arXiv:2601.12849v1 [cs.GT] 19 Jan 2026

EFX 的代价：少量剩余物品条件下的广义均值福利与复杂性二分

Eugene Lim[1], Tzeh Yuan Neoh[2] 和 Nicholas Teh[3]

[1]新加坡国立大学，新加坡[2]哈佛大学，美国[3]牛津大学，英国

摘要

任意物品删除后无嫉妒（EFX）是分配不可分物品时的核心公平性概念，但其一般情形下的存在性问题尚未解决。在剩余物品较少的情形中，物品数量仅比代理人数多一个较小的常数（至多三个），此时可以保证 EFX 分配的存在，因此研究重点从存在性转向效率与计算。我们研究 EFX 与广义均值（p均值）福利之间的关系；该指标涵盖了常见的功利主义（$p = 1$）、纳什（$p = 0$）和平均主义（$p \to -\infty$）目标。我们在 $p = 0$ 处建立了严格的复杂性二分：对于任意固定的 $p \in (0, 1],$），即使剩余物品至多为三件，判定 EFX 能否达到全局 p 均值最优值，以及计算使 p 均值福利最大化的 EFX 分配，都是 NP 困难。相反，对于任意固定的 $p \leq 0$，我们给出了多项式时间算法，可在 EFX 分配范围内优化 p 均值福利，并高效地判定 EFX 是否能达到全局最优值。我们还借助公平价格框架量化了实施 EFX 所导致的福利损失，表明对于 $p > 0$，损失可能随代理人数线性增长；而对于 $p \leq 0$，损失则有一个取决于剩余物品数量的常数上界（对于纳什福利，损失渐近趋于零）。最后，我们证明，同时要求帕累托最优性与 EFX 是 NP 困难的（对于更强的 EFX 变体，该问题则成为 Σ_2^P-完全）。总之，我们的结果阐明了在少量剩余物品的情形下，EFX 何时会带来较高的计算代价，何时又在结构上与福利最大化相契合。

1 引言

不可分物品的公平分配是计算机科学与经济学交叉领域中的一个基础问题，可用于建模多种现实问题，例如课程分配 [Budish 和 Cantillon,2012], 离婚财产分割 [Brams 和 Taylor，1996], 以及遗产分割 [Pratt 和 Zeckhauser,1990]（另见 Amanatidis 等人的综述 [2023]）。

在众多已提出的公平性概念中，无嫉妒（EF）及其放宽形式仍是该领域研究最广泛的概念之一。直观而言，如果每位代理人对自己物品束的估值至少不低于对任何其他代理人物品束的估值，那么该分配就是无嫉妒的。然而，在这种情形下，完整的[1] 无嫉妒分配可能并不存在。为此，人们提出了较弱的无嫉妒概念。其中最受关注的放宽形式包括任意物品删除后无嫉妒 （EFX）和删除一个物品后无嫉妒（EF1）。如果删除后者物品束中的某个物品，就能消除一位代理人对另一位代理人的任何嫉妒，那么该分配就是 EF1；如果删除任意物品都能消除嫉妒，则该分配就是 EFX。后者严格更强，因此作为公平性标准也更理想。对于可加估值，EF1 分配总是存在，且可以高效计算 [Budish，2011年，Lipton

[1]完备性 是公平分配中的一项常见假设，要求所有物品都必须分配；否则，只要将所有物品都留作未分配，就能得到一种平凡的“公平”分配。

等人， 2004], EFX 分配的存在性仍是该领域最重要的未解问题之一 [Amanatidis 等人，2023年，Caragiannis 等人，2019年，Moulin，2019年，Procaccia， 2020]。迄今为止，积极结果仅在（众多）受限情形下取得，包括但不限于：具有一般单调估值的双代理人情形 [Plaut 和 Roughgarden， 2020], 相同估值 [Plaut 和 Roughgarden， 2020], 二元估值 [Bu 等人， 2023], 双值实例 [Amanatidis 等人， 2021],以及实例中存在三个互不相同的加性估值函数的情形 [Prakash 等人， 2024]。[2]然而，即使对于加性偏好，EFX 的一般存在性问题仍未解决，现有算法框架也无法推广 [Chaudhury 等人，2021b年，Mahara， 2024]。

近年来，一个特别有前景的研究方向聚焦于少量剩余物品的情形：物品数量（m）仅略多于代理人数（n），即 $m = n + c$，其中 c 是一个较小的常数。这种情形在理论和实践上都颇具吸引力。从理论角度看，这是一个特殊情形：即使对于一般的单调估值，也已知 EFX 必然存在，而这在 EFX 文献中十分罕见。从实践角度看，它涵盖了共享经济中有限奖励物品或少量盈余的分配问题。Amanatidis 等人 [2020] 首先证明，对于任意单调估值，当 $m \leq n+2$ 时，通过嫉妒环消除程序，总能找到一个 EFX 分配。Mahara [2024] 随后通过一种基于势函数的方法，将这一保证扩展到了 $m \leq n + 3$。Neoh 和 Teh [2025]也研究了这一情形，但关注的是 EFX 分配的数量。因此，这一情形提供了一个一般性条件，可确保 EFX 分配的存在，而无需施加额外的结构性限制。由此，我们得以超越单纯的存在性问题，研究这些 EFX 分配的福利属性。这引出了我们的核心问题：在少量剩余物品的情形下，既然 EFX 的存在有保证，那么 EFX 分配能够实现怎样的福利？寻找福利最优 EFX 分配的计算复杂性又如何？

在大多数实际应用中，公平性固然重要，但并非唯一目标；决策者也可能选择最大化集体福利。为系统地研究效率，我们采用广义平均数（或p均值）福利这一统一框架，它涵盖了经典目标函数：功利主义福利（$p = 1$）、纳什福利（$p = 0$）和平等主义福利（$p \to -\infty$）。这些目标函数在不同程度上体现了对不平等的厌恶， p 值越小，对公平 [的重视程度越高（Eckart 等人， 2024]）。

然而，施加 EFX 等公平性约束会带来新的难题。例如，尽管已知在某些情形下，无嫉妒 1（EF1）且帕累托最优（PO）的分配确实存在（ [Barman 等人，2018；Caragiannis 等人，2019],[3] ），但 EFX 与福利优化的兼容性在很大程度上仍未得到探索。人们或许会认为，公平性与效率的结合存在固有的计算障碍；这促使我们深入研究 EFX 分配的福利保证，尤其是在能够保证 EFX 存在性的少量剩余物品情形下。

为了量化施加公平性所造成的福利损失，公平代价框架 [Bert- simas 等人，2011年b，Bei 等人，2021年，Caragiannis 等人，2012年，Kurz， 2014] 通过比较（全局）福利最大化分配的福利与满足公平性约束时可达到的最大福利，来衡量两者在最坏情况下的比率。以往研究在各种福利目标下考察了 EF1、无嫉妒和最大最小份额分配，例如功利主义福利 [Caragiannis 等人，2012年，Bei 等人，2021年，Kurz， 2014] 以及平等主义福利 [Celine 等人， 2023], 但对于少量剩余物品情形下的 EFX，目前尚无类似的定量结果。因此，理解该情形下的“EFX 价格”，是评估这一被认为是目前最强公平性保证与集体福利之间权衡的关键一步。

[2]最后一种情况推广了三个代理人 [Chaudhury 等人 2024] 的设定，其中实例 [Mahara 2023]中有两个互不相同的加性估值函数。[3]如果不存在另一种分配，使每个代理人获得的效用至少与当前分配一样多，且某个代理人获得的效用严格更多，则称该分配为 帕累托最优 。

1.1 我们的贡献

我们首次对少量剩余物品情形下福利/效率与 EFX 之间的兼容性开展计算分析 $m = n + c \geq 1$（其中 $c \leq 3$），[4] 在此情形下，EFX（事实上，EFX_0）保证存在；这使研究重点从存在性转向效率、计算和权衡。我们假设估值是可加的（这也是分析此类问题的大多数研究所采用的标准假设），并通过广义平均数（p-平均数）福利（对于 $p \leq 1$）分析效率。该福利指标涵盖了公平分配中常见的福利概念，例如功利主义、纳什福利和平等主义福利目标。

在第3节中，我们展示了一个清晰的复杂性二分，其转折点为 $p = 0$。对于任意固定的 $p \in (0, 1],)$，我们证明，判断 EFX 分配能否达到全局p-均值最优值，以及计算一个使 p-均值最大的 EFX 分配，都是 NP 困难。相比之下，对于任意固定的 $p \leq 0$，我们给出了多项式时间算法：通过枚举常数大小的非单件物品捆绑，并利用匹配形式补全分配，在 EFX 分配范围内优化 p-均值福利；我们还可以高效地判定 EFX 是否能达到全局最优值。

在第 4 节中，我们通过推导 *EFX* 价格的上界和下界，量化施加 EFX 所导致的福利损失，并将其表示为 p、n 和 c 的函数。对于 $p > 0$，我们证明，实施 EFX 所造成的福利损失可能与 n呈线性关系；而对于任意固定的 $p \leq 0$，损失有一个仅取决于 c 的常数上界（对于纳什福利，随着 n增长，该上界趋近于 1）。

在第5节中，我们探讨 EFX 与一种常见的经济效率概念——帕累托最优性（PO）——之间的兼容性。我们证明，判定是否存在同时满足 EFX 和 PO 的分配是 NP 困难的（而对于一种强化的 EFX 概念$_0$，问题则是 Σ_2^P-完全的）。

最后，在第6节中，我们提供两项互为补充的扩展，以应对若干关键的建模特征：(i) 假设代理人具有严格正边际效用，我们给出一种多项式时间算法，能够计算出一个 EFX 分配，使其在所有 EFX 分配中最大化 p-均值福利；(ii) 我们进一步扩展第3节中的一项结果，证明对于任意固定的 $p \leq 0$ 和任意常数 $c = m - n$，都存在一种关于 c的 XP 算法，该算法要么计算出一个使全局 p-均值福利最大化的 EFX 分配（其中 c可以是任意常数，不限于我们主要关注的 $c \leq 3$），要么正确地证明不存在这样的分配。

对于完整性我们的所有结果都同时考虑标准的 EFX 和强化的 EFX_0 概念 .

综合来看，我们的结果首次全面研究了在已知 EFX 存在的情形下福利与公平性权衡。结果表明，尽管已有存在性结果，但在将 EFX 作为公平性概念的情况下实现福利保证，仍然是一项需要细致权衡的挑战。

1.2 相关工作

我们将讨论在不可分物品的公平分配模型中使用或研究的若干核心概念的相关工作。

少量剩余物品。 我们的工作研究少量剩余物品情形，即物品数量仅略多于代理人数（即 $m = n + c$ 对于较小的常数 c）。其他公平性基准也研究过这种情形，例如最大最小份额（*MMS*）分配 [Kurokawa 等人，2016年；Bouveret 和 Lemaître，2016年；Feige 等人，2021年；Hsu， 2024]。对于 EFX 而言，这种情形尤其值得关注，因为当盈余较少时，可以证明一般单调估值下精确解的存在性：Amanatidis 等人保证了 $c \leq 2$ [， 2020] 并由 Mahara 将其扩展至 $c \leq 3$ [2024]。Neoh 和 Teh [2025] 进一步研究了这种情形下的结构性问题，包括统计 EFX 分配的数量，以及探索 EFX 的若干其他变体。我们的研究建立在

[4]严格地说 严格来说，少量剩余物品 可能会暗示 $c \geq 0$。然而，为了保证完备性，我们将分析扩展到 sis 所有 $m = n + c \geq 1$，其中 c 也可以为负数。

这一情形下 EFX 存在这一事实之上，并探讨当存在性不再是瓶颈时，还能获得哪些福利保证，以及会出现哪些计算现象。

p均值（广义均值）福利。广义均值福利目标统一了多个标准的效率目标（例如，在 $p = 1$ 时的功利主义福利、在 $p = 0$ 时的纳什福利，以及作为$p \to -\infty$的平等主义福利），即使没有 EFX/公平性约束，也已得到广泛的算法研究。对于一般估值（例如次可加估值），Barman 等人 [2020] 给出了 p-均值福利的近似保证，而 Barman 和 Sundaram [2021] 在相同估值下获得了更强的常数因子结果。Chaudhury 等人 [2021a] 随后在此基础上，提出了一种多项式时间算法，该算法输出满足 EFX 近似的分配，并实现了对纳什福利的近似（近似因子与代理人数线性相关）。对于相同的可加估值，Garg 等人 [2022]提供了一种多项式时间近似方案。对于拟阵秩估值等结构化估值，Viswanathan 和 Zick [2023] 给出了一种策略无关机制，在满足公平性要求的同时优化加权 p-均值；在相同设定下，Barman 和 Verma [2022] 将纳什福利最大化与（群体）策略无关性联系起来。Eckart 等人 [2024] 研究了物品与家务两种情形下的归一化 p-均值目标和公平性。

公平与效率的权衡及公平代价。大量文献通过公平代价框架 [Bertsimas 等人，2011年a, Caragiannis 等人，2012]量化公平性约束所导致的效率损失。对于不可分物品，Bei 等人 [2021] 详细分析了功利主义福利下的无嫉妒、EF1 和最大最小份额，而 Kurz [Kurz， 2014] 研究了小物品情形。其他研究考察了不同的目标函数（例如平等主义福利）以及其他放宽条件（包括混合 manna）[Celine 等人，2023年，Li 等人， 2024]。针对 EFX，Bu 等人 [2025]研究了公平分配中的福利最大化近似性，并在允许部分分配的情形下，推导出功利主义“EFX 价格”的紧确 $\Theta(n)$ 界。我们的工作与之互补：我们为少量剩余物品情形下的 EFX 提供明确的福利保证和更紧确的界；在这一情形中，保证存在完整的EFX 分配。我们还表明，在纳什福利（$p = 0$）附近，福利表现和计算复杂性都会发生显著的定性转变。

2 预备知识

设 $N = [n]$ 为代理人集合， $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ 为不可分物品集合，其中 $[k] := \{1, \ldots, k\}$ 对任意正整数 k均成立。物品束 指 G的一个子集。每个代理人 $i \in N$都有一个非负的估值函数 $v_i : 2^G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。我们还假设 v_i 是可加的，即对于任意 $S \subseteq G$， $v_i(S) = \sum_{g \in S} v_i(\{g\})$。为简化记号，有时我们对 $g \in G$用 $v_i(g)$ 代替 $v_i(\{g\})$。我们假设每件物品 $g \in G$ 对某个代理人具有非零价值；否则，每个代理人对它的价值均为 0，我们可以直接将其丢弃。为简化说明和记号，我们假设估值可以表示为有理数（不过需要指出的是，这并非必要，只需视需要乘以公分母即可）。

一个问题实例 $\mathcal{I} = (N, G, \mathbf{v})$由代理人、物品和估值函数的集合定义。一个分配 $\mathcal{A} = (A_1, \ldots\ldots, A_n)$是一个由 n 物品束组成的列表，且任意两个物品束互不重叠，其中代理人i 接收物品束 A_i；令 $\Pi_n(G)$表示所有可能的分配集合（在不引起歧义时，我们省略下标 n）。此外，令 $\Pi_{\text{EFX}}(G)$表示给定实例中满足 EFX 的分配集合。按照文献中的惯例，我们要求分配完整，即所有物品都必须被分配。一个分配规则 是一个将每个实例映射为一个分配的函数。

如引言中所述，无嫉妒分配可能不存在。我们的工作聚焦于一种广受欢迎的放宽概念 EFX，其定义如下。Caragiannis 等人提出的首个 EFX 概念仅排除价值非零的物品。 [2019],

定义 2.1 （EFX）。分配 $\mathcal{A}=(A_1,\ \ldots\ldots,\ A_n)$ 称为在移除任意一个赋予正价值的物品后无嫉妒（*EFX*），如果对于所有代理人 $i,\ j\in N$，要么 $A_j=\varnothing$，要么对于所有 $g\in A_j$，其中 $v_i(g)>0,\ v_i(A_i)\geq v_i(A_j\backslash\{g\})$。

我们还考虑一种更强的变体（由 Kyropoulou 等人 [2020]提出），它也允许丢弃零价值物品。

定义 2.2 (EFX$_0$)。若分配 $\mathcal{A}=(A_1,\ldots,A_n)$ 满足对任意物品都无嫉妒（*EFX*$_0$），则对于所有代理人 $i,j\in N$，要么 $A_j=\varnothing$，要么对于所有 $g\in A_j,\ v_i(A_i)\geq v_i(A_j\setminus\{g\})$。

我们研究 EFX 和更强的 EFX$_0$ 概念。为简化表述，除非另有说明，未加限定地提及 EFX 时，我们指适用于这两种概念的陈述。在我们的技术结果中，我们会明确指出所讨论的具体概念。这样便全面讨论了文献中研究的这两种概念。

我们定义 p-均值福利目标如下。

定义 2.3 (p-均值福利)。对于任意 $p\leq 1$，分配 $\mathcal{A}=(A_1,\ldots,A_n)$ 的 p-均值福利 定义为

$$W_p(\mathcal{A}):=W_p(v_1(A_1),\ldots,v_n(A_n))=\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in N}v_i(A_i)^p\right)^{1/p}.$$

当 $p=1$、$p=0$ 和 $p\to-\infty$ 时，p-平均福利分别对应于功利主义社会福利、纳什社会福利和平等主义福利。我们记 $W_p^*:=\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX}}(G)}W_p(\mathcal{A})$。当 $p\leq 0$ 时，我们采用标准约定：对于任意分配 $\mathcal{A}$，若对某个 $i\in N$ 有 $v_i(A_i)=0$，则 $W_p(\mathcal{A})=0$。

3 EFX + p-平均福利最大化

本节中，我们使用前文定义的广义平均数（或 p-平均数）目标函数 W_p，研究 EFX 与福利最大化之间的相互作用。该框架使我们能够研究福利度量中的不平等厌恶程度 如何影响 EFX 的兼容性。

我们可以提出两个互不相同的问题，它们会引出不同的现象和不同的算法障碍。第一个是兼容性问题：是否存在一种分配，能够同时满足 EFX，且在所有分配中全局达到 W_p-最优？如果答案为是，那么对于该目标函数，施加 EFX 不会造成福利损失。无论是否兼容，第二个问题都是约束优化问题：我们能否在所有 EFX 分配中找到一种 W_p-最优分配？只要能够保证 EFX 分配存在（尤其是在我们的少量剩余物品设定中），这个问题就有意义。接下来的两个小节将分别探讨这两个问题。

3.1 与全局 p-均值最优性的兼容性

我们首先研究以下兼容性问题：是否存在一种分配，能够同时满足 EFX，并在所有完全分配中全局最大化 p-均值福利？这是兼顾公平性与福利最严格的方式——若答案为肯定，则意味着施加 EFX 不会导致所选目标函数上的损失。

在没有公平性约束的情况下，计算（或近似计算） W_p-最优分配已得到广泛研究；然而，加入公平性约束可能从根本上改变计算复杂性格局。即使对于较弱的删除一个物品后无嫉妒（*EF1*）性质，判定一个效用主义福利最大化分配（即 W_1-最优分配）能否被选为满足 EF1 的分配也是 NP 困难[Aziz 等人， 2023]。我们证明，在少量剩余物品情形下，这种不可处理性对 EFX 仍然成立：对于每个固定的 $p\in(0,1]$ 以及任意常数盈余 $c\leq 3$，判定是否存在一个 EFX 分配，使其达到全局 p-均值最优值，是 NP 困难的。

相较之下，当 $p \leq 0$ 时，一个简单的结构性现象使我们在 $m \leq n$ 时能够实现可处理性。因此，我们的结果揭示了在 $p = 0$处存在定性分界。

我们首先给出关于 $p \in (0, 1]$ 的困难性结果。

定理 3.1。 固定任意 $p \in (0, 1]$ 和整数 $c \leq 3$。给定一个实例 $\mathcal{I} = (N, G, \mathbf{v})$，其中 $m = n + c \geq 1$，判断是否存在一个同时满足 EFX 且在所有分配中最大化 p-均值福利的分配是 *NP* 困难的。

接下来，我们展示 $p \leq 0$ 情况下的结果，这与上述结果形成了鲜明对比。

定理 3.2。 固定任意 $p \leq 0$。给定一个实例 $\mathcal{I} = (N, G, \mathbf{v})$，其中 $m \leq n$，总是存在一个同时满足 EFX_0（因此满足 EFX）且在所有分配中最大化 p-均值福利的分配，并且该分配可在多项式时间内计算。

