arXiv:2601.12834v1 [math.QA] 19 Jan 2026

余有限性与 $P(z)$-张量积双函子：与阿贝尔但不一定有限的群相关的轨形理论

Yi-Zhi Huang

摘要

设 V 是一个 Möbius 顶点代数， G 是 V 的一个自同构阿贝尔群。我们为 $g \in G$ 的 C_n-余有限、分次受限广义 g-扭曲 V-模（不带 g-作用）范畴，以及 $g \in G$ 的带有 G-作用的 C_n-余有限、分次受限广义 g-扭曲 V-模范畴，构造 $P(z)$-张量积双函子。本文中， V 的自同构 g 可以是无限阶的，且不必在 V 上半单地作用；群 G 可以是一个包含 V 的非半单自同构的无限阿贝尔群。

1 引言

二维轨形共形场论在二维共形场论的构造、分类和应用中发挥着重要作用。Frenkel、Lepowsky 和 Meurman [FLM1] [FLM2][FLM3] 在数学上构造的月光模 $V^\natural$，是二维轨形共形场论的第一个例子。Dixon、Harvey、Vafa 和 Witten [DHVW1] [DHVW2] 开创了物理学中对二维轨形共形场论的系统研究。在 [H4], 中，作者为顶点算子代数 V 引入了针对 V 的一个无限阶自同构的扭曲模。在 [H7], 中，作者开启了一项研究计划，旨在从顶点算子代数 V 和 V 的自同构群 G 出发，构造一般的二维轨形共形场论。这里的群 G 不一定是有限阿贝尔群。文中提出并讨论了若干猜想和公开问题，包括关于扭曲交织算子的收敛、结合性、交换性和模不变性，以及相应的 G-交叉编织张量范畴结构等问题。

最近，Du 和作者 [DH] 在顶点算子代数 V 的适当扭模范畴的扭曲交织算子与 $P(z)$-张量积双函子方面，基于某些假设取得了进展（关于这些假设的更多讨论见下文：Tan 关于适当扭曲 V-模[Ta2] 的余有限性，以及关于扭曲交织算子乘积所满足的微分方程——主要在未扭曲情形下 [Ta1] ，以及在有限阿贝尔情形下 [Ta3], ；Du 则研究了

在适当的收敛性与延拓性假设下扭曲交织算子的结合性 [D]）。本文也是这一研究计划中的一步。

我们想强调 $P(z)$-张量积双函子的重要性。在未扭曲的情形下，已在满足特定条件的顶点算子代数的适当模范畴上构造出编织乃至模张量范畴结构（参见 [HL2]–[HL4], [H1], [H2], [H3], [HLZ1]–[HLZ8], [H8]）。然而，我们无法从这些编织或模张量范畴结构中重构顶点算子代数。例如，月光模 $V^\natural$ 对应的模张量范畴等价于 $\mathbb{C}$上的有限维向量空间张量范畴。不可能从这个平凡的张量范畴中重构月光模。另一方面， [HL2]–[HL4], [H1], [H2], [H3], [HLZ1]–[HLZ8], and [H8] 中的构造给出了顶点张量范畴（顶点张量范畴的定义见[HL1] ）。一个猜想是，可以从顶点张量范畴重构顶点算子代数。在扭曲情形下， [H7] 中提出了如下猜想：对于正能量的 C_2-余有限顶点算子代数，以及有限群 G 中的 g ，其分次受限广义 g-扭模范畴具有自然的 G-交叉编织张量范畴结构，意义见 [Tu]。为证明这一猜想，我们必须先构造 G-交叉顶点张量范畴结构，然后采用与未扭曲情形相同的步骤，得到 G-交叉编织张量范畴结构。 $P(z)$-张量积双函子是 G-交叉顶点张量范畴中最重要的一类数据。

在 [DH]中，基于适当的假设（见[DH]中的假设4.4），为适当的分次受限广义 V-模范畴构造了 $P(z)$-张量积双函子。 [DH] 中的结果是对[HL2], [HL4], [HLZ3] 和 [HLZ4]中无扭情形结果的扭曲推广。 [DH] 中的定理4.8和推论4.9给出了关于扭曲 V-模范畴的一些强条件，使得 [DH] 中的假设4.4对这些范畴成立。但这些条件非常严格，而且不易验证。我们希望为顶点算子代数 V 及适当的扭模范畴找到一些易于验证或已在文献中得到验证的条件，使得该范畴中存在 $P(z)$-张量积双函子。

本文在相关自同构彼此交换但其阶可能为无限阶的情况下，为满足某些余有限性条件的适当扭模范畴构造了 $P(z)$-张量积双函子。本文并未试图推广 [DH], 中定理 4.8 和推论 4.9 的条件，而是针对下有界广义扭曲 V-模，以及它们之间的扭曲交织算子，证明了 [H8] 中若干结果的推广和类似结论；这些模是由 g 所在的自同构阿贝尔群 G 对 V 作用所扭曲的 V-模。在 [H8], 中，Nahm 的一个不等式 [N] 得到了精确表述的推广；此外，利用 [HLZ3] 、 [HLZ4] 中的一些结果以及该不等式，构造了 $P(z)$-张量积双函子。事实上，Nahm 在 [N], 中为 $\mathcal{W}$-代数引入了拟有理模的概念。在数学中， $\mathcal{W}$-代数是适当的顶点算子代数，而拟有理模指的是 C_1-余有限模。对于顶点算子代数 V 的一个适当模 W，其顶点算子映射为 Y_W， W 的 C_1-子空间 $C_1(W)$ 是由 V 中的 $\mathrm{Res}_x x^{-1}Y_W(v,x)w$ （其中 $v \in V_+ = \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+} V_{(n)}$ ）张成的子空间，并且

$w \in W$。若 dim $W/C_1(W) < \infty$，则 V-模 W 是 C_1-余有限的。假设两个 C_1-余有限的 V- 模 W_1 和 W_2 存在一个适当的融合积 W_{12}，Nahm 在 [N] 中推导出了一个不等式

$$\dim(W_{12}/C_1(W_{12})) \leq \dim(W_1/C_1(W_1)) \dim(W_2/C_1(W_2)). \tag{1.1}$$

Nahm 并未在 [N] 中构造融合积。相反，他从共形场论的一些基本物理假设出发，推导出了不等式 (1.1)。“不等式 (1.1) 的一个推广形式”针对满射交织算子得到了精确表述，并在数学上予以证明，见 [H8]。特别地，若将 W_{12} 取为在 [H8], 中构造的 $P(z)$-张量积 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$，则不等式 (1.1) 成立。在 [YZ], 中，Yang 和 Zhu 在相关自同构可交换且阶有限的情形下，证明了下有界广义扭曲 V-模的 C_2-子空间[1] （定义见下文）之商空间满足扭曲 Nahm 不等式。利用这一不等式，[YZ] 证明了：由有限阶可交换自同构扭曲的、C_2-余有限下有界广义扭曲 V-模构成的范畴，在适当的融合积运算下封闭。

本文为阿贝尔群 G 中的 V 的 g 构造了 C_n 有限余维分次受限广义 g 扭曲 V 模范畴的 $P(z)$-张量积双函子。群 G 不必是有限群，且可以包含在 V 上非半单作用的自同构。我们采用的方法与 [H8] 中的方法相同。

下面我们将更详细地描述所得结果。设 V 是一个分次受限顶点代数。对于 V 的一个自同构 g，有 $V = \coprod_{\alpha \in P_V^g} V^{[\alpha]}$，其中 $P_V^g \subset [0,1) + \mathrm{i}\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$，而 $V^{[\alpha]}$ 对于 $\alpha \in P_V^g$ 是 g 对应于特征值 $e^{2\pi \mathrm{i}\alpha}$ 的广义特征空间。对于 $n \in 2 + \mathbb{N}$ 以及一个带有扭曲顶点算子映射 Y_W 的广义 g 扭曲 V 模 W，令 C_n-子空间 $C_n(W)$ 为 W 的子空间，它由形如 $\mathrm{Res}_x x^{\alpha-n} Y_W(v,x)w$ 的元素张成，其中 $v \in V^{[\alpha]}$、$\alpha \in P_V^g$ 且 $w \in W$。设 g_1 和 g_2 是 V 的可交换自同构，W_1 和 W_2 分别是下有界广义 g_1 扭曲和 g_2 扭曲 V 模，而 W_3 是一个广义 $g_1 g_2$ 扭曲 V 模。假设存在一个类型为 $\binom{W_3}{W_1 W_2}$ 的满射扭曲交织算子，我们证明

$$\dim(W_3/C_{\min(p,q)}(W_3)) \leq \dim(W_1/C_p(W_1)) \dim(W_2/C_q(W_2)) \tag{1.2}$$

对于 p，$q \in 2 + \mathbb{N}$。这里，g_1 和 g_2 可以是无限阶的，并且不必在 V上半单地作用。这个不等式使用与 [H8], 中相同的方法证明，但将 [H8] 中（非扭曲）交织算子的雅可比恒等式，替换为在涉及的 V 的自同构彼此可交换这一情形下扭曲交织算子的雅可比恒等式。

对于一个广义扭曲 V-模，若 dim $W/C_n(W) < \infty$，则称 W是 C_n-余有限的。现在进一步假设 V 具有 Möbius 顶点代数或拟顶点算子

[1]在 [YZ], 中，对于有限阶 g的下有界广义 g-扭 V-模，引入了 W的一个子空间 $C_1(W)$。事实上，[YZ] 中的 $C_1(W)$ 就是 [Ta1] 及本文中的 $C_2(W)$，而 [YZ] 中的 C_1- 余有限性在 [Ta1] 及本文中称为 C_2- 余有限性。在 [Ta1]中还定义了 C_1-余有限性。注意，根据 Tan 在 [Ta1], 中证明的主要结果，如果 V 是 C_2-余有限且具有正能量，则有限生成的下有界广义扭曲 V-模在 [Ta1] 及本文的意义下是 C_2-余有限的。鉴于这一结果以及海森堡顶点算子代数的扭曲模实例，作者认为，$C_2(W)$和 C_2-余有限是应当使用的正确记号和术语。

代数结构（见 [FHL] 和 [HLZ1]）。特别地，我们在 V上有一个算子 $L_V(1)$；对于下有界的广义扭曲 V-模 W，我们有一个对偶 W'（见 [H5]）。设 G 是 V的一个自同构阿贝尔群。利用 [DH],中的一些结果（适用于上述不等式在 $p = q = n \in 2 + \mathbb{N}$情形下的情形），以及本文关于 C_n-余有限下有界广义扭曲 V-模和扭曲交织算子的其他结果，我们为 $g \in G$ 下的 C_n-余有限分次受限广义 g-扭曲 V-模范畴（不带 g-作用），以及 $g \in G$下带有 G-作用的 C_n-余有限分次受限广义 g-扭曲 V-模范畴，构造了 $P(z)$-张量积双函子。尽管第二个范畴实际上是第一个范畴的子范畴，但第二个范畴的 $P(z)$-张量积双函子并非第一个范畴的 $P(z)$-张量积双函子在第二个张量范畴上的限制。我们还要再次强调，本文中的 V 的自同构 g 可以是无限阶的，且不必在 V上半单地作用；群 G 可以是一个无限阿贝尔群，其中含有 V的非半单自同构。

然而，即使在本文讨论的阿贝尔情形下，[H8] 中的结果和方法也不能直接推广，以获得关于 C_1-余有限下有界广义扭曲 V-模的结果（例如， [Ta1] 给出了 C_1-余有限扭曲模的定义）以及相应扭曲交织算子的结果。因此， C_1-余有限情形仍然是一个公开问题。

由于 Tan 证明，对于一个正能量的 C_2-余有限顶点算子代数 V，有限生成的弱扭曲 V- 模是 C_n- 余有限的（当 $n \geq 2$），本文构造的 $P(z)$- 张量积双函子可应用于许多已证明为 C_2-余有限的顶点算子的模范畴。一类重要的例子是正整数层的单仿射顶点算子代数。它们是C_2-余有限的，而与有限维单李代数对应的李群是这些仿射顶点算子代数的自同构群。本文的结果可应用于这样的顶点算子代数及其对应李群的一个无限阿贝尔子群。另一类例子与由适当筛算子的核构造的 $\mathcal{W}$-代数有关。事实上，筛算子的指数是适当顶点算子的无限阶自同构，而这些筛算子的核恰好是最初所取顶点算子代数的不动点子代数（见 [H4]）。本文的结果可用于借助与无限阿贝尔群相关的轨形理论，开启对这类 $\mathcal{W}$-代数的研究。

本文的组织结构如下：在下一节（第2节）中，我们给出由可交换自同构扭曲的模之间各种扭模和扭曲交织算子的定义。在此阿贝尔情形下，我们使用雅可比恒等式定义扭曲交织算子，该恒等式等价于 [DH] 中的对偶性（但我们将在另一篇论文中证明这一等价性）。第3节中，我们证明下有界广义扭曲模的一些基本性质。不等式 (1.2) 在第4节中得到证明。$P(z)$-张量积双函子的构造见第5节：在第 5.1 小节中，我们给出 C_n-余有限、分次受限的广义 g-扭曲 V-模范畴的 $P(z)$-张量积双函子的构造（不含

g-作用），适用于 $g \in G$。在第 5.2 小节中，我们给出带有 G-作用、适用于 $g \in G$的 C_n-余有限、分次受限广义 g-扭曲 V-模范畴的 $P(z)$-张量积双函子的构造。

本文中，我们固定一个分次受限顶点代数 V。在第5节中，我们还将假设 V 是 Möbius 顶点代数或拟顶点算子代数（参见 [FHL] 和 [HLZ1]）。由于我们有时会用 i 作为指标，因此将虚数单位 $\sqrt{-1}$ 记作$\mathbf{i}$。

致谢 作者感谢 Jishen Du 和 Daniel Tan 与其就扭曲模、扭曲交织算子及轨形理论进行了多次讨论。

2 扭曲模与扭曲交织算子

本节将给出若干种扭模的定义、这些扭模之间的模映射定义，以及由可交换自同构扭曲的 V 的各种类型扭模之间的扭曲交织算子的定义。在这种情况下，我们通过雅可比恒等式来定义扭曲交织算子。随后，我们推导出雅可比恒等式的一种适当的分量形式，以供后续各节使用。

对于 V 的一个自同构 g， V 可以分解为 g 的广义特征子空间的直和。V 上 g 的特征值具有 $e^{2\pi i\alpha}$ 的形式，其中 $\alpha \in \mathbb{C}$。由于对于 $m \in \mathbb{Z}$，$e^{2\pi i(\alpha+m)} = e^{2\pi i\alpha}$，我们总能找到满足 $\Re(\alpha) \in [0,1)$ 的 $\alpha \in \mathbb{C}$。

对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(\alpha)\ \Re(\beta) \in [0,1)$ 的情形，要么 $\Re(\alpha+\beta) \in [0,1)$，要么 $\Re(\alpha+\beta-1) \in [0,1)$。令

$$\epsilon(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0 & \Re(\alpha+\beta) \in [0,1) \\ 1 & \Re(\alpha+\beta-1) \in [0,1). \end{cases}$$

那么，对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(\alpha)\ \Re(\beta) \in [0,1)$ 的情形，有 $\Re(\alpha+\beta-\epsilon(\alpha,\beta)) \in [0,1)$。一般而言，对于 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(\alpha_1) \dots, \Re(\alpha_k) \in [0,1)$ 的情形，存在唯一的$\epsilon(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}$，满足 $\epsilon(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \leq k-1$，使得 $\Re(\alpha_1+\cdots+\alpha_k-\epsilon(\alpha_1, \dots, \alpha_k)) \notin [0,1)$。为简便起见，我们也将 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k-\epsilon(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ 记作 $\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$。

Let

$$P_V^g = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \Re(\alpha) \in [0,1), e^{2\pi\mathbf{i}\alpha} \text{ is an eigenvalues of } g\}.$$

对于 $\alpha \in P_V^g$，我们用 $V^{[\alpha]}$ 表示 g 中具有特征值 $e^{2\pi\mathbf{i}\alpha}$的广义特征空间。于是

$$V = \coprod_{\alpha \in P_V^g} V^{[\alpha]} = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \coprod_{\alpha \in P_V^g} V_{(n)}^{[\alpha]},$$

其中 $V^{[\alpha]}{}_{(n)} = V_{(n)} \cap V^{[\alpha]}$ 对于 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $\alpha \in P_V^g$。

根据 [HY] 的第2节和 [H6], 中的引理3.4，我们知道，在 V 上存在一个半单算子 $\mathcal{S}_g$ 和一个局部幂零算子 $\mathcal{N}_g$，使得 $g = e^{2\pi\mathbf{i}(\mathcal{S}_g+\mathcal{N}_g)} = e^{2\pi\mathbf{i}\mathcal{L}_g}$; 其中，与 [H6]中一样， $\mathcal{L}_g = \mathcal{S}_g + \mathcal{N}_g$，且 $V^{[\alpha]}$ 是 $\mathcal{S}_g$ 对应于特征值 α 的特征空间。对于 $\alpha, \beta \in P_V^g$， $u \in V^{[\alpha]}$和 $v \in V^{[\beta]}$，由于根据 [H6], 中的命题 3.5， $e^{2\pi\mathbf{i}\mathcal{S}_g}$也是 V 的一个自同构，我们有 $e^{2\pi\mathbf{i}\mathcal{S}_g}Y_V(u,x)v = Y_V(e^{2\pi\mathbf{i}\mathcal{S}_g}u,x)e^{2\pi\mathbf{i}\mathcal{S}_g}v = e^{2\pi\mathbf{i}(\alpha+\beta)}Y_V(u,x)v$。

