arXiv:2601.12825v1 [math.CV] 19 Jan 2026

Berndtsson 定理关于直接像正性的逆命题

WANG XU 和 HUI YANG

Abstract. Berndtsson 的著名定理断言，对于紧致 K¨ahler 纤维化 $p: X \to Y$，半正定厄米全纯线丛 $L \to X$ 的直像丛 $p_*(K_{X/Y} \otimes L)$ 是中野半正的。作为我们先前工作的延续，我们证明了射影纤维化情形下 Berndtsson 定理的一个逆命题：如果对于每个半正定厄米全纯线丛 $E \to X$，$p_*(K_{X/Y} \otimes L \otimes E)$ 都是 Griffiths 半正的，那么 L 的曲率必为半正。

1. Introduction

正性概念，如多重次调和性、Griffiths 正性和中野正性，在多复变函数论中发挥着重要作用。在 L^2 理论¯中，关于 ∂-算子的许多基本结果都与这些正性概念密切相关。例如，给定伪凸区域上的一个多重次调和函数，有 H¨ ormander 的 L^2 存在定理、Skoda 的 L^2 除法定理、Ohsawa-Takegoshi L^2 延拓定理，以及 B-locki 和 Guan-Zhou 建立的最优 L^2 延拓定理。这些结果是复分析、复几何、代数几何及其他相关领域中的有力工具。

正性也是 Berndtsson 的“复*Brunn-Minkowski*理论”的核心主题。在 [1] 和 [2], Berndtsson 建立了凸分析中经典 Pr´ekopa 定理的复数类比。特别地，他证明了逐纤维 Bergman 核的多重次调和变分。从更高阶的视角来看，Berndts- son [3] 进一步证明，在某些全纯纤维化下，正 Hermitian 全纯线丛的直接像丛是中野正。这些贡献构成了经典 Brunn-Minkowski理论的复对应物，并在复分析、K¨ahler 几何和代数几何中有广泛应用。

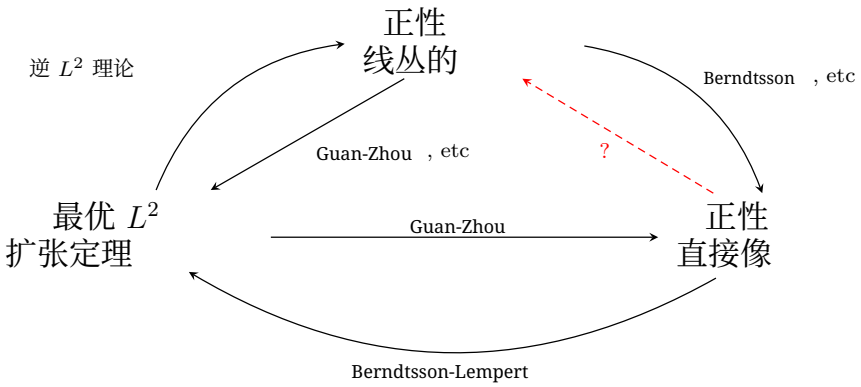
Berndtsson 的理论与 L^2 理论密切相关。他证明中的一个关键要素是 H¨ ormander 的 L^2 估计，用于 $\bar{\partial}$。此外，Guan-Zhou [9]证明，他们的最优 L^2 延拓定理蕴含逐纤维 Bergman 核的多重次调和变分以及直接像的 Griffiths 正性。反过来，Berndtsson-Lempert [4] 利用直接像的正性推导出了一个最优 L^2 延拓定理。

近年来，关于“逆 L^2 理论”已有大量研究（参见 [8, 10, 6, 7, 等]）。这一框架旨在通过各种针对 $\bar{\partial}$ 的 L^2 条件刻画正性概念，从而确立这些条件在 L^2 理论中的必要性。例如，Deng-Ning-Wang [6] 证明，满足“最佳 L^2 延拓条件”的上半连续函数必定是多重次调和函数。更多

第一作者获国家重点研发计划（编号：2024YFA1015200）和国家自然科学基金（编号：12501107）资助。

值得注意的是，邓宁王周 [7] 证明了中野正性（一种几何性质）与“最佳 L^2 估计条件”（一种解析性质）之间的等价性。这一刻画还为直接像的中野正性提供了一种新方法（参见 [7]）。

因此，正性是连接三个密切相关理论的基石： L^2 理论、逆 L^2 理论以及复Brunn-Minkowski理论。具体而言，以下图示展示了这一关系：



从这张图可以自然地提出一个问题：直接像的正性是否意味着原线丛在某种意义上具有正性？这个问题可视为逆向 L^2 理论的一个平行问题。然而，在这一方向上取得的成果有限。

为清晰起见，我们先回顾 Berndtsson 定理的表述。

定理1.1 (Berndtsson [3])。设 $p : X \to Y$ 是从一个 *Kähler* 流形 X 到一个连通复流形 Y 的真全纯次浸。设 (L, h) 是 X上的半正定厄米全纯线丛。则直像丛 $p_*(K_{X/Y} \otimes L)$ 上的诱导度量是中野半正的。

在 [11], 中，作者运用 Berndtsson-Lempert 方法以及“最优 L^2 延拓条件”对多重次调和函数的刻画，得到了上述定理的一个部分逆命题。

定理1.2 (Li-Xu-Zhou [11])。 设(L, h_L) 是射影流形Ω 上的厄米全纯线丛，其中 H^0(Ω $K_\Omega \otimes L$) $\neq \{0\}$。设 m 为正整数。假设对 $X := \mathbb{B}^m \times \Omega$上的任意半正定厄米全纯线丛$(E, h_E)$， $\mathbb{B}^m$上的 $K_{X/\mathbb{B}^m} \otimes p_2^* L \otimes E$ 的直接像都是 *Griffiths* 半正的，其中 $p_2 : X \to \Omega$ 是自然投影。那么(L, h_L) 的曲率是半正的。

因此，一族相关直接像的 Griffiths 正性（弱于中野正性的条件）意味着原线丛具有正性。根据 Berndtsson 定理，这些直接像实际上是中野半正的。然而，定理 1.2 在本质上是“外在的”，因为它涉及外部空间 $\mathbb{B}^m \times \Omega$ 上的线丛。显然，结果的“内在的”版本更为理想。

