arXiv:2601.12846v1 [math.GT] 19 Jan 2026

三页指标的图示方法

HYUNGKEE YOO

Abstract. 三页指标 $\alpha_3(L)$是衡量在 L 三页书中表示链环复杂度的不变量。已知 $\alpha_3(L)$具有关于交叉数的线性上界，且等号由霍普夫链环达到。

本文从图示的角度研究这一上界的等号情形。从一个约化链环图出发，我们通过绑定圆构造三页表示；这些绑定圆是由2-球面的诱导胞腔分解中适当的可缩子复形的边界产生的。这一方法使我们能够更精细地控制所得三页表示中的弧数。

作为结果，我们证明，对于任意非分裂的非平凡链环 L（霍普夫链环除外），

$$\alpha_3(L) \leq 3c(L) - 1,$$

从而完全刻画了满足 $\alpha_3(L) = 3c(L)$的链环。

1. Introduction

链环在 $\mathbb{R}^3$ 中的结构化嵌入提供了一种研究拓扑复杂度的组合方法。一种颇具影响力的方法是 Cromwell [2], 提出的弧表示，其中将链环 L 嵌入到 $\mathbb{R}^3$的开书分解的有限多个页中。这里的开书分解由一条绑定轴和若干页组成，每一页恰好包含一条弧段。这种表示所需的最少页数称为弧指标 α（L），它已成为一种基本不变量，与链环 [1, 3, 4, 14, 15, 16]的几何和组合性质密切相关。

后来，Dynnikov [6], 提出了另一种视角：将环境空间限制为开书分解的三页，并允许每页包含多条两两不相交的弧段，从而定义链环的三页表示。Dynnikov 证明，每个链环都存在三页表示；此后的研究则考察了各种链环和空间图 [7, 8, 9, 11, 12, 13, 18]的此类表示。与弧指标类似，三页指标 α_3（L）于 [9], 提出，定义为在三页表示中表示一个链环所需的最少弧段数。

链环投影是到 $\mathbb{R}^2$ 中的正则嵌入，而链环图则是在每个交叉点标注上下信息后得到的。链环 L 的交叉数 $c(L)$ 定义为所有表示 L 的链环图中交叉点数量的最小值。它是最基本的不变量之一

Key words and phrases. 三页指标、链环图、非分离独立集。

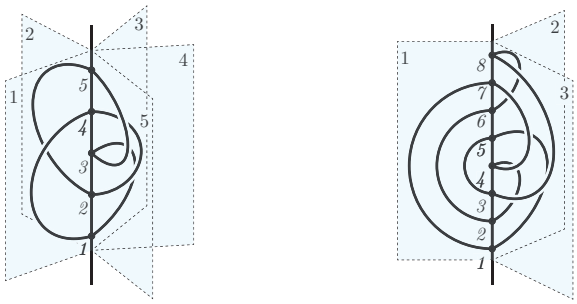


FIGURE 1. 三叶结的弧表示与三页表示

在链环理论中，它提供了衡量图示复杂度的基本尺度，并作为许多其他链环不变量的参照标准。尤其是，人们研究了许多几何和组合不变量与交叉数之间的关系，通常通过用 $c(L)$ 表示的上界或下界来刻画。

根据 Bae 和 Park [1], ，弧指标关于交叉数存在一个线性上界。相比之下，对于三页表示，目前只对某些链环类别建立了线性上界，包括环面链环、有理链环和椒盐链环 [9, 18]。作者在先前的工作 [17] 中证明，三页指标关于交叉数存在一个线性上界，即

$$\alpha_3(L) \leq 3c(L).$$

霍普夫链环 2_1^2, 满足 $\alpha_3(2_1^2) = 6$ [9]，由此可见该不等式是尖锐的。这个值由一般下界$\alpha_3(L) \geq 3\,br(L)$所决定，其中 $br(L)$表示桥数。由于霍普夫链环是一个双桥链环，因此等号成立。

本文旨在通过考察等号成立的情形来改进这一界。我们证明，只有霍普夫链环的分裂并才能取等号，而所有其他非平凡链环都满足严格不等式。

定理1. 若 L 是一个非分裂的非平凡链环，且不是霍普夫链环，则

$$\alpha_3(L) \leq 3c(L) - 1.$$

定理1表明，除霍普夫链环外，线性上界 $\alpha_3(L) \leq 3c(L)$ 总能至少改进一个单位。结合霍普夫链环取到等号这一事实，以及三页指标和交叉数在分裂并下均具有可加性，可得等号成立情形的完整刻画。

