L_{1,2} > 0\} \subseteq \cdots \subseteq \{L_{k-1,k} > 0\}$。对于每个 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ 以及任意 $\boldsymbol{p}$，令 $D_i(\boldsymbol{p}) := L_{i,i+1}(\boldsymbol{p}) = u(a_i,\boldsymbol{p}) - u(a_{i+1},\boldsymbol{p})$。如果 $D_i(\boldsymbol{p}) > 0$，那么 $\boldsymbol{p} \in \{L_{i,i+1} > 0\}$，并且根据嵌套性，对于每个 $j > i$，我们都有 $\boldsymbol{p} \in \{L_{j,j+1} > 0\}$ 且 $D_j(\boldsymbol{p}) > 0$。反之，如果 $D_i(\boldsymbol{p}) < 0$，那么 $\boldsymbol{p} \notin \{L_{i,i+1} > 0\}$。对于每个 $j < i$，由于 $\{L_{j,j+1} > 0\} \subseteq \{L_{i,i+1} > 0\}$，可得 $\boldsymbol{p} \notin \{L_{j,j+1} > 0\}$且 $D_j(\boldsymbol{p}) \leq 0$。因此，对于每个 $\boldsymbol{p}$，序列 $i \mapsto u(a_i,\boldsymbol{p})$都是单峰的，并且 $\{A, u\}$ 是QCC。

证毕。

2.2. 连续行动空间

考虑$A=[a,\bar{a}]$，并假设对于所有 θ，$u(a,\theta)$在 a 上可微。假设

$$\exists \boldsymbol{p}(\underline{a}),\boldsymbol{p}(\bar{a})\in\widehat{\Delta}_n \text{ such that } \underline{a}\in A^*(\boldsymbol{p}(\underline{a})),\ \bar{a}\in A^*(\boldsymbol{p}(\bar{a})). \tag{3}$$

通过从 A 两端迭代剔除严格劣势行动，可以在不失一般性的前提下施加条件 (3)。此外，由于 $u(a,\boldsymbol{p})$ 关于 $(a,\boldsymbol{p})$ 连续，且 A 是紧集，根据 Berge最大值定理，$A^*(\boldsymbol{p})$ 非空、取紧值，并且关于 $\boldsymbol{p}$ 上半连续。令 $S:=\{(\boldsymbol{p},a)\in\Delta_n\times A\mid a\in A^*(\boldsymbol{p})\}$ 为 A^* 的图。于是 S 是紧集，因此其投影 $K:=\{a\in A\mid\exists\boldsymbol{p}\in\Delta_n$（其中 $a\in A^*(\boldsymbol{p})\}$）非空且紧。因此，端点 $a^*:=\min K$ 和 $\bar{a}^*:=\max K$ 可在某个 $\succsim\boldsymbol{p}(a^*)$ $\boldsymbol{p}(\bar{a}^*)\in\Delta_n$ 处取到，而将 A 替换为 $[a^*,\bar{a}^*]$ 即可得到 (3)。

命题 2：若 (3) 成立，则 $\{A,u\}$ 是 *QCC*，前提是 $A^*(\boldsymbol{p})$ 对每个$\succsim\boldsymbol{p}\in\Delta_n$都是凸的。

现在我们证明命题 2。为简单起见，假设 $A^*(\boldsymbol{p})$ 对每个$\succsim\boldsymbol{p}\in\Delta_n$ 都是单点集，并将 $a^*(\boldsymbol{p})$ 记为唯一的最优解。根据 Berge最大值定理，$a^*(\boldsymbol{p})$ 关于 $\boldsymbol{p}$连续。

对 $a\in(\underline{a},\bar{a})$ 定义次水平区域

$$\mathcal{C}(a):=\{\boldsymbol{p}\in\widehat{\Delta}_n\mid a^*(\boldsymbol{p})<a\},$$

其内部边界

$$\widehat{\partial\mathcal{C}}(a):=\partial\mathcal{C}(a)\cap\operatorname{int}\widehat{\Delta}_n,$$

a处的一阶条件超平面

$$\mathcal{D}(a):=\left\{\boldsymbol{p}\in\widehat{\Delta}_n\ \middle|\ \frac{\partial u(a,\boldsymbol{p})}{\partial a}=0\right\}.$$