注意，逐纤维 Bergman 核的多重次调和变分是直接像正性的一个特例。在我们先前的工作中 [15], 采用了不同于 [12, 11], 的方法，我们得到了关于此类变分的 Berndtsson 定理的一个逆命题。

定理1.3 （Xu-Yang [15]）。设Ω 是 $\mathbb{C}_\tau^m \times \mathbb{C}_z^n$ 中的一个域，且 φ 是定义在Ω 上的强上半连续函数，满足 $B_{\Omega_\tau}(z;\ e^{-\varphi_\tau})$ 在Ω上不恒等于零。假设对于任意定义在 $\psi \geqslant 0$ 上的Ω多重次调和函数

$$(\tau, z) \mapsto \log B_{\Omega_\tau}(z; e^{-\varphi_\tau - \psi_\tau})$$

在Ω上也是多重次调和的。因此， φ 必须是一个多重次调和函数。这里，$\Omega_\tau :=\{z \in \mathbb{C}^n :\ (\tau, z) \in \Omega\}$, $\varphi_\tau := \varphi(\tau, \cdot)$ 且 $\psi_\tau := \psi(\tau, \cdot)$ 。

由于该逆命题仅涉及 Ω 上的函数，因此这一结果是内在的。此外，我们 [15] 给出了反例，表明附加的多重次调和权 ψ 是必要的。

本文的主要目标是证明以下定理，它是定理1.1的逆命题，其表述与定理1.3平行。

定理 1.4。设 $p:\ X \to Y$ 是从射影流形 X 到连通复流形 Y 的全纯下沉。设 (L, h_L) 是 X 上的厄米全纯线丛，且 $H^0(X_y, K_{X_y} \otimes L|_{X_y}) \neq \{0\}$ 对某个 $y \in Y$ 成立，其中 $X_y := p^{-1}(y)$ 。假设对于 X上的任意半正定厄米全纯线丛 (E, h_E) ，直像层 $p_*(K_{X/Y} \otimes L \otimes E)$ 都是 *Griffiths* 半正的。那么 (L, h_L) 的曲率是半正的。

定理 1.4 的条件可以稍微放宽，但为简洁起见，我们采用这一表述。直像层 $\mathcal{E} := p_*(K_{X/Y} \otimes L \otimes E)$ 可视为定义在 Y 上的向量空间丛，其在 $y \in Y$ 处的纤维为

$$\mathcal{E}_y := H^0(X_y, K_{X_y} \otimes L|_{X_y} \otimes E|_{X_y}).$$

L 和 E 上的厄米度量在 $\mathcal{E}$上诱导出一个 L^2 度量，其定义为

$$\|u_y\|^2 := \int_{X_y} |u_y|^2, \quad \forall u_y \in \mathcal{E}_y.$$

当 (L, h_L) 具有半正曲率时，$(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ 自然具有厄米全纯向量丛的结构 [3]。一般而言，$\mathcal{E}$ 不一定局部自由，因此我们将以奇异的意义定义 Griffiths 正性： $\mathcal{E}$ 若对任意局部全纯截面，$\log \|\xi\|$ 均为多重次调和函数，则称其为 Griffiths 半正 ξ 的$\mathcal{E}^*$。特别地，若 $\mathcal{E}$ 是 Griffiths 半正的，则相对 *Bergman* 核度量在 $K_{X/Y} \otimes L \otimes E$ 上具有半正曲率（详情见第 2 节）。

证明结合了 [11]和 [15], ，并运用了反证法。由于缺少全局坐标和平凡化，主要困难在于“局部化”。与定理1.2类似，假设X 是射影的，这确保了存在一个正 Hermitian 全纯线丛 $A \to X$ ，其上有 $H^0(X, A) \neq \{0\}$，从而可以构造一个半正定厄米全纯线丛 $E \to X$ 和一个全局全纯截面$f_E \in H^0(X, E)$，使其具有指定的局部行为。

将定理1.4与 Berndtsson 定理结合，可得如下直接推论。特别是，如果某个特殊族中的所有直接像均为 Griffiths 半正，那么它们实际上都是中野半正。

推论 1.5。设 $p:\ X \to Y$ 是从射影流形 X 到连通复流形 Y 的全纯下沉。设 (L, h_L) 是 X 上的厄米全纯线丛，使得 $H^0(X_y, K_{X_y} \otimes L|_{X_y}) \neq \{0\}$ ，其中某个 $y \in Y$成立。则以下陈述等价：

(1) (L, h_L) 的曲率是半正的；

(2) 对于任意半正定厄米全纯线丛 $E \to X$，直接像 $p_*(K_{X/Y} \otimes L \otimes E)$ 是中野半正的。(3) 对于任意半正定厄米全纯线丛 $E \to X$，直接像 $p_*($ $K_{X/Y} \otimes L \otimes E)$ 是 ***Griffiths*** 半正的。

本文其余部分的结构如下：第 2 节介绍必要的预备知识，第 3 节给出定理1.4的证明。

致谢。 作者衷心感谢其博士导师 Xiangyu Zhou教授 多年来给予的慷慨帮助。作者还要感谢 ZhiLi、ZhuoLiu 和 Xujun Zhang 就相关问题进行的有益讨论。

2. Preliminaries

本节回顾有关正性概念和直接像的一些预备材料。

线丛的正性概念。 设 (L, h_L) 是复流形 X 上的 Hermitian 全纯线丛。设 $U \subset X$ 是一个开集，在该开集上 L 是平凡的，并设 f_L 是 $L|_U$ 的一个全纯标架。记

$$|f_L|^2_{h_L} = e^{-\varphi_L},$$

于是，(L, h_L) 的陈曲率局部表示为 $i\partial\bar{\partial}\varphi_L \otimes \mathrm{Id}_L$。因此，$(L, h_L)$ 的陈曲率半正（分别为正）当且仅当局部权函数 φ_L 是拟次调和函数（分别为严格拟次调和函数）。此时，我们称线丛 (L, h_L) 是半正 （分别为正）。