若存在 $u \in V^{[\alpha]}$、 $v \in V^{[\beta]}$ 使得 $Y_V(u,x)v \neq 0$，则存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得$u_n v = \mathrm{Res}_x x^n Y_V(u,x)v \neq 0$ 是 g 对应于特征值 $e^{2\pi\mathbf{i}(\alpha+\beta)}$的广义特征向量。在这种情况下，若 $\Re(\alpha+\beta) \in [0,1)$，则 $\alpha+\beta \in P_V^g$；若 $\Re(\alpha+\beta-1) \in [0,1)$，则 $\alpha+\beta-1 \in P_V^g$。

设 g_1 和 g_2 是 V的自同构。于是我们有 $g_1 = e^{2\pi\mathbf{i}(\mathcal{S}_{g_1}+\mathcal{N}_{g_1})} = e^{2\pi\mathbf{i}\mathcal{L}_{g_1}}$ 和$g_1 = e^{2\pi\mathbf{i}(\mathcal{S}_{g_2}+\mathcal{N}_{g_2})} = e^{2\pi\mathbf{i}\mathcal{L}_{g_2}}$。由于 g_1 和 g_2 可交换，算子 $\mathcal{S}_{g_1}$、 $\mathcal{N}_{g_1}$、 $\mathcal{S}_{g_2}$和 $\mathcal{N}_{g_2}$也彼此可交换。事实上，由于 g_1 和 g_2 可交换， V 可分解为公共广义特征空间 $V^{[\alpha_1,\alpha_2]}$ 的直和；这些空间对应于 g_1 的 $\alpha_1 \in P_V^{g_1}$、 $\alpha_2 \in P_V^{g_2}$，其特征值分别为$e^{2\pi\mathbf{i}\alpha_1}$ 和 $e^{2\pi\mathbf{i}\alpha_2}$。于是 $\mathcal{S}_{g_1}$ 和 $\mathcal{S}_{g_2}$ 分别以数 α_1 和α_2作用于 $V^{[\alpha_1,\alpha_2]}$ 上。特别地， $\mathcal{S}_{g_1}$ 和 $\mathcal{S}_{g_2}$ 可交换。另一方面，由于 $V^{[\alpha_1,\alpha_2]}$ 在 g_1 和 g_2作用下保持不变， $v \in V^{[\alpha_1,\alpha_2]}$ 对应的 $g_1 v$ 或 $g_2 v$ 上的 $\mathcal{S}_{g_1}$ 和 $\mathcal{S}_{g_2}$ 分别等于 $g_1 v$ 或 $g_2 v$乘以 α_1 和 α_2。因此我们看到， $\mathcal{S}_{g_1}$ 和 $\mathcal{S}_{g_2}$ 、 g_1及 g_2 彼此可交换。特别地， $\mathcal{S}_{g_1}$、 $\mathcal{S}_{g_2}$ 、 $\mathcal{L}_{g_1}$和 $\mathcal{L}_{g_2}$ 彼此可交换。于是 $\mathcal{S}_{g_1}$、 $\mathcal{S}_{g_2}$、 $\mathcal{N}_{g_1} = \mathcal{L}_{g_1} - \mathcal{S}_{g_1}$和$\mathcal{N}_{g_2} = \mathcal{L}_{g_2} - \mathcal{S}_{g_2}$ 彼此可交换。

我们首先给出自同构 g of V 所对应的各种 g-扭曲 V-模的定义。下面的定义是对 [H4], [HY], 和 [H6] 中给出的相应 g-扭曲 V-模定义的推广或修改。需要注意的是， g 可以是无限阶的，并且不必在 V 上半单地作用。

定义 2.1。一个弱 g-扭曲 V-模，且不带 g-作用，是一个向量空间 W，其上赋有算子 $L_W(0)$ 和 $L_W(-1)$，以及一个线性映射

$$\begin{aligned} Y_W^g : V \otimes W &\to W\{x\}[\log x], \\ v \otimes w &\mapsto Y_W^g(v,x)w = \sum_{n\in\mathbb{C}} \sum_{k\in\mathbb{N}} v_{n,k} x^{-n-1} (\log x)^k \end{aligned}$$

称为扭曲顶点算子映射，并满足以下条件:

1. 下截断条件：对于 $v \in V$ 和 $w \in W$，当 $\Re(n)$ 充分大时， $v_{n,k}w = 0$ 。

2. 等变性：对于 $p \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}^\times$, $v \in V$ 以及 $w \in W$,

$$(Y_W^g)^{p+1}(gv,z)w = (Y_W^g)^p(v,z)w,$$

其中，对于 $p \in \mathbb{Z}$，$(Y_W^g)^p(v,z)$ 是 $Y_W^g(v,x)$ 的第 p 个解析分支。

3. 单位性质：对于 $w \in W$, $Y_W^g(\mathbf{1},x)w = w$。

4. 雅可比恒等式：对于 $u, v \in V$,

$$\begin{aligned} & x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right) Y_W^g(u,x_1)Y_W^g(v,x_2) - x_0^{-1}\delta\left(\frac{-x_2+x_1}{x_0}\right) Y_W^g(v,x_2)Y_W^g(u,x_1) \\ &= x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right) Y_W^g\left(Y_V\left(\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)^{\mathcal{L}_g} u, x_0\right) v, x_2\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

5. $L(0)$-交换子公式：

$$[L_W(0), Y_W(v,x)] = z\frac{d}{dx}Y_W(v,x) + Y_W(L_V(0)v, x)$$

对于 $v \in V$。

6. $L(-1)$-导数性质和 $L(-1)$-对易子公式：对于 $v \in V$，

$$\frac{d}{dx}Y_W(v,x) = Y_W(L_V(-1)v, x) = [L_W(-1), Y_W(v,x)].$$

带有 g-作用的弱 g-扭模，是一个不带 g-作用的弱 g-扭 V-模，并配备一个 $\langle g\rangle$-作用（其中 $\langle g\rangle$ 表示由 g生成的循环群），且满足以下 g-相容性条件： W 上的 g-作用与 $L_W(0)$、 $L_W(-1)$ 以及 $gY_W(u,x)w = Y_W(gu,x)gw$对任意 $u \in V$和 $w \in W$均可交换。设 G是V的一个自同构群，使得 $g \in G$。带有 G-作用的弱 g-扭 V-模，是一个带有 g-作用的弱 g-扭 V-模W，并配备一个扩展该 g-作用的 G-模结构，且满足以下 G-相容性条件： W 上的 G-作用与 $L_W(0)$、 $L_W(-1)$ 以及$hY_W(u,x)w = Y_W(hu,x)hw$对任意 $h \in G$、 $u \in V$和 $w \in W$均可交换。不带 g-作用的广义 g-扭 V-模，是一个不带 g-作用、具有 $\mathbb{C}$-分次的弱 g-扭 V-模

$$W = \coprod_{n\in\mathbb{C}} W_{[n]}$$

（按权分次）满足上述 g-兼容条件以及以下 $L(0)$-分次条件：对于 $w \in W_{[n]} = \coprod_{\alpha\in P_W^g} W_{[n]}^{[\alpha]}$, $n \in \mathbb{C}$，存在 $K \in \mathbb{Z}_+$使得 $(L_W(0) - n)^K w = 0$。带有 g-作用的广义 g-扭曲 V-模是一个不带 g-作用、带有 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}/\mathbb{Z}$-分次的广义$g$-扭曲 V-模

$$W = \coprod_{n\in\mathbb{C}} \coprod_{\alpha\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}} W_{[n]}^{[\alpha]}$$

（按权和 g-权分次）且满足以下 g-分次条件：对于 $\alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$、$w \in W^{[\alpha]} = \coprod_{n\in\mathbb{C}} W_{[n]}^{[\alpha]}$，存在 $\Lambda \in \mathbb{Z}_+$使得（$g - e^{2\pi\mathbf{i}\alpha}$）$^\Lambda w = 0$。有或没有 g-作用的下有界广义 g-扭 V-模分别是有或没有 g-作用的广义 g-扭 V-模W，并满足：当 $\Re(n) < N$ 时，对某个$N \in \mathbb{Z}$有 $W_{[n]} = 0$。有或没有 g-作用的分次受限广义 g-扭 V-模分别是有或没有 g-作用的下有界广义 g-扭 V-模 W，并满足：对于每个 $n \in \mathbb{C}$，$\dim W_{[n]} < \infty$。有或没有 g-作用的拟有限维广义 g-扭V-模分别是有或没有 g-作用的广义 V-模 W，并满足：对于 $N \in \mathbb{Z}$，$\dim\left(\coprod_{\Re(n)\le N} \coprod_{\alpha\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}} W_{[n]}^{[\alpha]}\right) < \infty$。对于由 V 的自同构构成的群G，满足 $g \in G$，有 G-作用的广义 g-扭 V-模、有 G-作用的下有界广义 g-扭 V-模、有 G-作用的分次受限广义 g-扭 V-模，以及有 G-作用的拟有限维广义 g-扭 V-模，均通过相应地结合上述定义来定义。

对于 V的固定自同构 g ，我们还需要定义弱 g-扭模和广义 g-扭模之间的 V-模映射，包括没有 g-作用、有 g-作用或有 G-作用的情形。

定义 2.2. 对于不带 g-作用的弱 g-扭曲 V-模 W_1 和 W_2 ，从 W_1到 W_2的 V-模映射是一个线性映射f： $W_1 \to W_2$，满足 $f \circ Y_{W_1}(v,x) = Y_{W_2}(v,x) \circ f$、$f \circ L_{W_1}(0) = L_{W_2}(0) \circ f$，以及 $f \circ L_{W_1}(-1) = L_{W_2}(-1) \circ f$。对于带有 g-作用的弱 g-扭曲 V-模 W_1和 W_2，从 W_1到 W_2 的 V-模映射是一个 V-模映射 f： $W_1 \to W_2$，其中将 W_1 和 W_2 视为不带 g-作用的弱 g-扭曲 V-模，并满足附加条件 $f \circ g = g \circ f$。令 G 为 V的一个包含 g的自同构群。对于带有 G- 作用的弱 g- 扭曲 V- 模 W_1 和 W_2 ，从 W_1 到 W_2的 V- 模映射是一个 V- 模映射 f： $W_1 \to W_2$，其中将 W_1和 W_2 视为带有 g-作用的弱 g-扭曲 V-模，并且 f 还是一个 G-模映射。对于不带 g-作用、带有 g-作用或带有 G-作用的广义 g-扭曲 V-模W_1 和 W_2 ，从 W_1到 W_2 的 V-模映射，是当将 W_1 和 W_2 分别视为不带 g-作用、带有 g-作用或带有 G-作用的弱 g-扭曲V-模时，从 W_1 到 W_2 的 V-模映射。

本文主要研究具有和不具有 g-作用的下有界、分次受限、拟有限维g-扭曲 V-模，以及具有 G-作用的、由 V 的自同构组成的群的情形。根据定义，具有 g-作用和 G-作用的广义 g-扭曲 V-模，也是没有 g-作用的广义 g-扭曲 V-模。因此，当 G 是阿贝尔群时，本文针对适当的、没有 g-作用的广义 g-扭曲 V-模所得到的结果，同样适用于相应的具有 g-作用和 G-作用的广义 g-扭曲 V-模。由于本文相当一部分结果涉及适当的、没有 g-作用的 g-扭曲V-模，为简便起见，我们将省略术语“没有 g-作用的弱 g-扭曲 V-模”中的“没有 g-作用”，简称此类扭曲 V-模为弱 g-扭曲 V-模。类似地，我们也会省略以下术语中的“没有 g-作用”：“没有 g-作用的广义 g-扭曲 V-模”、“没有 g-作用的下有界广义 g-扭曲V-模”、“没有 g-作用的分次受限广义 g-扭曲 V-模”，以及“拟有限维广义 g-扭曲 V-模”。如果某个结果专门针对具有 g-作用或 G-作用的适当 g-扭曲 V-模，我们总会使用“具有 g-作用”或“具有 G-作用”等措辞明确说明。

对于一个弱 g-扭曲 V-模 W，令

$$Y_{W,0}(v,x) = \sum_{n \in \mathbb{C}} v_{n,0} x^{-n-1}$$

对于 $v \in V$。于是，由 [HY], 中的引理 2.3 可得

$$Y_W(v,x) = Y_{W,0}(x^{-\mathcal{N}_g} v, x) \tag{2.2}$$

对于 $v \in V$。为简便起见，我们有时也将 $v_{n,\ 0}$ 简单记为 v_n ，用于表示 $v \in V$ 和$n \in \mathbb{C}$。

对于一个带有 g 作用的广义 V-扭模

$$W = \coprod_{n \in \mathbb{C}} \coprod_{\alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}} W_{[n]}^{[\alpha]}$$

，令 $W^{[\alpha]}=\coprod_{n\in\mathbb{C}}W^{[\alpha]}_{[n]}$ for $\alpha\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}$。若 $W^{[\alpha]}\neq 0$ for $\alpha\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}$，则 $W^{[\alpha]}$ 是 g 在 W 上作用的广义特征空间，对应特征值 $e^{2\pi\mathrm{i}\alpha}$。对于 $\alpha\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}$，我们总能在 α 中找到唯一的复数，使得该复数的实部属于 $[0,1)$。滥用记号，我们将此数记为 α，并始终使用 $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ 表示 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 中元素的此类唯一代表。对于满足$\Re(\alpha)\in[0,1)$ 的 $\alpha\in\mathbb{C}$，我们用 $W^{[\alpha]}$ 表示空间 $W^{[\alpha+\mathbb{Z}]}$。令

$$P_W^g=\{\alpha\in\mathbb{C}\mid \Re(\alpha)\in[0,1),\ W^{[\alpha]}\neq 0\}.$$

于是我们有

$$W=\coprod_{n\in\mathbb{C}}\coprod_{\alpha\in P_W^g}W^{[\alpha]}_{[n]}$$

一般的扭曲交织算子，尤其是非交换自同构扭曲的扭曲模之间的扭曲交织算子，已在 [H5] 和 [DH]中引入并加以研究。在这些文献研究的非交换情形中，必须使用复分析方法。另一方面，对于可交换自同构扭曲的扭曲模之间的扭曲交织算子，可以利用以形式变量方法表述的雅可比恒等式来定义和研究。本文只研究可交换自同构的情形，因此需要用到雅可比恒等式。故此处给出扭曲交织算子的形式变量定义。该形式变量定义可以从 [H5] 和 [DH]中的解析定义推导得到。我们将在另一篇论文中讨论复分析方法与形式变量方法之间的联系。

定义 2.3。设 V 是一个分次受限顶点代数，g_1 和 g_2 是 V的可交换自同构，而 W_1、W_2、W_3 分别是弱 g_1-、g_2、g_1g_2-扭曲的 V-模。类型为$\binom{W_3}{W_1W_2}$ 的扭曲交织算子是一个线性映射

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}:W_1\otimes W_2&\to W_3\{x\}[\log x]\\ w_1\otimes w_2&\mapsto \mathcal{Y}(w_1,x)w_2=\sum_{k=0}^{K}\sum_{n\in\mathbb{C}}\mathcal{Y}_{n,k}(w_1)w_2x^{-n-1}(\log x)^k\end{aligned}$$

满足以下公理:

1. 下截断性质：对于 $w_1\in W_1$、$w_2\in W_2$ 和 $k=0,\ \ldots\ldots,\ K$，存在$N\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{Y}_{n,\ k}(w_1)w_2=0$，当 $\Re(n)>N$ 时。

2. 雅可比恒等式：对于 $v\in V$、$w_1\in W_1$ 和 $w_2\in W_2$,

$$\begin{aligned}&x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)Y_{W_3}\left(\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)^{\mathcal{L}_{g_1}}v,x_1\right)\mathcal{Y}(w_1,x_2)\\ &\quad-x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right)\mathcal{Y}(w_1,x_2)Y_{W_2}\left(e^{\pi\mathrm{i}\mathcal{L}_{g_1}}\left(\frac{x_2-x_1}{x_0}\right)^{\mathcal{L}_{g_1}}v,x_1\right)\end{aligned}$$

$$= x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)\mathcal{Y}\left(Y_{W_1}\left(\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)^{\mathcal{L}_{g_2}} v, x_0\right)w_1, x_2\right). \tag{2.3}$$

3. $L(0)$-交换子公式：对于 $w_1 \in W_1$,

$$L_{W_3}(0)\mathcal{Y}(w_1,x) - \mathcal{Y}(w_1,x)L_{W_2}(0) = x\frac{d}{dx}\mathcal{Y}(w_1,x) + \mathcal{Y}(L_{W_1}(0)w_1,x).$$