推论2. 设 L 是一个不含平凡分裂分支的链环。那么， $\alpha_3(L) = 3c(L)$ 当且仅当 L 是若干霍普夫链环的分裂并。

定理1中的上界预计是紧的。特别是，人们猜想三叶结和八字结的三页指标分别为8和11。然而，目前我们还没有这些数值的完整证明。

定理1的证明是构造性的。我们从一个约化链环图出发，通过引入适当的绑定圆构造三页表示。将该图视为2-球面的胞腔分解后，我们利用相关胞腔复形中的一个可缩子复形对这一构造进行细化。这种方法使我们能够控制所诱导的三页表示中出现的弧段数量，并得到所述上界。

本文结构如下。第 2 节介绍一种从链环图构造三页表示的统一方法。第 3 节利用胞腔复形重新诠释这一构造，并证明定理1。最后，第 4 节给出这一构造的图论解释，并探讨进一步改进的可能方向。

2. Circular three-page presentation

我们考虑 $\mathbb{R}^3$ 的带有开书结构的一点紧化。在这一紧化下，绑定轴变为一个平凡结圆，而每个半平面都变为一个圆盘。这个圆称为绑定圆。在此背景下， [18]首次引入了圆形三页表示的概念。绑定指标最初以绑定轴上的垂直高度表示，现在则沿绑定圆依次赋值。

圆形三页表示可以用链环图作平面描述。为此，我们在平面上固定一条简单闭曲线，并将其视为绑定圆。将第一页和第二页置于绑定圆内，第三页置于圆外，便可使所有交叉点都位于内部区域。在这种构形中，第一页上的线段表现为下交叉，而第二页上的线段则对应于上交叉。按照这一约定，页面顺序固定，绑定指标则根据绑定圆上的顺时针顺序赋值，如图 2 所示。反过来，给定一条按此形式呈现的简单闭曲线，便可还原出相应的三页表示。

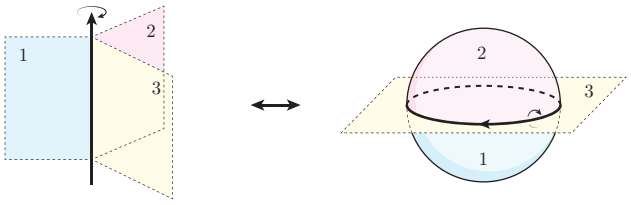


Figure 2. 三页表示及其带有页序的圆形三页表示

这种平面描述可以通过以下在 [17]中引入的定义进行严格形式化。

定义 1. 设 D 为一个链环图。若简单闭曲线 γ 满足以下条件，则称其为 D 的三页表示的绑定圆：

(1) 曲线 γ 与 D 相交于有限多个点。(2) D 的所有交叉点都位于 γ内。

(3) D 被 γ 截断后形成的每段弧都属于以下三种类型之一：(a) 位于 γ之外；(b) 位于 γ 内，且只参与上交叉；(c) 位于 γ 内，且只参与下交叉。(4) 沿着 γ，同一类型的两段弧不会相邻。

现在我们证明，对于任意链环图，都可以构造一个满足上述定义的绑定圆。绑定圆 γ与图示 D 的交点称为绑定点。根据构造，绑定点的数量等于相应三页表示中出现的弧段数。

引理 3. 设 D 是一个具有 n 个交叉点的链环图。那么存在一个绑定圆 γ，它诱导出一个至多含有 $3n+1$条弧段的三页表示。

证明. 设 D 是一个具有 n 个交叉点的链环图。忽略交叉信息后，我们将 D 视为一个具有 n 个顶点的平面四价图 Γ。

首先假设底层图 Γ 是连通的，并固定其生成树 T。我们取 $\mathbb{R}^2$中 T 的一个足够小的正则邻域的边界。该边界是一条简单闭曲线，记为 γ。经过微小扰动后，我们可以假设 γ 与生成树的每条边恰好相交一次。