注意，$\mathcal{D}(a)$ 是与 Δ_n 相交的仿射超平面。由于 $a^*(\cdot)$ 连续，$\succsim\mathcal{C}(a)$ 在 Δ_n 中是（相对）开集，等价地，$\mathcal{C}(a)\cap\operatorname{int}\Delta_n$ 是开集。

固定 $\bar{a}\in(a,\bar{a})$ 和 $\boldsymbol{p}\in\partial\mathcal{C}(a)$，$a^*(\cdot)$ 的连续性迫使 $a^*(\boldsymbol{p})=a$。由于 a 是 A 的内部点，在 $\boldsymbol{p}$ 处的最优性给出一阶条件 $\partial u(a,\boldsymbol{p})/\partial a=0$。因此

$$\widehat{\partial\mathcal{C}}(a)\subseteq\mathcal{D}(a)\cap\operatorname{int}\widehat{\Delta}_n. \tag{4}$$

回顾命题 1 中的离散情形（其中我们首先证明了 $\partial\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}(0,\ 1) \cap$ 内 Δ_n，随后将其提升为等式），我们的下一个目标是连续类比：

$$\widehat{\partial\mathcal{C}}(a) = \mathcal{D}(a) \cap \operatorname{int} \widehat{\Delta}_n. \tag{5}$$

注意，（6）是直观的：如果 $\mathcal{C}(a)$ 的内部边界包含于一个超平面中，那么在内部，它必然与该超平面重合；否则，内部边界就会出现“空洞”。我们通过以下引理将这一点形式化。

引理1：令 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ 非空、开、凸且连通。令$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ 在$\mathcal{O}$中相对开，并设$\mathcal{C}' := \mathcal{C} \cap \mathcal{O}$且 $\widehat{\partial\mathcal{C}'} = \partial\mathcal{C} \cap \mathcal{O}$。令 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^k$为一个仿射超平面，并令 $\mathcal{D} := \mathcal{D} \cap \mathcal{O}$。若（i） $\partial\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$、（ii） $\mathcal{C}' \neq \varnothing$，且（iii） $\mathcal{O} \setminus \mathcal{C}'$ 在$\mathcal{O}$ 中具有非空内部，则 $\partial\mathcal{C} = \mathcal{D}$。

证明：令 $\mathcal{B} := \mathcal{O} \setminus \mathcal{D}$。由于 $\mathcal{O}$ 是开集，$\mathcal{C}'$ 在 $\mathcal{O}$中是开集，并且

$$\widehat{\partial\mathcal{C}} = \partial\mathcal{C} \cap \mathcal{O} = \partial_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}').$$

由于 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{O}$中是开集，对于任意 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$，我们有

$$\partial_{\mathcal{B}}(\mathcal{S} \cap \mathcal{B}) = \partial_{\mathcal{O}}\mathcal{S} \cap \mathcal{B}.$$

将此应用于 $\mathcal{S} = \mathcal{C}'$，得到

$$\partial_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}' \cap \mathcal{B}) = \partial_{\mathcal{O}}\mathcal{C}' \cap \mathcal{B} = \widehat{\partial\mathcal{C}} \cap \mathcal{B}.$$

由于 $\partial\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$，我们有 $\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{B} = \varnothing$，因此 $\partial_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}' \cap \mathcal{B}) = \varnothing$。所以 $\mathcal{C}' \cap \mathcal{B}$ 在 $\mathcal{B}$中既开又闭（既开又闭集）。

情形 *1*： $\mathcal{D} = \varnothing$。那么 $\mathcal{B} = \mathcal{O}$ 是连通的，因此 $\mathcal{C}' \cap \mathcal{B} \in \{\varnothing, \mathcal{O}\}$，从而 $\mathcal{C}' \in \{\varnothing, \mathcal{O}\}$，这与 (ii)–(iii) 矛盾（其补集的内部将为空）。

情形 *2*： $\mathcal{D} \neq \varnothing$。那么 $\mathcal{B} = \mathcal{O} \setminus \mathcal{D}$ 恰有两个连通分支，记为 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$（由 $\mathcal{D}$确定的两个开半空间与 $\mathcal{O}$的交集）。由于 $\mathcal{C}' \cap \mathcal{B}$ 在$\mathcal{B}$中既开又闭，因此它必为 $\varnothing$、 $\mathcal{B}_1$、 $\mathcal{B}_2$或 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$（$= \mathcal{B}$）之一。