4. $L(-1)$ 导数性质：对于 $w_1 \in W_1$,

$$\frac{d}{dx}\mathcal{Y}(w_1,x) = \mathcal{Y}(L_{W_1}(-1)w_1,x) = L_{W_3}(-1)\mathcal{Y}(w_1,x) - \mathcal{Y}(w_1,x)L_{W_2}(-1).$$

在G 为阿贝尔群且包含 g_1 和 g_2的情况下，若 W_1、 W_2、 W_3 是带有 G-作用的弱 g_1-、 g_2、 g_1g_2-扭曲 V-模，则型为 $\binom{W_3}{W_1W_2}$ 的扭曲交织算子，在将 W_1、 W_2、 W_3 视为弱 g_1-、 g_2、 g_1g_2 -扭曲 V-模（不带 W_1、 W_2、 W_3 -作用）时，是型为$\binom{W_3}{W_1W_2}$ 的扭曲交织算子，并满足附加条件

$$h\mathcal{Y}(w_1,x)w_2 = \mathcal{Y}(hw_1,x)hw_2$$

对于 $h \in G$、 $w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$。对于广义 g_1-、 g_2、 g_1g_2-扭曲 V-模 W_1、 W_2和 W_3，相应地，型为 $\binom{W_3}{W_1W_2}$ 的扭曲交织算子，在将 W_1、 W_2和 W_3 分别视为弱 g_1-、 g_2、 g_1g_2-扭曲V-模时，是同型的扭曲交织算子。对于分别带有 G-作用的广义 g_1-、 g_2、 g_1g_2-扭曲 V-模 W_1、 W_2和 W_3，型为 $\binom{W_3}{W_1W_2}$ 的扭曲交织算子，在将 W_1、 W_2和 W_3 分别视为带有 G-作用的弱 g_1-、 g_2、g_1g_2-扭曲 V-模时，是同型的扭曲交织算子。

注2.4。 在雅可比恒等式（2.3）的第二项中，我们选择 $(-1)^{\mathcal{L}_{g_1}}$ 的值为 $e^{\pi \mathbf{i}\mathcal{L}_{g_1}}$。我们也可以选择 $(-1)^{\mathcal{L}_{g_1}}$ 的值为 $e^{-\pi \mathbf{i}\mathcal{L}_{g_1}}$。不同的取值对应于不同的单值分支；多值解析函数是扭曲顶点算子与交织算子的乘积和迭代所收敛到的函数。这些选择与待构造的张量范畴的交叉编织有关。关于 g_1 和 g_2 均为有限阶时这两种选择的讨论，参见 [Ta3] 。

上面对扭曲交织算子的定义使用了形式变量。在后面的章节中，我们需要在 $z \in \mathbb{C}^\times$ 处取形式级数 $\mathcal{Y}(w_1,\ x)$ 的值。由于 $\mathcal{Y}(w_1,\ x)$ 包含非整数幂和 x 的对数，其取值取决于对 z 的对数值的选择。令 $l_p(z) = \log|z| + \mathbf{i}\arg z + 2\pi \mathbf{i}p$，其中 $0 \le \arg z < 2\pi$。我们也使用记号 $\log z = l_0(z)$。对于 $w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$，我们有

$$\mathcal{Y}(w_1,x)w_2 = \sum_{k=0}^{K}\sum_{n\in\mathbb{C}}\mathcal{Y}_{n,k}(w_1)w_2x^{-n-1}(\log x)^k.$$

于是，对于 $p\in\mathbb{Z}$，我们定义 p 阶值 $\mathcal{Y}^p(w_1,\ z)w_2$ 为 $\mathcal{Y}(w_1,\ x)w_2$ 在 $x=z$ 处的值，即

$$\mathcal{Y}^p(w_1,z)w_2=\sum_{k=0}^{K}\sum_{n\in\mathbb{C}}\mathcal{Y}_{n,k}(w_1)w_2e^{(-n-1)l_p(z)}l_p(z)^k\in\overline{W}_3=\prod_{n\in\mathbb{C}}(W_3)_{[n]}.$$

在 $p=0$ 的情形下，我们将 $\mathcal{Y}^0(w_1,\ w_1)w_2$ 简记为 $\mathcal{Y}(w_1,\ z)w_2$。

现在，我们推导一个用扭曲顶点算子的分量表示的雅可比恒等式版本。后面的章节会用到这一版本。回忆一下，我们用 v_n 表示 $v_{n,\ 0}$，其中 $v\in V$ 和 $n\in\mathbb{C}$。

命题 2.5。设 V 为分次受限顶点代数，g_1 和 g_2 为 V的交换自同构，W_1、W_2、W_3 分别为弱 g_1-、g_2-、g_1g_2-扭曲 V-模，而 $\mathcal{Y}$ 为型别 $\binom{W_3}{W_1W_2}$的扭曲交织算子。则对于 $\alpha_1\in P_V^{g_1}$、$\alpha_2\in P_V^{g_2}$、$v\in V^{[\alpha_1,\alpha_2]}$、$w_1\in W_1$，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_1-n_1}{k}(-x)^{k+l}\left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{l}v\right)_{\alpha_1+\alpha_2-n_1-n_2-k-l}\mathcal{Y}(w_1,x)\\
&\quad-\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_1-n_1}{k}e^{\pi\mathbf{i}(\alpha_1-n_1-k-l)}x^{\alpha_1-n_1-k-l}\mathcal{Y}(w_1,x)\left(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{l}x^{\mathcal{N}_{g_1}}v\right)_{\alpha_2-n_2+k+l}\\
&=\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_2-n_2}{k}x^{\alpha_2-n_2-k-l}\mathcal{Y}\left(\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{l}x^{\mathcal{N}_{g_2}}v\right)_{\alpha_1-n_1+k+l}w_1,x\right).
\end{aligned}\tag{2.4}$$

证明。对于$\alpha_1\in P_V^{g_1}$和$\alpha_2\in P_V^{g_2}$，令 $V^{[\alpha_1,\alpha_2]}=V^{]\alpha_1]}\cap V^{[\alpha_2]}$。那么 $V^{[\alpha_1,\alpha_2]}$是 g_1和 g_2的公共特征向量空间，其特征值分别为 $e^{2\pi\mathbf{i}\alpha_1}$和 $e^{2\pi\mathbf{i}\alpha_2}$，并且有$V=\coprod_{\alpha_1\in P_V^{g_1},\ \alpha_2\in P_V^{g_2}}V^{[\alpha_1,\alpha_2]}$。对于 $v\in V_{g_1\ g_2}^{[\alpha_1,\alpha_2],}$ 和 $w_1\in W_1$，有$\mathcal{S}_{g_1}v=\alpha_1v$和$\mathcal{S}_{g_2}v=\alpha_2v$。于是

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)^{\mathcal{L}_{g_1}}v&=\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)^{\mathcal{N}_{g_1}}v,\\
e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{L}_{g_1}}\left(\frac{x_2-x_1}{x_0}\right)^{\mathcal{L}_{g_1}}v&=e^{\pi\mathbf{i}\alpha_1}\left(\frac{x_2-x_1}{x_0}\right)^{\alpha_1}e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}\left(\frac{x_2-x_1}{x_0}\right)^{\mathcal{N}_{g_1}}v,\\
\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)^{\mathcal{L}_{g_2}}v&=\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)^{\mathcal{N}_{g_2}}v.
\end{aligned}$$

利用这些公式，我们看到，对于 $v\in V_{g_1\ g_2}^{[\alpha_1,\alpha_2],}$ 以及 $w_1\in W_1$，雅可比恒等式 (2.3) 变为

$$\begin{aligned}
&x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)^{\alpha_1}Y_{W_3}\left(\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1\right)\mathcal{Y}(w_1,x_2)\\
&\quad-x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right)e^{\pi\mathbf{i}\alpha_1}\left(\frac{x_2-x_1}{x_0}\right)^{\alpha_1}\mathcal{Y}(w_1,x_2)Y_{W_2}\left(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}\left(\frac{x_2-x_1}{x_0}\right)^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1\right)
\end{aligned}$$

$$= x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)^{\alpha_2}\mathcal{Y}\left(Y_{W_1}\left(\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)^{\mathcal{N}_{g_2}}v,x_0\right)w_1,x_2\right). \tag{2.5}$$

由 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}
Y_{W_3}\left(\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1\right) &= Y_{W_3;0}((1-x_1^{-1}x_2)^{\mathcal{N}_{g_1}}x_0^{-\mathcal{N}_{g_1}}x_1^{-\mathcal{N}_{g_2}}v,x_1),\\
Y_{W_2}\left(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}\left(\frac{x_2-x_1}{x_0}\right)^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1\right) &= Y_{W_2,0}(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}(1-x_1x_2^{-1})^{\mathcal{N}_{g_1}}x_0^{-\mathcal{N}_{g_1}}x_1^{-\mathcal{N}_{g_2}}x_2^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1),\\
Y_{W_1}\left(\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)^{\mathcal{N}_{g_2}}v,x_0\right) &= Y_{W_1,0}((1+x_0x_2^{-1})^{\mathcal{N}_{g_2}}x_0^{-\mathcal{N}_{g_1}}x_1^{-\mathcal{N}_{g_2}}x_2^{\mathcal{N}_{g_2}}v,x_0)
\end{aligned}$$

Usin应用这些公式，并将 v 替换为 $x_0^{\mathcal{N}_{g_1}}x_1^{\mathcal{N}_{g_2}}v$，我们看到 (2.5) 变为

$$\begin{aligned}
&x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)^{\alpha_1}Y_{W_3;0}((1-x_1^{-1}x_2)^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1)\mathcal{Y}(w_1,x_2)\\
&\quad - x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right)e^{\pi\mathbf{i}\alpha_1}\left(\frac{x_2-x_1}{x_0}\right)^{\alpha_1}\mathcal{Y}(w_1,x_2)Y_{W_2,0}(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}(1-x_1x_2^{-1})^{\mathcal{N}_{g_1}}x_2^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1)\\
&= x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)^{\alpha_2}\mathcal{Y}(Y_{W_1,0}((1+x_0x_2^{-1})^{\mathcal{N}_{g_2}}x_2^{\mathcal{N}_{g_2}}v,x_0)w_1,x_2).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

在 (2.5) 两边乘以 $x_0^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}$，得到雅可比恒等式的以下形式：

$$\begin{aligned}
&x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)(x_1-x_2)^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}Y_{W_3;0}((1-x_1^{-1}x_2)^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1)\mathcal{Y}(w_1,x_2)\\
&\quad - x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right)e^{\pi\mathbf{i}\alpha_1}(x_2-x_1)^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}\mathcal{Y}(w_1,x_2)Y_{W_2,0}(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}(1-x_1x_2^{-1})^{\mathcal{N}_{g_1}}x_2^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1)\\
&= x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)x_0^{\alpha_1}(x_2+x_0)^{\alpha_2}\mathcal{Y}(Y_{W_1,0}((1+x_0x_2^{-1})^{\mathcal{N}_{g_2}}x_2^{\mathcal{N}_{g_2}}v,x_0)w_1,x_2).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

对雅可比恒等式 (2.7) 左端第一项取 $\mathrm{Res}_{x_0}\mathrm{Res}_{x_1}x_0^{-n_1}x_1^{-n_2}$，得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{x_0}\mathrm{Res}_{x_1}x_0^{-n_1}x_1^{-n_2}x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)(x_1-x_2)^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}Y_{W_3;0}((1-x_1^{-1}x_2)^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1)\mathcal{Y}(w_1,x_2)\\
&= \mathrm{Res}_{x_1}x_1^{-n_2}(x_1-x_2)^{\alpha_1-n_1}x_1^{\alpha_2}Y_{W_3;0}((1-x_1^{-1}x_2)^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1)\mathcal{Y}(w_1,x_2)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_1-n_1}{k}\mathrm{Res}_{x_1}x_1^{\alpha_1+\alpha_2-n_1-n_2-k-l}(-x_2)^{k+l}Y_{W_3;0}\left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{l}v,x_1\right)\mathcal{Y}(w_1,x_2)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_1-n_1}{k}(-x_2)^{k+l}\left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{l}v\right)_{\alpha_1+\alpha_2-n_1-n_2-k-l}\mathcal{Y}(w_1,x_2).
\end{aligned}$$

对雅可比恒等式 (2.7) 左端第二项取 $\mathrm{Res}_{x_0}\mathrm{Res}_{x_1}x_0^{-n_1}x_1^{-n_2}$，得到

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{Res}_{x_0}\mathrm{Res}_{x_1}x_0^{-n_1}x_1^{-n_2}x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right)e^{\pi\mathbf{i}\alpha_1}(x_2-x_1)^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}\cdot\\
&\qquad\cdot\mathcal{Y}(w_1,x_2)Y_{W_2,0}(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}(1-x_1x_2^{-1})^{\mathcal{N}_{g_1}}x_2^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1)\\
&=-\mathrm{Res}_{x_1}x_1^{-n_2}e^{\pi\mathbf{i}(\alpha_1-n_1)}(x_2-x_1)^{\alpha_1-n_1}x_1^{\alpha_2}\cdot\\
&\qquad\cdot\mathcal{Y}(w_1,x_2)Y_{W_2,0}(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}(1-x_1x_2^{-1})^{\mathcal{N}_{g_1}}x_2^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1)\\
&=-\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_1-n_1}{k}\mathrm{Res}_{x_1}e^{\pi\mathbf{i}(\alpha_1-n_1)}x_2^{\alpha_1-n_1-k-l}(-1)^{k+l}x_1^{\alpha_2-n_2+k+l}\cdot\\
&\qquad\cdot\mathcal{Y}(w_1,x_2)Y_{W_2,0}\left(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{l}x_2^{\mathcal{N}_{g_1}}v,x_1\right)\\
&=-\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_1-n_1}{k}e^{\pi\mathbf{i}(\alpha_1-n_1-k-l)}x_2^{\alpha_1-n_1-k-l}\cdot\\
&\qquad\cdot\mathcal{Y}(w_1,x_2)\left(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{l}x_2^{\mathcal{N}_{g_1}}v\right)_{\alpha_2-n_2+k+l}.
\end{aligned}$$

对雅可比恒等式 (2.7) 右侧依次取关于 x_0 和 $x_1x_0^{-n_1}x_1^{-n_2}$ 的留数，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{x_0}\mathrm{Res}_{x_1}x_0^{-n_1}x_1^{-n_2}x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)x_0^{\alpha_1}(x_2+x_0)^{\alpha_2}\cdot\\
&\qquad\cdot\mathcal{Y}(Y_{W_1,0}((1+x_0x_2^{-1})^{\mathcal{N}_{g_2}}x_2^{\mathcal{N}_{g_2}}v,x_0)w_1,x_2)\\
&=\mathrm{Res}_{x_0}x_0^{\alpha_1-n_1}(x_2+x_0)^{\alpha_2-n_2}\mathcal{Y}(Y_{W_1,0}((1+x_0x_2^{-1})^{\mathcal{N}_{g_2}}x_2^{\mathcal{N}_{g_2}}v,x_0)w_1,x_2)\\
&=\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_2-n_2}{k}\mathrm{Res}_{x_0}x_0^{\alpha_1-n_1+k+l}x_2^{\alpha_2-n_2-k-l}\mathcal{Y}\left(Y_{W_1,0}\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{l}x_2^{\mathcal{N}_{g_2}}v,x_0\right)w_1,x_2\right)\\
&=\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_2-n_2}{k}x_2^{\alpha_2-n_2-k-l}\mathcal{Y}\left(\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{l}x_2^{\mathcal{N}_{g_2}}v\right)_{\alpha_1-n_1+k+l}w_1,x_2\right).
\end{aligned}$$

利用这些计算和 (2.7)，并将 x_2 换成 x，我们得到 (2.4)。 □

注 2。 6. 在 g_1 在 V上半单地作用的特殊情形下，(2.4)变为

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_1-n_1}{k}(-x)^kv_{\alpha_1+\alpha_2-n_1-n_2-k}\mathcal{Y}(w_1,x)\\
&\qquad-\sum_{k\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_1-n_1}{k}e^{\pi\mathbf{i}(\alpha_1-n_1-k)}x^{\alpha_1-n_1-k}\mathcal{Y}(w_1,x)v_{\alpha_2-n_2+k}\\
&\qquad=\sum_{k\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_2-n_2}{k}x^{\alpha_2-n_2-k}\mathcal{Y}(v_{\alpha_1-n_1+k}w_1,x).
\end{aligned}$$

3 扭模的余有限性

本节将证明广义扭曲 V-模的一些基本性质。

定义 3.1。设 W 是一个弱 g-扭曲 V-模。对于每个 $n \in 2+\mathbb{N}$，我们将 $C_n(W)$ 定义为由形如 $u_{\alpha-n}w$ 的元素张成的 W 的子空间，其中 $u \in V_+^{[\alpha]}$、$\alpha \in P_V^g$、$w \in W$。如果 $\dim W/C_n(W) < \infty$，则称 W 是 C_n-余有限的。

与（非扭曲）弱模的情形一样，我们还有以下有用的事实：

命题 3.2。设 W 是一个弱 g-扭曲 V-模。如果对于某个 $n \in 2+\mathbb{N}$，W 是 C_n-余有限的，那么对于 $m = 2$、...、n，它也是 C_m-余有限的。