由于 Γ 是 4 价的，每个顶点都关联四条边。曲线 γ 在每个顶点的邻域内，恰好与所有不包含在 T 中的关联边相交一次，并且与 T 的每条边相交一次。由于具有 n 个顶点的生成树恰有 $n-1$ 条边，因此 γ 与图示 D 之间的交点总数为

$$4n-(n-1)=3n+1.$$

现在验证 γ 满足三页表示中绑定圆的定义条件。前三个条件可直接由构造得出。接下来需要验证邻接条件。

如果图示 D 是交替的，那么沿着 γ 的相邻弧段会在上交叉和下交叉之间交替。因此，γ 满足定义 1 的第四个条件。如果 D 是非交替的，那么 Γ 至少有一条边的两个端点对应同一类型的交叉。在这种情况下，我们在该边附近稍微调整 γ，使其不再与该边相交。所得曲线满足绑定圆的所有定义条件，且交点数有所减少。因此，在所有情况下，我们都能得到一个绑定圆，它所导出的三页表示至多包含 $3n+1$ 个弧段，如图 3 所示。

现在假设底层平面图 Γ 有多个连通分支。那么图示 D 是可分裂的。我们为每个分支构造一个这样的绑定圆，然后通过连续进行连通和将它们组合起来，从而得到一个满足所需性质的单一绑定圆。连通和运算保持定义 1 中的邻接条件。

□

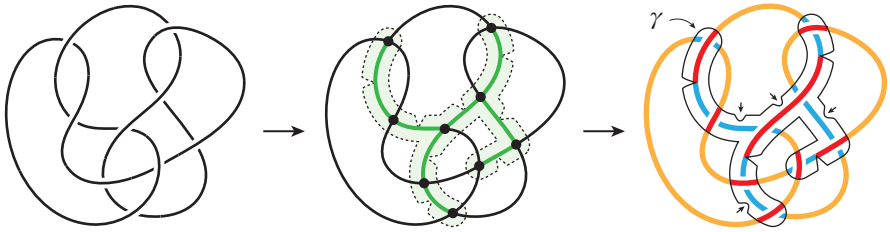


FIGURE 3. 与链环图底层图的生成树相关联的绑定圆

引理 3 已经表明，三页指标关于交叉数存在一个线性上界。然而，通过改进构造，这个上界还可以进一步改善。在接下来的章节中，我们将通过分析与给定图示相关联的底层图的对偶图，介绍一种降低线性上界系数的方法。

3. CELL COMPLEXES FROM LINK DIAGRAMS

设 D 是定义在 S^2 上的一个含有 n 个交叉点的非分裂约化链环图。该图示在 S^2 上诱导出一种自然的胞腔复形结构。令 $X(D)$ 表示所诱导的二维胞腔复形，定义如下：

- 零维胞腔对应于 D 的交叉点，
- 一维胞腔对应于交叉点之间的弧段，
- 的二维胞腔与 $S^2 \setminus D$的补区域相对应。

由于 D 的底层图是胞腔复形 $X(D)$的1-骨架 $X^{(1)}(D)$，底层图的任意生成树都是 $X^{(1)}(D)$的连通可缩子复形。引理 3 的关键思想是，绑定圆可以由底层图的生成树的正则邻域的边界得到。现在，我们试图将这一思想推广到胞腔复形 $X(D)$的层面。

要使正则邻域的边界成为简单闭曲线，所选子复形必须连通且可缩。我们还要求所选子复形不包含任何一对共享同一条一维胞腔的二维胞腔。经过足够小的扰动后，这一条件可确保子复形的正则邻域的边界与每条一维胞腔相交。因此，所得简单闭曲线可作为绑定圆，用以区分定义 1 中的三类弧段。基于这些考虑，我们引入 D的扩展生成树这一概念，将其定义为满足上述条件的 $X(D)$的子复形。

定义 2. 若子复形 $Y \subset X(D)$ 满足以下条件，则称其为链环图 D 的扩展生成树：

(1) Y 连通且可缩。(2) Y 包含 $X(D)$ 的所有零维胞腔。

(3) Y 中任意两个二维胞腔不共享同一个一维胞腔。

现在我们旨在改进引理 3 的结果。

引理 4. 设 D 是一个有 n 个交叉点的非分裂约化链环图，并设 Y 是 D 的扩展生成树。那么存在一个绑定圆 γ，它诱导出 D 的三页表示，且至多含有 $3n+1-m$ 条弧，其中 m 表示包含在 Y 中的二维胞腔数量。

证明。设 D 是一个具有 n 个交叉点的非分裂约化链环图，并设 $Y \subset X(D)$ 是一棵扩展生成树。记 m 为包含在 Y 中的二维胞腔数量。我们将绑定圆 γ 构造为 S^2 中 Y 的一个充分小的正则邻域的边界。