上述结果的可处理性依赖于 $m \leq n$ 时出现的结构简化。如果全局 W_p-最优值为正，则每个代理人都必须获得正价值，这迫使分配中每个代理人至多获得一个物品（当 $m = n$ 时恰好每个代理人获得一个物品）。于是，EFX_0 显然成立：当被嫉妒的物品束是单元素集合时，移除其中唯一的物品后便得到空捆绑。

当 $m > n$ 后，这个论证便不再成立：至少一个物品束必须包含多个物品，因此 EFX 约束就变得实质性。更重要的是，即使 $p \leq 0$，全局 W_p 最优的分配也可能不满足 EFX，因此与全局 W_p 最优值的一致性可能根本无法实现。下一个例子表明，仅有一个剩余物品时，纳什福利（$p = 0$）就已经会出现这种情况。

例 3.3. 令 $N = \{1, 2, 3\}$ 和 $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$，并假设可加估值如下：

	g_1	g_2	g_3	g_4
v_1	5	1	0	0
v_2	0	0	0	5
v_3	2	$\frac{1}{10}$	1	0

考虑纳什福利目标（$p = 0$）。那么，唯一的纳什福利最大化分配为 $\mathcal{A}^* = (A_1^*, A_2^*, A_3^*) = (\{g_1, g_2\}, \{g_4\}, \{g_3\})$，但 $\mathcal{A}^*$ 不满足 EFX（因此也不满足 EFX_0）。因此，不存在同时满足 EFX 且实现全局纳什福利最大化的分配。

由于篇幅所限，完整解释见附录，此处仅介绍核心思路。代理人2只看重 g_4，因此任何纳什最优分配都必须将 g_4 分配给代理人2。为保证代理人1的效用为正，代理人1必须获得 g_1 或 g_2。如果代理人1没有获得 g_1，那么代理人1的效用至多为1，代理人3的效用至多为 $v_3(\{g_1, g_3\}) = 3$，因此纳什乘积至多为$1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$。分配 $(\{g_1, g_2\}, \{g_4\}, \{g_3\})$ 对应的效用为（6，5，1），纳什乘积为30，因此任何纳什最优分配都必须将 g_1 分配给代理人1；检查其余物品的分配方式后可知，$(\{g_1, g_2\}, \{g_4\}, \{g_3\})$ 是唯一的纳什福利最大化解。该分配违反了代理人3对代理人1的 EFX：从代理人1的物品中移除 g_2 后，剩下 $\{g_1\}$，代理人3对其的估值为2，高于代理人3对自身物品 $\{g_3\}$的估值1。因此，不存在同时满足 EFX 且实现全局纳什福利最大化的分配。

上述例子凸显了一种只有在存在盈余（$m = n + c$和 $c \geq 1$）时才会出现的新现象：即使在“厌恶不平等”的一侧（$p \leq 0$），全局 W_p-最优值也未必能由任何 EFX 分配实现，也就是说，定理 3.2 并不适用于 $m \leq n$ 设定之外的情形。尽管如此，当盈余较小（$c \in \{1, 2, 3\}$）时，这一点仍可通过算法验证：我们可以构造一个全局 W_p-最优的 EFX 分配，或者证明此类分配不存在。

定理 3.4。 对于每个固定的 $p \leq 0$ 和 $c \in \{1, 2, 3\}$，给定一个实例 $\mathcal{I} = (N, G, \mathbf{v})$，且满足 $m = n + c \geq 1$，存在一个多项式时间算法，它要么输出一个EFX_0（或EFX）分配，该分配同时使所有分配中的 p-均值福利最大化；要么证明不存在这样的分配。

3.2 EFX 分配中的优化

当 EFX 与全局 p-均值福利最大化不相容时，自然的替代方案是求解受约束的优化问题：在满足 EFX 的条件下最大化 p-均值福利。即使不存在同时满足 EFX 的全局 p-均值最优分配，这个问题仍然有意义，因为在我们考虑的剩余物品较少的情形下，保证存在 EFX 分配。这两个问题相关但并不相同：第 3.1 节询问能否在不牺牲 EFX 的前提下达到福利最优值；这里我们询问，在坚持满足 EFX 的前提下，能够实现怎样的福利。[5]

在这里，我们也在 $p = 0$ 处得到清晰的复杂性分界：对于 $p \leq 0$ 和 $c \in \{1, 2, 3\}$，我们可以在多项式时间内计算一个使 W_p 最大化的 EFX_0（因此也是 EFX）分配；而对于 $p \in$ $(0, 1]$, ，相应的优化问题是 NP 困难的，以下结果将对此加以证明。

定理 3.5。 固定任意 $p \leq 0$ 和 $c \in \{1, 2, 3\}$。给定一个实例 $\mathcal{I} = (N, G, \mathbf{v})$，其中 $m = n + c$，可以在多项式时间内计算出一个在所有 EFX_0（分别为 EFX）分配中，使 p-均值福利最大化的 EFX_0（或 EFX）分配。

定理 3.6。 固定任意 $p \in (0, 1]$ 和整数 $c \leq 3$。给定一个实例 $\mathcal{I} = (N, G, \mathbf{v})$，其中 $m = n + c \geq 1$，计算一个在所有 EFX（分别为 EFX_0）分配中，使 p-均值福利最大化的 EFX（或 EFX_0）分配是 *NP* 困难的。

上述结果表明，将 EFX 与精确的福利最大化相结合时，其计算难度和结构难度取决于福利目标：对于 $p > 0$，这种组合已经难以处理；而对于 $p \leq 0$，在稀疏实例中它变得可处理，并且在我们的情形下，当我们在 EFX 分配的空间内进行优化时，它仍然是可处理的。

4 EFX 价格

上一节刻画了 EFX 何时与 p-均值福利最大化相容，以及我们何时能够（或无法）在 EFX 分配的空间内高效地优化福利。然而，这些结果并未回答一个更基本的定量问题：当 EFX 迫使我们偏离 W_p-最优值时，我们要付出多大代价？这在少量剩余物品情形中尤为重要，因为此时存在性已不再是瓶颈：对于 $m \leq n + 3$，EFX（以及 EFX_0）分配都保证存在，因此福利损失完全取决于公平性约束的强度，而非不存在性。

为形式化这种权衡，我们采用公平代价框架。该框架在公平分配领域已得到广泛研究 [Bei 等人，2021年，Bertsimas 等人，2011b，Caragiannis 等人，2012年，Celine 等人，2023年，Li 等人，2024], 并研究*EFX* 价格（分别为*EFX* 价格$_0$），即全局 W_p-最优值与 EFX（分别为 EFX_0）分配所能达到的最佳 p-均值福利之间的最坏情况乘法间隙。这一概念是第 3.1 节中兼容性问题的一种自然的定量补充：当且仅当某个实例中 EFX 分配能够达到全局 W_p-最优值时，价格才为 1；而为满足 EFX 所必须牺牲的福利越多，价格就越高。重要的是，由于 EFX_0 的要求比 EFX 更强，其可行集更小；相应地，其价格只会更高，因此我们对这两种概念都给出了界。

我们的界限揭示了在 $p = 0$ 处存在一个突变，即能够容忍零效用的目标函数（$p > 0$）与不能容忍零效用的目标函数（$p \leq 0$）之间的分界。对于 $p > 0$，全局 W_p 最优值可能会将价值集中在少数代理人身上；即使只有 $c \leq 3$ 件剩余物品，EFX 也可能迫使价值显著“去集中化”。相比之下，对于 $p \leq 0$，任何存在零效用代理人的分配，其 p 均值福利都为 0，因此，要实现正福利，就必须让每位代理人都获得严格为正的价值；在此情形下，

[5]这一差异正是推动我们随后得到的 EFX 价格界的关键：分子是全局福利最优值，分母是在 EFX 下可实现的最佳福利。

我们证明，满足 EFX 只会造成取决于剩余 c 的常数倍损失（而对于纳什福利，这种损失会随着 n 消失）。

现在，我们将这些保证形式化。

定义 4.1。固定一个 $p \le 1$ 和一个整数 $c \le 3$，其中 $m = n + c \ge 0$。对于实例 $\mathcal{I} = (N, G, \mathbf{v})$，EFX（分别为 EFX_0）的价格，是该实例 $\mathcal{I}$ 的任意分配的最大 p-均值福利（即，在 $\Pi(G)$ 中）与该实例 $\mathcal{I}$ 的 EFX 分配的最大 p-均值福利（即，在 $\Pi_{\text{EFX}}(G)$ 中）之比：

$$\text{PoEFX}^{\mathcal{I}}(p,c) := \frac{\max_{\mathcal{A}\in\Pi(G)} W_p(\mathcal{A})}{\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\text{EFX}}(G)} W_p(\mathcal{A})}, \quad \text{PoEFX}_0^{\mathcal{I}}(p,c) := \frac{\max_{\mathcal{A}\in\Pi(G)} W_p(\mathcal{A})}{\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A})},$$

若分子和分母均为 0，则该比值定义为 0。EFX（分别为 EFX_0）的（总体）价格通过对所有实例 $\mathcal{I}$ 取上确界得到：

$$\text{PoEFX}(p,c) := \sup_{\mathcal{I}} \text{PoEFX}^{\mathcal{I}}(p,c), \quad \text{PoEFX}_0(p,c) := \sup_{\mathcal{I}} \text{PoEFX}_0^{\mathcal{I}}(p,c).$$

自然地，只有在已知存在 EFX_0（分别为 EFX）分配的情况下，研究上述量才有意义；否则，$\Pi_{\text{EFX}_0}(G)$（分别为 $\Pi_{\text{EFX}}(G)$）非空与否并不明确。对于少量剩余物品的情形，我们知道当 $m \le n + 3$ 时，保证存在 EFX_0（因此也存在 EFX）分配，故我们将研究范围限定在这些情形。

请注意，价格取决于三个参数：代理人数 n、盈余 c 和参数 p。定理 4.2 和 4.3 表明，对于 $p \in (0,1]$，价格可能随代理人数增加而上升（当常数 c 时，已经达到 $\Omega(n)$）；而定理 4.4 和 4.5 表明，对于 $p \le 0$，价格有统一上界 $1 + c$（纳什福利的上界则为 $1 + c/n$）。综合来看，这些结果刻画了 EFX 何时“代价高昂”（福利可能差出多项式倍），以及何时“基本免费”（福利损失至多为常数，甚至渐近可忽略不计）。

我们首先考虑 $p > 0$ 的情况，并给出以下下界。

定理 4.2。对于任意固定的 $p \in (0,1]$，以及任意满足 $m = n + c \ge 1$ 的整数 $c \le 3$，

$$\text{PoEFX}_0(p,c) \ge \text{PoEFX}(p,c) \ge \frac{n+c}{\lfloor (2n+c-1)/n \rfloor} - o(1).$$

直观地说，上述下界源于一个高度不对称的实例：其中一名代理人对每件物品的估值都远高于其他所有代理人。对于 $p > 0$ 而言，福利目标函数可以通过将所有物品集中分配给该代理人而获益，因为让其他代理人的效用处于（或接近）零可能是最优的。然而，EFX 起到了强有力的“反囤积”约束作用：如果一名代理人积累了许多其他代理人哪怕只略有估值的物品，那么从该物品束中移除任意一件物品后，剩余部分看起来仍可能过于有吸引力，从而引发嫉妒。在所构造的这族实例中，这迫使高价值代理人的物品束大小受 (n, c) 的某个函数所界定（当 c 为常数时，大致也是一个常数），进而使全局 W_p-最优值与最佳 EFX 分配之间产生线性的福利差距。

接下来，我们将针对相同的设置给出上界。

定理 4.3。对于任意 $p \in (0,1]$ 以及任意整数 $c \le 3$ 满足 $m = n + c \ge 1$，

$$\text{PoEFX}(p,c) \le \text{PoEFX}_0(p,c) \le (n+c) \cdot n^{1/p-1}.$$

该上界与我们的下界相辅相成，表明即使 EFX 的代价很高，仍总能在 EFX_0（因而也在 EFX）下保证一个非平凡的基准福利。这为我们提供了一个用（n、c、p）表示的一般最坏情况界，也解释了为什么即使盈余为常数，价格仍可随 n 增长：分子可以随着物品/代理人的总数增长，而分母只需凭单个高价值物品即可得到认证。

接下来，我们考虑 $p \le 0$ 的情形。我们的下界如下。

定理 4.4. 对于任意 $p \le 0$，以及满足 $m = n + c \ge 1$ 的任意整数 $c \le 3$，若 $c < 0$（即 $m < n$），则

$$\mathrm{PoEFX}(p, c) = \mathrm{PoEFX}_0(p, c) = 0;$$

而如果 $c \in \{0, 1, 2, 3\}$，则

$$\mathrm{PoEFX}_0(p, c) \ge \mathrm{PoEFX}(p, c) \ge \frac{1}{\max_{\gamma \in \{1,2\}} \left(\frac{\gamma}{c+1} \cdot \left(1 + \frac{c+1-\gamma}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{1/n}}.$$

直观地说，对于 $p \le 0$，任何能够实现正福利的分配都必须使每个代理人获得严格为正的价值，从而排除了导致 $p > 0$下界的那种极端集中现象。在少量剩余物品情形下，这已经对福利最大化分配施加了强结构约束：除每个代理人一件物品外，只有c 件“额外”物品，因此，即使全局 W_p-最优值也不能将过多物品分配给某个代理人，否则会使其他代理人“挨饿”，并使福利降为 0。

最后，对于 $p \le 0$ 的情形，我们还给出以下上界。

Theorem 4.5. 对于任意 $p \le 0$ 任意满足 $m = n + c \ge 1$ 的整数 $c \le 3$，若 $c < 0$（即 $m < n$），则 n

$$\mathrm{PoEFX}(p, c) = \mathrm{PoEFX}_0(p, c) = 0;$$

而如果 $c \in \{0, 1, 2, 3\}$，则

$$\mathrm{PoEFX}(p, c) \le \mathrm{PoEFX}_0(p, c) \le 1 + c.$$

此外，当 $p = 0$ 和 $c \in \{0, 1, 2, 3\}$时，则

$$\mathrm{PoEFX}(0, c) \le \mathrm{PoEFX}_0(0, c) \le 1 + \frac{c}{n}.$$

上述上界表明，这种内在的平衡使得 EFX 的代价相对较低：从一个全局 W_p最优解出发，可以为每个代理人保留一个价值最高的物品，然后在保持 EFX_0（因而也保持 EFX）的同时分配剩余的 c 物品，在 p-平均数福利方面的损失至多为 $1 + c$ 倍。对于纳什福利（$p = 0$），该界可加强为 $1 + c/n$，这反映出一种更加紧密的契合：当盈余仅为常数时，几何平均数本身就会强烈抑制不平等的分配，因此随着 n增大，实施 EFX 仅会使最优值发生极小变化。总体而言，$p \le 0$ 情形体现了这样一种情况：强公平性与厌恶不平等的效率目标天然兼容，损失很小（且通常会趋于消失）。

5 EFX +帕累托最优性

第 3 节和第 4 节通过广义平均数（或 p-平均数）福利研究了 EFX 下的定量效率：我们考察了 EFX 何时与福利最大化相容，以及当二者不相容时，最坏情况下的福利差距可能有多大。尽管这一视角对于理解公平与效率的权衡至关重要，也是本文的主要关注点，但我们还希望简要考虑公平分配（以及更广泛的经济学）中的一个更基本且标准的要求：避免产生明显浪费的结果。具体而言，即使某项分配实现了合理的福利保证，它仍可能是帕累托劣势（即，可能存在另一项分配，使每个代理人的境况都不变差，并使至少一名代理人的境况严格变好）。排除这类劣势结果，可以说是一种较弱但有意义的经济效率概念，在公平分配研究中也十分常见。

这引出了下面的问题，该问题在逻辑上与上述福利问题正交：鉴于在少量剩余物品情形下，*EFX* 分配保证存在，我们是否也可以坚持要求所选的 *EFX* 分配是帕累托最优的？需要特别指出的是，这是一个定性兼容性问题：不同于前面的章节，我们并未固定某个特定的福利目标。这一点在概念上和实践上都很有用：帕累托最优不依赖目标函数，并且体现了“不浪费”任何价值这一最低要求。其定义如下。

定义 5.1（帕累托最优）。如果不存在另一个分配 $\mathcal{A}' = (A'_1, \ldots\ldots, A'_n)$，使得对于所有 $i \in N$ 都有 $v_i(A'_i) \geq v_i(A_i)$，并且对于某个 $i \in N$ 有 $v_i(A'_i) > v_i(A_i)$，则分配 $\mathcal{A} = (A_1, \ldots\ldots, A_n)$ 是帕累托最优（*PO*）的。

公平分配中的一个核心议题是，公平性和效率能否同时实现。即便是较弱的 EF1 概念，同时实现 EF1 和 PO 在算法层面也颇为棘手；对于一般的可加估值，目前尚无多项式时间算法（在二元估值等受限领域除外 [Halpern 等人， 2020]），而 EF + PO 的判定问题已经是 Σ_2^P-完全的 [de Keijzer 等人， 2009]。人们或许会希望，从 EF 转向较弱的 EFX 条件能让情况变得更简单，尤其是在少量剩余物品情形下，因为此时 EFX 的存在性有保证。

我们的下一个结果表明，这种希望并无根据：在我们的情形中，存在性问题仍然是 NP 困难；事实上，更强的 EFX_0 变体会将问题推至多项式层次的第二层。

定理5.2. 固定任意整数 $c \leq 3$。给定一个实例 $\mathcal{I} = (N, G, \mathbf{v})$ 且满足 $m = n+c \geq 1$，确定是否存在：*(i)* 同时满足 EFX 和 PO 的分配是 *NP* 困难的；*(ii)* 同时满足 EFX_0 和 PO的分配是 Σ_2^P-完全的。

上述结果为第 3 节和第 4 节提供了有力的补充。在我们的情形中，EFX 的存在性并不是瓶颈；然而，将 EFX 进一步细化为同时满足哪怕是最弱的全局效率概念，也会变得计算上不可行。EFX Σ_2^P的 $_0$ -完备性尤其引人注目：EFX_0与 EFX 的区别仅在于，在证明无嫉妒时是否允许移除零价值物品，但这一微小的建模选择却使问题的复杂性超出了 NP。从建模角度看，这表明零边际价值可能从根本上改变公平性与效率组合的算法格局。从计算角度看， Σ_2^P-困难性排除了（在标准假设下）通用的多项式时间方法，尤其意味着该问题不太可能存在多项式规模的整数线性规划编码。

6 其他情形

我们的分析聚焦于少量剩余物品情形 $m = n + c \geq 1$，其中 $c \leq 3$，并且可以保证 EFX（事实上是 EFX_0）分配的存在性；此时瓶颈从存在性转向福利权衡与计算障碍。第 3 节至第 5 节的结果还凸显了两个关键的建模特征：剩余物品会使 EFX 约束真正发挥作用，而零边际价值则可能从定性上改变可行性与复杂性。

本节给出两个相辅相成的扩展，以进一步分离这些影响。在第 6.1 节中，我们假设非零边际效用 （NMU），在此条件下，EFX 与 EFX_0 等价；这一额外结构使我们能够在 EFX 分配的范围内，为福利优化提供比一般情形更强的算法保证。在第 6.2 节中，我们回到第 3.1 节提出的兼容性问题：能否在满足 EFX 的条件下达到全局 W_p 最优值？不过，此处我们从参数化的角度来探讨：将盈余 $c = m - n$ 作为参数，并证明对于每个固定的 $p \leq 0$，兼容性判定都能在 $(n + m)^{\mathcal{O}(c)}$ 时间内完成。

这些结果共同帮助我们厘清，哪些现象是 EFX 本身固有的，哪些则源于稀疏性（$m \leq n$）或零价值物品；此外，它们还进一步明确了在少量剩余物品情形下，公平性与福利之间哪些组合易于处理、哪些难以处理。

6.1 非零边际效用

在一般情况下（事实上，也包括我们的设定中），证明 EFX 的存在性及其与福利／效率性质的兼容性时，一个常见的技术障碍是存在零边际效用

价值（即代理人对获得这些物品无差别）。遵循 Plaut 和 Roughgarden [2020], 的说法，我们称估值 v_i : $2^G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 具有非零边际效用（*NMU*），如果对于每个物品束 $S \subseteq G$ 和每件物品 $g \in G \setminus S$， $v_i($ $S \cup \{g\}) - v_i(S) > 0$。特别地，对于可加估值，这等价于对所有代理人 i 和物品 g， $v_i(g) > 0$ 。还要注意，在 NMU 条件下，每件物品对每位代理人都赋予正价值，因此 EFX 和 EFX_0 相同。