证明。如同 非扭曲情形一样，这一结果由 $L(-1)$-导数性质推出 y. □

一个 C_n-余有限的下有界广义 V-扭曲 -模具有以下性质：

命题 3.3。设 $W = \coprod_{m\in\mathbb{C}} W_{[n]}$ 是一个 C_n-余有限的下有界广义 g-扭曲V-模。那么 W 具有以下性质：

1. W 是拟有限维的。
2. 存在 W 的一个有限维子空间 M，使得 W 由以下形式的元素张成：

$$v_{\alpha_1-n}^{(1)} \cdots v_{\alpha_i-n}^{(i)} w \tag{3.1}$$

其中 $i \in \mathbb{N}$、$v^{(1)} \in V_+^{[\alpha_1]}$、.....、$v^{(i)} \in V_+^{[\alpha_i]}$和 $w \in M$。特别地，W是有限生成的。

3. 若 W 具有 V 的另一个自同构 h 的作用，且 h作用与 $L_W(0)$对易，则 W 可以分解为 h作用的广义特征子空间的直和。

证明。为证明性质 1，我们需要证明

$$\dim\left(\coprod_{\Re(m)\le N} W_{[m]}\right) < \infty$$

对 $N \in \mathbb{Z}$。由于 W 有下界，存在 $N_0 \in \mathbb{Z}$，使得当 $\Re(m) < N_0$时，$W_{[m]} = 0$。我们对 $N - N_0$使用归纳法。在 $N - N_0 = 0$ 的情形下，对于 $v \in V^{[\alpha]}(l)$ 和 $w \in W_{[m]}$，其中$l \in \mathbb{Z}_+$ 和 $m \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(m) \ge N_0$，$v_{\alpha-n}w \in W_{[l-\alpha+n-1+m]}$。由于 $l \in \mathbb{Z}_+, n \in 2+\mathbb{N}$，且 $\Re(m) \ge N_0, \Re(l-\alpha+n-1+m) > N_0$。因此，$W_{[l-\alpha+n-1+m]}$ 的非零元素（例如 $v_{\alpha-n}w$）不可能属于 $\coprod_{\Re(m)=N_0} W_{[m]}$。所以 $\dim \coprod_{\Re(m)=N_0} W_{[m]} \le \dim W/C_n(W) < \infty$，因为 W 是 C_n-余有限的。这就证明了 $N - N_0 = 0$ 情形下的性质 1。

假设性质 **1** 对 $0 \le N - N_0 \le k$ 成立。现在令 $N = N_0 + k + 1$。根据归纳假设，我们只需证明

$$\dim \left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\le k+1} W_{[m]} \right) \tag{3.2}$$

对于满足 $k < \Re(m) - N_0 \le k+1$ 的 $m \in \mathbb{C}$，令 $(C_n(W) \cap W_{[m]})_{\alpha,l}$ 为 $C_n(W) \cap W_{[m]}$ 的子空间，由形如 $v_{\alpha-n}w$（其中 $v \in V^{[\alpha]}$ 满足 $_{m+\alpha-n+1-l}$）以及 $w \in W_{[l]}$（其中 $l \in \mathbb{C}$ 满足 $0 \le \Re(l) - N_0 \le k$ 和 $m+\alpha-n+1-l \in \mathbb{Z}_+$）的元素张成。对于满足 $m+\alpha-n+1-l \in \mathbb{Z}_+$（或等价地，满足 $m+\alpha-n-l \in \mathbb{N}$）的 $m, l \in \mathbb{C}, \alpha \in P_V^g$，我们有 $\Im(l) = \Im(m) + \Im(\alpha)$，并且 $\Re(l) \in \Re(m) + \Re(\alpha) - n + 1 - \mathbb{Z}_+ = \Re(m) + \Re(\alpha) - n - \mathbb{N}$。令 $p = m + \alpha - n - l \in \mathbb{N}$。若 m 和 l 还满足 $0 \le \Re(l) - N_0 \le k < \Re(m) - N_0 \le k+1$，则有

$$p = m + \alpha - n - l = \Re(m) + \Re(\alpha) - n - \Re(l) \le N_0 + k + 1 + \Re(\alpha) - n - N_0 < k + 1 - n.$$

因此我们得到 $0 \le p \le k - n$。特别地，在 $k < n$ 的情况下，不存在这样的 p；或者等价地，$(C_n(W) \cap W_{[m]})_{\alpha,\, l} = 0$。在 $k \ge n$ 的情况下，对于满足 $0 \le p \le k-n$ 和 $l = m + \alpha - n - p$ 的 $p \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} k \ge \Re(m) - N_0 - 1 &= \Re(l) - \Re(\alpha) + n + p - N_0 - 1 \\ &> \Re(l) - N_0 \\ &= \Re(m) + \Re(\alpha) - n - p - N_0 \\ &\ge \Re(m) - N_0 + \Re(\alpha) - k \\ &> k. \end{aligned}$$

因此，对满足 $0 \le \Re(l) - N_0 \le k$ 的 $l \in m+\alpha-n+1-\mathbb{Z}_+$ 求和，等同于对 $p = 0$、.....、$k-n$ 求和。因此，在 $k \ge n$，的情形下，我们有

$$\begin{aligned} &\dim \left(C_n(W) \cap \left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\le k+1} W_{[m]} \right) \right) \\ &= \dim \left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\le k+1} C_n(W) \cap W_{[m]} \right) \\ &= \dim \left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\le k+1} \coprod_{\alpha\in P_V^g} \coprod_{\substack{l\in m+\alpha-n+1-\mathbb{Z}_+ \\ 0\le\Re(l)-N_0\le k}} (C_n(W) \cap W_{[l]})_{\alpha,l} \right) \\ &= \sum_{k<\Re(m)-N_0\le k+1} \sum_{\alpha\in P_V^g} \sum_{\substack{l\in m+\alpha-n+1-\mathbb{Z}_+ \\ 0\le\Re(l)-N_0\le k}} \dim (C_n(W) \cap W_{[m]})_{\alpha,l} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k<\Re(m)-N_0\leq k+1}\ \sum_{\alpha\in P_V^g}\ \sum_{\substack{l\in m+\alpha-n+1-\mathbb{Z}_+\\ 0\leq\Re(l)-N_0\leq k}} \dim V^{[\alpha]}_{(m+\alpha-n+1-l)}\dim W_{[l]}\\
&\leq \sum_{k<\Re(m)-N_0\leq k+1}\ \sum_{\alpha\in P_V^g}\ \sum_{p=0}^{k-n}\dim V^{[\alpha]}_{(p)}\dim W_{[m+\alpha-n-p]}\\
&\leq \sum_{\alpha\in P_V^g}\sum_{p=0}^{k-n}\dim V^{[\alpha]}_{(p)}\left(\sum_{k<\Re(m)-N_0\leq k+1}\dim W_{[m+\alpha-n-p]}\right)\\
&= \sum_{p=0}^{k-n}\left(\sum_{\alpha\in P_V^g}\dim V^{[\alpha]}_{(p)}\right)\dim\left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\leq k+1} W_{[m+\alpha-n-p]}\right)\\
&\leq \sum_{p=0}^{k-n}\left(\sum_{\alpha\in P_V^g}\dim V^{[\alpha]}_{(p)}\right)\dim\left(\coprod_{0\leq\Re(s)-N_0\leq k} W_{[s]}\right)\\
&= \sum_{p=0}^{k-n}\dim V_{(p)}\dim\left(\coprod_{0\leq\Re(s)-N_0\leq k} W_{[s]}\right)\\
&< \infty,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

最后一步是由 V 的分次限制性质和归纳假设得出的。

另一方面，商空间

$$
\left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\leq k+1} W_{[m]}\right)\Big/\left(C_n(W)\cap\left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\leq k+1} W_{[m]}\right)\right)
$$

作为有限维空间 $W/C_n(W)$ 的子空间，也具有有限维性。因此，由 (3.3) 以及该商空间的有限维性可得

$$
\begin{aligned}
&\dim\left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\leq k+1} W_{[m]}\right)\\
&\quad\leq \dim\left(C_n(W)\cap\left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\leq k+1} W_{[m]}\right)\right)\\
&\qquad+\dim\left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\leq k+1} W_{[m]}\right)\Big/\left(C_n(W)\cap\left(\coprod_{k<\Re(m)-N_0\leq k+1} W_{[m]}\right)\right)\\
&\quad< \infty,
\end{aligned}
$$

从而证明了 (3.2)。

现在证明性质2。取 M 的一个有限维子空间 W，使得 $W = C_n(W) + M$。然而，W 的每个有限维子空间都必须包含在某个 $N \in \mathbb{N}$ 对应的 $\coprod_{\Re(m)\leq N} W_{[m]}$ 中。特别地，存在 $N_M \in \mathbb{N}$ 使得 $M \subset \coprod_{\Re(m)\leq N_M} W_{[m]}$，从而 $\coprod_{\Re(m)>N_M} W_{[m]} \subset C_n(W)$。由于 $\coprod_{\Re(m)\leq N_M} W_{[m]}$ 也是有限维的，因此从现在起取 $M = \coprod_{\Re(m)\leq N_M} W_{[m]}$。

$\widetilde{\ }$将形如（3.1）的元素张成的空间记为 W。我们要证明的是 $\widetilde{W} = W$。只需证明，对于每个 $m \in \mathbb{C}$，都有 $W_{[m]} \subset W$。对于满足$W_{[m]} \neq 0$的每个 $m \in \mathbb{C}$，存在唯一的 $N_m \in \mathbb{Z}$，使得 $N_m - 1 < \Re(m) \leq N_m$。我们对 N_m 使用归纳法$\widetilde{\ }$。当 $N_m \leq N_M$ 时，$W_{[m]} \subset M \subset W$。假设对于 $N_m \leq p \in N_M + \mathbb{N}$，有 $W_{[m]} \subset W$。那么在 $N_m = p + 1$ 的情况下，由于 $\Re(m) > N_m - 1 = p \geq N_M$ 且 $\coprod_{\Re(m)>N_M} W_{[m]} \subset C_n(W)$，我们得到 $W_{[m]} \subset C_n(W)$。于是，$W_{[m]}$ 由形如 $v_{\alpha-n}w$ 的元素（其中$v \in V^{[\alpha]}(m+\alpha-n+1-l)$）以及满足 $\Re(l) \leq p$和 $m+\alpha-n+1-l \in \mathbb{Z}_+$ 的 $l \in \mathbb{C}$ 对应的元素 $w \in W_{[l]}$ 张成。由于 $\Re(l) \leq p$，我们有 $N_p \leq p$。根据归纳假设，$w \in W$。因此，w 是形如 $v^{(1)}_{\alpha_1-n} \cdots v^{(i)}_{\alpha_i-n}\tilde{w}$ 的元素的线性组合，其中 $v^{(1)} \in V_+^{[\alpha_1]}$、……、$v^{(i)} \in V_+^{[\alpha_i]}$ 为齐次元素，且$\tilde{w} \in M$。于是，$W_{[\![m]\!]}$由形如 $v_{\beta-n}v^{(1)}_{\alpha_1-n} \cdots v^{(i)}_{\alpha_i-n}\tilde{w}$ 的元素张成，其中 $v \in V^{[\beta]}(l)$、$v^{(1)} \in V_+^{[\alpha_1]}$、……、$v^{(i)} \in V_+^{[\alpha_i]}$，且 $\tilde{w} \in M$。因此，$W_{[m]} \subset \widetilde{W}$，性质2得证。

最后，我们证明性质 3。由于 W 是拟有限维的，$W_{[m]}$ 对于 $m \in \mathbb{C}$是……由于 W 特别是有限维的。若 W 上有另一个自同构 h的作用，且该自同构属于 V，并且 h的作用与 $L_W(0)$可交换，那么 $W_{[m]}$ 在 h的作用下保持不变。因此，$W_{[m]}$ 可分解为 h作用下广义特征子空间的直和，从而 W 也可分解为 h作用下广义特征子空间的直和。

□

注 3.4。由命题 3.3 中的性质 1 可知，C_n-余有限的下有界广义 g-扭曲 V-模、C_n-余有限的分次受限广义 g-扭曲 V-模，以及 C_n-余有限的拟有限维广义 g-扭曲 V-模是相同的。本文将这些 g-扭模称为 C_n-余有限的分次受限广义 g-扭曲 V-模，但请注意，这些 g-扭模是拟有限维的。

对于下一个结果以及下一节将要证明的扭曲 Nahm 不等式，我们需要引入扭曲交织算子的满射性这一概念。设 W_1、W_2、W_3 分别是弱 g_1-、g_2-、g_3-扭曲 V-模。若 $\mathcal{Y}$ 型的扭曲交织算子 $\binom{W_3}{W_1 W_2}$ 的系数张成 W_3，且这些系数取自 $\mathcal{Y}(w_1, x)w_2$，其中 $w_1 \in W_1$ 且 $w_2 \in W_2$，则称该算子为满射的。若弱 V-模 W_3存在一个 $\mathcal{Y}$ 型的满射扭曲交织算子，则称 $(W_3, \mathcal{Y})$ 是 W_1 与 W_2 的弱满射积。为简便起见，我们常称 W_3 为 W_1 与 W_2 的弱满射积。若 W_3 是广义 g_3-扭曲 V-模，或分次受限广义 g_3-扭曲 V-模，或属于其他类的 g_3-扭曲 V-模，我们也相应使用 W_1 与 W_2 的广义满射积、W_1 与 W_2 的分次受限广义满射积等术语。

命题 3.5。设 W_1 和 W_2 分别是广义 g_1 和 g_2-扭曲 V-模，且 W_3 是弱 g_3-扭曲 V-模。若 W_3 是 W_1 与 W_2 的弱满射积，则 W_3 也是广义 g_3-扭曲 V-模。

证明。令 V^{g_1}，$_{g_2}$，^{g_3} 为 V 在由 g_1、g_2 和 g_3 生成的群下的不动点子代数。则 W_1 和 W_2 也分别是广义 V^{g_1}、$_{g_2}$、^{g_3}-模，而 W_3 也是一个弱 V^{g_1}、$_{g_2}$、^{g_3}-模。令 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{Y}$，其类型为 $\binom{W_3}{W_1 W_2}$，是 W_1 和 W_2 的弱满射积 W_3 的满射扭曲交织算子。于是，当将 W_1、W_2 和 W_3 视为广义或弱 V^{g_1}、$_{g_2}$、^{g_3}-模时，$\mathcal{Y}$ 是同类型的交织算子。此外，由于作为广义或弱扭曲 V-模之间的扭曲交织算子，$\mathcal{Y}$ 是满射的，因此作为广义或弱 V^{g_1}、$_{g_2}$、^{g_3}-模之间的交织算子，它也是满射的。于是根据 [H8] 中的命题 3.4，W_3 是一个广义 V^{g_1}、$_{g_2}$、^{g_3}-模。因此，W_3 是一个广义的 g_3-扭曲 V-模。

□

4 扭曲 Nahm 不等式

本节中，我们采用 [H8], 中的相同方法，证明以下情形下的扭曲 Nahm 不等式：所涉及的 V 自同构彼此可交换，但一般可以是无限阶，并且不必在 V 上半单地作用：

定理 4.1. 设 g_1 和 g_2 是 V 上的可交换自同构，且 W_1、W_2 分别是下有界广义 g_1、g_2-扭曲 V-模。那么，对于 W_1 和 W_2 的广义满射积 W_3 以及 p、$q \in 2+\mathbb{N}$,

$$\dim(W_3/C_{\min(p,q)}(W_3)) \leq \dim(W_1/C_p(W_1)) \dim(W_2/C_q(W_2)). \tag{4.1}$$

证明。当 $\dim(W_1/C_p(W_1))$ 和 $\dim(W_2/C_q(W_2))$ 中至少一个为 ∞时，结论成立。因此，我们(4.1)只需在 $\dim W_1/C_p(W_1), \dim W_2/C_q(W_2) < \infty$的情形下证明 (4.1)，也就是说，分别在 W_1 和 W_2 是 C_p-余有限和 C_q-余有限的下有界广义扭曲 V-模的情形下证明。在这种情况下，命题 3.3 中的性质对W_1 和 W_2成立。特别地，W_1 和 W_2 是拟有限维广义扭曲 V-模。

设 M_1 和 M_2 分别为 W_1 和 W_2的有限维分次子空间，使得 $W_1 = C_p(W_1) \oplus M_1$ 且 $W_2 = C_q(W_2) \oplus M_2$。则$\dim(W_1/C_p(W_1)) = \dim M_1$ 且$\dim(W_2/C_q(W_2)) = \dim M_2$。

由于 W_3 是广义 g_1g_2-扭 V-模，W_3 是 $\mathbb{C}$-分次的，并且我们有 W_3的反变W_3'。设 M_3 是 W_3 的一个分次子空间，使得 $W_3 = C_{\min(p,q)}(W_3) \oplus M_3$。则 $W_3/C_{\min(p,q)}(W_3)$同构于 M_3。我们只需证明$\dim M_3 \leq \dim M_1 \dim M_2$。设

$$C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp = \{w_3' \in W_3' \mid \langle w_3', C_{\min(p,q)}(W_3)\rangle = 0\} \subset W_3'.$$