- 如果 $\mathcal{C}' \cap \mathcal{B} = \varnothing$，那么$\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{D}$。由于 $\mathcal{C}'$ 在 $\mathcal{O}$ 中是开集，且 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{O}$ 中的内部为空，因此可得 $\mathcal{C}' = \varnothing$，这与 (ii) 矛盾。

- 如果 $\mathcal{C}' \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}$，那么 $\mathcal{O} \setminus \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{D}$，其在 $\mathcal{O}$ 中的内部为空——这与 (iii) 矛盾。

- 因此，对于某个 $i \in \{1,2\}$，有 $\mathcal{C}' \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}_i$。记 $K := \mathcal{C}' \cap \mathcal{D}$，于是 $\mathcal{C}' = \mathcal{B}_i \cup K$。由于 $\mathcal{C}'$ 在 $\mathcal{O}$中是开集，K 必为空（$K \subset \mathcal{D}$ 中的任意点在 $\mathcal{O}$ 中都有邻域与两个分支相交）。因此 $K = \varnothing$ 且 $\mathcal{C}' = \mathcal{B}_i$。最后，

$$\widehat{\partial \mathcal{C}} = \partial_{\mathcal{O}} \mathcal{C}' = \partial_{\mathcal{O}} \mathcal{B}_i = \widehat{\mathcal{D}},$$

正如所声称的。 *Q.E.D.*

我们将引理 1 应用于 $\mathcal{O} = \operatorname{int} \Delta_n$、$\mathcal{C} = \mathcal{C}(a)$ 和 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(a)$。此外，根据 (3) 以及 $a^*(\cdot)$ 的连续性，$\mathcal{C}(a)$ 和 $\mathcal{C}^c(a) := \{\boldsymbol{p} \in \Delta_n \mid a^*(\boldsymbol{p}) > a\}$ 在 Δ_n 中均为开集且非空。因此，$\mathcal{C}(a) \cap \operatorname{int} \Delta_n$ 和 $\mathcal{C}^c(a) \cap \operatorname{int} \Delta_n$ 均为非空开集。故 $\operatorname{int} \widehat{\Delta}_n \setminus (\mathcal{C}(a) \cap \operatorname{int} \widehat{\Delta}_n)$ 在 $\operatorname{int} \widehat{\Delta}_n$ 中具有非空内部。于是，根据引理 1，我们证明了

$$\widehat{\partial \mathcal{C}}(a) = \mathcal{D}(a) \cap \operatorname{int} \widehat{\Delta}_n. \tag{6}$$

根据（6），我们得到

$$\frac{\partial u(a, \boldsymbol{p})}{\partial a} = 0 \iff a \in A^*(\boldsymbol{p}) \quad \forall \boldsymbol{p} \in \widehat{\Delta}_n,\ a \in (\underline{a}, \overline{a}). \tag{7}$$

“$\Leftarrow$”这一蕴含显然成立。对于“$\Rightarrow$”：若 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{D}(a) \cap \operatorname{int} \Delta_n$，则由 (6) 得 $\boldsymbol{p} \in \partial \mathcal{C}(a)$，因此 $a^*(\boldsymbol{p}) = a$。对于 $\boldsymbol{p} \in \partial \Delta_n$，取 $\boldsymbol{p}^m \in \mathcal{D}(a) \cap \operatorname{int} \Delta_n$，使得 $\boldsymbol{p}^m \to \boldsymbol{p}$；由 $a^*(\cdot)$ 的连续性可得 $a^*(\boldsymbol{p}) = a$。