接下来，我们证明，在我们的设定中，对于任意 $p \leq 1$ ，都可以计算出一个 EFX（等价地，EFX_0）分配，使其 p-均值福利最大化，具体结果如下。

定理 6.1. 固定任意 $p \leq 1$ 和整数 $c \leq 3$。给定一个满足 *NMU* 且具有 $m = n + c \geq 1$ 的实例 $\mathcal{I} = (N, G,$ $\mathbf{v})$，总是存在一种分配，同时满足 *EFX*（等价地，$\textit{EFX}_0$），并且在所有 *EFX*（等价地，$\textit{EFX}_0$）分配中使 p- 均值福利最大化；该分配可在多项式时间内计算。

6.2 固定 c 时的 EFX +Global p-均值最优性

第 3.1 节解决了我们主要设定中的兼容性问题，其中 $c \in \{1, 2, 3\}$：对于每个固定的 $p \leq 0$, 定理 3.4 给出一个多项式时间算法，该算法要么找到一个达到全局 p-均值最优值的 EFX 分配，要么证明不存在这样的分配。现在，我们将这一思路参数化推广到任意（固定的）盈余 c。

这一参数化扩展的意义主要在于概念层面（并非意在取代定理 3.4）：它揭示了定理 3.4 背后的根本原因，即盈余较少为何能实现对 $p \leq 0$ 侧的算法验证，并表明类似方法可以随盈余参数扩展。这一视角使我们能够即使在 $c \leq 3$ 设置之外（此时 EFX 的存在性并无保证）也验证兼容性，同时让论文的主线仍聚焦于已知存在性且福利权衡具有意义的设置。

我们证明，对于任意固定的 $p \leq 0$，该判定问题关于 c 属于 XP，具体结果如下。

定理 6.2。 固定任意 $p \leq 0$。对于每个整数 c，存在一个运行时间为 $(n + m)^{\mathcal{O}(c)}$的算法：给定一个实例 $\mathcal{I} = (N, G, \mathbf{v})$，满足 $m = n + c \geq 1$ 和 $\max_{\mathcal{A} \in \Pi(G)} W_p(\mathcal{A}) > 0$，该算法要么输出一个 *EFX*（或 $\textit{EFX}_0$）分配，并且该分配在所有分配中最大化 p-均值；要么证明不存在这样的分配。

我们注意到，类似的结果并不适用于 $p \in (0, 1]$。对于每个固定的 $p \in (0, 1],$，兼容性问题在 $c = 0$ 的情况下就已经是 NP 困难的（见定理 3.1）。因此，除非 P = NP，否则不存在仅以 c 为参数、适用于这一范围内 p 的 XP 算法（因而也不存在 FPT 算法）。

7 结论

本文研究了在少量剩余物品且保证 EFX 存在的情形下，EFX 与广义均值目标之间的兼容性。我们的复杂度刻画揭示了在 $p = 0$ 处发生的突变，并确立了问题在 $p \leq 0$ 和 $p \in (0, 1]$ 情形下的二分性，兼及兼容性问题和优化变体。我们还运用“EFX 价格”框架量化了施加 EFX 所导致的效率损失，并给出了上下界。最后，我们证明，即使加入最弱的、无目标函数的效率要求（帕累托最优性），问题也会变得难以处理；而非零边际效用等额外结构则能恢复其可处理性。

总的来说，我们的结果界定了 EFX 在何时计算代价高昂、何时又与福利目标基本一致，并由此推动了超越 $c \leq 3$的近似方法和参数化方法。

参考文献

Georgios Amanatidis、Evangelos Markakis 和 Apostolos Ntokos。一石多鸟：通过嫉妒环消除将 EFX 和 GMMS 的保证提升至 1/2 以上。理论计算机科学，841：94–109，2020年。Georgios Amanatidis、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas、Alexandros Hollender 和 Alexandros A. Voudouris。最大纳什福利及关于 EFX 的其他探讨。理论计算机科学，863：69–85，2021年。Georgios Amanatidis、Haris Aziz、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas、Bo Li、Hervé Moulin、Alexandros A. Voudouris 和 Xiaowei Wu。不可分物品的公平分配：近期进展与待解问题。人工智能，322：103965，2023年。Haris Aziz、Xin Huang、Nicholas Mattei 和 Erel Segal-Halevi。计算福利最大化的不可分物品公平分配。《欧洲运筹学杂志》，307(2)：773–784，2023年。ISSN 0377-2217。Siddharth Barman 和 Ranjani G Sundaram。相同次可加估值下的一致福利保证。载于第*29*届国际人工智能联合会议（*IJCAI*）论文集，第46–52页，2021年。Siddharth Barman 和 Paritosh Verma。拟阵秩估值下真实且公平的机制。载于第*36*届*AAAI*人工智能会议（*AAAI*）论文集，第4801–4808页，2022年。Siddharth Barman、Sanath Kumar Krishnamurthy 和 Rohit Vaish。寻找公平且高效的分配。载于第*19*届*ACM*经济学与计算会议（*EC*）论文集，第557–574页，2018年。Siddharth Barman、Umang Bhaskar、Anand Krishna 和 Ranjani G Sundaram。次可加估值下 p 均值福利的紧致近似算法。载于第*28*届欧洲算法年会（*ESA*）论文集，第11页，2020年。Xiaohui Bei、Xinhang Lu、Pasin Manurangsi 和 Warut Suksompong。不可分物品的公平代价。《计算系统理论》，65：1069–1093，2021年。Dimitris Bertsimas、Vivek F. Farias 和 Nikolaos Trichakis。公平代价。《运筹学》，59(1)：17–31，2011a。Dimitris Bertsimas、Vivek F. Farias 和 Nikolaos Trichakis。公平代价。《运筹学》，59(1)：17–31，2011b。Sylvain Bouveret 和 Michel Lemaître。运用一系列标准刻画不可分物品公平分配中的冲突。《自主智能体与多智能体系统》，30(2)：259–290，2016年。Steven J. Brams 和 Alan D. Taylor。《公平分割：从切蛋糕到争端解决》。剑桥大学出版社，1996年。Xiaolin Bu、Jiaxin Song 和 Ziqi Yu。二元估值下 EFX 分配的存在性。载于国际算法前沿研讨会，第252–262页。Springer，2023年。Xiaolin Bu、Zihao Li、Shengxin Liu、Jiaxin Song 和 Biaoshuai Tao。公平分配范围内福利最大化的可近似性图景。载于第*26*届*ACM*经济学与计算会议（*EC*）论文集，第412–440页，2025年。

Eric Budish。《组合分配问题：基于平等收入的近似竞争均衡》。《政治经济学杂志》，119(6):1061–1103，2011年。Eric Budish 和 Estelle Cantillon。《多单位分配问题：理论及哈佛大学课程分配的实证研究》。《美国经济评论》，102(5):2237–2271，2012年。Ioannis Caragiannis、Christos Kaklamanis、Panagiotis Kanellopoulos 和 Maria Kyropoulou。《公平分配的效率》。《计算系统理论》，50:589–610，2012年。Ioannis Caragiannis、David Kurokawa、Hervé Moulin、Ariel D Procaccia、Nisarg Shah 和 Junxing Wang。《最大纳什福利的不合理公平性》。《ACM经济学与计算汇刊》，7(3):1–32，2019年。Karen Frilya Celine、Muhammad Ayaz Dzulfikar 和 Ivan Adrian Koswara。《不可分物品的平等主义公平价格》。载于《太平洋人工智能国际会议（PRICAI）第20届会议论文集》，第23–28页，2023年。Bhaskar Ray Chaudhury、Jugal Garg 和 Ruta Mehta。《次可加估值下的公平高效分配》。载于《第35届AAAI人工智能会议论文集》，第5269–5276页，2021a年。Bhaskar Ray Chaudhury、Telikepalli Kavitha、Kurt Mehlhorn 和 Alkmini Sgouritsa。《少许慈善即可保证近乎无嫉妒》。《SIAM计算杂志》，50(4):1336–1358，2021b年。Bhaskar Ray Chaudhury、Jugal Garg 和 Kurt Mehlhorn。《三个代理人时存在 EFX》。《Journal of the ACM》，71(1):1–27，2024年。Bart de Keijzer、Sylvain Bouveret、Tomas Klos 和 Yingqian Zhang。《可加偏好下不可分物品公平分配中效率与无嫉妒的复杂性》。载于《第1届算法决策理论国际会议（ADT）论文集》，第98–110页，2009年。Owen Eckart、Alexandros Psomas 和 Paritosh Verma。《用于分配物品与任务的归一化p均值公平性》。载于《第25届ACM经济学与计算会议（EC）论文集》，第1267页，2024年。Uriel Feige、Ariel Sapir 和 Laliv Tauber。《最大最小份额公平分配的一个紧致反例》。载于《网络与互联网经济学国际会议》，第355–372页。Springer，2021年。Jugal Garg 和 Aniket Murhekar。《仅有少数效用值时计算公平且高效的分配》。《理论计算机科学》，962:113932，2023年。Jugal Garg、Edin Husic 和 Aniket Murhekar。《最大纳什福利问题的可处理片段》。载于《第18届网络与互联网经济学国际会议（WINE）论文集》，第362页，2022年。Daniel Halpern、Ariel D. Procaccia、Alexandros Psomas 和 Nisarg Shah。《二元估值下的公平分配：一条规则统领一切》。载于《第16届网络与互联网经济学国际会议（WINE）论文集》，第370–383页，2020年。Kevin Hsu。《混合 manna 下最大最小份额分配的存在性》。《arXiv预印本 arXiv:2401.07490》，2024年。David Kurokawa、Ariel Procaccia 和 Junxing Wang。《何时能够保证极小极大份额保证？》载于《第30届AAAI人工智能会议论文集》，第523–529页，2016年。

Sascha Kurz。《少量不可分物品的公平代价》。《运筹学会议论文集》，第335–340页，2014年。Maria Kyropoulou、Warut Suksompong 和 Alexandros A. Voudouris。《群体资源分配中的近乎无嫉妒》。《理论计算机科学》，841:110–123，2020年。Zihao Li、Shengxin Liu、Xinhang Lu、Biaoshuai Tao 和 Yichen Tao。《无嫉妒性代价的完整图景》。载于《第23届国际自主智能体与多智能体系统会议（AAMAS）论文集》，第1183–1191页，2024年。Richard J Lipton、Evangelos Markakis、Elchanan Mossel 和 Amin Saberi。《不可分物品的近似公平分配》。载于《第5届ACM电子商务会议（EC）论文集》，第125–131页，2004年。Ryoga Mahara。《两个可加估值下 EFX 的存在性》。《离散应用数学》，340:115–122，2023年。Ryoga Mahara。《将可加估值扩展至一般估值：关于 EFX 的存在性》。《Mathematics of Operations Research》，49(2):1263–1277，2024年。Hervé Moulin。《互联网时代的公平分配》。《Mathematical Social Sciences》，11:407–441，2019年。Tzeh Yuan Neoh 和 Nicholas Teh。《理解 EFX 分配：计数与变体》。载于《第39届AAAI人工智能会议论文集》，第14036–14044页，2025年。Benjamin Plaut 和 Tim Roughgarden。《一般估值下的近乎无嫉妒》。《SIAM离散数学杂志》，34(2):1039–1068，2020年。Vishwa HV Prakash、Pratik Ghosal、Prajakta Nimbhorkar 和 Nithin Varma。《三类代理人时存在 EFX》。《arXiv预印本 arXiv:2410.13580》，2024年。John Winsor Pratt 和 Richard Jay Zeckhauser。《温莎家族银器的公平高效分配》。《管理科学》，36(11):1293–1301，1990年。Ariel Procaccia。《技术视角：回答公平分配最令人费解的问题》。《ACM通讯》，63(4):118，2020年。Vignesh Viswanathan 和 Yair Zick。《拟阵秩估值下公平分配的通用框架》。载于《第24届ACM经济学与计算会议（EC）论文集》，第1129–1152页，2023年。

附录

A 第3节中略去的证明

A.1 定理 3.1 的证明

固定 $p \in (0,1]$。由于 $x \mapsto x^{1/p}$ 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上严格递增，最大化

$$W_p(A) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i\in N} v_i(A_i)^p\Big)^{1/p}$$

等价于最大化

$$\Phi_p(A) := \sum_{i\in N} v_i(A_i)^p.$$

我们根据 c 的取值，将分析分为两种情况。

情况 1： $c \in \{0,1,2,3\}$。我们从 NP 困难的 PARTITION问题进行归约。设 $\{a_1,\dots,a_k\}$ 是一个总和为 T 的 PARTITION 实例：$= \sum_{j=1}^{k} a_j$；假设 T为偶数（否则将所有 a_j 乘以 2）。

令 $n := k+3$，并定义物品集

$$G = \{g_1,\dots,g_k\} \cup \{x,y\} \cup \{z_0,z_1,\dots,z_c\},$$

因此 $m = k+2+(c+1) = k+3+c = n+c$。

选择一个整数常数 $\Lambda \geq 2$（仅取决于固定的 p），使得

$$(\Lambda T)^p - (\Lambda T/2)^p > (T/2)^p, \tag{1}$$

等价地，$\Lambda^p(2^p-1) > 1$。

定义如下的可加估值（所有未指定的值均为 0）：

- For each $j \in [k]$, $v_1(g_j) = v_2(g_j) = a_j$, and $v_i(g_j) = 0$ for all $i \notin \{1,2\}$.
- $v_1(x) = v_1(y) = v_2(x) = v_2(y) = T/2$, and $v_3(x) = v_3(y) = \Lambda T/2$.
- For each $t \in \{0,1,\dots,c\}$, $v_4(z_t) = \Lambda T$ and $v_i(z_t) = 0$ for all $i \neq 4$.
- Agents $5,6,\dots,k+3$ value every good at 0.

断言 1。 设 $\mathcal{A}$ 最大化所有分配中的 Φ_p。则：***(i)*** z_0，*.....*，$z_c \in A_4$；***(ii)*** x，$y \in A_3$；***(iii)*** 每个 g_j 都分配给代理人 1 或 2。

证明。(i) 和 (iii) 显然成立，因为如果物品 g 分配给满足 $v_\ell(g) = 0$ 的代理人 ℓ，且存在满足 $v_i(g) > 0$ 的代理人 i，那么对任意 $p > 0$，将 g 从代理人 ℓ 重新分配给代理人 i，都会严格增加 Φ_p。

因此，我们着重证明 (ii)，即 $x \in A_3$（关于 y 的论证相同）。假设 $x \notin A_3$，并令 $\ell \neq 3$ 满足 $x \in A_\ell$。设 $\mathcal{A}'$ 为从 $\mathcal{A}$ 得到的分配，即将 x 从代理人 ℓ 的物品束移动到代理人 3 处，那么

$$\Phi_p(\mathcal{A}') - \Phi_p(\mathcal{A}) = (v_3(A_3)+v_3(x))^p - v_3(A_3)^p + (v_\ell(A_\ell)-v_\ell(x))^p - v_\ell(A_\ell)^p.$$

此处 $v_3(x) = \Lambda T/2$并且，由于代理人3只对 $\{x,y\}$和 $x \notin A_3$有估值，因此我们有 $v_3(A_3) \leq \Lambda T/2$。对于$0 < p \leq 1$，$t \mapsto t^p$ 是凹函数，因此增量 $h(t) := (t+\delta)^p - t^p$ 对于每个$\delta > 0$关于 t 均为非增的；因此

$$(v_3(A_3)+\Lambda T/2)^p - v_3(A_3)^p \;\geq\; (\Lambda T)^p - (\Lambda T/2)^p.$$

此外，对于 $0 < p \le 1$，次可加性 $(a+b)^p \le a^p + b^p$ 蕴含 $(v_\ell(A_\ell) - v)^p - v_\ell(A_\ell)^p \ge -v^p$ 对于$v = v_\ell(x)$（因为 $v_\ell(A_\ell) \ge v$）。由于 $v_\ell(x) \in \{0, T/2\}$，

$$(v_\ell(A_\ell) - v_\ell(x))^p - v_\ell(A_\ell)^p \ \ge \ -(T/2)^p.$$

结合，

$$\Phi_p(A') - \Phi_p(A) \ \ge \ (\Lambda T)^p - (\Lambda T/2)^p - (T/2)^p \ > \ 0$$

由 (1) 可知，这与最优性矛盾。因此 $x \in A_3$，同理 $y \in A_3$。 □

现在考虑任意满足断言 1 的分配。令

$$U_1 := \sum_{j : g_j \in A_1} a_j, \qquad U_2 := \sum_{j : g_j \in A_2} a_j,$$

因此 $U_1 + U_2 = T$。那么代理人3的效用为 ΛT（来自 $\{x, y\}$），代理人4的效用为 $(c+1)\Lambda T$（来自$\{z_0, \dots, z_c\}$），而所有其他代理人对 Φ_p 的贡献均为 0。因此，

$$\Phi_p(A) = U_1^p + U_2^p + (\Lambda T)^p + \big((c+1)\Lambda T\big)^p,$$

因此，最大化 Φ_p 等价于在 $U_1 + U_2 = T$ 条件下最大化 $U_1^p + U_2^p$。若 $p \in (0,1)$，则由 t^p 的严格凹性可知，唯一的最大化解为 $U_1 = U_2 = T/2$；若 $p = 1$，则任意拆分都是 Φ_1 最大化的。

若 PARTITION 实例是是实例，则选取 $S \subseteq [k]$，使得 $\sum_{j \in S} a_j = T/2$，并按如下方式分配$\{g_j :$ 将 $j \in S\}$ 分配给代理人1，将 $\{g_j$ 分配给代理人2，将 $\{x, y\}$ 分配给代理人3，并将 $\{z_0, \dots, z_c\}$ 分配给代理人4。根据上述讨论，此分配是 Φ_p 最大化的，而且满足 EFX：代理人 ≥ 5 对所有物品的估值均为 0；其他人对代理人 4 的物品的估值为 0；代理人 3 只看重 $\{x, y\}$，并且持有这两件物品；代理人 1,2 的估值均为 $T/2$，且从代理人3的物品束中移除 x 或 y 后，对剩余物品的估值恰好为$T/2$；代理人1和2之间的 EFX 关系也成立，因为移除任意一件划分中的物品，都会使另一人的估值至少降低 0。

反过来，假设存在一种分配，同时满足 EFX 且使 Φ_p 最大化。根据断言 1，$A_3 = \{x, y\}$ 和所有 g_j 都在代理人1和代理人2之间分配，因此 $U_1 + U_2 = T$。对于代理人1而言，在移除 x 后，代理人3的分配满足 EFX，故有

$$U_1 = v_1(A_1) \ge v_1(A_3 \setminus \{x\}) = v_1(\{y\}) = T/2,$$

类似地，$U_2 \ge T/2$。因此 $U_1 = U_2 = T/2$，由此得到一个完美划分。因此，构造的实例是是实例，当且仅当 PARTITION 实例是是实例，这证明了对于每个 $c \in \{0, 1, 2, 3\}$，该问题都是 NP 困难的。

情形 2： $c < 0$。令 $d := -c \in \mathbb{N}$。我们从 $c = 0$ 情形进行归约（根据情形 1，该情形已是 NP 困难的）。给定任意实例 $\mathcal{I}_0 = (N_0, G, \mathbf{v})$，其中 $|G| = |N_0|$，通过添加 d 个估值恒为零的虚拟代理人D 并保持物品不变，构造实例 $\mathcal{I} = (N, G, \mathbf{v}')$：$N := N_0 \cup D, G := G, v_i' := v_i$对于 $i \in N_0$，且对于所有 $d \in D$，$v_d'(\cdot) \equiv 0$。于是 $|G| = |N_0| = |N| + c$。

由于每件物品对某个原始代理人都有正价值（这是全文始终采用的假设），所以在 $\mathcal{I}$ 中，任何 Φ_p最大化分配都不会将物品分给虚拟代理：将此类物品转给一位对其具有正估值的原始代理人，会严格提高 Φ_p（因为 $p > 0$）。因此，在 $\mathcal{I}$ 中（仅考虑原始代理人），Φ_p最大化分配的集合与 $\mathcal{I}_0$中的相同。此外，添加虚拟代理人不会影响原始代理人之间的 EFX 性质，且涉及虚拟代理人的所有 EFX不等式都显然成立，因为虚拟代理人的估值为 0。因此，$\mathcal{I}$ 存在 EFX Φ_p最大化分配，当且仅当 $\mathcal{I}_0$ 存在，所以$c < 0$ 情形也是 NP 困难。