由于 Y 连通且可缩，正则邻域 $\mathcal{N}(Y)$ 是一个拓扑圆盘。因此，其边界 $\partial\mathcal{N}(Y)$ 是一条简单闭曲线。经过充分小的扰动后，我们可以假设 $\gamma := \partial\mathcal{N}(Y)$ 与 $X^{(1)}(D)$ 横截，并且与每个一维胞腔相交于有限多个点。

现在我们估计 γ 与图示 D 之间的交点数量。$X(D)$ 的每个零维胞腔（交叉）在 1-骨架中的价数均为 4，因此总共有 $4n$ 个局部半边。若按引理 3 中的方式，将 γ 取为生成树，则可得到 $4n - (n-1) = 3n+1$ 个交点。下面说明 Y 中二维胞腔的存在如何减少这一数量。

选择 1-骨架 $Y^{(1)}$ 的一棵生成树 T。由于 Y 是连通且可缩的，并包含所有 0-胞腔，我们可以将 T 视为 D 的底层图的一棵生成树。令 γ_0 为充分小的 T 正则邻域的边界所得到的绑定圆。如引理 3 所述，经过扰动后，我们可以假设 γ_0 与 T 的每条边恰好相交一次，并且与不在 T 中的每条边至多相交一次。特别地，γ_0 给出了一个至多含有 $3n+1$ 条弧的三页表示。

现在，我们利用包含在 Y 中的二维胞腔来修改 γ_0。令 f 为 Y 的一个二维胞腔。根据扩展生成树的定义，Y 中任意两个二维胞腔不共享同一个一维胞腔。因此，我们可以对不同的二维胞腔独立地进行以下局部修改。

考虑 f 的一个小邻域。边界 ∂f 是 1-骨架 $X^{(1)}(D)$ 中的一个圈。由于 $f \subset Y$，正则邻域 $\mathcal{N}(Y)$ 包含 f 的一个邻域，因此曲线 $\gamma = \partial\mathcal{N}(Y)$ 位于 ∂f 的外部；经过小幅扰动后，它恰好与 ∂f 中此前由 γ_0 穿过的那条唯一一维胞腔相交一次，以便从 ∂f 的两侧之间通过。将 γ_0 推过 f，即可用位于 f 内部的 γ 的一段替代这一交点，从而恰好消除一个与图示的交点。由于 Y 中不同的二维胞腔不共享一维胞腔，这些 m 次局部修改会消除 m 个彼此不同的交点。

对 Y 中的每个二维胞腔执行此修改后，我们得到一条简单闭曲线 $\gamma = \partial\mathcal{N}(Y)$，使得

$$|\gamma \cap D| \leq (3n+1) - m.$$

根据构造，γ 是一个连通可缩子复形的正则邻域的边界，因此满足定义 1 中的前三个条件。此外，由于 Y 不含任何一对共享同一一维胞腔的二维胞腔，足够小的扰动可确保 γ 与 $X(D)$ 的每个一维胞腔相交，而定义 1 中的邻接条件则可完全按照引理 3 的证明（交替情形）推出；在非交替情形下，采用相同的局部避让修改即可。

因此， γ 是一个绑定圆，它为 D诱导出一个至多含 $3n+1-m$ 条弧的三页表示。□

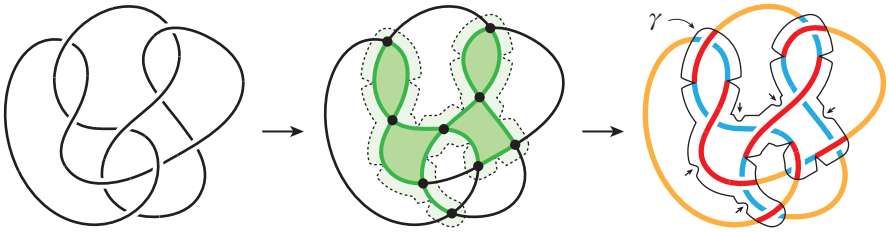


FIGURE 4.与链环图底层图的扩展生成树相关联的绑定圆

引理 4 表明，通过将二维胞腔纳入生成树，可以减少由绑定圆诱导的三页表示中的弧段数量。更确切地说，扩展生成树中的每个二维胞腔恰好消除绑定圆与图示之间的一个交点。因此，改进三页指标的线性上界归结为尽可能多地将二维胞腔纳入扩展生成树。现在我们证明主定理。