现在固定 $\boldsymbol{p}$，使得 $a^*(\boldsymbol{p})^- \in (a, a)$。我们声称，对于每个 $a \in (a, a^*(\boldsymbol{p}))$，都有 $\partial u(a, \boldsymbol{p})/\partial a > 0$。否则，取 $a' < a^*(\boldsymbol{p})$，使得 $\partial u(a', \boldsymbol{p})/\partial a \leq 0$。若 $\partial u(a', \boldsymbol{p})/\partial a = 0$，则根据 (7)，必有 $a' = a^*(\boldsymbol{p})$，矛盾。若 $\partial u(a', \boldsymbol{p})/\partial a < 0$，则由于 $a^*(\boldsymbol{p})$ 使 $u(\cdot, \boldsymbol{p})$ 最大，我们有 $u(a^*(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p}) > u(a', \boldsymbol{p})$。根据中值定理，存在$a'' \in (a', a^*(\boldsymbol{p}))$，使得

$$\frac{\partial u(a'', \boldsymbol{p})}{\partial a} = \frac{u(a^*(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p}) - u(a', \boldsymbol{p})}{a^*(\boldsymbol{p}) - a'} > 0.$$

根据达布定理（导数具有介值性质），存在$a^0 \in (a', a'')$，使得 $\partial u(a^0, \boldsymbol{p})/\partial a = 0$；于是由 (7) 得到 $a^0 = a^*(\boldsymbol{p})$，再次导出矛盾。因此，对所有 $a \in (a, a^*(\boldsymbol{p}))$，都有 $\partial u(a, \boldsymbol{p})/\partial a > 0$。对称地可得，对于每个 $a \in (a^*(\boldsymbol{p}), a)$，都有 $\partial u(a, \boldsymbol{p})/\partial a < 0$。因此，$u(a, \boldsymbol{p})$ 在 (a, a) 上是单峰的，并且由连续性可知，它在 $[a, a]$ 上也是单峰的，从而证明了拟凹性。

此外，考虑端点 $a, \bar{a}$ （导数从 $\underline{A}$ 内部取值）。若 $a^*(\boldsymbol{p}) = a$，则 $\partial u(a, \boldsymbol{p}) / \partial a \leq 0$。现在证明，对于每个 $a' \in (a, \bar{a})$，不可能有 $\partial u(a', \boldsymbol{p}) / \partial a \geq 0$。事实上，若 $\partial u(a', \boldsymbol{p}) / \partial a = 0$，则由 (7) 可得 $a^*(\boldsymbol{p}) = a'$，矛盾。若 $\partial u(a', \boldsymbol{p}) / \partial a > 0$，那么，由于根据 a 的最优性可知 $u(a', \boldsymbol{p}) \leq u(a, \boldsymbol{p})$，中值定理推出存在 $a'' \in (a, a')$，使得

$$\frac{\partial u(a'', \boldsymbol{p})}{\partial a} = \frac{u(a', \boldsymbol{p}) - u(\underline{a}, \boldsymbol{p})}{a' - \underline{a}} \leq 0.$$

若等号成立，则 $\partial u(a'', \boldsymbol{p}) / \partial a = 0$，而（7）给出 $a^*(\boldsymbol{p}) = a'' > a$，这就产生了矛盾；因此 $\partial u(a'', \boldsymbol{p}) / \partial a < 0$。根据达布定理，存在 $a^0 \in (a'', a')$，使得 $\partial u(a^0, \boldsymbol{p}) / \partial a = 0$，这再次与（7）矛盾。因此，当 $a^*(\boldsymbol{p}) = a$ 时，对所有 $a \in (a, \bar{a})$，都有 $\partial u(a, \boldsymbol{p}) / \partial a < 0$。$a^*(\boldsymbol{p}) = \bar{a}$ 的情形类似（不等号方向相反）。