结合这两种情况即可完成证明。

A.2 定理 3.2 的证明

由于估值具有可加性，对于所有 i， $v_i(\varnothing) = 0$。如果某个分配使每位代理人至多获得一件物品，那么对于任意 i， $j \in N$ 要么 $A_j = \varnothing$ （此时 EFX$_0$ 条件显然成立），要么 $A_j = \{g\}$ 是一个单元素集合，此时 $A_j \setminus \{g\} = \varnothing$，因此

$$v_i(A_i) \geq 0 = v_i(\varnothing) = v_i(A_j \setminus \{g\}).$$

因此，对于所有 i 均满足 $|A_i| \leq 1$ 的任何分配都是 EFX$_0$。我们将证明的其余部分分为两种情况。

情况 1： $m < n$。根据鸽巢原理，在每种分配中，都有某个代理人 i 获得 $A_i = \varnothing$，因此 $v_i(A_i) = 0$。由于 $p \leq 0$，这意味着对于每种分配 $\mathcal{A}$，都有 $W_p(\mathcal{A}) = 0$，所以全局最优值等于 0。因此，将每件物品分配给互不相同的代理人（并让其余代理人保持空置）的任何分配都是 EFX$_0$,，并且在全局上最大化 W_p。这种分配可以在 $O(m)$ 时间内轻易构造。

情况 2： $m = n$。构造二分图 $H = (N, G; E)$，其中 $(i, g) \in E$ 当且仅当 $v_i(g) > 0$。

子情况 *2(a)*： H 没有完美匹配。反设存在一个完整分配 $\mathcal{A}$，使得对于所有 i，均有 $v_i(A_i) > 0$。那么每个代理人至少必须获得一件物品（否则其效用将为 0）。由于 $m = n$，这迫使每个代理人恰好获得一件物品。令 $\pi\colon N \to G$ 将每个代理人映射到其唯一获得的物品，因此对于所有 i，都有 $A_i = \{\pi(i)\}$。因为对于所有 i， $v_i(A_i) = v_i(\pi(i)) > 0$，所以每条边 $(i, \pi(i))$ 都属于 E，从而 π 是 H 的完美匹配，矛盾。因此，在每种分配 $\mathcal{A}$ 中，都存在 i 使得 $v_i(A_i) = 0$，所以（根据约定）对于所有分配，均有 $W_p(A) = 0$，且全局最优值为 0。任何单元素分配（即代理人与物品之间的任意双射）都是 EFX$_0$ （如前文所示），并且在全局上最优。

子情形 *2(b)*： H 存在一个完美匹配。于是存在一个分配 $\mathcal{A}$，使得每个代理人都获得一个具有严格正价值的物品，因此 $W_p(\mathcal{A}) > 0$，从而全局最优值 OPT $:= \max\{W_p(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \in \Pi(G)\}$满足 OPT > 0。设 $\mathcal{A}^*$ 是一个完全分配，且 $W_p(\mathcal{A}^*) = $ OPT。若对于某个 i 有 $v_i(A_i^*) = 0$，则按照约定 $W_p(\mathcal{A}^*) = 0$，这与 OPT > 0 的事实矛盾。因此，$v_i(A_i^*) > 0$ 对所有 i 都成立，所以每个代理人至少获得一个物品。结合 $m = n$，这意味着每个代理人恰好获得一个物品。因此， $\mathcal{A}^*$ 对应于 H 中的一个完美匹配 $\pi\colon N \to G$。

剩下的问题是寻找一个使 W_p 最大化的完美匹配 π。由于每个全局最优分配都对应于 H 中的一个完美匹配，因此只需在 H 的完美匹配上进行优化。

- 若 $p = 0$ （即纳什福利），则对于一个匹配 π，有

$$W_0(\pi) = \Big(\prod_{i \in N} v_i(\pi(i))\Big)^{1/n}.$$

  由于 $x \mapsto x^{1/n}$ 和 log(·) 在 $(0, \infty)$ 上严格递增，因此，在 H 中，最大化完美匹配上的 W_0 等价于最大化 $\sum_{i \in N} \log v_i(\pi(i))$。

- 若 $p < 0$，则对于一个匹配 π，有

$$W_p(\pi) = \Big(\tfrac{1}{n} \sum_{i \in N} v_i(\pi(i))^p\Big)^{1/p}.$$

  由于 $1/p < 0$，映射 $x \mapsto x^{1/p}$ 在 $(0, \infty)$ 上严格递减，因此，最大化 W_p 等价于在 H 中的完美匹配上最小化 $\sum_{i \in N} v_i(\pi(i))^p$。

在上述两种情况（$p = 0$ 和 $p < 0$）下，我们都得到二分图 H上的标准指派问题（最大权重或最小成本完美匹配），该问题可在多项式时间内求解

（例如，使用最小费用流算法；如果更倾向于使用匈牙利算法，则可以通过添加足够差的虚拟边来补全该图）。输出相应的单元素分配；根据构造，它满足EFX$_0$，并且是全局 W_p最优的。

注意，我们可以假设估值和 p 均为有理数，因此目标函数使用的权重 $\log v_i(g)$（针对 $p=0$）或 $v_i(g)^p$（针对 $p<0$）都是可计算实数；将它们计算到足够多的精度位数（关于输入规模为多项式）即可恢复精确的最优匹配。

A.3 例 3.3 的解释

注意，最大化 W_0 等价于最大化纳什乘积 $\prod_{i\in N} v_i(A_i)$；根据我们的约定，任何最大化解都必须满足对所有 $i\in N$，$v_i(A_i)>0$。首先，$v_2(A_2)>0$ 迫使 $g_4\in A_2$，因为代理人2只对 g_4 有正估值。接下来，反设 $g_1\notin A_1$。那么 $v_1(A_1)>0$ 迫使 $g_2\in A_1$，从而 $v_1(A_1)\le v_1(g_2)=1$；而代理人3所能获得的效用至多为$v_3(A_3)\le v_3(\{g_1,g_3\})=3$。因此，$\prod_{i\in N} v_i(A_i)\le 1\cdot 5\cdot 3=15$。另一方面，$\mathcal{A}^*$ 给出的效用为 $(v_1(A_1^*)\ v_2(A_2^*)\ v_3(A_3^*))=(6,5,1)$，纳什乘积为 $6\cdot 5\cdot 1=30>15$。因此，每个纳什最优分配都必须满足 $g_1\in A_1$。

给定 $g_1\in A_1$ 和 $g_4\in A_2$，剩余物品为 g_2 和 g_3。将两者都分配给代理人3，得到的纳什乘积为 $5\cdot 5\cdot(1+\frac{1}{10})=\frac{55}{2}<30$；将 g_2 分配给代理人3、将 g_3 分配给代理人1，得到的纳什乘积为 $5\cdot 5\cdot\frac{1}{10}=\frac{5}{2}<30$。因此，$\mathcal{A}^*$ 是唯一的纳什最优分配。

最后，$\mathcal{A}^*$ 违反了 EFX：对于 $i=3$、$j=1$和 $g=g_2\in A_1^*$，我们有 $v_3(g)>0$，但 $v_3(A_3^*)=v_3(\{g_3\})=1<v_3(A_1^*\setminus\{g_2\})=v_3(\{g_1\})=2$。

A.4 定理 3.4 的证明

我们给出 EFX$_0$，的论证，并在证明末尾详细说明如何对其进行调整，使其适用于 EFX。

定义 OPT：$=\max_{\mathcal{A}\in\Pi(G)} W_p(\mathcal{A})$，以及 OPT$^{\mathrm{EFX}_0}$：$=\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A})$。

我们给出一个多项式时间过程，输出一个分配 $\mathcal{A}'\in\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)$，使得 $W_p(\mathcal{A}')=$OPT，当且仅当 OPT$^{\mathrm{EFX}_0}=$ OPT；否则输出“否”。该过程包含三个步骤。

步骤 1：计算 OPT 以及一个最优解 $\mathcal{A}^{\mathrm{opt}}\in\Pi(G)$。构造二分图 $B=(N,G;E)$，其中 $(i,g)\in E$当且仅当 $v_i(g)>0$，并在 B 中计算一个最大匹配 M。如果 $|M|<n$，则不存在能够使每个代理人都获得严格正效用的分配：事实上，如果某个分配 $\mathcal{A}$ 满足对于所有 i都有 $v_i(A_i)>0$，那么对于每个 i，我们都可以选择一个物品 $g_i\in A_i$，使得 $v_i(g_i)>0$；于是边 $\{(i,g_i)\}_{i\in N}$ 将构成一个大小为 n 的匹配，这就产生了矛盾。因此，每个分配 $\mathcal{A}$ 都满足：对于某个 i，有 $v_i(A_i)=0$；并且对于所有 $\mathcal{A}$，我们都有 $W_p(\mathcal{A})=0$。因此，OPT $=0$；任取一个分配并将其记为 $\mathcal{A}^{\mathrm{opt}}$，然后继续步骤 2。

以下始终假设 $|M|=n$。于是，存在一个分配，使得对于所有 i，$v_i(A_i)>0$，因此 OPT >0。令 $\mathcal{A}^*$ 取得 OPT。必然有，对于所有 $i\in N$，$v_i(A_i^*)>0$（否则 $W_p(\mathcal{A}^*)=0<$OPT），并且每个代理人至少获得一个物品。

令 $c:=m-n$。对于任意满足对所有 $i\in N$均有 $|A_i|\ge 1$ 的分配 $\mathcal{A}$，定义

$$H(\mathcal{A}):=\{i\in N:|A_i|\ge 2\}\quad\text{and}\quad S(\mathcal{A}):=\bigcup_{i\in H(\mathcal{A})} A_i.$$

由于 $\sum_{i\in N}(|A_i|-1)=m-n=c$ 且不在 $H(\mathcal{A})$ 中的代理人具有 $|A_i|=1$，因此可得

$$\sum_{i\in H(\mathcal{A})}(|A_i|-1)=c,$$

因此 $|H(\mathcal{A})| \le c$。此外，物品束互不相交可得

$$|S(\mathcal{A})| = \sum_{i \in H(\mathcal{A})} |A_i| = \sum_{i \in H(\mathcal{A})} \big(1 + (|A_i| - 1)\big) = |H(\mathcal{A})| + c \le 2c.$$

特别是，$|S(\mathcal{A}^*)| \le 2c$。

现在，我们枚举 $\mathcal{A}^*$ 中所有可能的非单件物品捆绑。对于每个 $\kappa \in \{1, \dots, c\}$，枚举所有满足以下条件的三元组 $(H,\ S,\ (B_i)_{i \in H})$：(i) $H \subseteq N$ 且满足 $|H| = \kappa$；(ii) $S \subseteq G$ 且满足 $|S| = \kappa + c$；(iii) $(B_i)_{i \in H}$ 是 S 的带标号划分，且对所有 $i \in H$ 都满足 $|B_i| \ge 2$。固定这样一个三元组，并令 $L := N \setminus H$ 和 $R := G \setminus S$。于是 $|L| = |R|$。

如果对某个 $i \in H$，$v_i(B_i) = 0$，则舍弃当前三元组。如果不存在双射 $\pi : L \to R$，使得对所有 $\ell \in L$ 都有 $v_\ell(\pi(\ell)) > 0$，也舍弃该三元组（等价地，若二分图 $L \times R$ 中包含边 $(\ell,\ g)$，且 $v_\ell(g) > 0$，但该图没有完美匹配）。

对于一个固定的存留三元组，在可行补全上优化 W_p 可归结为在 $L \times R$ 上求解一个指派问题：

- 若 $p = 0$，则（在效用为正的条件下）最大化 W_0 等价于最大化

$$\sum_{\ell \in L} \log v_\ell(\pi(\ell))$$

在可行双射 π 上：$L \to R$。

- 若 $p < 0$，则（在效用为正的条件下）最大化 W_p 等价于最小化

$$\sum_{\ell \in L} v_\ell(\pi(\ell))^p$$

在可行双射 π 上：$L \to R$。

求解所得的指派实例，构造相应的分配，并在所有迭代中保留最优解；将找到的最佳分配记为 $\mathcal{A}^{\mathrm{opt}}$。

现在我们证明步骤 1 的正确性。三元组 $\big(H(\mathcal{A}^*)\ S(\mathcal{A}^*),\ (A_i^*)_{i \in H(\mathcal{A}^*)}\big)$ 出现在枚举中。在该次迭代中，由 $\mathcal{A}^*$ 诱导的双射是可行的。指派子程序为这个固定的三元组返回一个最优补全，因此产生了一个 W_p 值至少为$W_p(\mathcal{A}^*)$ = 最优值的分配。由于最优值是全局最大值，我们得到 $W_p(\mathcal{A}^{\mathrm{opt}})$ = 最优值。

步骤 2：计算最优值EFX_0 **和一个最优解** $\mathcal{A}^{\mathrm{opt}_0} \in \Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)$。我们通过与步骤 1 相同的枚举过程计算最优值$_{\mathrm{EFX}_0}$，但仅限于满足 EFX_0的补全。

对于每个枚举的三元组 $(H,\ S,\ (B_i)_{i \in H})$，令 $L := N \setminus H$和 $R := G \setminus S$（因此 $|L| = |R|$）。对于每个 $i \in H$ 和代理人 $x \in N$，定义

$$\tau_x(B_i) := \max_{g \in B_i} v_x(B_i \setminus \{g\}),$$

并对每个轻型代理人 $\ell \in L$定义

$$\tau_\ell := \max_{i \in H} \tau_\ell(B_i),$$

按约定，$\tau_\ell = 0$若 $H = \varnothing$。

命题。考虑一个分配 $\mathcal{A}$，其中每个重型代理 $i \in H$ 获得物品束 B_i，每个轻型代理人 $\ell \in L$ 获得一个单元素集合 $\{\pi(\ell)$，其中 $\}$ 是某个双射 $\pi : L \to R$。那么 $\mathcal{A}$ 是 EFX_0，当且仅当：

(i) for all distinct $a, i \in H$, we have $v_a(B_a) \ge \tau_a(B_i)$; and

(ii) 对每个 $\ell \in L$，都有 $v_\ell(\pi(\ell)) \ge \tau_\ell$。

~ ~ ~命题的证明。固定这样的 $\mathcal{A}$。EFX0约束为：对所有 $x, y \in N$ 以及所有 $g \in A_y$，$v_x(A_x) \geq v_x(A_y \setminus \{g\})$。若 $y \in L$，则 A_y 是单元素集合，且 $A_y \setminus \{g\} = \varnothing$，因此这些不等式显然成立。因此，只需考虑 $y \in H$，即 $y = i$ 且物品束为 B_i的情形。固定 $i \in H$ 和 $x \in N$。从 x 指向 ~ ~i 的约束为：对所有 $g \in B_i$，$v_x(A_x) \geq v_x(B_i \setminus \{g\})$；等价地，$v_x(A_x) \geq \max_{g \in B_i} v_x(B_i \setminus \{g\}) = \tau_x(B_i)$。~ ~若 $x = a \in H$，则 $A_x = B_a$，从而得到条件(i)。若 $x = \ell \in L$，则 $A_x = \{\pi(\ell)\}$，因此我们要求对所有 $i \in H$，$v_\ell(\pi(\ell)) \geq \tau_\ell(B_i)$；即 $v_\ell(\pi(\ell)) \geq \max_{i \in H} \tau_\ell(B_i) = \tau_\ell$，这就是(ii)。反过来，根据相同的分类讨论，(i)和(ii)蕴含所有EFX$_0$ 不等式。□

现在，如果对于某个 $i \in H$ 有 $v_i(B_i) = 0$，则丢弃当前三元组（因为对于 $p \leq 0$，这会使福利为 0）；如果命题的条件(i)不成立，也丢弃该三元组。

接下来，在 $L \times R$ 上构建一个二分图，当且仅当 $v_\ell(g) > 0$ 且 $v_\ell(g) \geq \tau_\ell$ 时，其中包含边 (ℓ, g)。如果不存在完美匹配，则丢弃本次迭代。

对于一个固定的保留三元组，在可行双射 π 上优化 W_p：$L \to R$ 可归结为一个指派问题：

- 如果 $p = 0$，则在正效用下，最大化 W_0 等价于在可行完美匹配上最大化 $\sum_{\ell \in L} \log v_\ell(\pi(\ell))$。
- 如果 $p < 0$，则在正效用下，最大化 W_p 等价于在可行完美匹配上最小化 $\sum_{\ell \in L} v_\ell(\pi(\ell))^p$。

~求解所得的指派实例，形成相应的分配 $\mathcal{A}$，并在所有迭代中保留最优者；将找到的最佳 EFX$_0$ 分配记为 $\mathcal{A}^{\text{opt}_0}$，其值记为 OPT$^{\text{EFX}_0}$。

如果没有任何一次迭代能得到一个使所有代理人都获得正效用的可行补全，那么 OPT$^{\text{EFX}_0}$ =0；此时令 $\mathcal{A}^{\text{opt}_0}$ 为任意一个 EFX$_0$ 分配（这样的分配对 $m \leq n + 3$存在）。

下面证明步骤 2 的正确性。EFX$_0$ 分配。由于 ^ ^OPT $_{\text{EFX}_0} > 0$ 意味着每个代理人都有正效用，因此 $\mathcal{A}$ 至多有 c个重型代理人，且 $|S(\mathcal{A})| \leq 2c$。因此，其重型部分会出现在枚举中。在对应的迭代中，由 $\sim_{\mathcal{A}}$ 诱导的轻型代理人分配满足条件 (i)–(ii)，因此对应于构造的图中的一个可行完美匹配。^指派求解器会返回该迭代的最优补全，其福利至少为 $W_p(\mathcal{A})$。取所有迭代中的最优结果，得到福利 OPT$^{\text{EFX}_0}$。

步骤 3。由于 $\Pi_{\text{EFX}_0}(G) \subseteq \Pi(G)$，我们有 $\text{OPT}_{\text{EFX}_0} \leq \text{OPT}$。如果 OPT$^{\text{EFX}_0}$ = OPT，则输出 $\mathcal{A}^{\text{opt}_0}$；它是 EFX$_0$，且是全局 W_p最优的。否则 $\text{OPT}_{\text{EFX}_0} < \text{OPT}$，此时没有 EFX$_0$ 分配能达到 OPT，因此输出‘否’。OPT $= 0$ 的情况也已涵盖，因为此时必然有 $\text{OPT}_{\text{EFX}_0} = 0$。

最后，我们证明所述过程的运行时间。对于固定的 c，步骤 1 的运行时间为多项式：$|S| \leq 2c$ 有 $O(m^{2c})$ 种 S 选择，以及 $O(n^c)$ 种 H选择；而大小至多为 $2c$ 的集合划分为至多 c 个、每个大小至少为 2 的部分的带标号划分数量是一个常数（仅取决于 c）。每次迭代都会在多项式时间内求解一个指派问题。步骤 2 的枚举规模与步骤 1 相同，并且每次迭代求解一个指派实例（在筛除不可行的三元组和边之后），因此对于固定的 c，它也具有多项式时间复杂度。权重计算（$p = 0$ 的对数，或在 $p < 0$ 固定时的 p 次幂）与步骤 1 中的处理完全相同。在步骤 1 中，指派实例使用的边权重为 $\log v_\ell(g)$（当 $p = 0$ 时）或 $v_\ell(g)^p$（当 $p < 0$ 时）；对于固定的 p 和有理数输入估值，这些都是可计算实数，而不失一般性，我们可以作此假设。

关于 EFX 的证明完全相同，只是在定义 $\tau_x(B_i) = \max_{g \in B_i} v_x(B_i \setminus \{g\})$ 时，我们改为使用 $\tau_x^*(B_i) := \max_{g \in B_i:\ v_x(g) > 0} v_x(B_i \setminus \{g\})$，其中 $\tau_x^*(B_i) := 0 \text{ if } \{g \in B_i : v_x(g) > 0\} = \varnothing$，并且要求 $v_\ell(g) \geq \tau_\ell^*$ 在匹配阶段成立。

A.5 定理 3.5 的证明

我们给出 EFX$_0$ 的证明/算法；最后再说明如何将其调整为同样适用于 EFX。

令 $c := m - n$。由于 $m \le n+3$，我们有 $c \in \{1,2,3\}$ 和 $m = n + c$。将满足 $|A_i| \ge 2$ 的代理人称为**重型**，其余代理人称为**轻型**。分配 $\mathcal{A}$ 的**重型部分** 是重型代理人及其持有的物品（即非单件物品捆绑）构成的集合。现在，我们通过枚举重型部分，并针对每次枚举求解一个指派问题，来计算一个 W_p-最优的 EFX_0 分配。