并令 M_3' 为关于从 W_3上的分次结构诱导出的 $\mathbb{C}$-分次的 M_3 的分次对偶。我们定义线性映射 r：$C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp \to M_3'$ 为限制映射，将 $C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp \subset W_3'$中的元素映射为它们在 M_3上的限制，即 $(r(w_3'))(w_3) = \langle w_3', w_3\rangle$

对于 $w_3' \in C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp$ 和 $w_3 \in M_3$。若对于 $w_3' \in C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp$有 $r(w_3') = 0$，则对所有 $w_3 \in M_3$ 都有 $\langle w_3', w_3\rangle = 0$。但根据定义，$\langle w_3', C_{\min(p,q)}(W_3)\rangle = 0$。由于 $W_3 = C_{\min(p,q)}(W_3) \oplus M_3$，我们得到对所有 $w_3 \in W_3$都有 $\langle w_3', w_3\rangle = 0$。因此 $w_3' = 0$，这证明了 r 是单射。给定$w_3' \in M_3'$，我们通过 $\langle \bar{w}_3', \tilde{w}_3 + w_3\rangle = \langle w_3', w_3\rangle$将其延拓为元素 $\bar{w}_3' \in W_3'$，其中 $\tilde{w}_3 \in C_{\min(p,q)}(W_3)$ 以及 $w_3 \in M_3$。根据定义，$\bar{w}_3' \in C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp$ 且 $r(\bar{w}_3') = w_3'$，这证明了 r是满射。我们已经证明 r 是线性同构。因此，我们只需证明 $\dim C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp \le \dim M_1 \dim M_2$。

设 $\mathcal{Y}$ 是类型为 $\binom{W_3}{W_1 W_2}$ 的满射扭曲交织算子。那么我们有

$$\mathcal{Y}(w_1, x)w_2 = \sum_{k=0}^{K}\sum_{n\in\mathbb{C}} \mathcal{Y}_{n,k}(w_1)w_2 x^{-n-1}(\log x)^k$$

对于 $w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$。对于齐次的 $w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$，我们有

$$\operatorname{wt} \mathcal{Y}_{n,k}(w_1)w_2 = \operatorname{wt} w_1 - n - 1 + \operatorname{wt} w_2.$$

因此，对于齐次的 $w_1 \in W_1$、$w_2 \in W_2$ 和 $w_3' \in W_3'$，

$$\langle w_3', \mathcal{Y}(w_1, x)w_2\rangle = \sum_{k=0}^{K} \langle w_3', \mathcal{Y}_{\operatorname{wt} w_1 + \operatorname{wt} w_2 - \operatorname{wt} w_3' - 1, k}(w_1)w_2\rangle x^{-\operatorname{wt} w_1 - \operatorname{wt} w_2 + \operatorname{wt} w_3'}(\log x)^k.$$

固定 $z \in \mathbb{C}^\times$。回忆第2节中，我们用 $\log z$ 表示 $\log |z| + i\arg z$，其中$0 \le \arg z < 2\pi$，并且 $\mathcal{Y}(w_1, x)w_2$ 在 $x = z$ 处的第 0 个值 $\mathcal{Y}(w_1, z)w_2 = \mathcal{Y}^0(w_1, z)w_2$。那么

$$\langle w_3', \mathcal{Y}(w_1, z)w_2\rangle = \sum_{k=0}^{K} \langle w_3', \mathcal{Y}_{\operatorname{wt} w_1 + \operatorname{wt} w_2 - \operatorname{wt} w_3' - 1, k}(w_1)w_2\rangle e^{(-\operatorname{wt} w_1 - \operatorname{wt} w_2 + \operatorname{wt} w_3')\log z}(\log z)^k$$

是良定义的。我们定义线性映射 $f\colon C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp \to (M_1 \otimes M_2)^*$ 如下

$$(f(w_3'))(w_1 \otimes w_2) = \langle w_3', \mathcal{Y}(w_1, z)w_2\rangle$$

对于 $w_1 \in M_1$、$w_2 \in M_2$ 和 $w_3' \in C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp$。为了证明

$$\dim C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp \le \dim M_1 \dim M_2 = \dim(M_1 \otimes M_2)^*,$$

我们只需证明 f 是单射。

假设对于某个元素 $w_3' \in C_{\min(p,q)}(W_3)^\perp$，有 $f(w_3') = 0$。那么根据 f 的定义，对于 $w_1 \in M_1$、$w_2 \in M_2$，

$$\langle w_3', \mathcal{Y}(w_1, z)w_2\rangle = 0 \tag{4.2}$$

现在我们证明 (4.2) 对所有 $w_1 \in W_1$、$w_2 \in W_2$ 均成立。

由于 W_1 和 W_2 是拟有限维广义 V-模，因此存在 $W_1 = \coprod_{m\in\mathbb{C}} (W_1)_{[m]}$ 和 $W_2 = \coprod_{n\in\mathbb{C}} (W_2)_{[n]}$，使得对于 $N \in \mathbb{N}$，

$$\dim\left(\coprod_{\Re(m)\le N} (W_1)_{[m]}\right), \dim\left(\coprod_{\Re(n)\le N} (W_2)_{[n]}\right) < \infty.$$

事实上，存在 $N_1^0 \in \mathbb{Z}$，使得对于 $\Re(m) < N_1^0$，有 $(W_1)_{[m]} = 0$；并且存在满足 $N_1^0 \le \Re(m) < N_1^0 + 1$ 的 $m \in \mathbb{C}$，使得 $(W_1)_{[m]} \neq 0$。类似地，对于W_2，我们也有这样的 N_2^0。我们要证明，对于 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$，所有 $w_1 \in \coprod_{\Re(m) \le N_1^0 + N_1} (W_1)_{[m]}$ 和 $w_2 \in \coprod_{\Re(n) \le N_2^0 + N_2} (W_1)_{[n]}$，(4.2) 均成立。我们对 $N_1 + N_2$ 使用归纳法来证明 (4.2)。

当 $N_1 + N_2 = 0$, $N_1 = N_2 = 0$。由于 $W_1 = C_p(W_1) \oplus M_1$ 且 $W_2 = C_q(W_2) \oplus M_2$，存在齐次的 $u^{(k)} \in V_{g_1}^{[\alpha_k]} \cap V_+, v^{(l)} \in V_{g_2}^{[\beta_l]} \cap V_+$, $\tilde{w}_1^{(k)} \in (W_1)_{[p_k]}$, $\tilde{w}_2^{(l)} \in (W_2)_{[q_l]}$，对于 $k = 1, \dots, s$, $l = 1, \dots, t$, $\tilde{w}_1 \in M_1 \cap (W_1)_{[N_1^0]}$，以及 $\tilde{w}_2 \in M_2 \cap (W_2)_{[N_2^0]}$，使得

$$w_1 = \sum_{k=1}^{s} u_{\alpha_k - p}^{(k)} \tilde{w}_1^{(k)} + \tilde{w}_1, \tag{4.3}$$

$$w_2 = \sum_{l=1}^{t} v_{\beta_l - q}^{(l)} \tilde{w}_2^{(l)} + \tilde{w}_2. \tag{4.4}$$

必有 $u_{\alpha_k - p}^{(k)} \tilde{w}_1^{(k)} \in (W_1)_{[N_1^0]}$，因为 $w_1 \in (W_1)_{[N_1^0]}$。另一方面，我们有$u_{\alpha_k - p}^{(k)} \tilde{w}_1^{(k)} \in (W_1)_{[\mathrm{wt}\, u^{(k)} - \alpha_k + p - 1 + p_k]}$。因此得到 $\mathrm{wt}\ u^{(k)} - \alpha_k + p - 1 + p_k = N_1^0$，或等价地，$p_k = N_1^0 - \mathrm{wt}\ u^{(k)} + \alpha_k - p + 1$。由于 $\mathrm{wt}\ u^{(k)} \in \mathbb{Z}_+$ 且 $\Re(\alpha_k \in [0, 1)$，我们有 $\Re(p_k) = N_1^0 - \mathrm{wt}\ u^{(k)} + \Re(\alpha_k) - p + 1 < N_1^0$。因此 $(W_1)_{[p_k]} = 0$，从而对于$k = 1, \dots, s$，有 $u_{\alpha_k - p}^{(k)} \tilde{w}_1^{(k)} = 0$。类似地，我们可以证明 $v_{\beta_l - q}^{(l)} \tilde{w}_2^{(l)} = 0$。于是 $w_1 = \tilde{w}_1 \in M_1$ 且 $w_2 = \tilde{w}_2 \in M_2$。在这种情况下，(4.2) 成立。

假设当 $N_1 + N_2 < m \in \mathbb{N}$ 时，(4.2) 成立。在 $N_1 + N_2 = m$ 的情况下，我们考虑$w_1 \in (W_1)_{[n_1]}$和 $w_2 \in (W_2)_{[n_2]}$，其中 n_1、$n_2 \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(n_1) \le N_1^0 + N_1$、$\Re(n_2) \le N_2^0 + N_2$，以及 $N_0^1 + N_2^0 + m - 1 < \Re(n_1 + n_2) \le N_0^1 + n_2^0 + N_1 + N_2$。对于齐次的 $u^{(k)} \in V_{g_1}^{[\alpha_k]} \cap V_+$、$v^{(l)} \in V_{g_2}^{[\beta_l]} \cap V_+$、$\tilde{w}_1^{(k)} \in (W_1)_{[p_k]}$、$\tilde{w}_2^{(l)} \in (W_2)_{[q_l]}$，以及$k = 1$、.....、$s$、$l = 1$、.....、$t$、$\tilde{w}_1 \in M_1 \cap (W_1)_{[n_1]}$和 $\tilde{w}_2 \in M_2 \cap (W_2)_{[n_2]}$，(4.3) 和 (4.4) 仍然成立。事实上，我们总能找到 $u^{(k)} \in V_{g_1}^{[\alpha_k, \beta_k]}$、$v^{(l)} \in V^{[\alpha_l, \beta_l]}$、$\tilde{w}_1^{(k)}$、$\tilde{w}_2^{(l)}$、$\tilde{w}_1$和 $\tilde{w}_2$，使得 (4.3) 和 (4.4) 成立。在这种情况下，与上述 $N_1^{g_1} = N_2 = 0$ 情况下的证明类似，我们有 $\mathrm{wt}\ u^{(k)} - \alpha_k + p - 1 + p_k = n_1$，或等价地，$\mathrm{wt}\ u^{(k)} + p_k = n_1 + \alpha_k - p + 1$。类似地，我们还有 $\mathrm{wt}\, v^{(l)} - \beta_l + q - 1 + q_l = n_2$，或等价地，$\mathrm{wt}\, v^{(l)} + q_l = n_2 + \beta_l - q + 1$。

我们需要使用 (2.4)。首先将 (2.4) 改写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} \binom{\alpha_1 - n_1}{k} (-x)^{k+l} \left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{l} x^{-\mathcal{N}_{g_2}} v \right)_{\alpha_1 + \alpha_2 - n_1 - n_2 - k - l} \mathcal{Y}(w_1, x) \\
&\quad - \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} \binom{\alpha_1 - n_1}{k} e^{\pi \mathbf{i} (\alpha_1 - n_1 - k - l)} x^{\alpha_1 - n_1 - k - l} \cdot \\
&\qquad \cdot \mathcal{Y}(w_1, x) \left(e^{\pi \mathbf{i} \mathcal{N}_{g_1}} \binom{\mathcal{N}_{g_1}}{l} x^{\mathcal{N}_{g_1} - \mathcal{N}_{g_2}} v \right)_{\alpha_2 - n_2 + k + l} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} \binom{\alpha_2 - n_2}{k} x^{\alpha_2 - n_2 - k - l} \mathcal{Y} \left(\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{l} v \right)_{\alpha_1 - n_1 + k + l} w_1, x \right)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

将 (2.4) 中的 v 替换为 $x^{-\mathcal{N}_{g_2}}v$。然后在 (4.5) 中分别取 v、α_1、α_2、n_1、n_2、w_1 和 w_2 为 $u^{(k)}$、α_k、$\hat{}\beta_k$、p、$\mathbf{1}$ 和 $\tilde{w}_1^{(k)}$，并将求和指标从 k，l 改为 i，j，即可得到

$$\begin{aligned}
&\langle w_3', \mathcal{Y}(u^{(k)}_{\alpha_k-p}\tilde{w}_1^{(k)}, x)w_2\rangle\\
&\quad=\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_k-p}{i}(-1)^{i+j}x^{i+j-\hat{\beta}_k+1}\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\left\langle w_3', \left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j}x^{-\mathcal{N}_{g_2}}u^{(k)}\right)_{\alpha_k+\hat{\beta}_k-p-1-i-j}\mathcal{Y}(\tilde{w}_1^{(k)}, x)w_2\right\rangle\\
&\quad-\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N},j+i\neq 0}\binom{\hat{\beta}_k-1}{i}x^{-i-j}\left\langle w_3', \mathcal{Y}\left(\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{j}u^{(k)}\right)_{\alpha_k-p+i+j}\tilde{w}_1^{(k)}, x\right)w_2\right\rangle\\
&\quad-\sum_{i\in\mathbb{N}}\binom{\alpha_k-p}{i}e^{\pi\mathbf{i}(\alpha_k-p-i-j)}x^{\alpha_k-\hat{\beta}_k-p+1-i-j}\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\langle w_3', \mathcal{Y}(\tilde{w}_1^{(k)}, x)\left(e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j}x^{\mathcal{N}_{g_1}-\mathcal{N}_{g_2}}u^{(k)}\right)_{\hat{\beta}_k-1+i+j}w_2\rangle
\end{aligned}\tag{4.6}$$

现在证明 (4.6) 右端的每一项都为 0。

由于 $\hat{}\beta_k\alpha_k+\hat{\beta}_k-i-j=\sigma(\alpha_k,\hat{}\beta_k)+\epsilon(\alpha_k,\hat{}\beta_k)+\hat{p}-1-i-j$，其中根据定义，$\sigma(\alpha_k,\hat{}\beta_k)\in P_V^{g_1g_2}$且 $\epsilon(\alpha_k,\hat{}\beta_k)-p-1-i-j\leq -p$。因此

$$\left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j}x^{-\mathcal{N}_{g_2}}u^{(k)}\right)_{\alpha_k+\hat{\beta}_k-p-1-i-j}\mathcal{Y}(\tilde{w}_1^{(k)}, x)w_2\in C_p(V)\{x\}[\log x]\subset C_{\min(p,q)}(V)\{x\}[\log x].$$

由于 $w_3'\in C_{\min(p,q)}(W_3)^{\perp}$，我们看到 (4.6) 右侧的第一项为 0。

由于 $\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{j}u^{(k)}$ 关于权重分次也是齐次的，且其权等于 $\mathrm{wt}\,u^{(k)}$，我们有

$$\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{j}u^{(k)}\right)_{\alpha_k-p+i+j}\tilde{w}_1^{(k)}\in(W_1)_{[\mathrm{wt}\,u^{(k)}-\alpha_k+p-1-i+j+p_k]}$$

对于 i，$j\in\mathbb{N}, i+j\neq 0$。我们还在上文证明了 $\mathrm{wt}\ u^{(k)}-\alpha_k+p-1+p_k=n_1$。因此我们有

$$\Re(\text{权重 }u^{(k)}-\alpha_k+p-1-i+p_k+n_2)=\Re(n_1+n_2)-i<\Re(n_1+n_2)\leq N_0^1+N_2^0+m$$

对于 $i\in\mathbb{Z}_+$。由归纳假设，

$$\left\langle w_3', \mathcal{Y}\left(\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{j}u^{(k)}\right)_{\alpha_k-p+i+j}\tilde{w}_1^{(k)}, x\right)w_2\right\rangle=0.$$

因此，(4.6) 右端的第二项为 0。

由于 $w_2 \in (W_2)_{[n_2]}$ 且 $e^{\pi \mathbf{i} \mathcal{N}_{g_1}} \binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j} x^{\mathcal{N}_{g_1} - \mathcal{N}_{g_2}} u^{(k)}$ 的系数是权为 $\operatorname{wt} u^{(k)}$ 的齐次项，我们有

$$\left(e^{\pi \mathbf{i} \mathcal{N}_{g_1}} \binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j} x^{\mathcal{N}_{g_1} - \mathcal{N}_{g_2}} u^{(k)} \right)_{\hat{\beta}_k - 1 + i + j} w_2 \in (W_2)_{[\operatorname{wt} u^{(k)} - \hat{\beta}_k - i - j + n_2]}.$$

我们还知道 $\tilde{w}_1^{(k)} \in (W_1)_{[p_k]}$。利用上文证明的 $\operatorname{wt} u^{(k)} + p_k = n_1 + \alpha_k - p + 1$，$\hat{\Re}(\alpha_k)$ $\Re(\beta_k) \in [0, 1)$ 以及 $p \in 2 + \mathbb{N}$，可得

$$\begin{aligned} \Re(p_k + \operatorname{wt} u^{(k)} - \hat{\beta}_k - i + n_2) &= \Re(n_1 + n_2 + \alpha_k - p + 1 - \hat{\beta}_k - i) \\ &< \Re(n_1 + n_2) \\ &\leq N_0^1 + N_2^0 + m. \end{aligned}$$