一般而言，对于赋有奇异厄米度量的全纯线丛，其曲率流半正当且仅当该度量的局部权函数是拟次调和函数。特别地，我们关注以下例子。给定一个厄米全纯线丛 $(L, h_L) \to X$，定义其 Bergman 核为

$$B_L(z) := \sup\left\{ f(z) \otimes \overline{f(z)} : f \in H^0(X, K_X \otimes L), \int_X |f|^2_{h_L} \leqslant 1 \right\},$$

其中 K_X 是 X 的典范线丛。设$\mathbf{e}$ 是 $K_X \otimes L$ 的局部标架。记作 $B_L = b\mathbf{e}\otimes \mathbf{e}$, 并通过令 $|\mathbf{e}|^2 = 1/b$ 在 $K_X \otimes L$ 上定义一个可能奇异的厄米度量 $|\cdot|$。该度量称为***Bergman*** 核度量，且具有半正曲率。

向量丛的正性概念。设 (E, h_E) 是复流形 X （维数为 n）上的一个秩为 r 的厄米全纯向量丛。设 $(U, (z_1, \ldots, z_n))$ 是 X 的一个坐标图，使得 $E|_U$ 平凡；并设 $(e_1, \ldots, e_r)$ 是 $E|_U$ 的一个全纯标架。局部而言，(E, h_E) 的陈曲率张量可写为

$$\Theta(E, h_E) = \sum_{j,k,\alpha,\gamma} R^{\gamma}_{j\bar{k}\alpha} dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes e^*_\alpha \otimes e_\gamma.$$

我们定义

$$R_{j\bar{k}\alpha\bar{\beta}} := \sum_{\gamma} R^{\gamma}_{j\bar{k}\alpha} h_{\gamma\bar{\beta}}, \quad \text{where } h_{\gamma\bar{\beta}} := \langle e_\gamma, e_\beta \rangle_{h_E}.$$

Th向量丛 $(E,\ h_E)$ 称为 ***Griffiths*** 半正（分别地，正）当且仅当

$$\sum_{j,k,\alpha,\beta} R_{j\bar{k}\alpha\bar{\beta}} a_j \overline{a_k} b_\alpha \overline{b_\beta} \geqslant 0 \ (\text{resp. } > 0), \quad \forall\ a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}^r \setminus \{0\}.$$

此外，$(E,\ h_E)$ 称为 中野半正（分别地，正）当且仅当

$$\sum_{j,k,\alpha,\beta} R_{j\bar{k}\alpha\bar{\beta}} u_{j\alpha}\overline{u_{k\beta}} \geqslant 0 \ (\text{resp. } > 0), \quad \forall\ u \in \mathbb{C}^{nr} \setminus \{0\}.$$

当 $n = 1$ 或 $r = 1$时，这两种正性概念相同。一般而言，中野正性严格强于 Griffiths 正性。众所周知，(E, h_E) 是 Griffiths 半正的，当且仅当对于对偶丛 $|u|_{h_E^*}$ 的任意非消失局部全纯截面 u，E^*log [5]是拟次调和函数。这个刻画也可作为奇异厄米度量的 Griffiths 正性的定义（见 [5]）。

直接像。设 $p : X \to Y$ 是 K¨ahler 流形之间的真全纯次浸没，则所有纤维 $X_y := p^{-1}(y)$ 都是光滑且紧致的。设 (L, h_L) 是 X 上的厄米全纯线丛。我们考虑一个有限维向量空间丛，

$$E := \coprod_{y\in Y} E_y, \quad E_y := H^0(X_y, K_{X_y} \otimes L|_{X_y}). \tag{2.1}$$

记作

$$K_{X/Y} := K_X - p^* K_Y$$

p 的相对典范线丛，则存在一个自然同构

$$K_{X_y} \cong K_{X/Y}|_{X_y}.$$

因此，丛 E 正是直接像 $p_*(K_{X/Y} \otimes L)$。

假设 (L, h_L) 是半正的。根据 Ohsawa-Takegoshi L^2延拓定理的一种变体，任意元素 $u_y \in E_y$ 都可以延拓为全纯截面$u \in H^0(p^{-1}(U)\ K_{X/Y} \otimes L)$，其中 $U \subset Y$是以 y为中心的坐标球（见[3]）。从 E_y的一组基出发，我们得到 E的局部全纯标架，因此E 具有全纯向量丛的自然结构。此外，当我们赋予 E 自然的 L^2 度量时

$$\|u_y\|^2 := \int_{X_y} |u_y|^2_{h_L}, \quad \forall u_y \in E_y,$$

Berndtsson 的 [3] 定理断言 $(E, \|\cdot\|)$ 是中野半正的。

通过将 $K_{X_y} \otimes L|_{X_y}$ 与 $(K_{X/Y} \otimes L)|_{X_y}$等同，$K_{X_y} \otimes L|_{X_y}$ 上的纤维 Bergman 核度量拼合成 $K_{X/Y} \otimes L$上的一个度量，称为相对 ***Bergman*** 核度量。

直像的正性概念。设 $p :\ X \to Y$ 且（$L,\ h_L$）如上所述。一般而言，由（ E 式（2.1）定义的丛不一定是局部平凡的，因此我们以奇异意义为 E（或直像层 p_*（$K_{X/Y} \otimes L$））定义一个正性概念。

$U \subset Y$上的 E 的一个局部截面：

$$U \ni y \mapsto u_y \in H^0(X_y, K_{X_y} \otimes L|_{X_y}),$$

如果作为 p^{-1}（U）上的 $K_{X/Y} \otimes L$ 的截面是全纯的，则称其为全纯。此外，$U \subset Y$ 上的 E^* : $= \amalg_{y\in Y}$（E_y）* 的一个局部截面：

$$U \ni y \mapsto \xi_y \in \left(H^0(X_y, K_{X_y} \otimes L|_{X_y})\right)^*,$$

称为全纯，如果对于 E 的任意局部全纯截面 u，$y \mapsto \xi_y(u_y)$ 都是全纯的。最后，如果对于 E^* 的任意局部全纯截面 ξ，$y \mapsto \log \|\xi_y\|$ 都是拟次调和的，其中 $\|\cdot\|$ 是 E 上度量的度量对偶，则称丛 E （或直像层 $p_*(K_{X/Y} \otimes L)$）为 ***Griffiths*** 半正。当 E 确实是一个全纯向量丛时，这一定义与通常的定义一致。