定理1的证明。设 L 是一个非分裂、非平凡且不是霍普夫链环的链环，设 D 是 L 的一个具有 n 个交叉点的约化链环图。在这些假设下，我们有 $n \geq 3$。令 Γ 表示 D 的底层四价平面图，并令 T 为 Γ 的一棵生成树。

由于 $n \geq 3$，树 T 包含一条长度为二的路径。令 e_1 和 e_2表示构成这条路径的两个一维胞腔（ D的边），它们共享一个顶点 c。 D 的每个一维胞腔都与诱导胞腔复形 $X(D)$ 中的恰好两个二维胞腔关联。因此， e_1 与两个二维胞腔关联，分别记为 f_1 和 f_2；而e_2 与两个二维胞腔关联，分别记为 g_1 和 g_2。

我们断言，在这四个二维胞腔 f_1、 f_2、 g_1、 g_2中，至多有一个二维胞腔同时属于这两组。反设 e_1 和 e_2 与相同的两个二维胞腔 f_1 和 f_2关联。

由于图 Γ 是四价的，因此还有恰好两条 Γ的边与顶点 c关联。将这些边记为 e_3 和 e_4。由于 D 是约化的，边 e_1、 e_2、 e_3、 e_4 两两不同。

考虑 D 的补区域的棋盘染色。沿着任意一个面的边界，关联的边必须在黑色区域和白色区域之间交替。由于 e_1 和 e_2 将同样的两个面 f_1和 f_2 分隔开，剩余的边 e_3 和 e_4 也必须完全位于这两个面之一的边界上。不失一般性，假设 e_3和 e_4 都包含在 f_1 的边界上。

于是，面 f_1 包含与顶点 c关联的全部四条边。因此，移除顶点 c 会使图 Γ不连通，所以 c 是一个割点。这与 D 是约化的这一假设矛盾。

因此，存在两个不同的二维胞腔，一个与 e_1 关联，另一个与 e_2 关联，且它们不共享同一个一维胞腔。特别地，这两个二维胞腔不相邻。

现在从生成树 $T \subset X^{(1)}(D)$ 出发，将这两个不相邻的二维胞腔纳入其中，以扩展这棵树。由于这两个二维胞腔不共享同一个一维胞腔，所得子复形是连通且可缩的，因此按照第 3 节的定义，它构成一棵扩展生成树。

根据引理 4，扩展生成树中包含的每个二维胞腔都会使绑定圆与图示之间的交点数减少一个。特别地，至少存在一个这样的二维胞腔，就意味着由此导出的三页表示至多有 $3n$ 条弧；而存在两个不相邻的二维胞腔，则可得

$$\alpha_3(L) \leq 3n - 1 = 3c(L) - 1.$$

证明至此完成。 □

在下一节中，我们不再进一步改进这一上界，而是用图论术语重新诠释上述构造，以期阐明其背后的组合结构，并提出由这一观点自然引出的猜想。

4. 图论诠释与进一步方向

本节将用图论术语重新诠释第 3 节中的扩展生成树构造，并概述改进线性上界 $\alpha_3(L) \leq 3c(L)$的可能方向。我们的目的不是在此建立新的上界，而是阐明我们的方法所依据的组合结构，并提出由此自然引出的猜想。

设 D 是一个有 n 个交叉点的约化非分裂链环图，并令 $\Gamma(D)$ 表示 D 的底层四价平面图的平面对偶图。则 $\Gamma(D)$ 是一个连通二部平面图，有 $n+2$ 个顶点，每个顶点对应于该图示的一个补区域。

如第 3 节所述，将二维胞腔纳入扩展生成树$Y \subset X(D)$，可以改进三页指标的上界。从对偶图的角度来看，这一过程具有自然的图论解释。事实上，$X(D)$的二维胞腔与 $\Gamma(D)$的顶点一一对应，而 Y中任意两个二维胞腔不共享同一个一维胞腔这一条件，可转化为要求对应的顶点在 $\Gamma(D)$中构成一个独立集。

此外，要求 Y 连通且可缩，会对相应的独立集施加全局约束。在对偶图 $\Gamma(D)$中，这意味着删除所选顶点后图仍须保持连通。因此，改进三页指标上界的问题归结为：在平面二部图 $\Gamma(D)$中寻找较大的非分离独立集。顶点删除下的连通性约束是图论中的经典课题；一般背景可参见 Diestel [5] 。