首先，假设处于非退化情形

$$\mathrm{OPT} := \max_{A \in \Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)} W_p(A) > 0.$$

那么，每个最优分配 $\mathcal{A}^*$ 都满足 $v_i(A_i^*) > 0$，对所有 i均成立，因此每位代理人至少会获得一件物品。

设 $\mathcal{A}$ 是任意一个每位代理人都至少获得一件物品的分配。定义重型代理人集合

$$H(\mathcal{A}) := \{i : |A_i| \ge 2\}$$

并令 $k := |H(A)|$。由于 $m = n + c$，且每位 n 代理人都至少获得一件物品，因此每位代理人分得一件物品之外的额外物品数量恰为 c，于是

$$\sum_{i \in H(A)} \big(|A_i| - 1\big) = c.$$

特别地，$k \le c$。此外，重型代理人持有的物品总数等于

$$\left|\bigcup_{i \in H(A)} A_i\right| = \sum_{i \in H(A)} |A_i| = \sum_{i \in H(A)} \big(1 + (|A_i| - 1)\big)$$
$$= k + c \le 2c \le 6.$$

因此，在任意 OPT 为 > 0 的最优 $\mathcal{A}^*$ 中，至多有 c 位代理人拥有非单件物品捆绑，且所有非单件物品捆绑的并集至多包含 6 件物品。

我们按如下方式枚举重型部分的所有可能性。对于每个整数 $k \in \{0, 1, \dots, c\}$:

- 如果 $k = 0$ 且 $c > 0$，则跳过此 k（因为有 $m = n + c > n$ 时，至少有一个物品束必须不是单元素集合）。
- 枚举所有满足 $|H| = k$的子集 $H \subseteq N$。
- 枚举所有满足 $|S| = k + c$的子集 $S \subseteq G$。
- 枚举所有从 β 到 $S \to H$ 的满射指派，使得每个 $B_i := \beta^{-1}(i)$的大小为 $|B_i| \ge 2$（等价地，将 S 带标号划分为 k 个大小至少为 2 的部分）。

从枚举结果中固定这样一个三元组 $(H, S, (B_i)_{i \in H})$。令 $L := N \setminus H$（轻型代理人），令 $R := G \setminus S$（剩余物品）。由于 $|G| = n + c$ 且 $|S| = k + c$，我们有 $|R| = n - k = |L|$。

对于每个 $i \in H$ 和每个代理人 $x \in N$，定义

$$\tau_x(B_i) := \max_{g \in B_i} v_x(B_i \setminus \{g\}).$$

对于每个轻型代理人 $\ell \in L$，定义阈值

$$\tau_\ell := \max_{i \in H} \tau_\ell(B_i),$$

按照约定 $\tau_\ell = 0$如果 $H = \varnothing$。

引理 A.1。考虑一种分配 $\mathcal{A}$，其中每个重型代理 $i \in H$ 获得物品束 B_i，每个轻型代理人 $\ell \in L$ 获得一个单元素集合 $\{\pi(\ell)\}$，其中双射为 $\pi\colon L \to R$。那么 $\mathcal{A}$ 是EFX$_0$，当且仅当：

(i) 对所有互不相同的 $a, i \in H$, $v_a(B_a) \geq \tau_a(B_i)$。

(ii) 对每个 $\ell \in L$, $v_\ell(\pi(\ell)) \geq \tau_\ell$。

证明。固定这样的 $\mathcal{A}$。接着，假设 $\mathcal{A}$ 是 EFX$_0$：对所有 $x, y \in N$ 以及所有 $g \in A_y$,

$$v_x(\widehat{A}_x) \geq v_x(\widehat{A}_y \setminus \{g\}).$$

若 $y \in L$，则 A_y 是单元素集合；移除其中唯一的物品后得到 $\varnothing$，其对每个代理人的价值均为 0，因此这些不等式自动成立。于是，唯一非平凡的不等式是满足$y \in H$的那些不等式。

固定 $i \in H$ 和 $x \in N$。从 x 指向 i 的不等式为 $v_x(A_x) \geq v_x(B_i \setminus \{g\})$，对所有 $g \in B_i$均成立，即

$$v_x(\widehat{A}_x) \geq \max_{g \in B_i} v_x(B_i \setminus \{g\}) = \tau_x(B_i).$$

$x = i$ 情形显然成立，因为对所有 $g \in B_a$，$v_a(B_a) \geq v_a(B_a \setminus \{g\})$。若 $x \in H$，则 $A_x = B_x$ 且这正是 (i)。若 $x \in L$，则 $A_x = \{\pi(x)\}$，于是得到对所有 $i \in H$，$v_x(\pi(x)) \geq \tau_x(B_i)$，即$v_x(\pi(x)) \geq \max_{i \in H} \tau_x(B_i) = \tau_x$，这就是 (ii)。反过来，由 (i) 和 (ii) 可通过相同推理推出所有 EFX$_0$ 不等式。

□

然后，对于当前枚举的（H，S，$(B_i)_{i \in H}$），首先检查引理的条件(i)。如果不满足，则舍弃本次迭代。现在施加 OPT > 0。由于 $p \leq 0$ 且只要有代理人获得的效用为 0，就会出现 $W_p = 0$，因此我们只需考虑每个代理人的效用都严格为正的补全方案。因此，若某个 $i \in H$满足 $v_i(B_i) = 0$，则舍弃本次迭代。

定义一个二分图，左侧为 L，右侧为 R；当且仅当满足以下条件时，加入边（ℓ，g）：

$$v_\ell(g) > 0 \quad \text{and} \quad v_\ell(g) \geq \tau_\ell.$$

该图中的任意完美匹配 $\pi\colon L \to R$ 都会给出一个补全方案 $\mathcal{A}$，根据引理，该方案满足 EFX$_0$，且所有轻型物品束的效用均为正。

在这些可行匹配中，优化 W_p 可归结为一个标准的分配目标函数：

- 如果 $p = 0$（纳什福利），那么最大化 $W_0(\mathcal{A})$ 等价于最大化 $\sum_{i \in N} \log v_i(A_i)$。由于重型物品束已固定，这等价于在完美匹配上最大化 $\sum_{\ell \in L} \log v_\ell(\pi(\ell))$（即最大权完美匹配问题）。

- 如果 $p < 0$，那么所有效用都为正，且

$$W_p(\widehat{\mathcal{A}}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in N} v_i(\widehat{A}_i)^p \right)^{1/p}.$$

由于 $1/p < 0$，最大化 $W_p(\mathcal{A})$ 等价于最小化 $\sum_{i \in N} v_i(A_i)^p$。同样，在此迭代中，重型部分是常数，因此只需在完美匹配上最小化 $\sum_{\ell \in L} v_\ell(\pi(\ell))^p$（这是一个最小成本完美匹配问题）。

由于 p 是固定的，边权重/成本可以在多项式时间内计算到所需精度；对于整数 p，它们是有理数。如果不存在完美匹配，则舍弃本次迭代；否则，计算一个最优完美匹配（例如，在 $O(n^3)$ 中使用匈牙利算法），并记录由此得到的分配 $\widehat{\mathcal{A}}$。最后，在所有迭代中记录的分配里，返回 W_p 最大的一个。

如果上述枚举没有得到可行补全（即，没有任何一次迭代允许存在满足 $v_\ell(g) > 0$ 和 $v_\ell(g) \geq \tau_\ell$ 的完美匹配），那么就不存在能为每个代理人都带来严格正效用的 EFX_0 分配。这意味着 $\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A}) = 0$；在这种情况下，我们输出任意一个 EFX_0 分配（保证对 $m \leq n+3$ 存在）。

现在，我们证明正确性。设 $\mathcal{A}^*$ 是一个最优 EFX_0 分配，其 OPT 为 > 0。根据步骤 1，$H(\mathcal{A}^*)$ 的大小为 $k^* \leq c$，并且并集 $S^* := \bigcup_{i\in H(\mathcal{A}^*)} A_i^*$ 的大小为 $k^* + c \leq 6$。因此，枚举中包含这样一次迭代：$H = H(\mathcal{A}^*)$、$S = S^*$，且对所有 $i \in H(\mathcal{A}^*)$，都有 $B_i = A_i^*$。在该次迭代中，$\mathcal{A}^*$ 对应于 $L \times R$ 上的一个可行完美匹配（并且根据定义满足引理中的 EFX_0 约束）。匹配求解器返回的补全，其目标函数（对 $p = 0$ 的对数求和，或对 $p < 0$ 的 p 次幂求和）至少与 $\mathcal{A}^*$ 的一样好，因此我们得到的福利至少为 $W_p(\mathcal{A}^*) = \text{OPT}$。由于 OPT 是最大值，该算法返回一个达到 OPT 的分配。

最后，我们证明该算法的运行时间为多项式。由于 $c \leq 3$ 是常数，因此有$k + c \leq 6$。S 的可选数量为 $\binom{m}{k+c} = \mathcal{O}(m^{k+c}) = \mathcal{O}(m^6)$，而将大小至多为 6 的集合划分为 $k \leq 3$ 个大小为 ≥ 2 的部分的带标签划分数量是一个常数。因此，枚举过程是多项式的，并且每次迭代都在 $\mathcal{O}(n^3)$时间内求解一个指派实例。因此，总运行时间关于 n 和 m是多项式的。

现在，我们说明如何调整证明以适用于 EFX。请注意，EFX_0 蕴含 EFX 这一事实本身，并不能证明一个 EFX_0-最优分配也是 EFX 最优的，因为 EFX 的可行域严格更大。不过，只需进行一处修改，同一框架就能针对 EFX 进行优化：每当我们定义形如以下形式的阈值时

$$\tau_x(B_i) = \max_{g\in B_i} v_x(B_i \setminus \{g\}),$$

将其替换为

$$\tau_x^*(B_i) := \max_{\substack{g\in B_i \\ v_x(g)>0}} v_x(B_i \setminus \{g\}),$$

其中 $\tau_x^*(B_i) := 0$若 $\{g \in B_i : v_x(g) > 0\} = \varnothing$。然后定义 $\tau_\ell^* := \max_{i\in H} \tau_\ell^*(B_i)$，并在匹配阶段要求 $v_\ell(g) \geq \tau_\ell^*$。引理 A.1 及证明的其余部分均可沿用，因为 EFX 约束与 EFX_0 约束完全相同，唯一的区别是，它们只针对对嫉妒代理人具有正价值的物品进行量化。

A.6 定理 3.6 的证明

我们给出 EFX 的证明，并在最后说明为何同样的归约也适用于 EFX_0。固定 $p \in (0, 1]$。定义

$$\Phi_p(\mathcal{A}) := \sum_{i\in N} v_i(A_i)^p.$$

由于

$$W_p(\mathcal{A}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i\in N} v_i(A_i)^p\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{n}\Phi_p(\mathcal{A})\right)^{1/p},$$

且对于 $p > 0$，$x \mapsto x^{1/p}$ 严格递增，因此最大化 W_p 等价于最大化 Φ_p。

我们首先证明 $c \in \{0, 1, 2, 3\}$ 时问题是 NP 困难的。我们从 NP 困难问题 PARTITION 归约。设 a_1、……、a_k为正整数，其总和为 $T := \sum_{j=1}^k a_j$，并假设 T为偶数（否则将每个 a_j 替换为 $2a_j$）。固定任意常数 $c \in \{0, 1, 2, 3\}$。

令 $n_0 := k + 3$，并定义代理人

$$N := \{1, 2, \ldots, n_0\} \cup D \quad \text{and} \quad D := \{d_1, \ldots, d_c\}$$

(当 $c = 0$）时， $D = \varnothing$，因此 $|N| = n_0 + c$。令 $H := \{x_1, y_1, \ldots, x_c, y_c\}$，并定义物品 s

$$G := \{g_1, \ldots, g_k, x, y, z\} \cup H,$$

so

$$m = |G| = k + 3 + 2c = (n_0 + c) + c = |N| + c.$$

选择一个整数常数 $\Lambda \geq 2$（仅取决于固定的 p），使得

$$\Lambda^p(1 - 2^{-p}) > 2^{-p}. \tag{2}$$

这是可行的，因为对于 $p > 0$， $2^p - 1 > 0$ 成立，且 (2) 等价于 $\Lambda^p(2^p - 1) > 1$。

定义代理人对物品的估值如下：

- 划分商品。对于每个 $j \in [k]$， $v_1(g_j) = v_2(g_j) = a_j$ 以及 $v_i(g_j) = 0$ $\forall i \in N \setminus \{1, 2\}$。
- 特殊商品 x， y。 $v_1(x) = v_1(y) = v_2(x) = v_2(y) = \frac{T}{2}$, $v_3(x) = v_3(y) = \frac{\Lambda T}{2}$, 以及 $v_i(x) = v_i(y) = 0$ 对所有 $i \in N \setminus \{1, 2, 3\}$。
- 特殊物品 z。对于每个 $i \in \{4, \ldots, n_0\}$ 集合 $v_i(z) = \Lambda T$，以及对于 $i \in \{1, 2, 3\} \cup D$ 集合 $v_i(z) = 0$。
- 虚拟商品（仅当 $c \geq 1$）。对于每个 $t \in [c]$, $v_{d_t}(x_t) = v_{d_t}(y_t) = 1$, $v_{d_t}(g) = 0$ 对所有 $g \in G \setminus \{x_t, y_t\}$均成立，并且对于每个原始代理 $i \in \{1, \ldots, n_0\}$ 以及每个 $h \in H$ 集合 $v_i(h) = 0$。

所有数字的位数均为 $\mathcal{O}(\log T)$（因为对于固定的 p， Λ 是常数），因此该构造是多项式时间的。此外，在构造的实例中， $\Pi_{\mathrm{EFX}}(G) \neq \varnothing$（例如，将每件物品分配给一个不同的代理人，但每个 d_t 获得 $\{x_t, y_t\}$；这样，每个非空物品束都是单元素集合或一对物品，且其他所有代理人对其估值均为 0，因此满足 EFX）。

命题。设 $\mathcal{A}$ 是一个在所有分配中使 Φ_p 最大化的分配。那么：

1. x， $y \in A_3$；2. 对某个 $i \in \{4, \ldots, n_0\}$， $z \in A_i$；3. 对每个 $t \in [c]$， $\{x_t, y_t\} \subseteq A_{d_t}$；

4. 每个分区物品g_j 都分配给代理人1或代理人2。

命题的证明。由于 Φ_p 关于每位代理人的效用严格递增（因为 $p > 0$），且每件列出的物品仅对指定代理人具有正价值，因此 (2)–(4) 立即成立。接下来只需证明 (1)，即 $x \in A_3$（关于 y 的论证相同）。

反设 $x \notin A_3$，并令 $\ell \neq 3$ 满足 $x \in A_\ell$。令 $\mathcal{A}'$ 由$\mathcal{A}$ 得到，方法是将物品 x 从代理人 ℓ 移给代理人3。于是

$$\begin{aligned}\Phi_p(\mathcal{A}') - \Phi_p(\mathcal{A}) = {} & (v_3(A_3) + v_3(x))^p - v_3(A_3)^p \\ & + (v_\ell(A_\ell) - v_\ell(x))^p - v_\ell(A_\ell)^p.\end{aligned}$$

这里 $v_3(x) = \Lambda T/2$，并且由于代理人3只看重 x和 y以及 $x \notin A_3$，我们有 $v_3(A_3) \leq \Lambda T/2$。对于 $0 < p \leq 1$，函数 $t \mapsto t^p$ 是凹函数，因此对于每个固定的 $\delta > 0$， $t \mapsto (t + \delta)^p - t^p$ 关于 t 单调不增，所以

$$(v_3(A_3) + \Lambda T/2)^p - v_3(A_3)^p \geq (\Lambda T)^p - (\Lambda T/2)^p.$$

此外， $v_\ell(x) \in \{0, T/2\}$ 和 $v_\ell(A_\ell) \geq v_\ell(x)$。利用次可加性 $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ 对于 $0 < p \leq 1$（将其应用于 $v_\ell(A_\ell) = (v_\ell(A_\ell) - v_\ell(x)) + v_\ell(x)$），可得

$$(v_\ell(A_\ell) - v_\ell(x))^p - v_\ell(A_\ell)^p \geq -v_\ell(x)^p \geq -(T/2)^p.$$

因此，

$$\begin{aligned}\Phi_p(\mathcal{A}') - \Phi_p(\mathcal{A}) &\geq (\Lambda T)^p - (\Lambda T/2)^p - (T/2)^p \\ &= T^p\big(\Lambda^p(1-2^{-p}) - 2^{-p}\big) > 0\end{aligned}$$

根据（2），这与 $\mathcal{A}$的最优性矛盾。因此 $x \in A_3$，同理可得 $y \in A_3$。 □

对于任意满足该命题的分配 $\mathcal{A}$，定义

$$U_1 := \sum_{j:\, g_j \in A_1} a_j \quad \text{and} \quad U_2 := \sum_{j:\, g_j \in A_2} a_j,$$

因此 $U_1 + U_2 = T$。代理人3从 $\{x, y\}$获得的效用为 ΛT； $\{4, \ldots, n_0\}$ 中恰有一位代理人从 z获得效用ΛT；每个 d_t 从 $\{x_t, y_t\}$获得效用2；其余所有代理人的效用均为0。因此

$$\Phi_p(A) = c \cdot 2^p + 2(\Lambda T)^p + U_1^p + U_2^p. \tag{3}$$

由于 $t \mapsto t^p$在 $0 < p \leq 1$上是凹函数，詹森不等式给出，在$U_1+U_2 = T$下有 $U_1^p + U_2^p \leq 2(T/2)^p$。定义 B_c:$= c\cdot 2^p+2(\Lambda T)^p+2(T/2)^p$。令 $\mathcal{A}^{\max}$为 $\Pi(G)$上 Φ_p的全局最大化者。现在，根据该命题， $\mathcal{A}^{\max}$ 满足（1）–（4），因此 $\Phi_p(\mathcal{A}^{\max}) \leq B_c$，即 $\max_{\mathcal{B}\in\Pi(G)} \Phi_p(\mathcal{B}) \leq B_c$。此外，若 $p \in (0, 1)$，严格凹性意味着等号成立当且仅当 $U_1 = U_2 = T/2$。若 $p = 1$，则 $t \mapsto t$为线性函数，因此对于满足 $U_1 + U_2 = T$的所有 U_1、 U_2，等号均成立（对任意 c）。

现在，假设 PARTITION 实例是一个是实例，因此存在 $S_1 \subseteq [k]$，使得 $\sum_{j\in S_1} a_j = T/2$且 $S_2 = [k] \setminus S_1$。按如下方式定义分配 $\mathcal{A}^*$： $A_1^* = \{g_j : j \in S_1\}$, $A_2^* = \{g_j : j \in S_2\}$,$A_3^* = \{x, y\}$, $A_4^* = \{z\}$, $A_{d_t}^* = \{x_t, y_t\} \forall t \in [c]$, 并将 $\varnothing$ 分配给 $\{5, \ldots, n_0\}$中的每个其他原始代理。于是 $U_1 = U_2 = T/2$, 因此由 (3) 可得 $\Phi_p(\mathcal{A}^*) = B_c$。

我们证明 $\mathcal{A}^*$ 是 EFX。虚拟代理人只看重自己的配对，因此，任何涉及虚拟代理人物品束的比较都是显然的。代理人3只看重 x和 y，且持有这两者，因此她不会嫉妒任何其他物品束。代理人1和代理人2的效用均为 $T/2$, 并且对于每个 $g \in \{x, y\}$， $v_1(A_3^* \setminus \{g\}) = T/2 \leq v_1(A_1^*)$ 且 $v_2(A_3^* \setminus \{g\}) = T/2 \leq v_2(A_2^*)$，因此相对于代理人3，EFX 成立。对于代理人1和代理人2之间的比较，任取 $g \in A_2^*$,

$$v_1(A_2^* \setminus \{g\}) = v_1(A_2^*) - v_1(g) \leq T/2 = v_1(A_1^*),$$

对于代理人1而言，对称地，代理人2也满足同样的结论。最后 $A_4^* \setminus \{z\} = \varnothing$，因此所有涉及代理人4的其余EFX不等式均成立：对于任意 $i \geq 5$、 $A_i = \varnothing$ 和 i，每个物品束去掉一个物品后的价值都为 0（因为唯一一个价值为正的物品是 z，且它位于一个单元素集合中）。此外，代理人4对除 z 以外的所有物品的价值都为 0，因此她不会嫉妒任何人。