如 [5], 所解释， $p_*(K_{X/Y}\otimes L$ 的 Griffiths 半正性将意味着 $K_{X/Y}\otimes L$ 上的相对 Bergman 核度量具有半正曲率:

设 $(\mathcal{N},\ (t,\ z))$ 是 X 的一个坐标图，使得 $p|_{\mathcal{N}}$ 是平凡纤维化 $(t,\ z)\ \mapsto\ t$。进一步假设 $\mathcal{N}$ 与 $\mathbb{C}_t^m\times\mathbb{C}_z^n$ 中的有界乘积域 $U\times D$ 双全纯，且 $L|_{\mathcal{N}}$ 是平凡的。设 $\mathbf{e}$ 是 $\mathcal{N}$ 上 L 的一个全纯标架，则 $dz\otimes\mathbf{e}$ 是 $\mathcal{N}$ 上 $K_{X/Y}\otimes L$ 的一个全纯标架。我们用 $\psi(t,\ z)$ 表示相对 Bergman 核度量的局部权函数，即

$$e^{\psi(t,z)}:=\sup\left\{|v_t(z)|^2:u_t\in E_t,\ \|u_t\|^2\leqslant 1,\ u_t|_D=v_tdz\otimes\mathbf{e}\right\}.$$

给定一个全纯映射 $h:\ U\to D$，我们可以定义 E^* 的一个局部全纯截面ξ

$$\xi_t(u_t):=v_t(h(t)),\quad \text{where } u_t\in E_t \text{ with } u_t|_D=v_tdz\otimes\mathbf{e}.$$

显然,

$$\|\xi_t\|^2=e^{\psi(t,h(t))}.$$

由于 $p_*(K_{X/Y}\otimes L)$ 是 Griffiths 半正的，我们知道 $\log\ \|\xi_t\|^2=\psi(t,\ h(t))$ 是拟次调和的。由于 $h:\ U\to D$ 是任意的，我们得出 $\psi(t,\ z)$ 是拟次调和的，因此相对 Bergman 核度量具有半正曲率。

3. The Proof of Theorem 1.4

在本节中，我们证明定理 1.4 的一个更强版本。

定理 3.1。 设 $p:X\to Y$ 是从一个维数为 $m+n$ 的 *Kähler* 流形 X 到一个维数为m的连通复流形 Y 的真全纯次浸没。设 (L,h_L) 是 X上的厄米全纯线丛。假设

(1) $H^0(X_y,K_{X_y}\otimes L|_{X_y})\neq\{0\}$ 对某个 $y\in Y$成立，其中 $X_y:=p^{-1}(y)$; (2) 在 X上存在一个正 *Hermitian* 全纯线丛 (A,h_A) ，满足 $H^0(X,A)\neq\{0\}$; (3) 对于 X上的任意半正定厄米全纯线丛 (E,h_E) ， $K_{X/Y}\otimes L\otimes E$ 上的相对 *Bergman* 核度量要么具有半正曲率，要么恒等于 $+\infty$。

那么(L,h_L) 的曲率是半正的。

第二个假设可视为在 $\mathbb{C}^n$上存在严格多重次调和函数的类比。 [7]中的定理1.1和1.2也出现了类似的假设。粗略地说，若有一个正 Hermitian 全纯线丛，就可以构造一个具有给定局部权函数的全局半正定厄米全纯线丛（详见 [7] 中的命题2.1及下文证明的步骤3）。

当 X 是射影的时，条件（2）自动成立。反过来，根据 Kodaira 嵌入定理，若 X 是满足条件（2）的紧流形，则 X 必定是射影的。如第 2 节所述，当直接像 $p_*(K_{X/Y}\otimes L\otimes E)$是 Griffiths 半正时， $K_{X/Y}\otimes L\otimes E$ 上的相对 Berg man 核度量具有半正曲率。因此，定理1.4 是定理3.1的一个特例。

注意，由于 X_y 是紧致的，且 h_L 是光滑的，我们有

$$\int_{X_y}|g|^2_{h_L}<+\infty,\quad \forall g\in H^0(X_y,K_{X_y}\otimes L|_{X_y}).$$

我们将 $K_{X/Y}\otimes L$上的相对 Bergman 核度量记为 h_B。根据定义，当且仅当存在一个全纯截面时，$h_B(x) < +\infty$

$$g \in H^0(X_y, K_{X_y}\otimes L|_{X_y}) \quad \text{with} \quad g(x)\neq 0,$$

其中 $y := p(x)$。因此，条件 (1) 蕴含 $h_B \not\equiv +\infty$。取 (E, h_E) 为平凡线丛，由条件 (3) 可知， h_B 的曲率是半正的。因此， h_B 的局部权函数是拟次调和函数，从而 $\{h_B =+\infty\}$ 是 X 的多极集。我们固定一个正 Hermitian 全纯线丛 (A, h_A) 以及一个非零全纯截面 $f_A \in H^0(X, A)$，如假设所述。显然，

$$S := \{f_A = 0\}\bigcup\{h_B = +\infty\}$$

是 X 中的零测集。

下面我们通过矛盾来证明该定理。为此，我们假设

(★) (L, h_L) 的曲率在某点 $x_0 \in \Omega$ 处不是半正的。

由于 h_L 是光滑的，我们还可以进一步假设 $x_0 \notin S$。

为清晰起见，我们将证明分为四个步骤。

步骤 ***1***： x_0附近的适当平凡化。

由于 p： $X \to Y$ 是淹没映射，我们可以找到 x_0 附近的一个坐标图（$\mathcal{N}$，（τ， z）），使得 $\mathcal{N}$ 与 $\mathbb{C}^m_\tau \times \mathbb{C}^n_z$ 中的一个有界乘积域 $U \times D$ 双全纯同构，并且 p 到 $\mathcal{N}$ 的限制是一个平凡纤维化：（τ， z） $\mapsto \tau$。为简便起见，我们总是将 $U \times D$ 中的点与其在 $\mathcal{N} \subset X$ 中对应的点等同。此外，我们将 U 视为 Y 的子集，并且对任意 $\tau \in U$，将 D 视为 X_τ 的子集。我们取