因此，对于每个 $\boldsymbol{p}$，$u(a, \boldsymbol{p})$ 都是单峰的，从而确立了 QCC。

最后，当 $A^*(\boldsymbol{p})$ 不总是单点集时，对于每个 $\boldsymbol{p}$，都存在 $\alpha(\boldsymbol{p}) \leq \beta(\boldsymbol{p})$，使得 $A^*(\boldsymbol{p}) = [\alpha(\boldsymbol{p}) \ \beta(\boldsymbol{p})]$。根据 Berge最大值定理，$A^*(\cdot)$ 非空、紧值且上半连续；因此，（i）$\alpha(\cdot)$ 上半连续，并且（ii）$\beta(\cdot)$ 是下半连续的。重复上述论证——令“左侧”为 $\mathcal{C}(a) := \{\boldsymbol{p} \in \Delta_n \mid \alpha(\boldsymbol{p}) < a\}$，令“右侧”为 $\mathcal{C}^{\uparrow}(a) := \{\boldsymbol{p} \in \widehat{\Delta}_n \mid \beta(\boldsymbol{p}) > a\}$ ——可得，$u(a, \boldsymbol{p})$ 在 $[a, \alpha(\boldsymbol{p})$ 上关于 a 弱递增，$]$，在 $[\alpha(\boldsymbol{p}) \ \beta(\boldsymbol{p})]$，上为常数，并且在 $[\beta(\boldsymbol{p}) \ a]$上弱递减。因此，对于每个 $\boldsymbol{p}$，$u(a, \boldsymbol{p})$ 关于 a 是单峰的，从而确立了 QCC。

3. 与局部单交叉性质的关系

向量 $\boldsymbol{b} = (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 是拟单调的，当且仅当存在 $k \in \{1, \ldots, n\}$，使得对所有 $i < k$ 均有 $b_i \leq 0$，且对所有 $i \geq k$ 均有 $b_i \geq 0$。

考虑具有 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ 的决策问题 $\{\mathcal{A}, u\}$。回想一下，我们假设满足以下条件之一：(i) $\mathcal{A} = \{a_0, \ldots, a_k\}$，或 (ii) $\mathcal{A} = [a, \bar{a}]$ 且 $u(a, \theta)$ 关于 a 可微，对所有 θ 均成立。在情形(i)中，对每个 $i \geq 1$，定义 $\Delta u(a_i, \theta) := u(a_i, \theta) - u(a_{i-1}, \theta)$，并令 $\Delta u(a_0, \theta) \equiv 0$。在情形(ii)中，对每个 $a \in \mathcal{A}$，定义 $\Delta u(a, \theta) := \partial u(a, \theta) / \partial a$。如果对每个 $a \in \mathcal{A}$，向量 $\big(\Delta u(a, \theta_0) \ldots, \Delta u(a, \theta_n)\big)$ 是拟单调的，则该决策问题具有局部单交叉（LSC）性质。请注意，Milgrom 和 Shannon（1994年）的单交叉性质以及 Quah 和 Strulovici（2009年）的区间支配序性质均蕴含 LSC，但反之未必成立。

命题 3：如果一个决策问题是 *QCC*，则存在一个双射 β：$\Theta \to \Theta$，使得在由 β重新标记的状态空间上，该问题具有 *LSC* 性质。

证明：对于每个 $\theta \in \Theta$，定义 $a^*(\theta) := \min\{\arg\max_{a \in A} u(a,\theta)\}$。按 $a^*(\theta)$ 非递减的顺序重新标记状态，遇到相同值时任意打破平局；令 β：$\Theta \to \Theta$ 表示由此得到的双射。固定 $\theta, \theta' \in \Theta$，使得 $a^*(\theta) \le a^*(\theta')$。根据 QCC，$u(\cdot,\theta)$ 和 $u(\cdot,\theta')$ 均为单峰函数，其众数分别为 $a^*(\theta)$ 和 $a^*(\theta')$。对于每个 $a \in A$，若 $\Delta u(a,\theta) > 0$，则由 $u(\cdot,\theta)$ 的单峰性可知 $a \le a^*(\theta) \le a^*(\theta')$，因此 $\Delta u(a,\theta') \ge 0$。同理，若 $\Delta u(a,\theta') < 0$，则 $a \ge a^*(\theta') \ge a^*(\theta)$，因此 $\Delta u(a,\theta) \le 0$。因此，沿着由 β 诱导的顺序，向量 $\big(\Delta u(a,\theta)\big)_{\theta \in \Theta}$ 是拟单调的。故该决策问题满足 LSC。证毕。

参考文献

CHENG, XIENAN AND TILMAN BORGERS (2023)：《支配与最优性》，工作论文。 [2]MILGROM, PAUL AND CHRIS SHANNON (1994)：《单调比较静态》，*Econometrica*，62，157–180.[7]QUAH, JOHN AND BRUNO STRULOVICI (2009)：《比较静态、信息性与区间支配序》，*Econometrica*，77，1949–1992。 [7]