令 $\mathcal{A}$ 为一个 EFX 分配，使其在 $\Pi_{\text{EFX}}(G)$ 上最大化 Φ_p。由于 $\mathcal{A}^*$ 可行且价值为 B_c，我们有 $\max_{B\in\Pi_{\text{EFX}}(G)} \Phi_p(B) \geq B_c$。此外， $\Pi_{\text{EFX}}(G) \subseteq \Pi(G)$，因此 $\max_{B\in\Pi_{\text{EFX}}(G)} \Phi_p(B) \leq \max_{B\in\Pi(G)} \Phi_p(B) \leq B_c$。因此 $\Phi_p(\mathcal{A}) = B_c$，特别是 $\mathcal{A}$ 也是全局 Φ_p-最大化者，并满足该命题。因此 x, $y \in A_3$，并且所有划分商品都分给了代理人1和代理人2。

对代理人1而言，相对于代理人3应用 EFX，并考虑物品 $x \in A_3$，可得

$$U_1 = v_1(A_1) \geq v_1(A_3 \setminus \{x\}) = v_1(\{y\}) = T/2,$$

类似地， $U_2 \geq T/2$，因此 $U_1 = U_2 = T/2$。于是，给定一个输出使 Φ_p 最大化的 EFX 分配的算法，我们在构造的实例上运行该算法，并计算 $U_1 = \sum_{j:\ g_j\in A_1} a_j$。当且仅当 $U_1 = T/2$ 时输出“是”。根据上述论证，这就解决了 PARTITION 问题。这表明，对每个 $c \in \{0, 1, 2, 3\}$，该优化问题都是 NP 困难的。

接下来，我们将说明如何把这一结果扩展到任意固定的负数 c（对于 $m < n$的情况）。固定$c < 0$，并令 $t = -c$。通过添加 t 个估值恒为零的虚拟代理人，同时保持原有代理人的物品和估值不变，从 $c = 0$ 构造进行归约。在是实例中，

来自 $c = 0$情况的 EFX 分配 $\mathcal{A}^*$ 在添加新代理人后仍然是 EFX 分配（为他们分配空捆绑），并且达到相同的值 B_0。此外，关于 $\max_{\mathcal{B}\in\Pi(G)} \Phi_p(\mathcal{B})$ 的全局上界 B_0 仍然有效，因为添加零代理人不会增加任何分配的 Φ_p 。因此，扩展实例中的 EFX 最优值等于 B_0，所以任何 EFX 最优分配也必然是全局最大化者，而先前的论证会迫使其成为完美划分。

请注意，在我们的归约中，我们构造了一个包含特殊商品 x、y、z 以及（当 $c > 0$ 时）虚拟物品对（x_t、y_t）的实例；在是实例中，它存在一种分配 $\mathcal{A}^*$，满足 (i) 对 Φ_p 达到全局上界 B_c，且 (ii) 为 EFX。在该构造中，$\mathcal{A}^*$ 实际上也满足 EFX_0：只要某个代理人对被比较物品束中的每件物品价值都为 0，移除其中任意一件物品后，该代理人对剩余物品束的价值仍为 0，因此额外的 EFX_0 不等式会自动成立。因此，满足 EFX_0的可行最优值也达到 B_c，这迫使任何 EFX_0最优解都成为全局 Φ_p最大化解，并具有相同的强制结构性质。最后，在适用的情况下，我们仅在代理人 1 和 2 对某件物品赋予正价值时，才从非空物品束中移除该物品，因此，在 EFX 和 EFX_0下要求的恰好是相同的不等式。因此，无论是针对 Π_{EFX} 还是 Π_{EFX_0} 进行优化的算法，都能判定 PARTITION，从而证明这两种情形均为 NP 困难。

B 第 4 节中略去的证明

B.1 定理 4.2 的证明

我们通过构造一个实例族来证明该界。对于 $\varepsilon > 0$，令 $\mathcal{I}_\varepsilon = (N, G, \mathbf{v}^\varepsilon)$ 表示下文定义的实例。由于 $v_i^\varepsilon(g) > 0$ 对所有 $i \in N$和 $g \in G$均成立，因此在 $\mathcal{I}_\varepsilon$ 中，$\Pi_{\text{EFX}}(G) = \Pi_{\text{EFX}_0}(G)$，从而 $\text{PoEFX}_0^{\mathcal{I}_\varepsilon}(p, c) = \text{PoEFX}^{\mathcal{I}_\varepsilon}(p, c)$。

考虑一个有 n 个代理人和 $m = n + c$ 个物品的实例，其中某个整数 $c \le 3$ 固定，并假设 $m \ge 1$。代理人的估值定义如下（为简单起见，我们使用 $\mathbf{v}$ 而非 $\mathbf{v}^\varepsilon$）：对于每个$g \in G$,

$$v_1(g) = 1 \quad \text{and} \quad v_i(g) = \varepsilon \text{ for all } i \in N \setminus \{1\}.$$

现在注意，对于任意 $p \in (0, 1]$,，函数 $f(x) := x^p$ 严格递增。

令 $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ 为某个满足 $|B_1| < m$ 的分配。固定 $\varepsilon > 0$ 为充分小的值（使得下列不等式对每个满足 $|B_1| < m$ 的分配 $\mathcal{B}$ 均成立），

$$W_p(\mathcal{B})^p = \frac{1}{n}\sum_{i\in N} v_i(B_i)^p < \frac{m^p}{n}$$

如果我们考虑将所有 m 物品分配给代理人1的分配 $\mathcal{B}' = (B'_1、\ldots\ldots、B'_n)$,

$$W_p(\mathcal{B}')^p = \frac{1}{n}\sum_{i\in N} v_i(B'_i)^p = \frac{m^p}{n} + 0 = \frac{m^p}{n} > W_p(\mathcal{B})^p.$$

因此，对于 $\mathcal{I}_\varepsilon$，将所有 m 物品分配给代理人1将使 p-均值福利最大化；其中 te

$$\text{OPT}_p(\mathcal{I}_\varepsilon) := \max_{A\in\Pi(G)} W_p(\mathcal{A}) = W_p(\mathcal{B}') = \frac{m}{n^{1/p}} \tag{4}$$

接下来，我们考察该实例的 EFX_0 分配结构。考虑任意分配 $\mathcal{A} = (A_1, \ldots\ldots, A_n)$。如果 $|A_1| = \varnothing$, 则 $|A_1| = 0 \le \lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor$ 显然成立。否则，任取~~一个 $g \in$~~ A_1，并对代理人 i和 1 应用 EFX_0，其中使用该 g。对于任意 $i \ge 2$,

$$\begin{aligned} & |A_i| \cdot \varepsilon = v_i(A_i) \ge v_i(A_1) - \varepsilon = (|A_1| - 1) \cdot \varepsilon \\ \iff & |A_i| \ge |A_1| - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \sum_{i\in N\setminus\{1\}} |A_i| \geq (n-1)\cdot(|A_1|-1)\\
&\iff m-|A_1| \geq (n-1)\cdot|A_1|-(n-1)\\
&\iff n\cdot|A_1| \leq m+n-1,
\end{aligned}$$

其中第一行是 EFX$_0$的必要条件。因此，任意分配 $\mathcal{A}$ 要成为 EFX$_0$，必须满足 $|A_1| \leq \frac{m+n-1}{n}$；等价地，由于 $|A_1|$ 是整数，

$$|A_1| \leq \left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor. \tag{5}$$

特别地，如果 $m \leq n$（即 $c \leq 0$），那么 $\frac{m+n-1}{n} < 2$，从而 $\lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor = 1$，因此每个 EFX$_0$ 分配 $|A_1| \leq 1$。

接下来，我们证明存在一个 EFX$_0$ 分配 $\mathcal{A}^* = (A_1^*, \ldots\ldots, A_n^*)$，满足 $|A_1^*| = \lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor$。令 $\mathcal{A}^*$ 为满足以下条件的分配：对于 $i \geq 2$,

(i) $|A_i| \in \{\lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor - 1, \lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor\}$,

(ii) 恰好有 $r := m+n-1-n\cdot\lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor$ 个代理人的物品束大小正好为 $\lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor$，其余 $n-1-r$ 个代理人的物品束大小正好为 $\lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor - 1$，并且

(iii) $|A_1| = \lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor$.

注意到，根据上述约束，

$$\begin{aligned}
A_1 + \sum_{i\in N\setminus\{1\}} |A_i| &= \left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor + r\cdot\left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor + (n-1-r)\cdot\left(\left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor - 1\right)\\
&= n\cdot\left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor - (n-1-r)\\
&= n\cdot\left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor - n + 1 + \left(m+n-1-n\cdot\left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor\right)\\
&= m.
\end{aligned}$$

结合每个代理人对每件物品的价值都相同这一事实，我们可以确定该分配 $\mathcal{A}^*$ 有效且存在。

现在我们证明 $\mathcal{A}^*$ 是 EFX$_0$。对于任意 $i \geq 2$，条件(i)和(iii)给出

$$|A_i| \geq \left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor - 1 = |A_1| - 1.$$

因此，我们得到

$$v_i(A_i) = \varepsilon\cdot|A_i| \geq \varepsilon\cdot(|A_1|-1) = v_i(A_1\setminus\{g\})$$

对于任意 $g \in A_1$。因此，移除代理人1的物品束中的任意一件物品（特别是价值最低的物品）后，任何代理人 $i \in N\setminus\{1\}$ 都不会嫉妒代理人1。

对于任意两个代理人 $i,\ j \geq 2, i \neq j$，条件(i)给出 $|A_i|,\ |A_j| \in \{\lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor - 1, \lfloor \frac{m+n-1}{n} \rfloor\}$。因此，我们有

$$|A_i| \geq |A_j| - 1 \quad \text{and} \quad |A_j| \geq |A_i| - 1.$$

由于 $v_i(A_i) = v_j(A_i) = \varepsilon\cdot|A_i|$，$v_i(A_j) = v_j(A_j) = \varepsilon\cdot|A_j|$，且每个代理人 $i \in N\setminus\{1\}$ 对每件物品的估值均为 ε，因此移除任意一件物品后，他们彼此之间都不会产生嫉妒。

最后，对于任意 $i \geq 2$ 和任意 $g \in A_i$，我们有

$$v_1(A_i \setminus \{g\}) = |A_i| - 1 \leq |A_1| = v_1(A_1).$$

因此，代理人1不会嫉妒任何其他代理人，即使移除任意一件物品后也是如此。

因此， $\mathcal{A}^*$ 满足 EFX_0。

考虑任意一个 EFX_0 分配 $\mathcal{A} = (A_1, \ldots\ldots, A_n)$。然后注意到，对于所有 $i \geq 2$， $v_1(A_1) = |A_1|$ 和 $v_i(A_i) = \varepsilon \cdot |A_i|$，且当 $\varepsilon \to 0$ 时它们趋于零。$\sum_{i \in N} v_i(A_i)^p$ 中唯一的渐近不可忽略项是 $|A_1|^p$。因此，令 $\varepsilon \to 0$，我们得到

$$\max_{\mathcal{A} \in \Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A}) = \left(\frac{v_i(A_i)^p}{n}\right)^{1/p} = \frac{|A_1|}{n^{1/p}} + o(1) = \frac{\left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor}{n^{1/p}} + o(1)$$

结合式 (4)、对每个 EFX_0 分配成立的界 $|A_1| \leq \left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor$，以及实现 $|A_1| = \left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor$ 的 EFX_0 分配的构造，我们对于 $\mathcal{I}_\varepsilon$ 得到

$$\text{PoEFX}_0^{\mathcal{I}_\varepsilon}(p, c) = \frac{\text{OPT}_p(\mathcal{I}_\varepsilon)}{\max_{\mathcal{A} \in \Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A})} = \frac{m}{\left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor} - o(1).$$

对 $\varepsilon > 0$ 取上确界（等价地，对 $\varepsilon \to 0^+$ 取上确界）可得

$$\text{PoEFX}_0(p, c) \geq \frac{m}{\left\lfloor \frac{m+n-1}{n} \right\rfloor} - o(1) = \frac{n+c}{\left\lfloor \frac{2n+c-1}{n} \right\rfloor} - o(1).$$

此外，由于所有代理人都对 $\mathcal{I}_\varepsilon$ 中的所有物品赋予正价值，因此 EFX 与 EFX_0 等价，所以 PoEFX(p, c) 的下界也相同。

B.2 定理 4.3 的证明

我们首先证明 EFX_0 的界。在开始证明上界之前，我们先展示一个有用的性质。

设 $m \leq n+3$，并从一个部分 EFX_0 分配开始，其中只有代理人 i 持有单元素集合 $\{g\}$，其余代理人都持有空束。那么，必定存在一系列由 $m-1$ 次单物品插入组成的操作，每次插入后都跟着一系列（可能为空的）保持 EFX_0 的交换，将该部分分配扩展为一个完整的 EFX_0 分配，并且代理人 i 保留 g。

为说明这一点，从仅将 g 分配给 i、而其他每位代理人都持有空束的部分分配开始；这显然满足 EFX_0。逐一加入剩余物品。每次插入后，应用 Mahara [2024] 的基于势函数的增补（针对 $m \leq n+3$）来恢复 EFX_0。由于 $\{g\}$ 是单元素集合，且在其他每位代理人的嫉妒比较中都排在末尾（移除其中唯一的物品后就得到空束），我们可以维持一个不变量，即 g 永远不会被重新分配：如果某次交换会移动 g，就调换相应环的方向（或在势函数中打破平局），以便在该步骤中重新分配另一个物品。

令 $v^* := \max_{i \in N,\, g \in G} v_i(g)$。另令 $\text{OPT}_p(\mathcal{I}) := \max_{\mathcal{A} \in \Pi(G)} W_p(\mathcal{A})$，以及 $\text{OPT}_p^{\text{EFX}_0}(\mathcal{I}) := \max_{\mathcal{A} \in \Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A})$。

对于任意分配 $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ 以及任意 $p \in (0, 1]$，

$$W_p(\mathcal{A}) \leq W_1(\mathcal{A}) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} v_i(A_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \max_{i \in N} v_i(g) \leq \frac{m v^*}{n}.$$

特别地，$\text{OPT}_p(\mathcal{I}) \leq m v^* / n$。

接下来，令 $(i^*, g^*) := \arg\max_{i \in N, g \in G} v_i(g)$。

^如果 $m \le n$（等价地，$c \le 0$），则构造一个（完整的）分配 $\mathcal{A}$：将 g^* 分配给代理人 i^*，并将 $G\setminus\{g^*\}$ 中的每件剩余物品分配给 $N\setminus\{i^*\}$ 中的一个互不相同的代理人（这是可能的，因为 $m-1 \le n-1$）；^让所有其他代理人的物品束均为空。这样，每个物品束的大小都至多为 1，因此 $\mathcal{A}$ 满足 EFX_0。于是，

$$W_p(\widehat{\mathcal{A}}) \ge \left(\frac{1}{n}\cdot (v^*)^p\right)^{1/p} = \frac{v^*}{n^{1/p}}.$$

因此，当 $m < n$ 时，$\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A}) \ge \frac{v^*}{n^{1/p}}$ 也成立。

根据前述 Mahara 扩充性质 [，从仅将 g^* 分配给 i^* 的部分 EFX_0 分配 ^ 开始，我们可以将其扩展为完整的 EFX_0 分配 $\mathcal{A}^*$，同时使 g^* 保留在 i^* 的物品束中。于是，我们有

$$W_p(\widehat{\mathcal{A}}^*) = \left(\frac{1}{n}v_{i^*}(\widehat{A}^*_{i^*})^p + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} v_j(\widehat{A}^*_j)^p\right)^{1/p} \ge \left(\frac{1}{n}v_{i^*}(\widehat{A}^*_{i^*})^p\right)^{1/p} = \frac{v^*}{n^{1/p}},$$

^ ^since $v_{i^*}(A^*_{i^*}) \ge v_{i^*}(g^*) = v^*$。此外，由于 s$\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A}) \ge W_p(\mathcal{A}^*)$，我们得到

$$\text{PoEFX}_0^{\mathcal{I}}(p,c) = \frac{\text{OPT}_p(\mathcal{I})}{\text{OPT}_p^{\text{EFX}_0}(\mathcal{I})} \le \frac{mv^*/n}{v^*/n^{1/p}} = (n+c)\cdot n^{1/p-1}.$$

由于上述上界对每个满足 $m = n+c$ 的实例 $\mathcal{I}$ 都成立，取 $\sup_{\mathcal{I}}$ 可得 $\text{PoEFX}_0(p,c) \le (n+c)\cdot n^{1/p-1}$，证毕。

由于 $\Pi_{\text{EFX}_0}(G) \subseteq \Pi_{\text{EFX}}(G)$，我们有 $\text{OPT}_p^{\text{EFX}}(\mathcal{I}) = \max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\text{EFX}}(G)} W_p(\mathcal{A}) \ge \text{OPT}_p^{\text{EFX}_0}(\mathcal{I})$，因此同一上界对 $\text{PoEFX}(p,c)$ 也成立。

B.3 定理 4.4 的证明

我们首先证明 $\text{PoEFX}_0(p,\ c)$ 的界限，并在最后说明如何将其推广到 $\text{PoEFX}(p,\ c)$。

我们首先考虑 $c < 0$（即 $m < n$）的情形。此时，在每个分配 $\mathcal{A} = (A_1,\ \ldots\ldots,\ A_n)$ 中，都存在一个代理人 $i \in N$，满足 $A_i = \varnothing$。由于 $p \le 0$，这意味着对于每个分配 $\mathcal{A} \in \Pi(G)$，都有 $W_p(\mathcal{A}) = 0$。因此，$\max_{\mathcal{A}\in\Pi(G)} W_p(\mathcal{A}) = 0$。由于 $\Pi_{\text{EFX}}(G) \subseteq \Pi(G)$，我们也有 $\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\text{EFX}}(G)} W_p(\mathcal{A}) = 0$（$\text{EFX}_0$ 的情形也类似）。因此，$\text{PoEFX}(p,\ c) = \text{PoEFX}_0(p,\ c) = 0$。因此，在证明的其余部分，我们可以假设 $c \ge 0$，即 $c \in \{0,1,2,3\}$。

固定 $n \ge 2$ 和 $c \in \{0,1,2,3\}$，其中 $m = n + c$。设物品集合为 $G = \{p_2,\ldots,p_n\} \cup S$，其中 $|S| = c+1$。代理人的估值函数定义如下：

- 对于代理人1：对于每个 $g \in S$，$v_1(g) = \frac{1}{c+1}$；对于 $i \ge 2$，$v_1(p_i) = 0$。
- 对于每个 $i \in \{2,\ldots,n\}$：$v_i(p_i) = 1$，且对于每个 $g \in S$ 以及某个足够小的 $\varepsilon > 0$，$v_i(g) = 1+\varepsilon$；所有其他物品对代理人 i的价值均为 0。

将分配 $\mathcal{A}^* = (A_1^*、\ \ldots\ldots、\ A_n^*)$ 定义如下：将 S中的所有 $c+1$ 物品分配给代理人1，并将每个物品 p_i 分配给代理人 $i \ge 2$。于是，在 $\mathcal{A}^*$下，每位代理人获得的效用均为 1。因此，对于每个 $p < 0$，$W_p(\mathcal{A}^*) = 1$，且 $W_0(\mathcal{A}^*) = (\prod_{i=1}^n 1)^{1/n} = 1$。因此，令 $\text{OPT}_p(\mathcal{I}) := \max_{\mathcal{A}\in\Pi(G)} W_p(\mathcal{A})$，可得对所有 $p \le 0$，$\text{OPT}_p(\mathcal{I}) \ge 1$。

现在，令 $\mathcal{A} = (A_1、\ \ldots\ldots、\ A_n)$ 为任意一个 EFX_0 分配。对于代理人 $i \ge 2$，他们唯一看重的私人物品是 p_i，而它对至多一名代理人的效用贡献至多为 1。因此，无论这些物品如何分配，集合 $\{p_2,\ldots,p_n\}$ 对 $\sum_{i=2}^n v_i(A_i)$ 的总贡献至多为 $n-1$。接着，注意到

$$|A_1 \cap S| \le 2.$$

要理解原因，假设 $|A_1 \cap S| \geq 3$。那么，由于 $c \leq 3$， S 中至多还剩下 $c+1-|A_1 \cap S| \leq 1$ 个物品可分配给 $N \setminus \{1\}$中的代理人。因此，对于任意 $i \in N \setminus \{1\}$ 和 $g \in A_1$,

$$v_i(A_i) \leq v_i(p_i) + 1 + \varepsilon = 2 + \varepsilon < 2 + 2\varepsilon \leq v_i(A_1 \setminus \{g\}),$$