由归纳假设，

$$\langle w_3', \mathcal{Y}(\tilde{w}_1^{(k)}, x) \left(e^{\pi \mathbf{i} \mathcal{N}_{g_1}} \binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j} x^{\mathcal{N}_{g_1} - \mathcal{N}_{g_2}} u^{(k)} \right)_{\hat{\beta}_k - 1 + i + j} w_2 \rangle = 0$$

因此，(4.6) 右端的第三项为 0。

我们已经证明 (4.6) 右端的每一项都为 0。因此，(4.6) 左端也为 0。

类似地，我们先将 (2.4) 改写为

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} \binom{\alpha_1 - n_1}{k} (-x)^{k+l} \left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j} e^{\pi \mathbf{i} \mathcal{N}_{g_1}} x^{-\mathcal{N}_{g_1}} v \right)_{\alpha_1 + \alpha_2 - n_1 - n_2 - k - l} \mathcal{Y}(w_1, x) \\ &\quad - \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} \binom{\alpha_1 - n_1}{k} e^{\pi \mathbf{i} (\alpha_1 - n_1 - k - l)} x^{\alpha_1 - n_1 - k - l} \mathcal{Y}(w_1, x) \left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j} v \right)_{\alpha_2 - n_2 + k + l} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} \binom{\alpha_2 - n_2}{k} x^{\alpha_2 - n_2 - k - l} \mathcal{Y} \left(\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{j} x^{\mathcal{N}_{g_2}} e^{\pi \mathbf{i} \mathcal{N}_{g_1}} x^{-\mathcal{N}_{g_1}} v \right)_{\alpha_1 - n_1 + k + l} w_1, x \right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

将（2.4）中的 v 替换为 $e^{\pi \mathbf{i} \mathcal{N}_{g_1}} x^{-\mathcal{N}_{g_1}} v$。然后在（4.7）中分别取 v、α_1、α_2、n_1、n_2 和 w_1 为 $v^{(l)}$、$\hat{\alpha}_l$、β_l、$\mathbf{1}$、q 和 w_1，得到

$$\begin{aligned} &\langle w_3', \mathcal{Y}(w_1, x) v_{\beta_l - q}^{(l)} \tilde{w}_2^{(l)} \rangle \\ &\quad = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \binom{\hat{\alpha}_l - 1}{i} (-1)^{i+j} e^{\pi \mathbf{i} (\hat{\alpha}_l - 1)} x^{i + j - \hat{\alpha}_l + 1} \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot \left\langle w_3', \left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j} e^{\pi \mathbf{i} \mathcal{N}_{g_1}} x^{-\mathcal{N}_{g_1}} v^{(l)} \right)_{\hat{\alpha}_l + \beta_l - 1 - q - i - j} \mathcal{Y}(w_1, x) \tilde{w}_2^{(l)} \right\rangle \\ &\qquad - \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \binom{\beta_l - q}{i} e^{\pi \mathbf{i} (\hat{\alpha}_l - 1)} x^{-\hat{\alpha}_l + \beta_l + 1 - q - i - j}. \end{aligned}$$

$$\cdot\left\langle w_3',\mathcal{Y}\left(\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{j}x^{\mathcal{N}_{g_2}}e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}x^{-\mathcal{N}_{g_1}}v^{(l)}\right)_{\hat{\alpha}_l-1+i+j}w_1,x\right)\tilde{w}_2^{(l)}\right\rangle$$
$$-\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N},j+i\neq 0}\binom{\hat{\alpha}_l-1}{i}e^{\pi\mathbf{i}(i+j)}x^{-i-j}\left\langle w_3',\mathcal{Y}(w_1,x)\left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j}v^{(l)}\right)_{\beta_l-q+i+j}\tilde{w}_2^{(l)}\right\rangle \quad (4.8)$$

现在证明（4.8）的右端为 0。

由于 $\hat{\alpha}_l+\beta_l=\sigma(\hat{\alpha}_l,\ \beta_l)+\epsilon(\hat{\alpha}_l,\ \beta_l)$，$\hat{\alpha}_l+\beta_l-1-q-i=\sigma(\hat{\alpha}_l,\ \beta_l)+\epsilon(\hat{\alpha}_l,\ \beta_l)-1-q-i$，根据定义，$\sigma(\hat{\alpha}_l,\ \beta_l)\in P_V^{g_1g_2}$和 $\epsilon(\hat{\alpha}_l,\ \beta_l)-1-q-i\leq -q$。因此

$$\left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j}e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}x^{-\mathcal{N}_{g_1}}v^{(l)}\right)_{\hat{\alpha}_l+\beta_l-1-q-i-j}\mathcal{Y}(w_1,x)\tilde{w}_2^{(l)}\in C_q(V)\{x\}[\log x]$$
$$\subset C_{\min(p,q)}(V)\{x\}[\log x].$$

由于 $w_3'\in C_{\min(p,q)}(W_3)^{\perp}$，我们看到 (4.8) 右侧的第一项为 0。

由于 $w_1\in(W_1)^{[n_1]}$且 $\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{j}x^{\mathcal{N}_{g_2}}e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}x^{-\mathcal{N}_{g_1}}v^{(l)}$的系数是权为 $\mathrm{wt}\,v^{(l)}$的齐次项，我们有

$$\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{j}x^{\mathcal{N}_{g_2}}e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}x^{-\mathcal{N}_{g_1}}v^{(l)}\right)_{\hat{\alpha}_l-1+i+j}w_1\in(W_1)_{[\mathrm{wt}\,v^{(l)}-\hat{\alpha}_l-i-j+n_1]}.$$

我们还知道 $\tilde{w}_2^{(l)}\in(W_2)^{[q_l]}$。利用上面证明的 $\mathrm{wt}\,v^{(l)}+q_l=n_2+\beta_l-q+1$，$\Re(\hat{\alpha}_l)\ \Re(\beta_l)\in[0,1)$，以及 $q\in 2+\mathbb{N}$，可得

$$\begin{aligned}\Re(\mathrm{wt}\,v^{(l)}-\hat{\alpha}_l-i-j+n_1+q_l)&=\Re(n_1+n_2-\hat{\alpha}_l+\beta_l-q+1-i-j)\\&<\Re(n_1+n_2)\\&\leq N_0^1+N_2^0+m.\end{aligned}$$

由归纳假设,

$$\left\langle w_3',\mathcal{Y}\left(\left(\binom{\mathcal{N}_{g_2}}{j}x^{\mathcal{N}_{g_2}}e^{\pi\mathbf{i}\mathcal{N}_{g_1}}x^{-\mathcal{N}_{g_1}}v^{(l)}\right)_{\hat{\alpha}_l-1+i+j}w_1,x\right)\tilde{w}_2^{(l)}\right\rangle=0$$

因此，(4.8) 右端的第二项为 0。

由于 $\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j}v^{(l)}$ 是权等于 $\mathrm{wt}\,v^{(l)}$ 的齐次元,

$$\left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j}v^{(l)}\right)_{\beta_l-q+i+j}\tilde{w}_2^{(l)}\in(W_2)_{[\mathrm{wt}\,v^{(l)}-\beta_l+q-1-i-j+q_l]}$$

对于 $i,\ j\in\mathbb{N},\ i+j\neq 0$。我们已在上面证明 $\mathrm{wt}\ v^{(l)}-\beta_l+q-1+q_l=n_2$。所以有

$$\Re(n_1+\mathrm{wt}\,v^{(l)}-\beta_l+q-1-i-j+q_l)=\Re(n_1+n_2)-i-j<\Re(n_1+n_2)\leq N_0^1+N_2^0+m$$

对于 $i,j\in\mathbb{N}$, $i+j\neq 0$。根据归纳假设，

$$\left\langle w_3',\mathcal{Y}(w_1,x)\left(\binom{\mathcal{N}_{g_1}}{j}v^{(l)}\right)_{\beta_l-q+i+j}\tilde{w}_2^{(l)}\right\rangle=0.$$

因此，(4.8) 右侧的第三项为 0。

我们已证明 (4.8) 的右侧为 0。因此可得，(4.8) 的左侧为 0。

现在我们有

$$\begin{aligned}\langle w_3',\mathcal{Y}(w_1,z)w_2\rangle&=\sum_{k=1}^{s}\langle w_3',\mathcal{Y}(u^{(k)}_{\alpha_k-2}\tilde{w}_1^{(k)},x)w_2\rangle+\langle w_3',\mathcal{Y}(\tilde{w}_1,z)w_2\rangle\\&=\langle w_3',\mathcal{Y}(\tilde{w}_1,z)w_2\rangle\\&=\sum_{l=1}^{t}\langle w_3',\mathcal{Y}(\tilde{w}_1,z)v^{(l)}_{-1}\tilde{w}_2^{(l)}\rangle+\langle w_3',\mathcal{Y}(\tilde{w}_1,z)\tilde{w}_2\rangle\\&=\langle w_3',\mathcal{Y}(\tilde{w}_1,z)\tilde{w}_2\rangle\\&=0,\end{aligned}$$

从而对所有 $w_1\in W_1$ 和 $w_2\in W_2$ 证明了 (4.2)。

利用 $\mathcal{Y}$ 的 $L(-1)$-导数性质，我们有

$$\langle w_3',\mathcal{Y}(w_1,\xi)w_2\rangle=\langle w_3',\mathcal{Y}(e^{(\xi-z)L_{W_1}(-1)}w_1,z)w_2\rangle=0$$

在区域 $|\xi-z|<|z|$ 上。但 $\langle w_3',\ \mathcal{Y}(w_1,\ \xi)w_2\rangle$ 是关于 ξ 的解析函数。该解析函数在某个区域上等于 0，这意味着它在其定义域上恒等于 0。因此，在区域 $\xi\neq 0$ 上有 $\langle w_3',\ \mathcal{Y}(w_1,\ \xi)w_2\rangle=0$。于是，对于 $w_1\in W_1$、$w_2\in W_2$、$n\in\mathbb{C}$、$k=1,\ \dots,\ K$，有 $\langle w_3',\ \mathcal{Y}_{n,\ k}(w_1)w_2\rangle=0$。由于 $\mathcal{Y}$ 是满射，必有 $w_3'=0$，从而证明了 f 的单射性。 □

注释 4.2。不等式 (4.1) 类似于定理 3.5 中 [H8] 的（未扭曲）Nahm 不等式 (3.8)。这是一个类似物，而不是推广，因为在 (4.1) 中有 $p,\ q\neq 1$。当 g_1 和 g_2 的阶有限且 $p=q=2$ 时，(4.1) 已在 [YZ] 中得到证明。

注释 4.3。根据命题 3.5，定理 4.1 中的“广义满射积 W_3”可以替换为“弱满射积 W_3”。

5 $P(z)$-张量积的 C_n-余有限分次受限广义扭曲 V-模

本节中，我们考虑 Möbius 顶点代数或拟顶点算子代数 V 的两类分次受限广义扭曲 V-模（参见 [FHL] 和 [HLZ1]），并为这些范畴构造 $P(z)$-张量积双函子。

本节中， V 是 Möbius 顶点代数。注意， V 的自同构也与算子 $L_V(1)$ 对易。设 G 是 V 和 $n \in 2+\mathbb{N}$ 的自同构所构成的阿贝尔群。设 $\mathcal{C}_n^G$ 是 $g \in G$ 的 C_n-余有限分次受限广义 g-扭曲 V-模范畴， $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 是 $g \in G$ 的带有 G-作用的 C_n-余有限分次受限广义 g-扭曲 V-模范畴。在第 5.1 小节中，对于 $z \in \mathbb{C}^\times$，我们为范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 构造一个 $P(z)$-张量积双函子。然后在第 5.2 小节中，我们为范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 构造~一个 $P(z)$-张量积双函子。

在 V是 C_2-余有限且具有正能量的情况下，根据 [Ta1], 中的主要结果，每个有限生成的下有界广义扭曲 V-模对于 C_n都是 $n \in 2+\mathbb{N}$-余有限的。另一方面，根据定理 3.3, 对于 $n \in 2+\mathbb{N}$，每个 C_n-余有限的下有界 g-扭曲广义 V-模都是有限生成的。因此在这种情况下，范畴 $\mathcal{C}_n^G$ （或$\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$）与有限生成的下有界广义扭曲 V-模范畴（或带有 G-作用的有限生成下有界广义扭曲 V-模范畴~）相同。注意，在这种情况下， $\mathcal{C}_n^G$和 $\mathcal{C}_n^G$ 都独立于 n。

5.1 $P(z)$-张量积函子对于 $\mathcal{C}_n^G$

在本小节中，我们为 $\mathcal{C}_n^G$构造一个 $P(z)$-张量积函子。我们首先回顾 [DH]中的扭曲 $P(z)$-交织映射。

定义 5.1。设 g_1, g_2 是 V, W_1, W_2, W_3 上分别可交换的自同构，且它们是广义 g_1-,g_2-, g_1g_2-扭曲 V-模，并且 $z \in \mathbb{C}^\times$。类型为 $\binom{W_3}{W_1 W_2}$ 的 扭曲 $P(z)$-交织映射是一个线性映射 I: $W_1 \otimes W_2 \to W_3$，由 $I(w_1 \otimes w_2) = \mathcal{Y}(w_1, z)w_2$ 给出，其中 $w_1 \in W_1$ 且 $w_2 \in W_2$; 这里 $\mathcal{Y}$ 是类型为 $\binom{W_3}{W_1 W_2}$ 的扭曲交织算子。

接下来，我们回顾当范畴为 $\mathcal{C}_n^G$ 时， [DH] 中 $P(z)$-张量积的定义。

定义 5.2。设 $g_1, g_2 \in G$，并设 W_1 和 W_2 分别是范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 中分次受限的广义 g_1-扭曲和 g_2- 扭曲 V- 模。$\mathcal{C}_n^G$ 中 W_1 和 W_2 的一个 $P(z)$- 积，是由一个 C_n- 余有限的分次受限广义 g_1g_2-扭曲 V-模 W_3 与一个类型为 $\binom{W_3}{W_1 W_2}$ 的扭曲 $P(z)$-交织映射 I 组成的有序对 (W_3, I)。$\mathcal{C}_n^G$ 中 W_1 和 W_2 的一个 $P(z)$-张量积，是满足以下泛性质的 $P(z)$-积 $(W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2, \boxtimes_{P(z)})$: 对于 W_1 和 W_2 的任意 $P(z)$-积 (W_3, I)，存在唯一的模映射 f: $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2 \to W_3$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} W_1 \otimes W_2 & \xrightarrow{I} & \overline{W}_3 \\ {\scriptstyle \boxtimes_{P(z)}}\downarrow & \nearrow_{\bar{f}} & \\ \overline{W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2} & & \end{array}$$

其中， f 是 f 到 $\overline{W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2}$的自然延拓。

在上文提到的 [DH], 中，基于某些假设（见 [DH]中的假设4.4），给出了一个使用扭曲交织映射构造 $P(z)$-张量积函子的构造。

但 [DH] 中的假设4.4的前两个假设对于范畴 $\mathcal{C}_n^G$并不成立。另一方面， [DH] 中的许多结果及其证明在我们这里的通常情形下仍然成立。现在，我们利用 [DH] 中仍然成立的结果、第 3 节和第 4 节中的结果，以及 [H8]中的方法，通过使用这些结果，为范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 构造 $P(z)$-张量积函子。注意，对于一个下有界的广义扭曲V-模，我们仍然有该模的对偶。

我们回顾 [DH] 中范畴为 $\mathcal{C}_n^G$ 时的构造，尽管 [DH] 中的假设4.4 对范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 成立。给定 $P(z)$-积 (W_3, I)，其中 W_1 和 W_2 属于 $\mathcal{C}_n^G$，对于 $w_3' \in W_3'$，我们有由 $\lambda_{I,\ w_3'} \in (W_1 \otimes W_2)^*$ 定义的元素

$$\lambda_{I,w_3'}(w_1 \otimes w_2) = \langle w_3', I(w_1 \otimes w_2)\rangle \tag{5.1}$$

对于 $w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$。令 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 为 $(W_1 \otimes W_2)^*$ 的子空间，该子空间由对所有 $P(z)$-积 (W_3, I) 以及 $w_3' \in W_3'$ 的 $\lambda_{I,w_3'}$ 张成。我们定义 $(W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2)_{[n]}^{[\alpha]}$ 为 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 的子空间，该子空间由对所有 $P(z)$-积 (W_3, I) 以及 $w_3' \in w_3' \in (W_3')_{[n]}^{[\alpha]} \subset W_3'$（对于 $n \in \mathbb{C}$ 和 $\alpha \in P_{W_3'}^g$） 的 $\lambda_{I,w_3'}$ 张成。于是

$$W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2 = \coprod_{n\in\mathbb{C}} \coprod_{\alpha+\mathbb{Z}\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}} (W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2)_{[n]}^{[\alpha]}.$$

我们定义一个顶点算子映射

$$Y_{W_1\boxtimes_{P(z)}W_2} : V \otimes (W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2) \to (W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2)\{x\}[\log x]$$

by

$$Y_{W_1\boxtimes_{P(z)}W_2}(v,x)\lambda_{I,w_3'} = \lambda_{I,Y_{W_3'}(v,x)w_3'} \tag{5.2}$$