$$dz := dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

作为 $\mathcal{N}$ 上 $K_{X/Y}$ 的全纯标架。

如有必要，缩小 $\mathcal{N}$，我们可以假设 $U \Subset Y$、 $f_A \neq 0$ 在 $U \times D$ 上，并且 $L|_{U\times D}$ 是平凡的。经过平移和缩放，我们进一步假设 $x_0 = (0，\ 0)$ 以及 $\mathbb{B}^{2m} \times \mathbb{B}^{2n} \Subset U \times D$。由于 $U \Subset Y$ 且 p： $X \to Y$ 是真映射，将 f_A 乘以一个常数后，我们可以假设 $|f_A|^2_{h_A} < 1/e$ 在 $p^{-1}（U）$ 上。令

$$e^{-\varphi_A} := |f_A|^2_{h_A},$$

则 $\varphi_A > 1$ 是 $U \times D$上的严格拟次调和函数。

设 f_L 是 $L|_{U\times D}$ 的全纯标架，并记

$$e^{-\varphi_L} := |f_L|^2_{h_L}.$$

根据假设（★），权函数 φ_L 在 (0，0) 处不是拟次调和函数。因此存在某个非零向量 (η， ξ) $\in \mathbb{B}^{2m} \times \mathbb{B}^{2n}$，使得

$$\phi(w) := \varphi_L(w\eta, w\xi)$$

在 $0 \in \mathbb{C}$ 处不是次调和函数。由于 φ_L 是光滑的，我们可以假设 $\eta \neq$ $0.$

步骤***2***： x_0附近的二阶估计。

为即将进行的分析做准备，我们在此步骤中建立一些关键估计。

我们考虑 $\phi(w)$ 在 $0 \in \mathbb{C}$ 附近的泰勒展开：

$$\phi(w) = \phi(0) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w}(0)w + \frac{\partial^2\phi}{\partial w^2}(0)w^2\right) - \alpha|w|^2 + O(|w|^3),$$

其中 $\alpha := -\frac{\partial^2\phi}{\partial w\partial\bar{w}}(0)$ 是一个正常数。由于

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w}(0)w + \frac{\partial^2\phi}{\partial w^2}(0)w^2\right)$$

是一个调和函数，对于任意 $r \in (0,1)$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi r^2}\int_{\{w:|w|<r\}} \phi(w)d\lambda_w \\
&= \frac{1}{\pi r^2}\int_{\{w:|w|<r\}} \left(\phi(0) - \alpha|w|^2 + O(|w|^3)\right) d\lambda_w \\
&= \phi(0) - \frac{\alpha}{2}r^2 + O(r^3).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

我们假设余项对于 $r \in (0,1)$ 有界于 $C_1 r^3$，其中 C_1 是一个正常数。特别地，在充分小的圆盘上，平均值不等式不成立。

由于 $\eta \neq 0$，我们可以取一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $a : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$，使得 $a(\eta) = \xi$。显然，存在某个常数 $R \in (0,1)$，使得

$$\left\{(\tau, z) : |\tau| \leqslant R, |z - a(\tau)| \leqslant R\right\} \subset \mathbb{B}^{2m} \times \mathbb{B}^{2n}.$$

对于任意 $\tau \in \mathbb{B}^{2m}(0;\, R)$，我们考虑 $\varphi_L(\tau, \cdot)$ 在 $a(\tau)$ 附近的泰勒展开：

$$\varphi_L(\tau, z) = \varphi_L(\tau, a(\tau)) + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_j \frac{\partial\varphi_L}{\partial z_j}(\tau, a(\tau))(z_j - a_j(\tau))\right) + O(|z - a(\tau)|^2).$$

由于 $\varphi_L(\tau, z)$ 是光滑的，我们可以假设，对于任意 $\tau \in \mathbb{B}^{2m}(0;\, R)$，余项在 $\mathbb{B}^{2n}(a(\tau);\, R)$ 上有界于 $C_2|z - a(\tau)|^2$，其中 C_2 是一个正常数。为方便起见，我们记

$$\beta_\tau(z) := \sum_j \frac{\partial\varphi_L}{\partial z_j}(\tau, a(\tau))(z_j - a_j(\tau)),$$

这是一个关于 z 的全纯函数，在 $a(\tau)$ 处消失。特别地，

$$\left|\varphi_L(\tau, z) - \varphi_L(\tau, a(\tau)) - 2\,\mathrm{Re}\,\beta_\tau(z)\right| \leqslant C_2|z - a(\tau)|^2 \tag{3.2}$$

对于任意 $\tau \in \mathbb{B}^{2m}(0;\, R)$，在 $\mathbb{B}^{2n}(a(\tau);\, R)$ 上。

现在，给定 $\tau \in \mathbb{B}^{2m}(0;\, R)$、$r \in (0, R)$ 和 $v \in \mathcal{O}(\mathbb{B}^{2n}(a(\tau);\, r))$，显然

$$\begin{aligned}
&\int_{\{z:|z-a(\tau)|<r\}} |v(z)|^2 e^{-\varphi_L(\tau,z)} d\lambda_z \\
&\geqslant e^{-\varphi_L(\tau,a(\tau))-C_2r^2} \int_{\{z:|z-a(\tau)|<r\}} \left|v(z)e^{-\beta_\tau(z)}\right|^2 d\lambda_z \\
&\geqslant \sigma_{2n} r^{2n} |v(a(\tau))|^2 e^{-\varphi_L(\tau,a(\tau))-C_2r^2},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中，最后一个不等式由 $|ve^{-\beta_\tau}|^2$ 的多重次调和性得出。

回想一下，$x_0 = (0,0) \notin S$，于是 $h_B(x_0) < +\infty$。根据 h_B 的定义，存在一个全纯截面

$$g \in H^0(X_0, K_{X_0} \otimes L|_{X_0}) \quad \text{with} \quad g(0) \neq 0,$$