这与假设 $\mathcal{A}$ 是一个 EFX_0 分配相矛盾。因此，对于每个 EFX_0 分配 $\mathcal{A}$，都有 $|A_1 \cap S| \in \{0,1,2\}$。我们只需给出 $\max_{\mathcal{A} \in \Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A})$ 的上界。如果 $\max_{\mathcal{A} \in \Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A}) = 0$，而 $\text{OPT}_p(\mathcal{I}) > 0$，那么 $\text{PoEFX}_0^{\mathcal{I}}(p, c) = +\infty$，定理便显然成立。否则，固定一个满足 $W_p(\mathcal{A}) > 0$ 的 EFX_0 分配 $\mathcal{A}$，这意味着对所有 i，都有 $v_i(A_i) > 0$，因此 $\gamma \geq 1$。于是，$|A_1 \cap S| \in \{1,2\}$。

接下来，我们给出在 $p=0$（即纳什福利）时，任意 EFX_0 分配的最大 p-均值福利上界。令 $\gamma = |A_1 \cap S|$，并固定某个满足 $\gamma \leq c+1$ 的 $\gamma \in \{1,2\}$。那么，从 S 中分配给 $N \setminus \{1\}$ 中代理人的物品总数为 $c+1-\gamma$。

S 中的每件物品对任意代理人 $i \geq 2$的效用贡献恰为 $1+\varepsilon$，因此，S 中未分配给代理人1的 t 件物品对总和 $\sum_{i=2}^{n} v_i(A_i)$的贡献恰为 $t(1+\varepsilon)$。每件私人物品p_j 对至多一位代理人的效用贡献价值 1（只有代理人 j 对其赋予价值），因此， $\{p_2, \ldots, p_n\}$ 对 $\sum_{i=2}^{n} v_i(A_i)$的总贡献至多为 $n-1$。于是，

$$\sum_{i=2}^{n} v_i(A_i) \leq (n-1) + t(1+\varepsilon).$$

于是，

$$\prod_{i=2}^{n} v_i(A_i) \leq \left(\frac{(n-1) + t(1+\varepsilon)}{n-1} \right)^{n-1} = \left(1 + \frac{t(1+\varepsilon)}{n-1} \right)^{n-1}.$$

此外， $v_1(A_1) = \gamma/(c+1)$。因此，我们得到

$$W_0(\mathcal{A}) = \left(v_1(A_1) \cdot \prod_{i=2}^{n} u_i \right)^{1/n} \leq \left(\frac{\gamma}{c+1} \cdot \left(1 + \frac{(c+1-\gamma)(1+\varepsilon)}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{1/n}.$$

于是，

$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{A} \in \Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_0(\mathcal{A}) &\leq \left(\frac{\gamma}{c+1} \cdot \left(1 + \tfrac{c+1-\gamma}{n-1}(1+\varepsilon) \right)^{n-1} \right)^{1/n} \\ &\leq \max_{\gamma \in \{1,2\}} \left(\frac{\gamma}{c+1} \cdot \left(1 + \tfrac{c+1-\gamma}{n-1}(1+\varepsilon) \right)^{n-1} \right)^{1/n} \\ &\underset{\varepsilon \to 0}{\to} \max_{\gamma \in \{1,2\}} \left(\frac{\gamma}{c+1} \cdot \left(1 + \tfrac{c+1-\gamma}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{1/n}, \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可以任意小（且为有理数），实例上的上确界价格至少为当 $\varepsilon \to 0^+$时的极限。

还需注意，对任意 $p \leq 0$,

$$\max_{\mathcal{A} \in \Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A}) \leq \max_{\mathcal{A} \in \Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_0(\mathcal{A}).$$

结合上述结果，我们得到

$$\max_{\mathcal{A} \in \Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A}) \leq \max_{\gamma \in \{1,2\}} \left(\frac{\gamma}{c+1} \cdot \left(1 + \tfrac{c+1-\gamma}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{1/n}.$$

因此，对于构造的实例 $\mathcal{I}$，我们有

$$\mathrm{PoEFX}_0^{\mathcal{I}}(p,c)=\frac{\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})}{\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A})}.$$

由于 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})\geq 1$，且我们已证明

$$\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX0}}(G)} W_p(\mathcal{A})\leq \max_{\gamma\in\{1,2\}}\left(\frac{\gamma}{c+1}\cdot\left(1+\frac{c+1-\gamma}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{1/n},$$

因此可得

$$\mathrm{PoEFX}_0^{\mathcal{I}}(p,c)\geq\frac{1}{\max_{\gamma\in\{1,2\}}\left(\frac{\gamma}{c+1}\cdot\left(1+\frac{c+1-\gamma}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{1/n}}.$$

取 对所有满足 $m=n+c$ 的实例取上确界，我们得到 $\mathrm{PoEFX}_0(p,c)$ 的界，如所需 d.

现在，我们证明同一构造也给出了 $\mathrm{PoEFX}^{\mathcal{I}}(p,c)$ 的所述下界。事实上，固定 $p\leq 0$，并考虑上述定义的实例。令 $\mathcal{A}=(A_1,\ldots,A_n)$ 为在所有 EFX 分配中使 W_p 最大化的 EFX 分配。若 $W_p(\mathcal{A})=0$，则 $\mathrm{PoEFX}^{\mathcal{I}}(p,c)=\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})_0=+\infty$，此时该界显然成立。否则 $W_p(\mathcal{A})>0$，这意味着对所有 $i\in N$，$v_i(A_i)>0$，尤其是代理人1必须从 S 中至少获得一件物品。令 $\gamma:=|A_1\cap S|\geq 1$。

我们声称，在 EFX 条件下 $\gamma\leq 2$ 也成立。反设 $\gamma\geq 3$。由于 $|S|=c+1\leq 4$，至多有一件物品从 S 留在 A_1 之外。因此，每个代理人 $i\in\{2,\ldots,n\}$ 从 S 至多获得一件物品，于是

$$v_i(A_i)\;\leq\; v_i(p_i)+(1+\varepsilon)\;=\;2+\varepsilon.$$

另一方面，对于任意 $g\in A_1\cap S$，我们有 $|A_1\cap S|\geq 3$，因此 $A_1\setminus\{g\}$ 至少包含来自 S 的两个物品，从而得到

$$v_i(A_1\setminus\{g\})\;\geq\;2(1+\varepsilon)\;=\;2+2\varepsilon.$$

由于对于每个 $i\geq 2$ 和每个 $g\in S$，$v_i(g)=1+\varepsilon>0$，这些正是相关的 EFX不等式（其中 i 为嫉妒代理人，代理人1为被嫉妒代理人），于是我们得到 $v_i(A_i)<v_i(A_1\setminus\{g\})$，矛盾。因此，对于任何具有正 p-均值福利的 EFX 分配，都有 $\gamma\in\{1,2\}$。

有了 $\gamma\in\{1,2\}$，对 $W_0(\mathcal{A})$ 的界定（从而通过 $W_p(\mathcal{A})\leq W_0(\mathcal{A})$ 界定所有 $p\leq 0$ 对应的 $W_p(\mathcal{A})$）的其余论证也类似，因此我们对 $\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX}}(G)} W_p(\mathcal{A})$ 得到与 EFX_0 情形相同的上界。将其与 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})\geq 1$ 结合，可得到相同的下界：

$$\mathrm{PoEFX}^{\mathcal{I}}(p,c)\geq\frac{1}{\max_{\gamma\in\{1,2\}}\left(\frac{\gamma}{c+1}\cdot\left(1+\frac{c+1-\gamma}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{1/n}}.$$

再次对所有包含 $m=n+c$ 的实例取上确界，即可得到所需的 $\mathrm{PoEFX}(p,c)$ 上界。

B.4 定理 4.5 的证明

设 $\mathcal{A}^{\mathrm{opt}}=(A_1^{\mathrm{opt}},\ldots,A_n^{\mathrm{opt}})$ 是在 $\Pi(G)$ 上使 W_p 最大化的一个分配。记 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I}):=W_p(\mathcal{A}^{\mathrm{opt}})=\max_{\mathcal{A}\in\Pi(G)} W_p(\mathcal{A})$。

若 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})=0$，则由于 $p\leq 0$，对于每个分配 $\mathcal{A}$，都有 $W_p(A)=0$。因此，分子和分母都为 0，故 $\mathrm{PoEFX}^{\mathcal{I}}(p,c)=\mathrm{PoEFX}_0^{\mathcal{I}}(p,c)=0$。这种情况包括 $m<n$（即 $c<0$），因为必有某个代理人获得 $\varnothing$，因此其效用为 0。因此，假设 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})>0$。那么每个代理人都必须获得严格为正的效用，特别是 $m\geq n$（等价地，$c\geq 0$），并且对所有 $i\in N$ 都有 $|\mathcal{A}_i^{\mathrm{opt}}|\geq 1$。

因此，

$$\sum_{i\in N}|A_i^{\mathrm{opt}}| = n + c \implies \max_{i\in N}|A_i^{\mathrm{opt}}| \le 1 + c.$$

对于每个 $i \in N$，令 $g_i \in A_i^{\mathrm{opt}}$ 为代理人 i 在 A_i^{opt} 中价值最高的单个物品，并定义$b_i := v_i(g_i)$。根据可加性和最大性，对于每个 $i \in N$，我们有

$$b_i \ge \frac{v_i(A_i^{\mathrm{opt}})}{|A_i^{\mathrm{opt}}|}. \tag{6}$$

然后，定义

$$\widehat{W}_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{n}\sum_{i\in N} b_i^p\right)^{1/p} & \text{for } p < 0, \\ \left(\Pi_{i\in N} b_i\right)^{1/n} & \text{for } p = 0. \end{cases}$$

利用 (6) 以及 $f(x) = x^p$ 对于所有 $p < 0$ 都是递减函数这一事实（且 log 是递增的），我们得到

$$\widehat{W}_p \ge \begin{cases} \frac{W_p(\mathcal{A}^{\mathrm{opt}})}{\max_{i\in N}|A_i^{\mathrm{opt}}|} & \text{for } p < 0, \\ \frac{W_0(\mathcal{A}^{\mathrm{opt}})}{\left(\Pi_{i\in N}|A_i^{\mathrm{opt}}|\right)^{1/n}} & \text{for } p = 0. \end{cases}$$

考虑这样一种部分分配：每个代理人 $i \in N$只获得 $\{g_i\}$。该分配满足 EFX_0性质，因为每个非空物品束都是单元素集合（移除其中唯一的物品后便得到空集）。这里的关键观察是，我们可以用一种方式分配剩余的 c物品，使得 $\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A}) \succeq \widehat{W}_p$。Mahara [2024] 关于 $m \le n+3$的构造性存在性证明保证了这一点：他们证明，对于一般估值（因此也包括可加估值），当 $m \le n+3$ 时，存在满足 EFX_0 性质的分配；该证明采用增量方式，每次添加一个物品，并通过字典序势函数维持 EFX 性质。因此，从任意满足 EFX_0 性质的部分分配（尤其是我们构造的分配）出发，我们可以逐个插入剩余物品，同时保持 EFX_0 性质，直到所有物品都分配完毕。

然后，我们可以将这一增补应用于单元素 EFX 分配 $(\{g_i\})_{i\in N}$。由于 p-均值福利对于 $p \le 0$ 在每个坐标上都是非递减的，而且增量构造中的 EFX_0-恢复交换可以通过嫉妒环消除来实现，且不会降低任何代理人的价值，因此在整个增补过程中，效用向量在各坐标上均非递减，因而$\succeq$$p$-均值福利不会下降。因此，存在这样一个完整的 EFX 分配 $\mathcal{A}$，使得

$$W_p(\widehat{\mathcal{A}}) \ge \widehat{W}_p.$$

结合上述方程可得，对于 $p < 0$,

$$\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A}) \ge W_p(\widehat{\mathcal{A}}) \ge \widehat{W}_p \ge \frac{W_p(\mathcal{A}^{\mathrm{opt}})}{\max_{i\in N}|A_i^{\mathrm{opt}}|} \ge \frac{W_p(\mathcal{A}^{\mathrm{opt}})}{1+c}.$$

因此，

$$\max_{A\in\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A}) \ge \frac{\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})}{1+c},$$

从而，

$$\mathrm{PoEFX}_0^{\mathcal{I}}(p,c) := \frac{\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})}{\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A})} \le 1 + c.$$

对满足 $m = n + c$ 的实例取上确界，得到 $\mathrm{PoEFX}_0(p,\ c) \le 1 + c$。

对于 $p=0$，注意到 $\Pi_{i\in N}|A_i^{\mathrm{opt}}| \le \binom{n+c}{n}^n$，由此得到

$$\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)} W_0(\mathcal{A}) \ge \frac{W_0(\mathcal{A}^{\mathrm{opt}})}{(n+c)/n} = \frac{n}{n+c}\cdot W_0(\mathcal{A}^{\mathrm{opt}}).$$

因此，

$$\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)} W_0(\mathcal{A}) \ge \frac{n}{n+c}\mathrm{OPT}_0(\mathcal{I}),$$

因此，

$$\mathrm{PoEFX}_0^{\mathcal{I}}(0,c) := \frac{\mathrm{OPT}_0(\mathcal{I})}{\max_{\mathcal{A}\in\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G)} W_0(\mathcal{A})} \le \frac{n+c}{n} = 1+\frac{c}{n}.$$

对具有 $m=n+c$ 的实例取上确界，得到 $\mathrm{PoEFX}_0(0,c) \le 1+c/n$。

由于 $\Pi_{\mathrm{EFX}_0}(G) \subseteq \Pi_{\mathrm{EFX}}(G)$，相同的上界也适用于 $\mathrm{PoEFX}(p,c)$ 和 $\mathrm{PoEFX}(0,c)$。

C 第5节中略去的证明

C.1 定理5.2的证明

我们首先证明 EFX 与 +PO 的 NP 困难性结果。先给出以下引理。

引理 *C.1.* 设 $\mathcal{I}=(N,G,v)$ 是一个实例，其中每个物品 $g\in G$ 都满足：对于至少一个代理人 $i\in N$，有 $v_i(g)>0$。设 $\mathcal{I}'=(N\cup\{d\},G,v')$ 是从 $\mathcal{I}$ 通过添加一个新代理人 d 得到的实例，其中对于所有 $g\in G$，都有 $v'_d(g)=0$；对于所有 $i\in N$，都有 $v'_i(\cdot)=v_i(\cdot)$。那么，$\mathcal{I}$ 存在一个同时满足 *EFX* 和帕累托最优的分配，当且仅当 $\mathcal{I}'$ 存在这样的分配。

证明。($\Rightarrow$) 设 $\mathcal{A}=(A_1,\dots,A_n)$ 是 $\mathcal{I}$ 中一个同时满足 EFX 和帕累托最优的分配。通过 $A'_i := A_i$（对 $i\in N$），以及 $A'_d := \varnothing$，在 $\mathcal{I}'$ 中定义 $\mathcal{A}'=(A'_1,\dots,A'_n,A'_d)$。

我们首先证明 EFX。原有代理人之间的所有约束均保持不变。如果 $j=d$，那么 $A'_j=\varnothing$，因此 EFX 条件是空泛成立的。如果 $i=d$，那么对于每件物品都有 $v'_d(g)=0$，因此不存在满足 $v'_d(g)>0$ 的 $g\in A'_j$，所以 EFX 条件再次空泛成立。

接下来，我们证明帕累托最优。反设某个完全分配 $\mathcal{B}'$ 在 $\mathcal{I}'$ 中帕累托支配 $\mathcal{A}'$。代理人 d 不可能得到严格改善（因为 $v'_d\equiv 0$），因此必定有某个 $i\in N$ 得到严格改善。

此外，不失一般性，我们可以假设 $B'_d=\varnothing$：如果 $g\in B'_d$，那么根据假设，存在某个代理人 $k\in N$ 满足 $v_k(g)>0$。将 g 从 d 重新分配给这样的代理人 k。这不会降低任何代理人的效用（因为 $v'_d(g)=0$ 且所有估值均非负），并且会弱增代理人 k 的效用。对 B'_d 中的所有物品重复此操作，我们便得到一个满足 $\mathcal{B}_d=\varnothing$ 的完全分配 $\mathcal{B}$，且它仍然帕累托支配 $\mathcal{A}'$。

因此，将 $\mathcal{B}$ 限制在原有代理人 N 上，可得到 G的一个完全分配，且该分配在 I中帕累托支配 $\mathcal{A}$，这与 $\mathcal{A}$的帕累托最优性矛盾。因此，$\mathcal{A}'$ 是帕累托最优的。

($\Leftarrow$) 设 $\mathcal{A}'$ 是 $\mathcal{I}'$ 中的一个完全分配，且满足 EFX 和帕累托最优。根据上文相同的帕累托最优性论证，必有$A'_d=\varnothing$ 成立（否则，某件原有物品会被分配给 d，将其转给一位对其估值为正的原有代理人，就能得到帕累托改进）。因此，将 $\mathcal{A}'$ 限制在原有代理人上，可得到 $\mathcal{I}$中 G的一个完全分配 $\mathcal{A}$。

All 原有代理人之间的不等式在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$中完全相同，因此显然满足 EFX

接下来，我们证明帕累托最优性。若 $\mathcal{A}$不是 $\mathcal{I}$中的帕累托最优分配，设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{I}$中对 $\mathcal{A}$ 的一个帕累托改进。将$\mathcal{B}$ 扩展到 $\mathcal{I}'$，并把空捆绑分配给 d，即可在 $\mathcal{I}'$中得到对 $\mathcal{A}'$ 的帕累托改进，这与$\mathcal{A}'$的帕累托最优性矛盾。

□

接下来，我们证明以下填充构造，它会使 $m-n$ 增加 1。

引理 C.2。设 $\mathcal{I} = (N, G, v)$ 是一个实例，其中每件物品 $g \in G$ 都至少被某个代理人 $i \in N$ 赋予 $v_i(g) > 0$。设 $\mathcal{I}^+ = (N \cup \{d\}, G \cup \{x, y\}, v^+)$ 是通过添加一位新代理人 d 和两件新物品 x, y 得到的，并且对所有 $g \in G$，$v_d^+(x) = v_d^+(y) = 1$，$v_d^+(g) = 0$；对所有 $i \in N$，$v_i^+(x) = v_i^+(y) = 0$。那么，$\mathcal{I}$ 存在一个同时满足 EFX 和帕累托最优的完全分配，当且仅当 $\mathcal{I}^+$ 存在这样的分配。

证明。($\Rightarrow$) 设 $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in N}$ 是 $\mathcal{I}$的一个完备 EFX 且帕累托最优分配。定义 $\mathcal{A}^+$，对 $\mathcal{I}^+$，令 $A_i^+ := A_i$，对所有 $i \in N$ 以及 $A_d^+ := \{x, y\}$。

我们先证明 EFX。对于原有代理人，EFX 成立，因为它在 $\mathcal{A}$ 中成立，且 x，y 对所有原有代理人的价值均为 0。对于任意原有代理人 $i \in N$ 和新代理人 d，有 $v_i^+(x) = v_i^+(y) = 0$，因此不存在满足 $v_i^+(g) > 0$的 $g \in A_d^+$，EFX 条件自然成立。对于 $i = d$和任意其他代理人j，对于所有不属于 $\{x, y\}$的物品 g，有 $v_d^+(g) = 0$，因此同样不存在满足 $v_d^+(g) > 0$的 $g \in A_j^+$；EFX 条件自然成立。

接下来，我们证明帕累托最优。反设某个完全分配 $\mathcal{B}^+$ 在 $\mathcal{I}^+$ 中帕累托支配 $\mathcal{A}^+$。代理人 d 已经获得了所有其具有正价值的物品（即 x 和 y），因此 d 不可能得到严格改进。所以，必定有某个原有代理人得到严格改进。此外，若 $\mathcal{B}^+$ 将任何原始物品 $g \in G$ 分配给代理人 d，那么由于 $v_d(g) = 0$，且 g 对至少一个原有代理人具有正价值，我们可以将 g 从 d 重新分配给这样一位代理人，同时不降低任何代理人的价值；因此，不失一般性，我们可以假设 $B_d^+ \subseteq \{x, y\}$。于是，将 $\mathcal{B}^+$ 限制在 N 上，可得到 G 的一个分配，该分配帕累托改进了 $\mathcal{A}$，这与 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{I}$ 中是帕累托最优相矛盾。由于原有代理人对 x y 的价值为 0，这种严格改进必定来自原有物品 G 在原有代理人之间的另一种分配，且不会损害任何原有代理人。然而，这将与 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{I}$ 中的帕累托最优相矛盾。因此，$\mathcal{A}^+$ 是帕累托最优。