用于 $v \in V$和 $\lambda_{I,\ w_3'} \in W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$。我们回顾 [DH]中的以下结果：

命题 5.3 ([DH]中的命题 4.3。这一对 $(W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2, Y_{W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2}^{g_1g_2})$ 是一个广义$(g_1g_2)^{-1}$-扭曲的 V-模。

注意，尽管我们尚未证明 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 是分次受限的，但其对偶 $(W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2)'$ 仍然定义良好。令 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2 = (W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2)'$。 [DH] 中的结果和证明实际上表明， $\boxtimes_{P(z)}$ 给出了一个从 $\mathcal{C}_n^G \times \mathcal{C}_n^G$ 到广义 g-扭曲的 V-模范畴的函子，对应于 $g \in G$。我们尤其想证明该函子的像属于 $\mathcal{C}_n^G$。

我们已有候选对象 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$，作为我们的 $P(z)$-张量积扭模。要构造 W_1 和 W_2 的 $P(z)$-张量积，我们还需要一个 $P(z)$-交织映射 $\boxtimes_{P(z)}$。我们回顾 $\boxtimes_{P(z)}$ 在 [DH] 中的构造。

$\boxtimes_{P(z)}$ 在 [DH] 中的构造见 [DH]中假设4.4之后的内容。但即使不满足假设4.4，这一构造仍然适用。事实上， [DH] 中的假设4.4包含三个假设。在我们的情形中， [DH] 中假设4.4的第一个和第二个假设并不成立。但我们仍将在下文证明， $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$是范畴 $\mathcal{C}_n^G$中的 W_1 和 W_2 的 $P(z)$-张量积。

我们需要用到 [DH]中的命题4.5。设 W 是广义$(g_1g_2)^{-1}$-扭曲 V-模，且 $f: W \to W_1 \ {}_{P(z)} \ W_2$ 是一个 V-模映射。请注意，在 [DH]中，要求 W 属于其中所考虑的范畴 $\mathcal{C}$。但我们目前所知的是， $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 是广义$(g_1g_2)^{-1}$-扭曲 V-模。本节将使用 [DH] 中的命题4.5来证明 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 是 C_n-余有限、分次受限的广义$(g_1g_2)^{-1}$-扭曲 V-模。因此，我们不能假设 W 是 $\mathcal{C}_n^G$ 的一个对象。但即便我们不知道 W 是否为 $\mathcal{C}_n^G$的对象，这一构造以及 [DH]中的命题4.5仍然适用。

由于 W 的双重对偶可能与 W不等价，我们不能将 W''的元素视为 W的元素。但我们知道， W'中的一个元素由它与 W中所有元素的配对确定。对于 $w \in W$ 和 $w' \in W'$，我们用 $\langle w, \ w' \rangle$ 表示 W与 W'之间的配对，而不用 $\langle w', \ w \rangle$。我们定义一个线性映射

$$f' : W_1 \otimes W_2 \to \overline{W'} = \prod_{n \in \mathbb{C}} W_{[n]}^*$$
$$w_1 \otimes w_2 \mapsto \mathcal{Y}_f(w_1, z)w_2$$

by

$$\langle w, f'(w_1 \otimes w_2) \rangle = (f(w))(w_1 \otimes w_2) \tag{5.3}$$

对 $w_1 \in W_1$、 $w_2 \in W_2$ 和 $w \in W$成立。接着我们定义另一个线性映射

$$\mathcal{Y}_f : W_1 \otimes W_2 \to W'\{x\}[\log x]$$
$$w_1 \otimes w_2 \mapsto f'(w_1 \otimes w_2)$$

by

$$\mathcal{Y}_f(w_1, x)w_2 = x^{L_{W'}(0)} e^{-(\log z) L_{W_3}(0)} \mathcal{Y}_f(x^{-L_{W_1}(0)} e^{(\log z) L_{W_1}(0)} w_1, z) x^{-L_{W_2}(0)} e^{(\log z) L_{W_2}(0)} w_2 \tag{5.4}$$

对 $w_1 \in W_1$和 $w_2 \in W_2$成立。注意，按照我们的记号， $f' = \mathcal{Y}_f(\cdot, z)$。

命题 *5.4*（ [*DH*]中的命题*4.5*）。由 *(5.3)* 给出的线性映射 $f' = \mathcal{Y}_f(\cdot, z)$ 以及由 *(5.3)* 和 *(5.4)* 给出的$\mathcal{Y}_f$: $W_1 \otimes W_2 \to W'\{x\}[\log \ x]$，分别是类型为$\binom{W'}{W_1 W_2}$的扭曲 $P(z)$-交织映射和扭曲交织算子。特别地，在$W = W_1 \ {}_{P(z)} W_2$且$f = 1_{W_1 \ {}_{P(z)} W_2}$: $W \to W_1 \ {}_{P(z)} W_2$为恒等映射的情形下，我们得到类型为 $\binom{W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2}{W_1 W_2}$的扭曲 $P(z)$-交织映射$1'_{W_1 \ {}_{P(z)} W_2}$以及扭曲交织算子$\mathcal{Y}_{1_{W_1 \ {}_{P(z)} W_2}}$。

我们将命题 5.4 中类型为 $\binom{W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2}{W_1 W_2}$ 的 $P(z)$-交织映射记为 $\boxtimes_{P(z)}$。令

$$w_1 \boxtimes_{P(z)} w_{2n} = \boxtimes_{P(z)}(w_1 \otimes w_2) = \mathcal{Y}(w_1, z)w_2 \in \overline{W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2}$$

对于 $w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$。元素 $w_1 \boxtimes_{P(z)} w_2$ 是元素w_1 和 w_2的张量积。根据 (5.3)，我们有

$$\lambda(w_1 \otimes w_2) = \langle \lambda, w_1 \boxtimes_{P(z)} w_2 \rangle \tag{5.5}$$

对于 $\lambda \in W_{\boxtimes_{P(z)}} W_2$、 $w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$。

我们还需要一个关于两个 C_n-余有限分次受限广义 V-模的下有界广义满射积的结果。

命题 5.5. 设 g_1 和 g_2 是 V 的可交换自同构，且 W_1 和 W_2 C_n-余有限分次受限广义 g_1-扭曲和 g_2-扭曲 V-模，分别如此。则 W_1 和 W_2 的下有界广义满射积具有一致的下界，也就是说，存在仅依赖于 W_1 和 W_2 的 $N_0 \in \mathbb{Z}$，使得对于任意 W_1 和 W_2的下有界广义满射积 W_3，$(W_3)_{[m]} = 0$ 当 $\Re(m) < N_0$时。

证明。 我们考虑所有 W_1 和 W_2的下有界广义满射积 W_3 所对应的 $\dim(W_3/C_1(W_3))$ 的集合。根据定理 4.1，这个非负整数集合的上界为 $\dim(W_1/C_1(W_1))$ $\dim(W_2/C_1(W_2))$。因此，该集合必定有最大值。设 $W_3^{\max}$是 W_1 和 W_2 的一个下有界广义满射积，使得 $\dim W_3/C_1(W_3)$ 是该集合的最大值。由于 $W_3^{\max}$下有界，存在$N_0 \in \mathbb{Z}$，使得当 $\Re(n) < N_0$ 时，$(W_3^{\max})_{[n]} = 0$。

给定任意下有界广义满射积 W_3 of W_1 and W_2，我们有一个类型为 $\binom{W_3}{W_1 W_2}$ 的满射交织算子 $\mathcal{Y}$。对于任意固定的 $z \in \mathbb{C}^\times$，我们有一个 $P(z)$-交织映射 $I_{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}(\cdot, z)\cdot$，其类型为 $\binom{W_3}{W_1 W_2}$。该 $P(z)$-交织映射 $I_{\mathcal{Y}}$ 给出一个 V-模映射 $I'_{\mathcal{Y}}$，它将 W_3' 映到由下式定义的广义 $(g_1 g_2)^{-1}$-扭曲 V-模 $W_{1\ \boxtimes_{P(z)}} W_2$：

$$(I'_{\mathcal{Y}}(w'_3))(w_1 \otimes w_2) = \langle w'_3, I_{\mathcal{Y}}(w_1 \otimes w_2)\rangle = \langle w'_3, \mathcal{Y}(w_1, z)w_2\rangle$$

对于 $w_1 \in W_1$、 $w_2 \in W_2$和 $w'_3 \in W'_3$。由于交织算子 $\mathcal{Y}$ 是满射的，因此这个 V-模映射是单射的。 W_3' 在此 V-模映射下的像是 $W_{1\ \boxtimes_{P(z)}} W_2$ 的一个下有界广义 V-子模。对 W max3 也同样成立。令 W 为 W_3' 在从 W_3' 到 $W_{1\ \boxtimes_{P(z)}} W_2$ 的 V-模映射下的像，与 $(W$ max3 $)'$ 在从 $(W$max3 $)'$ 到 $W_{1\ \boxtimes_{P(z)}} W_2$ 的 V-模映射下的像之和。那么 W 也是 $W_{1\ \boxtimes_{P(z)}} W_2$ 的一个下有界广义 V-子模。令 $J: W \to W_{1\ \boxtimes_{P(z)}} W_2$ 为包含映射。于是由命题 5.4，我们有一个类型为 $\binom{W'}{W_1 W_2}$ 的扭曲交织算子 $\mathcal{Y}_J$。由于 J 是单射， $\mathcal{Y}_{J'}$ 是满射。由于 W 下有界， W' 也下有界。由定理 4.1， W' 是一个 C_n-余有限、分次受限的广义 $g_1 g_2$-扭曲 V-模，并且 $\dim W'/C_n(W') \le \dim W\max_3 /C_1(W\max 3)$。

现在证明，当 $\Re(m) < N_0$ 时，$(W')_{[m]} = 0$。根据定义，存在一个从 $(W\max 3)'$ 到 W 的单射 V-模映射。其伴随映射是一个满射 V-模映射 $f: W' \to W_3^{\max}$。由于 f 是一个 V-模映射， $f(C_n(W')) \subset C_n(W\max 3)$。于是映射 f 诱导出一个满射线性映射 $f: W'/C_n(W') \to W\max_3 /C_n(W\max 3)$。特别地，我们有 $\dim(W'/C_n(W')) \ge \dim(W\max_3 /C_n(W$ max3 $))$。但我们已经有 $\dim(W'/C_n(W')) \le \dim(W\max_3 /C_n(W_3^{\max}))$。因此得到

$$\dim(W'/C_n(W')) = \dim(W_3^{\max}/C_n(W_3^{\max})).$$

因此 f 是单射，且 $\ker f = 0$。由于 f 是由 f 诱导的，我们得到 $\ker f \subset C_n(W')$。

若 $(W')_{[m]} \neq 0$ 对某个满足 $\Re(m) < N_0$ 的 $m \in \mathbb{C}$ 成立，那么我们可以找到 $m_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $\Re(m_0) < N_0$、$(W')_{m_0]} \neq 0$，并且对于 $\Re(m) < m_0 - 1$，$(W')_{[m]]} = 0$，因为 W' 是

下有界。令 $w' \in W'_{[m_0]}$。那么 $f(w') \in (W\text{max3})_{[m_0]}$。由于 $\Re(m_0) < N_0$，根据 N_0 的定义，我们有 $f(w') = 0$。于是 $w' \in \ker f \subset C_n(W')$。因此，$w'$ 是形如 $v_{\alpha-n}\tilde{w}'$ 的齐次 $v \in V^{[\alpha]}$ 与齐次 $\tilde{w}' \in W'$ 的元素的线性组合。但是 $\mathrm{wt}\ v_{\alpha-n}\tilde{w}' = \mathrm{wt}\ v - \alpha + n - 1 + \mathrm{wt}\ \tilde{w}'$。由于 w' 是这类元素的线性组合，我们必有 $m_0 = \mathrm{wt}\, v_{\alpha-n}\tilde{w}' = \mathrm{wt}\, v - \alpha + n - 1 + \mathrm{wt}\ \tilde{w}'$。于是有 $\mathrm{wt}\ \tilde{w}' = m_0 - \mathrm{wt}\ v + \alpha - n + 1 < m_0 - 1$。由于对于 $\Re(m) < m_0 - 1$，$(W')_{[m]} = 0$，我们得到 $\tilde{w}' = 0$，因此 $w' = 0$。由此得到 $(W')_{m_0]} = 0$。矛盾。因此我们证明了，当 $\Re(m) < N_0$ 时，$(W')_{[m]} = 0$。但是，当 $\Re(m) < N_0$ 时，$(W')_{[m]} = 0$ 意味着当 $\Re(m) < N_0$ 时，$W_{[m]} = 0$。

由于 W'_3 在 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 中经 $I'_{\mathcal{Y}}$ 作用于 W 所得的像 $I'_{\mathcal{Y}}(W'_3)$ 属于 W，因此当 $\Re(m) < N_0$ 时，我们也有 $(I'_{\mathcal{Y}}(W'_3))_{[m]} = 0$。由于 $\mathcal{Y}$ 是满射，$I'_{\mathcal{Y}}$ 是单射。因此，当 $\Re(m) < N_0$ 时，我们也有 $(W'_3)_{[m]} = 0$。由此，当 $\Re(m) < N_0$ 时，我们得到 $(W_3)_{[m]} = 0$。 □

定理 5.6。设 g_1、$g_2 \in G$、W_1、W_2、W_3 分别是范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 和 $z \in \mathbb{C}^\times$ 中的分次受限广义 g_1-、g_2-、g_1g_2-扭曲 V-模。那么，$W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 是分次受限广义 $(g_1g_2)^{-1}$-扭曲 V-模，并且 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 是一个 C_n-余有限的分次受限广义 g-扭曲 V-模。此外，$(W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2, \boxtimes_{P(z)})$ 是范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 中 W_1 与 W_2 的一个 $P(z)$-张量积。

证明. 对于任意 $P(z)$-积 (W_3, I)，我们有一个模映射 $I' : W'_3 \to W_1 \ {}_{P(z)} W_2$，由 $(I'(w'_3))(w_1 \otimes w_2) = \langle w'_3, I(w_1 \otimes w_2)\rangle$ 给出，其中 $w'_3 \in W'_3$、$w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$。考虑 W'_3 在 I' 下的像 $I'(W_3) \in W_1 \ {}_{P(z)} W_2$。根据命题 5.4，包含映射 $J : I'(W_3) \to W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 给出一个类型为 $\binom{I'(W_3)'}{W_1 W_2}$ 的 $P(z)$-交织算子 $\mathcal{Y}_J$。由于 J 是单射，$\mathcal{Y}_J$ 是满射。根据命题 5.5，当 $\Re(m) < N_0$ 时，$(I'(W_3)')_{[m]} = 0$，其中 $N_0 \in \mathbb{Z}$ 仅依赖于 W_1 和 W_2，其存在性由命题 5.5 保证。因此，$I'(W_3)$ 具有相同的性质，即当 $\Re(m) < N_0$ 时，$I'(W_3)_{[m]} = 0$。

根据定义，$W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 实际上是所有形如 (W_3, I) 的 $P(z)$-乘积对应的 $I'(W_3)$ 之和。由性质 $I'(W_3)_{[m]} = 0$（当 $\Re(m) < N_0$ 时成立），所有这类 $I'(W_3)$ 的和也满足同一性质，即当 $\Re(m) < N_0$ 时，$(W_1 \ {}_{P(z)} W_2)_{[m]} = 0$。因此，$W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 实际上是下有界的。所以 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 也是下有界的。 □

同样的论证表明，命题 5.4 中给出的扭曲交织算子 $\mathcal{Y}_{1_{W_1 \ {}_{P(z)} W_2}}$ 是满射。由定理 4.1 可知，$W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 是 C_n-余有限的。再由命题 3.3，$W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 是拟有限维的，特别地，是分次受限的。由于 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 的对偶是 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$，它也是分次受限的。

最后，我们证明 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 与扭曲的 $P(z)$-交织映射 $\boxtimes_{P(z)}$ 构成 $P(z)$-张量积。给定一个 $P(z)$-积 (W_3, I)，我们有一个前面定义的模映射 $I' : W'_3 \to W_1 \ {}_{P(z)} W_2$。于是，$I'$ 的伴随映射 $\eta : W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2 \to W_3$ 也是一个模映射。令 $\bar{\eta} : W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2 \to W_3$ 为 η 的自然延拓。根据定义，我们有

$$\langle w'_3, \bar{\eta}(w_1 \boxtimes_{P(z)} w_2)\rangle = \langle I'(w'_3), w_1 \boxtimes_{P(z)} w_2)\rangle = (I'(w'_3))(w_1 \otimes w_2) = \langle w'_3, I(w_1 \otimes w_2)\rangle \quad (5.6)$$

对于 $w_1 \in W_1$、$w_2 \in W_2$ 和 $w'_3 \in W'_3$。因此我们得到 $\bar{\eta}(w_1 \boxtimes_{P(z)} w_2) = I(w_1 \otimes w_2)$。由于 $\bar{\eta}(w_1 \boxtimes_{P(z)} w_2)$ 可以改写为 $(\bar{\eta} \circ \boxtimes_{P(z)})(w_1 \otimes w_2)$，我们得到 $\bar{\eta} \circ \boxtimes_{P(z)} = I$。