其中我们将 $p(x_0) \in Y$ 与 $0 \in U$ 等同。我们记

$$g|_D = u dz \otimes f_L,$$

于是， u 是定义在 D 上的全纯函数，且 $u(0) \neq 0$。为后续使用，我们考虑 $u(z)e^{-\beta_0(z)}$ 在 $0 \in \mathbb{C}^n$附近的泰勒展开：

$$u(z)e^{-\beta_0(z)} = u(0) + \sum_j c_j z_j + O(|z|^2),$$

其中 $c_j := \frac{\partial}{\partial z_j}\big|_{z=0}(ue^{-\beta_0})$。因此，对于 $r \in (0,1)$，我们有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma_{2n} r^{2n}} \int_{\{z:|z|<r\}} \left|u(z)e^{-\beta_0(z)}\right|^2 d\lambda_z \\ =&\frac{1}{\sigma_{2n} r^{2n}} \int_{\{z:|z|<r\}} \left(|u(0)|^2 + \sum_j \overline{u(0)} c_j z_j + \sum_j u(0)\overline{c_j z_j} + O(|z|^2)\right) d\lambda_z \\ =&|u(0)|^2 + O(r^2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

我们假设，对于 $r \in (0,1)$，剩余项的绝对值不超过 $C_3 r^2$，其中 C_3 是一个正常数。

步骤 ***3***：构造 (E, h_E) 以及 $f_E \in H^0(X, E)$。

在这一步中，我们希望在 X 上构造一个半正定厄米全纯线丛（E, h_E），并构造一个全纯截面 $f_E \in H^0(X, E)$，使得

$$|f_E|_{h_E} = 1 \text{ on } \big\{(\tau, z) \in U \times D : |\tau| \leqslant r, |z - a(\tau)| \leqslant \delta r\big\},$$
$$|f_E|_{h_E} < 1 \text{ on } X_\tau \setminus \big\{z \in D : |z - a(\tau)| \leqslant \delta r\big\} \text{ for any } \tau \in \overline{\mathbb{B}^{2m}(0; r)},$$

其中， r 和 δ 是稍后将确定的常数。

由于我们处理的是光滑的厄米度量，因此需要一个正则化最大值函数。令 $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 为一个支集包含于 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 中的非负函数，使得

$$\int_{\mathbb{R}} \vartheta(s) ds = 1 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}} s\vartheta(s) ds = 0.$$

我们定义

$$\widetilde{\max}\{t_1, t_2\} := \int_{\mathbb{R}^2} \max\{t_1 + s_1, t_2 + s_2\} \vartheta(s_1)\vartheta(s_2) ds_1 ds_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

于是， $\widetilde{\max}\{t_1, t_2\}$ 关于两个变量均为非递减函数，在 $\mathbb{R}^2$ 上光滑且为凸函数；$\max\{t_1, t_2\} \leqslant \widetilde{\max}\{t_1, t_2\} \leqslant \max\{t_1, t_2\} + \frac{1}{2}$；若 $t_1 > t_2 + 1$，则 $\widetilde{\max}\{t_1, t_2\} = t_1$。给定常数 $T \in \mathbb{R}$，对于任意 $t_1 < T - 1$，显然有

$$\big\{t_2 \in \mathbb{R} : \widetilde{\max}\{t_1, t_2\} \leqslant T\big\} = (-\infty, T].$$

我们选择一个充分小的常数 $\delta \in (0,1)$，使得

$$\left(2C_2 + \frac{C_3}{|u(0)|^2}\right)\delta^2 < \frac{\alpha}{6},$$

其中常数 C_j、$u(0)$ 和 α 已在步骤2中引入。根据 $\widetilde{\max}$ 的性质，容易验证函数

$$\psi(\tau, z) := \widetilde{\max}\left\{\log\frac{|\tau|}{3}, \log\frac{|z - a(\tau)|}{\delta}\right\} \tag{3.5}$$

在 $U \times D$ 上是拟次调和的，并且在 $(U \times D) \setminus \{(0, 0)\}$ 上光滑。我们选取一个截断函数 $\rho \in C_c^\infty(U \times D)$，使得 $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ 处处成立，并且在 $(0, 0)$ 的某个邻域内 $\rho \equiv 1$。由于 φ_A 是严格拟次调和的，因此存在一个整数 $q \gg 1$，使得

$$q\varphi_A + 2\rho\psi$$

在 $U\times D$ 上是拟次调和的。我们还可以进一步假设

$$q>\sup_{U\times D}\psi+1.$$

由于 $U\times D$ 是 $\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^n$ 中的有界域，右侧有限。

现在考虑拟次调和函数

$$\Psi:=\widetilde{\max}\{q\varphi_A+2\rho\psi,\psi\} \tag{3.6}$$

在 $U\times D$ 上。在 $U\times D$ 的边界附近，我们有

$$q\varphi_A+2\rho\psi=q\varphi_A>q>\psi+1,$$

于是 $\Psi=q\varphi_A$。注意， ψ 在原点有一个对数极点。因此，在 $(0,0)$ 的一个充分小的邻域内，我们有

$$q\varphi_A+2\rho\psi=q\varphi_A+2\psi\ll\psi,$$

于是 $\Psi=\psi$。我们选择 $r\in(0,\frac{R}{3})$，使得在.....的一个邻域内 $\Psi=\psi$

$$\big\{(\tau,z):|\tau|\leqslant 3r,|z-a(\tau)|\leqslant\delta r\big\}.$$

为后文使用，我们进一步要求

$$C_1r<\frac{\alpha}{6}.$$

设 $T:=\log r<0$。取凸非减函数 $\chi\in C^\infty(\mathbb{R})$，使得 $\chi\equiv 0$ 在 $(-\infty,T]$ 上、 $\chi>0$ 在 $(T,+\infty)$ 上，并且对 $t\geqslant T+2$ 有 $\chi(t)\equiv t-T-1$。于是，$\chi(\Psi)$ 是 $U\times D$ 上的非负光滑拟次调和函数。在 $U\times D$ 的边界附近，有

$$\Psi=q\varphi_A>q\gg 1>T,$$

于是 $\chi(\Psi)=q\varphi_A-T-1$。回顾一下， $f_A\in H^0(X,A)$ 在 $U\times D$ 上不消失，并且 $|f_A|^2_{h_A}=e^{-\varphi_A}$。取 $f_A^{\otimes q}$ 作为 $U\times D$ 上的局部标架，我们可以在 E 上定义一个光滑厄米度量 $h_E:=A^{\otimes q}$，其定义为

$$\begin{cases}h_E:=h_A^{\otimes q}e^{T+1}, & X\setminus(U\times D)\\ |f_A^{\otimes q}|^2_{h_E}:=e^{-\chi(\Psi)}, & U\times D\end{cases}. \tag{3.7}$$