这一重新表述为在 $\Gamma(D)$ 中构造可容许独立集提供了若干图论策略。最自然的方法之一，是利用平面二分图中的多叶生成树。多叶生成树已从极值和算法视角得到研究；例如，参见 Kleitman 和 West [10]。如果 $\Gamma(D)$ 的一棵生成树包含一组数量可观且属于同一个二分部的

叶子，那么这些叶子的任意子集都会自动构成独立集。此外，如果移除这些叶子后仍能保持连通性，那么相应的顶点就会为扩展生成树提供可容许的二维胞腔。

尽管这些策略在概念上很直接，但要严格落实，仍涉及由平面性和连通性所带来的微妙全局约束。对这些问题进行系统的图论处理，似乎还需要进一步的技术发展，因此留待未来研究。

上述考虑自然引出了以下猜想。

猜想 1. 存在一个常数 $c < 3$，使得对于每个非分裂链环 L,

$$\alpha_3(L) \leq c\, c(L) + O(1).$$

等价地，这个问题可以完全用平面图来表述。

猜想 2. 存在一个常数 $\delta > 0$，使得对于任意含有 n 个交叉点的约化链环图 D，其对偶图 $\Gamma(D)$ 含有一个大小至少为 δn 的非分离独立集。

若能肯定地解决猜想 2，通过第 3 节中的扩展生成树构造，将立即得到三页指标的改进线性上界。我们预计，这种图论视角将为进一步研究链环理论与平面图论的交叉领域提供有益的观点。

Acknowledgements

本研究得到韩国国家研究基金会（NRF）基础科学研究计划的支持，该计划由韩国政府教育部资助（RS-2023-00244488）。

References

[1] Y. Bae 和 C.-Y. Park. 链环弧指标的一个上界。 *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 129 3 491 500, 2000 , ( ): – . [2] P. Cromwell. 将纽结和链环嵌入开书 I：基本性质。 *Topology and its Applications* 64 1 37 58, 1995 , ( ): – . [3] P. R. Cromwell. 纽结和链环的弧表示。载于 *Banach Center Publications*, 第 42 卷。1998 年。[4] P. R. Cromwell 和 I. J. Nutt. 将纽结和链环嵌入开书 II：弧指标的界。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 119:309–319, 1996. [5] R. Diestel. *Graph theory*. 施普林格·自然，2025 年。[6] I. Dynnikov. 纽结理论的三页方法：编码与局部变换。 *Functional Analysis and Its Applications* 33 4 260 269, 1999 , ( ): – . [7] I. Dynnikov. 纽结理论的三页方法：万有半群。 *Functional Analysis and Its Applications* 34 1 29 40, 2000 , ( ): – . [8] I. Dynnikov. 表示链环的新方法：一维形式体系与解缠技术。 *Acta Applicandae Mathematicae*, 69(3):243–283, 2001. [9] U. Jang、M. Lee 和 H. Yoo. 环面链环的三页指标。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 34 12 2550063, 2025 , ( ): . [10] D. J. Kleitman 和 D. B. West. 多叶生成树。*discrete mathematics* 4 1 99 106, 1991 , *SIAM Journal on Functional Analysis and Its Applications* 35 3 230 233, 2001 , ( ): – . [11] V. Kurlin. 链接 3 价图的三页 Dynnikov 图。, ( ): – .

[12] V. Kurlin. 空间图的三页编码与复杂度理论。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 16 1 59 102, 2006 , ( ): – . [13] V. Kurlin 和 V. Vershinin. 奇异纽结的三页嵌入。 *Functional Analysis and Its Applications* 38 1 14 27, 2004 , ( ): – . [14] H. Matsuda. 开书分解中的链环与标准接触结构中的链环。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(12):3697–3702, 2006. [15] H. R. Morton 和 E. Beltrami. 弧指标与考夫曼多项式。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 123 1 41 48, 1998 , ( ): – . [16] L. Ng. 关于弧指标与最大 Thurston–Bennequin 数。 *J. Knot Theory Ramifications* 21 4 2012 , ( ), . [17] H. Yoo. 二分对偶图交替链环的带状长度新上界。 *arXiv:2601.10278*, 2026. [18] H. Yoo. 有理链环和椒盐链环的三页指标。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 35 1 2550074, 2026 , ( ): .

Department of Mathematics Education, Sunchon National University, Sun-chon 57922, Korea*Email address*: hyungkee@scnu.sc.kr