η 的唯一性由 η 的定义得出。我们已经证明了 $(W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2, \boxtimes_{P(z)})$ 的泛性质。因此，$(W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2, \boxtimes_{P(z)})$ 是 W_1 和 W_2 的一个 $P(z)$-张量积。 □

定理 5.6 实际上将范畴 $\mathcal{C}_n^G \times \mathcal{C}_n^G$ 中的每个对象 (W_1, W_2) 指派为 $\mathcal{C}_n^G$ 中的一个对象 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$。与 [DH], 中一样，我们也可以利用 $P(z)$-张量积的泛性质，以相同的方式将 $\mathcal{C}_n^G \times \mathcal{C}_n^G$ 中的一个态射 (f_1, f_2) 指派为 $\mathcal{C}_n^G$ 中的一个态射 $f_1 \boxtimes_{P(z)} f_2$。于是，我们还得到以下结果，其证明与 [DH] 中定理 4.7 的证明相同：

定理 5.7。由 $\boxtimes_{P(z)}$ 表示的指派，定义为 $(W_1, W_2) \mapsto W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 以及 $(f_1, f_2) \mapsto f_1 \boxtimes_{P(z)} f_2$，是一个从 $\mathcal{C}_n^G \times \mathcal{C}_n^G$ 到 $\mathcal{C}_n^G$ 的函子。

5.2 $P(z)$-张量积双函子（用于 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$）

在本小节中，对于 $z \in \mathbb{C}^\times$，我们为范畴 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 中的 C_n-余有限分次受限广义 g-扭曲 V-模（带有 G 作用）构造一个 $P(z)$-张量积双函子，其中 $g \in G$。

设 $g_1, g_2 \in G$。对于 $g_1, g_2 \in G$，分别给定 C_n-余有限分次受限广义 g_1-扭曲和 g_2-扭曲的 V-模 W_1 和 W_2。由于 W_1 和 W_2 是 G-模，$(W_1 \otimes W_2)^*$ 也是一个 G-模。特别地，$(W_1 \otimes W_2)^*$ 带有 $(g_1 g_2)^{-1}$ 的作用。

对于 $w_3' \in W_3'$，给定 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 中 W_1 和 W_2 的一个 $P(z)$-乘积 (W_3, I)，我们有由 (5.1) 定义的 $\lambda_{I,w_3'} \in (W_1 \otimes W_2)^*$。令 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 为 $(W_1 \otimes W_2)^*$ 中由所有 $P(z)$-乘积 (W_3, I) 以及 $w_3' \in W_3'$ 所张成的子空间。注意，一般来说，此处的 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 可能不同于在 W_1 和 W_2 被视为不带 g 和 G 作用的分次受限广义 g-扭曲 V-模时的 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$。为简便起见，我们使用相同的记号 ${}_{P(z)}$，但必要时会分别称它们为 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 中的 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 和 $\mathcal{C}_n^G$ 中的 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$，以便区分。

如上所述，G 作用于 $(W_1 \otimes W_2)^*$。根据范畴 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 中扭曲 $P(z)$-交织映射的定义，对于 W_1 和 W_2 在 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 中的 $P(z)$-积 (W_3, I)，以及 $w_3' \in (W_3')^{[\alpha]}$，我们有

$$\begin{aligned}
(h\lambda_{I,w_3'})(w_1 \otimes w_2) &= \lambda_{I,w_3'}(h^{-1}(w_1 \otimes w_2)) \\
&= \lambda_{I,w_3'}(h^{-1}w_1 \otimes h^{-1}w_2) \\
&= \langle w_3', I(h^{-1}w_1 \otimes h^{-1}w_2)\rangle \\
&= \langle w_3', h^{-1}I(w_1 \otimes w_2)\rangle \\
&= \langle hw_3', I(w_1 \otimes w_2)\rangle \\
&= \lambda_{I,hw_3'}(w_1 \otimes w_2)
\end{aligned}$$

对于 $w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$。因此我们得到 $h\lambda_{I,w_3'} = \lambda_{I,hw_3'}$，这意味着 $h\lambda_{I,w_3'} \in W_1 \ {}_{P(z)} W_2$。于是，$(W_1 \otimes W_2)^*$ 上的 G-作用诱导出 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 上的 G-作用。 □

取 $h = (g_1 g_2)^{-1}$ 于 $h\lambda_{I,w_3'} = \lambda_{I,hw_3'}$，得到 $((g_1 g_2)^{-1}\lambda_{I,w_3'} = \lambda_{I,(g_1 g_2)^{-1}w_3'}$。于是有

$$((g_1 g_2)^{-1} - e^{2\pi \mathbf{i}\alpha})^k \lambda_{I,w_3'} = \lambda_{I,(g_1 g_2)^{-1} - e^{2\pi \mathbf{i}\alpha})^k w_3'}$$

对于 $k \in \mathbb{Z}_+$。由于 $w_3' \in (W_3')^{[\alpha]}$，存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $((g_1g_2)^{-1} - e^{2\pi i\alpha})^k w_3' = 0$。因此得到 $((g_1g_2)^{-1} - e^{2\pi i\alpha})^k \lambda_{I,w_3'} = 0$。令 $(W_1 \ {}_P(z)W_2)^{[\alpha]}$ 为 $(g_1g_2)^{-1}$ 在 $W_1 \ {}_P(z)W_2$ 上作用时特征值为 $e^{2\pi i\alpha}$ 的广义特征空间。我们已证明 $\lambda_{I,w_3'} \in (W_1 \ {}_P(z)W_2)^{[\alpha]}$。由于 $W_1 \ {}_P(z)W_2$ 由形如 λ_I 的元素张成，$W_1 \ {}_P(z)W_2$ 是 $(g_1g_2)^{-1}$ 在 $W_1 \ {}_P(z)W_2$ 上作用的广义特征空间的直和，也就是说，

$$W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2 = \coprod_{\alpha+\mathbb{Z}\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}} (W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2)^{[\alpha]}.$$

我们定义一个顶点算子映射

$$Y_{W_1\boxtimes_{P(z)}W_2} : V \otimes (W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2) \to (W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2)\{x\}[\log x]$$

它使用与范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 中的情形相同的公式 (5.2)。我们考虑作用于 $W_1 \ {}_P(z)W_2$ 上的恒等算子 $1_{W_1 \ {}_P(z)W_2} : W_1 \ {}_P(z)W_2 \to W_1 \ {}_P(z)W_2$。通过在命题 5.4 中取 $f = 1_{W_1 \ {}_P(z)W_2}$，我们得到一个范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 中的扭曲 $P(z)$-交织映射 $1'_{W_1 \ {}_P(z)W_2}$。但请注意，本小节中的 $W_1 \ {}_P(z)W_2$ 可能不同于上一小节中的 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$。范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 中的这个扭曲 $P(z)$-交织映射 $\boxtimes_{P(z)}$ 也可能不同于命题 5.4 最后一部分中得到的扭曲 $P(z)$-交织映射 $\boxtimes_{P(z)}$。为简单起见，我们将使用相同的记号 $\boxtimes_{P(z)}$ 表示 $1'_{W_1 \ {}_P(z)W_2}$。我们还有 $w_1 \boxtimes_{P(z)} w_2$，它由 $w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$ 定义为 $\boxtimes_P(z)(w_1 \otimes w_2)$。命题 5.4 并未说明 $\boxtimes_{P(z)}$ 是否是范畴 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 中的扭曲 $P(z)$-交织映射。不过，我们有

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, h(w_1 \boxtimes_{P(z)} w_2)\rangle &= \langle h^{-1}\lambda, w_1 \boxtimes_{P(z)} w_2\rangle \\
&= (h^{-1}\lambda)(w_1 \otimes w_2) \\
&= \lambda(h(w_1 \otimes w_2)) \\
&= \lambda(hw_1 \otimes hw_2) \\
&= \langle \lambda, hw_1 \boxtimes_{P(z)} hw_2\rangle
\end{aligned}$$

对于 $\lambda \in W_{\boxtimes P(z)}W_2$，属于 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$、$w_1 \in W_1$ 和 $W_2 \in W_2$。因此我们得到

$$h(w_1 \boxtimes_{P(z)} w_2) = hw_1 \boxtimes_{P(z)} hw_2$$

对于 $h \in G$、$w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$。因此，$\boxtimes_{P(z)}$ 实际上是 $\widetilde{\ }$ 范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 中的一个扭曲 $P(z)$-交织映射。特别地，扭曲交织算子 $\mathcal{Y}_{1_{W_1 \ {}_P(z)W_2}}$ 是 $\mathcal{C}_n^G$ 范畴中的一个扭曲交织算子。

定理 *5.8.* 设 g_1, g_2 是 V, W_1, W_2, W_3 分次受限广义 g_1-、g_2-、g_1g_2-扭曲 V-模上的可交换自同构，分别属于范畴 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 和 $z \in \mathbb{C}^\times$。则 $W_1 \ {}_P(z)W_2$ 是一个带有 G 作用的分次受限广义 $(g_1g_2)^{-1}$-扭曲 V-模，其对偶 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2 = (W_1 \ {}_P(z)W_2)'$ 是一个 C_n-余有限分次受限广义 g-扭曲 V-模，且带有 G 作用。此外，$(W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2, \boxtimes_{P(z)})$ 是范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 中 W_1 与 W_2 的一个 $P(z)$-$\widetilde{\ }$ 张量积。

证明。由于范畴 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 中的扭曲 $P(z)$-交织映射也是范畴 $\mathcal{C}_n^G$ 中的扭曲 $P(z)$-交织映射，因此本小节中的 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 是一个广义 $(g_1 g_1)^{-1}$-扭曲 V-子模，它包含在前一小节中用相同记号 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 表示的空间内。根据定理 5.6，前一小节中的 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 是分次受限的，因此本小节中的其广义 $(g_1 g_1)^{-1}$-扭曲 V-子模 $W_1 \ {}_{P(z)} W_2$ 也分次受限。因此，其对偶 $W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 也分次受限。

由于 $1_{W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2}$ 是单射，扭曲交织算子 $\mathcal{Y}_{1_{W_1 \ {}_{P(z)} W_2}}$ 是满射。因此，由定理 4.1，$W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$ 是 C_n-有限的，因而属于 $\mathcal{C}_n^G$。现在，按照定理 5.6 证明最后一部分中的相同论证可知，$(W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2, \boxtimes_{P(z)})$ 是范畴 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 中 W_1 与 W_2 的 $P(z)$-张量积。

□

对于范畴 $\widetilde{\mathcal{C}}_n^G$ 中的两个态射 f_1 和 f_2，我们也可以定义 $f_1 \boxtimes_{P(x)} f_2$。于是，以与定理 5.7 相同的方式可得以下结果：

定理 5.9. 由 $\boxtimes_{P(z)}$ 表示的映射，将 W_1 和 W_2 对应到 $(W_1, W_2) \mapsto W_1 \boxtimes_{P(z)} W_2$，并将 f_1 和 f_2 对应到 $\mapsto f_1 \boxtimes_{P(z)} f_2$，是从 $\mathcal{C}_n^G \times \mathcal{C}_n^G$ 到 $\mathcal{C}_n^G$ 的一个函子。

参考文献

[DHVW1] L. Dixon、J. Harvey、C. Vafa 和 E. Witten，《轨形上的弦》，核物理 **B261**（1985），678–686。[DHVW2] L. Dixon、J. Harvey、C. Vafa 和 E. Witten，《轨形上的弦》，II，核物理**B274**（1986），285–314。[D] J. Du，《扭曲交织算子、扭模的张量积及其结合性》，博士学位论文，罗格斯大学，2026。[DH] J. Du 和 Y.-Z. Huang，《扭曲交织算子与（广义）扭曲模的张量积》，即将出版；arXiv:2501.15003[FHL] I. Frenkel、Y.-Z. Huang 和 J. Lepowsky，《关于顶点算子代数与模的公理化方法》，《美国数学会回忆录》**104**，1993。[FLM1] I. Frenkel、J. Lepowsky 和 A.Meurman，《以模函数 J 为特征标的 Fischer-Griess 怪兽群的自然表示》，《美国国家科学院院刊》**81**（1984），3256–3260。[FLM2] I. Frenkel、J. Lepowsky 和 A. Meurman，《顶点算子演算》，载于：《弦理论的数学方面，*1986* 年会议论文集，圣迭戈》，编者 S.-T. Yau，世界科学出版社，新加坡，1987，150–188。[FLM3] I. B. Frenkel、J. Lepowsky 和 A. Meurman，《顶点算子代数与怪兽群》，《纯粹与应用数学》，第 134 卷，学术出版社，波士顿，1988。

[H1] Y.-Z. Huang, 《顶点算子代数模范畴的张量积理论，IV》，纯粹与应用代数杂志 100（1995）173–216。[H2] Y.-Z. Huang, 《顶点张量范畴的刚性与模性》，数学物理通讯 10（2008），871–911。[H3] Y.-Z. Huang, 《余有限性条件、投射覆盖与对数张量积理论》，纯粹与应用代数杂志 213（2009），458–475。[H4] Y.-Z. Huang, 《与顶点算子代数的一般自同构相关的广义扭曲模》，数学物理通讯 298（2010），265–292。[H5] Y.-Z. Huang, 《与不一定可交换的自同构相关的扭模之间的交织算子》，代数杂志 493（2018），346–380。[H6] Y.-Z. Huang, 《扭曲模的扭顶点算子》，代数杂志 539（2019），53–83。[H7] Y.-Z. Huang, 《顶点算子代数表示论与轨形共形场论》，载于：《李群、数论与顶点代数》，D. Adamovic、A. Dujella、A. Milas 和 P. Pandzic 编，当代数学，第 768 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2021，221–252。[H8] Y.-Z. Huang, 《C_1-余有限性与顶点张量范畴》，即将出版；arXiv:2509.20737。[HL1] Y.-Z. Huang 和 J. Lepowsky, 《顶点算子代数模的张量积与顶点张量范畴》，载于：《李理论与几何：献给 Bertram Kostant》，R. Brylinski、J.-L. Brylinski、V. Guillemin、V. Kac 编，Birkhäuser，波士顿，1994，349–383。[HL2] Y.-Z. Huang 和 J. Lepowsky, 《顶点算子代数模范畴的张量积理论，I》，Selecta Mathematica（新系列）1（1995），699–756。[HL3] Y.-Z. Huang 和 J. Lepowsky, 《顶点算子代数模范畴的张量积理论，II》，Selecta Mathematica，新系列，1（1995），757–786。[HL4] Y.-Z. Huang 和 J. Lepowsky, 《顶点算子代数模范畴的张量积理论，III》，纯粹与应用代数杂志，100（1995），141–171。[HLZ1] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang, 《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，I：引言以及强分次代数及其广义模》，与 J. Lepowsky 和 L. Zhang 合著，载于：《共形场论与张量范畴》，研讨会论文集

北京国际数学研究中心举办，编者：*C. Bai*、*J. Fuchs*、*Y.-Z. Huang*、*L. Kong*、*I. Runkel* 和 *C. Schweigert*，《北京大学数学讲义》第 2 卷，Springer，纽约，2014 年，169–248 页。[HLZ2] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，II：对数形式演算与对数交织算子的性质》，arXiv: 1012.4196。[HLZ3] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，III：交织映射与张量积双函子》，arXiv: 1012.4197。[HLZ4] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，IV：张量积双函子的构造与相容条件》，arXiv: 1012.4198。[HLZ5] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，V：交织映射的收敛条件及相应的相容条件》，arXiv: 1012.4199。[HLZ6] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《对数张量范畴理论，VI：展开条件、对数交织算子的结合性及结合同构》；arXiv:1012.4202。[HLZ7] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《对数张量范畴理论，VII：收敛与延拓性质及其在交织映射展开中的应用》；arXiv:1110.1929。[HLZ8] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《对数张量范畴理论，VIII：共形顶点代数广义模范畴上的编织张量范畴结构》，即将出版；arXiv:1110.1931。[HY] Yi-Zhi Huang 和 Jinwei Yang，《顶点算子代数的（对数）扭曲模的结合代数》，《美国数学会会刊》**371**（2019），3747–3786 页。[N] W. Nahm，《拟有理融合积》，《国际现代物理学杂志》**B8**（1994），3693–3702 页。[Ta1] D, Tan，《C_2-余有限顶点算子代数的 C_n-余有限扭曲模》，即将出版；arXiv:2510.26657。[Ta2] D, Tan，《非扭曲模与扭曲模之间交织算子的微分方程》，即将出版；arXiv:2510.14860。

[Ta3] D, Tan, 《轨形共形场论中的余有限性条件与收敛》，博士学位论文，罗格斯大学，2026 年。[Tu] V. Turaev, 《三维同伦场论与交叉群范畴》，arxiv: math.GT/0005291。[YZ] C. Yang 和 Y. Zhu, 《顶点算子代数理论中扭曲融合积的余有限性》，即将出版；arXiv:2511.06420。

Department of Mathematics, Rutgers University, 110 Frelinghuysen Rd., Piscat-away, NJ 08854-8019电子邮件地址：yzhuang@math.rutgers.edu