由于 (A,h_A) 是半正的，且 $\chi(\Psi)$ 是拟次调和函数，因此 (E,h_E) 的曲率也是半正的。

我们考虑全纯截面 $f_E:=f_A^{\otimes q}\in H^0(X,E)$。为方便起见，我们定义

$$W_1:=\big\{(\tau,z)\in U\times D:|\tau|\leqslant r,|z-a(\tau)|\leqslant\delta r\big\},$$
$$W_2:=\big\{(\tau,z)\in U\times D:|\tau|\leqslant r,|z-a(\tau)|>\delta r\big\}.$$

在 W_1 上，我们有 $\log\frac{|\tau|}{3}<T-1$ 和 $\log\frac{|z-a(\tau)|}{\delta}\leqslant T)$，于是

$$\Psi=\psi\leqslant T\quad\Rightarrow\quad\chi(\Psi)=0\quad\Rightarrow\quad|f_E|^2_{h_E}=1.$$

在 W_2 上，我们有 $\log\frac{|z-a(\tau)|}{\delta}>T)$，于是

$$\Psi\geqslant\psi>T\quad\Rightarrow\quad\chi(\Psi)>0\quad\Rightarrow\quad|f_E|^2_{h_E}<1.$$

回忆一下， $|f_A|^2_{h_A}<1/e$ 在 $p^{-1}(U)$ 上。对于任意 $\overline{\tau\in\mathbb{B}^{2m}(0;r)}$，显然有

$$|f_E|^2_{h_E}=|f_A|^{2q}_{h_A}e^{T+1}\leqslant e^{-q+T+1}<1\quad\text{on}\quad X_\tau\setminus D.$$

总之，(E,h_E) 和 $f_E\in H^0(X,E)$ 满足所有要求。

步骤***4***：导出矛盾。

在这最后一步中，我们旨在利用步骤2中证明的估计以及步骤3中构造的线丛（E, h_E）导出矛盾。

由于 $H^0(X,\ E) \neq \{0\}$，由条件 (1) 可知，相对 Bergman 核度量 B_k 在 $K_{X/Y}\otimes L\otimes E^{\otimes k}$ 上并非恒等于 $+\infty$。此外，由条件 (3)，B_k 的曲率流是半正的。由于 $f_E \neq 0$ 在 $U\times D$ 上，我们取 $dz\otimes f_L\otimes f_E^{\otimes k}$ 作为 $K_{X/Y}\otimes L\otimes E^{\otimes k}$ 在 $U\times D$ 上的全纯标架。记 Φ_k 为 B_k 的局部权函数，即

$$e^{\Phi_k(\tau,z)} := \sup\left\{ \frac{|v(z)|^2}{\|f\|^2} : \begin{array}{c} f\in H^0(X_\tau, K_{X_\tau}\otimes (L\otimes E^{\otimes k})|_{X_\tau}) \\ f\not\equiv 0,\ f|_D = vdz\otimes f_L\otimes f_E^{\otimes k} \end{array} \right\},$$

那么 Φ_k 是 $U\times D$ 上的拟次调和函数。

回顾一下，$|f_L|^2_{h_L} = e^{-\varphi_L}$ 在 $U\times D$ 上，并且

$$|f_E|_{h_E}\equiv 1 \quad \text{on} \quad \big\{(\tau,z): |\tau|\leqslant r, |z-a(\tau)|\leqslant \delta r\big\}.$$

给定 $\tau\in\mathbb{B}^{2m}(0;r)$，对于任意全纯截面

$$f\in H^0(X_\tau, K_{X_\tau}\otimes (L\otimes E^{\otimes k})|_{X_\tau}) \quad \text{with} \quad f|_D = vdz\otimes f_L\otimes f_E^{\otimes k},$$

由估计式（3.3）可得

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\geqslant \int_{\{z:|z-a(\tau)|<\delta r\}} |f|^2 \\ &= \int_{\{z:|z-a(\tau)|<\delta r\}} |v(z)|^2 e^{-\varphi_L(\tau,z)} d\lambda_z \\ &\geqslant \sigma_{2n}(\delta r)^{2n} |v(a(\tau))|^2 e^{-\varphi_L(\tau,a(\tau))-C_2(\delta r)^2}. \end{aligned}$$

因此，对于任意 $\tau\in\mathbb{B}^{2m}(0;r)$，我们有

$$\Phi_k(\tau,a(\tau)) \leqslant \varphi_L(\tau,a(\tau)) + C_2(\delta r)^2 - \log\big(\sigma_{2n}(\delta r)^{2n}\big). \tag{3.8}$$

回忆一下，由于 $x_0\notin S$，存在一个全纯截面

$$g\in H^0(X_0, K_{X_0}\otimes L|_{X_0}) \quad \text{with} \quad g|_D = udz\otimes f_L \quad \text{and} \quad u(0)\neq 0.$$

我们考虑全纯截面

$$f_k := g\otimes f_E^{\otimes k} \in H^0(X_0, K_{X_0}\otimes (L\otimes E^{\otimes k})|_{X_0}).$$

由于

$$\begin{cases} |f_E|_{h_E}\equiv 1 \text{ on } \{z:|z|\leqslant \delta r\}\subset X_0, \\ |f_E|_{h_E} < 1 \text{ on } X_0\setminus\{z:|z|\leqslant \delta r\}, \end{cases}$$

由勒贝格控制收敛定理可得

$$\lim_{k\to+\infty}\|f_k\|^2 = \int_{\{z:|z|\leqslant\delta r\}} |g|^2 = \int_{\{z:|z|<\delta r\}} |u(z)|^2 e^{-\varphi_L(0,z)} d\lambda_z.$$

根据估计式（3.2）和（3.4），

$$\begin{aligned} &\int_{\{z:|z|<\delta r\}} |u(z)|^2 e^{-\varphi_L(0,z)} d\lambda_z \\ \leqslant &\int_{\{z:|z|<\delta r\}} |u(z)e^{-\beta_0(z)}|^2 e^{-\varphi_L(0,0)+C_2(\delta r)^2} d\lambda_z \\ \leqslant &\sigma_{2n}(\delta r)^{2n}\big(|u(0)|^2 + C_3(\delta r)^2\big) e^{-\varphi_L(0,0)+C_2(\delta r)^2}. \end{aligned}$$

根据 Φ_k 的定义,

$$\begin{aligned}\varliminf_{k\to+\infty} e^{\Phi_k(0,0)} &\geqslant \lim_{k\to+\infty} \frac{|u(0)|^2}{\|f_k\|^2}\\ &\geqslant \frac{1}{\sigma_{2n}(\delta r)^{2n} e^{-\varphi_L(0,0)+C_2(\delta r)^2}} \frac{|u(0)|^2}{|u(0)|^2+C_3(\delta r)^2},\end{aligned}$$

然后

$$\varliminf_{k\to+\infty} \Phi_k(0,0) \geqslant \varphi_L(0,0) - C_2(\delta r)^2 - \frac{C_3}{|u(0)|^2}(\delta r)^2 - \log\left(\sigma_{2n}(\delta r)^{2n}\right). \tag{3.9}$$

由于 Φ_k 是 $U\times D$ 上的拟亚纯函数，我们有平均值不等式

$$\Phi_k(0,0) \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\int_{\{w:|w|<r\}} \Phi_k(w\eta, w\xi) d\lambda_w.$$

结合不等式（3.8）和（3.9），可得

$$\begin{aligned}&\varphi_L(0,0) - C_2(\delta r)^2 - \frac{C_3}{|u(0)|^2}(\delta r)^2 - \log\left(\sigma_{2n}(\delta r)^{2n}\right)\\ \leqslant &\frac{1}{\pi r^2}\int_{\{w:|w|<r\}} \left(\varphi_L(w\eta, w\xi) + C_2(\delta r)^2 - \log\left(\sigma_{2n}(\delta r)^{2n}\right)\right) d\lambda_w.\end{aligned}$$

等价地,

$$\phi(0) \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\int_{\{w:|w|<r\}} \phi(w) d\lambda_w + \left(2C_2 + \frac{C_3}{|u(0)|^2}\right)\delta^2 r^2.$$

结合不等式（3.1），可得

$$\frac{\alpha}{2} r^2 \leqslant \left(2C_2 + \frac{C_3}{|u(0)|^2}\right)\delta^2 r^2 + C_1 r^3.$$

由于选取 δ 和 r 使得

$$\left(2C_2 + \frac{C_3}{|u(0)|^2}\right)\delta^2 < \frac{\alpha}{6} \quad \text{and} \quad C_1 r < \frac{\alpha}{6},$$

在假设（★）下，我们得出矛盾。

定理 3.1的证明至此完成。

References

[1] Bo Berndtsson：多重次调和函数的 Prekopa 定理与 Kiselman 极小原理。《数学年刊》**312(4)**: 785–792 (1998)[2] Bo Berndtsson：Bergman 核及其他一些与伪凸域相关的函数的次调和性。《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》**56(6)**, 1633–1662 (2006)[3] Bo Berndtsson：与全纯纤维化相关的向量丛的曲率。《数学年刊》**169**, 531–560 (2009)[4] Bo Berndtsson, L´aszl´o Lempert：一项具有尖锐估计的 Ohsawa-Takegoshi 定理证明。《日本数学会杂志》**68(4)**, 1461–1472 (2016)[5] Bo Berndtsson, Mihai P˘aun：Bergman 核与相对典范丛的伪有效性。《杜克数学杂志》**145(2)**, 341–378 (2008)[6] Fusheng Deng, Jiafu Ning, Zhiwei Wang：多重次调和函数的刻画。《中国科学：数学》**64(9)**, 1959–1970 (2021)[7] Fusheng Deng, Jiafu Ning, Zhiwei Wang, Xiangyu Zhou：以 L^p-估计刻画全纯向量¯丛的正性（针对 ∂）。《数学年刊》**385(1-2)**, 575–607 (2023)[8]Fusheng Deng, Zhiwei Wang, Liyou Zhang, Xiangyu Zhou：多重次调和函数的新刻画及直接像层的正性。《美国数学杂志》**146(3)**, 751–768 (2024)

[9] Qi'an Guan, Xiangyu Zhou：一个具有最优估计的 L^2 延拓问题的解及其应用。《数学年刊》**181**(3), 1139–1208 (2015)[10] Genki Hosono, Takahiro Inayama：H¨ormander L^2-估计的一个逆命题及向量丛的新正性概念。《中国科学：数学》**64**(8), 1745–1756 (2021)[11] Zhi Li, Wang Xu, Xiangyu Zhou：关于直接像丛的正性 II。即将在《数学杂志》发表。[12] Zhi Li, Xiangyu Zhou：关于直接像丛的正性。《数学杂志》**87**(5), 987–1010 (2023)[13] Fumio Maitani, Hiroshi Yamaguchi：黎曼曲面上 Bergman 度量的变化。《数学年刊》**330**(3), 477–489 (2004)[14] Andr´as Pr´ekopa：关于对数凹测度与函数。《塞格德数学科学学报》**34**, 335–343 (1973)[15] Wang Xu, Hui Yang：关于 Prekopa 定理与 Berndtsson 定理逆命题的研究。《泛函分析杂志》**290**(1), 111214 (2026)

School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China电子邮箱地址：xuwang@amss.ac.cn; xuwang6@mail.sysu.edu.cn

School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China电子邮箱地址：yanghui@amss.ac.cn