($\Leftarrow$) 令 $\mathcal{A}^+$ 为 $\mathcal{I}^+$ 中一个完全的 EFX 且帕累托最优分配。由帕累托最优性可知，x 和 y 都必须分配给代理人 d（否则，将缺失的物品移给 d 会严格提高 d 的效用，且不会降低任何其他代理人的效用，因为其他每个代理人对 x, y 的估值均为 0）。此外，根据关于 G 的假设及帕累托最优性，代理人 d 不能获得任何原始物品 $g \in G$（因为某个原有代理人对 g 的估值为正，将 g 移给该代理人便构成帕累托改进）。因此，$A_d^+ = \{x, y\}$ 和所有原始物品都分配给原有代理人。将 $\mathcal{A}^+$ 限制在 N 上，即得到 $\mathcal{I}$ 中关于 G 的完全分配 $\mathcal{A}$。

我们先证明 EFX。对于原有代理人，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^+$ 中所有相关不等式都相同，因为唯一新增的物品是 x, y，而它们对所有原有代理人的价值均为 0。

接下来，我们证明帕累托最优性。若 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{I}$ 中并非帕累托最优，令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{I}$ 中对 $\mathcal{A}$ 的一个帕累托改进。将 $\mathcal{B}$~扩展为 $\mathcal{I}^+$ 的一个分配 $\mathcal{B}$，并将物品束 $\{x, y\}$ 分配给代理人 d。那么，$\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{I}^+$ 中帕累托支配 $\mathcal{A}^+$，这与 $\mathcal{A}^+$ 的帕累托最优性矛盾。□

接下来，我们从以下 NP 困难判定问题进行归约：给定一个实例 $\mathcal{I}$，判断 $\mathcal{I}$ 是否存在一个同时满足 EFX 和帕累托最优的完全分配。对于可加估值，该问题是 NP 困难的（即使每个代理人只有常数个互不相同的效用值）；参见例如 Garg 和 Murhekar [2023]。

不失一般性地，假设每件物品对至少一个代理人具有正价值。这是因为我们可以删除任意满足以下条件的物品 g：对所有代理人 i，$v_i(g) = 0$；此类物品不会影响 EFX（没有代理人会对其赋予正价值），也不会影响帕累托最优性；我们总能任意分配它们。

^我们将 $\mathcal{I}$ 转换为一个物品数与代理人数相同的实例 $\mathcal{I}$，然后将物品数与代理人数之差增至恰好 c。

我们首先通过添加代理人/物品，将规模平衡至 $m = n$。

- 如果 $m \geq n$，则恰好应用引理 C.1 $(m - n)$ 次，添加 $(m - n)$ 个零代理人。由此得到 ^^一个满足 $|N| = m$ 和 $|G| = m$ 的实例 $\mathcal{I}$。

- 若 $m < n$，则恰好应用引理 C.2 $(n - m)$ 次，添加 $(n - m)$ 个构件（每个构件添加^^一个代理人和两件物品）。应用 ($n - m$ $\mathcal{I}$ $|N| =$) 次后，我们得到一个包含 $n + (n - m)$ 个 $= 2n - m$ 和 $|G| = m + 2(n - m)$ 件 $= 2n - m$的实例，因此再次有 $|N| = |G|$。

通过反复应用引理 C.1 和引理 C.2，$\mathcal{I}$ 存在 EFX 且帕累托最优的分配，当且仅当^如果 $\mathcal{I}$ 也存在这样的分配。

接下来，我们构造间隙 c。从 $\mathcal{I}_b$（满足 $|G_b| = |N_b|$）出发：

- 如果 $c \geq 0$，则恰好再应用引理 C.2 c 次。每次应用都会使 $|G| - |N|$ 增加 1，因此得到的实例 $\mathcal{I}_{(c)}$ 满足 $|G_{(c)}| - |N_{(c)}| = c$，即 $|G_{(c)}| = |N_{(c)}| + c$。
- 如果 $c < 0$，则恰好再应用引理 C.1 $(-c)$ 次，并添加 $(-c)$ 个零代理人。每次应用都会使 $|G| - |N|$ 减少 1，因此得到的实例 $I_{(c)}$ 满足 $|G_{(c)}| - |N_{(c)}| = c$，即 $|G_{(c)}| = |N_{(c)}| + c$。

再次通过反复应用引理 C.1 和引理 C.2，$\mathcal{I}_b$ 存在 EFX 且帕累托最优的分配，当且仅当 $\mathcal{I}^{(c)}$ 也存在这样的分配。

注意，所述映射可在多项式时间内完成，且能保留是/否实例。该构造新增 $\mathcal{O}(|m-n|+|c|)$ 个代理人和物品，所有新增估值均属于 $\{0,1\}$，因此编码规模仅呈多项式增长。因此，即使在承诺条件 $|G| = |N| + c$ 下，对于任意固定整数 $c \leq 3$（且 $m = n + c \geq 1$），判定是否存在同时满足 EFX 和帕累托最优的分配仍是 NP 困难的。

接下来，我们证明 EFX_0 + PO 的 Σ_2^P-完备性结果。

我们首先证明该问题属于 Σ_2^P。为此，我们非确定性地猜测一个分配 $\mathcal{A} = (A_1, \ldots\ldots, A_n)$。随后，我们可以通过验证对每个 $i \neq j$ 和每个 $g \in A_j$，均有 $v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\})$，在多项式时间内检查 $\mathcal{A}$ 是否满足 EFX_0。要检查 $\mathcal{A}$ 是否为帕累托最优，我们向一个 NP 预言机提出以下问题："是否存在一个完全分配 $\mathcal{B} = (B_1, \ldots\ldots, B_n)$ 使得 $v_i(B_i) \geq v_i(A_i)$对所有 $i \in N$均成立，并且 $v_{i^*}(B_{i^*}) > v_{i^*}(A_{i^*})$ 对某个 $i^* \in N$成立？"当且仅当预言机回答"否"时，我们才接受。因此，该问题属于 $\text{NP}^{\text{NP}} = \Sigma_2^P$。

接下来，我们证明 Σ_2^P-困难性。我们从判定是否存在一个同时满足无嫉妒和帕累托最优的分配这一问题进行归约；对于可加估值，该问题是 Σ_2^P-完全的 [de Keijzer 等人,2009]。首先，不失一般性，我们可以删除所有代理人的估值均为 0 的任何物品；这不会影响无嫉妒和帕累托最优分配的存在性。接下来，对于每个代理人 $i \in N$，我们也可以不失一般性地假设所有物品束价值差 $v_i(S) - v_i(T)$ 都是偶整数：令 L_i 为 $\{v_i(g) : g \in G\}$ 的分母的最小公倍数，并将 v_i 乘以 $2L_i$，这样每个 $v_i(g)$ 都是偶整数，因此每个物品束的价值（以及由此得到的任意物品束价值差）也都是偶整数。[6]

现在我们描述一个新实例 $\mathcal{I}' = (N', G', \mathbf{v}')$ 的构造：

- 代理人：$N' = [n+m]$，其中代理人 1、……、n 是原有代理人，而代理人 $n+1$、……、$n+m$是虚拟代理人。
- 物品：$G' = \{g_1, \ldots, g_m, p_1, \ldots, p_n\}$，其中 $g_1, \ldots, g_m$ 是原始物品；对于每个 $i \in [n]$，p_i 是原始代理 i 的私人物品。
- 估值：对于 $i \leq n$，令 $v_i'(g) = v_i(g)$，对所有 $g \in G$，$v_i'(p_i) = 1$，且 $v_i'(p_j) = 0$，对所有 $j \neq i$；对于 $i > n$，令 $v_i'(g') = 0$，对所有 $g' \in G'$。

我们将证明：对于 $\mathcal{I}'$，存在一个分配 $\mathcal{A}'$，使其满足 EFX_0 且帕累托最优，当且仅当存在一个完全分配 $\mathcal{A}$，使其满足无嫉妒且帕累托最优。

对于"若"方向，假设存在一个针对 $\mathcal{I}$ 的分配 $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$，使其满足无嫉妒且帕累托最优。通过令 $A_i' := A_i \cup \{p_i\}$（对所有 $i \leq n$）以及 $A_i' := \varnothing$（对所有 $i > n$），定义针对 $\mathcal{I}'$ 的分配 $\mathcal{A}'$。

我们首先证明 $\mathcal{A}'$ 是帕累托最优的。假设存在矛盾：有一个完全分配 $\mathcal{B}' = (B_1', \ldots\ldots, B_{n+m}')$ 在 $\mathcal{I}'$ 中帕累托改进了 $\mathcal{A}'$。考虑将 $\mathcal{B}'$ 限制在原始物品上：对于每个 $i \leq n$，定义 $B_i := B_i' \cap G$，并将 G 中分配给虚拟代理的任何原始物品重新分配给一位

[6]将每个代理人 i 的估值乘以一个正的常数，不会改变无嫉妒和帕累托最优性：对于任意两个物品束 S, T, $v_i(S) \geq v_i(T)$ 当且仅当 $\alpha_i v_i(S) \geq \alpha_i v_i(T)$。因此，该实例是是实例，当且仅当缩放后的实例也是是实例。

任意原始代理。这样做不会降低该原始代理的效用，也不会降低其他任何人的效用，因为虚拟代理对所有物品的估值均为 0。重新分配后，$\widetilde{\ }$我们得到一个在原有代理人之间分配原始物品的分配 $\mathcal{B}$。对于每位原始代理 $i \le n$，我们有

$$v_i(\widetilde{B}_i) \ge v_i(B'_i \cap G) \ge v'_i(B'_i) - 1 \ge v'_i(A'_i) - 1 = v_i(A_i),$$

其中，第二个不等式利用了代理人 i 从私人物品（即从 p_i）至多获得 1 的效用；最后一个等式则由 $v'_i(p_i) = 1$ 得出。此外，$\mathcal{B}'$ 严格帕累托改进 $\mathcal{A}'$，意味着某个原有代理人在 $\mathcal{B}'$ 中严格变得更好；由于私人物品带来的效用无法超过 1（在 $\mathcal{A}'$ 中已达到），这一严格改进必定来自原始物品；$\widetilde{\ }$因此，对某个 i，有 $v_i(B_i) > v_i(A_i)$。于是，$\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{I}$ 中帕累托改进 $\mathcal{A}$，这与 $\mathcal{A}$ 是帕累托最优矛盾。因此，$\mathcal{A}'$ 是帕累托最优。

接下来，我们证明 $\mathcal{A}'$ 满足 EFX_0。涉及虚拟代理的所有 EFX_0 不等式都显然成立，因为每个虚拟代理对所有物品的估值均为 0（并且在 A' 中，每个虚拟代理持有 $\varnothing$）。因此，考虑任意两个互不相同的原始代理人 $i,\ j \in N$，以及任意物品 $g \in A'_j$。若 $g = p_j$，则

$$v'_i(A'_i) = v_i(A_i) + 1 \ge v_i(A_j) = v'_i(A'_j \setminus \{p_j\}),$$

其中，不等式成立是因为 $\mathcal{A}$ 是无嫉妒的（因此 $v_i(A_i) \ge v_i(A_j)$）。如果 $g \ne p_j$（因此 $g \in A_j$），那么利用$v'_i(p_j) = 0$,

$$v'_i(A'_j \setminus \{g\}) = v_i(A_j \setminus \{g\}) \le v_i(A_j) \le v_i(A_i) < v_i(A_i) + 1 = v'_i(A'_i).$$

因此 $\mathcal{A}'$ 是 EFX_0。

接下来，我们证明“仅当”方向。假设存在一个分配 $\mathcal{A}' = (A'_1, \ldots\ldots, A'_{n+m})$，它对$\mathcal{I}'$ 而言是 EFX_0 且帕累托最优。由于 $\mathcal{A}'$ 是帕累托最优的，对于每个 $i \in [n]$，必有 $p_i \in A'_i$；否则，将p_i 重新分配给代理人 i 会严格提高代理人 i 的效用，且不会降低其他任何代理人的效用（所有其他代理人对 p_i 的价值均为 0）。此外，由于 G' 中的每件物品对至少一个原始代理人具有正价值（移除所有代理人价值均为 0 的物品后），帕累托最优分配不可能将 G' 中的任何物品分配给虚拟代理；因此，对所有 $i > n$，均有 $A'_i = \varnothing$。

对每个 $i \in N$，定义 $A_i := A'_i \setminus \{p_i\}$。我们证明 $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ 无嫉妒。任取两个互不相同的代理人 $i, j \in [n]$。将 EFX_0 不等式应用于代理人 i 和 j，以及物品 $g = p_j \in A'_j$:

$$v'_i(A'_i) \ \ge \ v'_i(A'_j \setminus \{p_j\}).$$

利用 $v'_i(A'_i) = v_i(A_i) + 1$ 和 $v'_i(A'_j \setminus \{p_j\}) = v_i(A_j)$（因为对于 $i \ne j$，$v'_i(p_j) = 0$），我们得到$v_i(A_i) + 1 \ge v_i(A_j)$。由于 $v_i(A_i)$ 和 $v_i(A_j)$ 是偶整数（由缩放可知），这意味着 $v_i(A_i) \ge v_i(A_j)$。因此 $\mathcal{A}$ 无嫉妒。

最后，$\mathcal{A}$ 必须是帕累托最优：否则，就存在一个分配 $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_n)$，它在 $\mathcal{I}$ 中帕累托改进 $\mathcal{A}$。将 $\mathcal{B}$ 扩展为 $\mathcal{I}'$ 中 G' 的一个分配 $\mathcal{B}'$：给每个原始代理 i 分配物品束 $B_i \cup \{p_i\}$，并给所有虚拟代理人分配空捆绑。这样，$\mathcal{B}'$ 就在 $\mathcal{I}'$ 中帕累托改进了 $\mathcal{A}'$，这与 $\mathcal{A}'$ 是帕累托最优相矛盾。

归约至此完成。注意，在我们的构造中，$|N'| = n + m$ 和 $|G'| = m + n$，因此$|G'| = |N'|$；特别地，$|G'| \le |N'|$。因此，该问题在满足$m = n$的实例上已经是 Σ_2^P-困难的，从而在满足 $m \le n$的实例上也同样如此。

接下来，我们描述如何将其扩展到满足 $m = n + c$的实例。固定任意常数 $c \in \{1, 2, 3\}$。从上面的实例 $\mathcal{I}' = (N',\ G',\ v')$（其中 $|G'| = |N'|$）出发，我们构造一个满足 $|G^{(c)}| = |N^{(c)}| + c$的实例 $\mathcal{I}^{(c)} = (N^{(c)},\ G^{(c)},\ v^{(c)})$，如下所示。令 $D := \{d_1, \ldots, d_c\}$为 c个新的（虚拟）代理人，并令 $H := \{x_1, y_1, \ldots, x_c, y_c\}$为 $2c$个新的物品。定义

$$N^{(c)} := N' \cup D, \qquad G^{(c)} := G' \cup H,$$

因此 $|N^{(c)}| = |N'| + c$和 $|G^{(c)}| = |G'| + 2c = (|N'| + c) + c = |N^{(c)}| + c$。估值定义如下：

- 对于每个代理人 $a \in N'$ 和每个 $g \in G'$，令 $v_{(c)a}(g) := v'_a(g)$，并且对于每个 $h \in H$，令$v_{(c)a}(h) := 0$。
- For each $t \in [c]$, let $v^{(c)}_{d_t}(x_t) = v^{(c)}_{d_t}(y_t) = 1$, and $v^{(c)}_{d_t}(g) = 0$ for all $g \in G^{(c)} \setminus \{x_t, y_t\}$.

我们断言，$\mathcal{I}'$ 存在 EFX$_0$ 且帕累托最优的分配，当且仅当 $\mathcal{I}^{(c)}$ 存在 EFX$_0$ 且帕累托最优的分配。事实上，给定 $\mathcal{I}'$的任意一个完全的 EFX$_0$ 且帕累托最优分配 $\mathcal{A}'$，只需将 $\{x_t, y_t\}$ 额外分配给每个 $t \in [c]$对应的代理人 d_t，即可将其扩展为 $\mathcal{I}^{(c)}$；这是 EFX$_0$ 分配，因为 N'中的代理人对 H中的所有物品的估值均为 0，且每个 d_t 对 $\{x_t, y_t\}$ 之外的所有物品的估值均为 0；它也是帕累托最优的，因为任何帕累托改进都必须保持每个 d_t的效用不变（因此尤其必须让 $\{x_t, y_t\}$ 仍与 d_t在一起），进而会在子实例（N'，G'）上诱导出 $\mathcal{A}'$的帕累托改进。反过来，设 $\mathcal{I}^{(c)}$有一个完全的 EFX$_0$ 且帕累托最优分配 $\mathcal{A}^{(c)}$。根据帕累托最优性，对每个 $t \in [c]$，必有 x_t、$y_t \in \mathcal{A}^{(c)}_{d_t}$；否则，将缺失的物品移给 d_t，就会严格提高 d_t的效用，同时不降低任何其他代理人的效用（没有其他代理人对该物品有正估值）。此外，由于 G' 中的每件物品对 N' 中的某个代理人都有正价值，而每个 d_t 对 G' 中的所有物品的估值均为 0，帕累托最优性还意味着 G' 中的物品不会分配给任何 d_t。因此，将 $\mathcal{A}^{(c)}$ 限制到 N' 中的代理人，就得到 G'的完全分配 A'。这个限制后的分配仍满足 EFX$_0$（对 N'中的代理人而言，G' 上的估值未变）；并且，若它在 $\mathcal{I}'$上不是帕累托最优的，那么 $\mathcal{I}'$ 上的帕累托改进就可以通过保持每个 d_t的物品束 $\{x_t, y_t\}$ 不变而扩展，从而与 $\mathcal{A}^{(c)}$的帕累托最优性矛盾。

因此，上述归约之后可以接上这一填充步骤，从而即使对每个固定的 $c \in \{1, 2, 3\}$，在$m = n + c$时仍具有 Σ_2^P-困难性。

对于任意固定的 $c < 0$，从构造的实例 $\mathcal{I}'$（其满足 $|G'| = |N'|$）出发，添加 $-c$ 个新虚拟代理人，并令他们对每件物品的估值均为 0，不添加新物品。与引理 C.1 中相同的论证（在 EFX$_0$ 下仍然成立）表明，所得实例存在 EFX$_0$ 且帕累托最优的分配，当且仅当 $\mathcal{I}'$ 存在这样的分配。新实例满足 $m = n + c$，因此对于固定的负 c，也可得 Σ_2^P-完备性。结合其属于 Σ_2^P，即可得这些情形下的 Σ_2^P-完备性。

D 第 6 节省略的证明

D.1 定理 6.1 的证明

在非零边际效用和可加性条件下，对于所有 $i \in N$ 和 $g \in G$，我们有 $v_i(g) > 0$，因此，无嫉妒与 EFX$_0$ 等价。因此，我们在全文中均采用 EFX$_0$。

情形 $m < n$（即 $c < 0$）。每种分配至少有一个空物品束。若 $p \leq 0$，则对每种分配都有 $W_p(\mathcal{A}) = 0$，在这种情况下，输出任意一种完全分配，将每件物品分配给不同的代理人（可能因为 $m < n$）；这种分配是 EFX$_0$（因此也是 EFX），因为所有非空物品束都是单元素集合）。若 $p > 0$，注意到在任何 EFX$_0$ 分配中，每个物品束的大小都至多为 1：事实上，由于 $m < n$，存在一个空束代理人 i；若某个代理人 j 拥有 $|A_j| \geq 2$，那么对于任意$g \in A_j$，都有 $A_j \setminus \{g\} \neq \varnothing$，因此 $v_i(A_j \setminus \{g\}) > 0 = v_i(A_i)$，这与 EFX$_0$ 矛盾。因此，EFX$_0$ 分配恰好是将物品分配给代理人的单射分配方案（大小为 m 的匹配）。对于$p > 0$，最大化 p-均值福利等价于最大化 $\sum_{i \in N} v_i(A_i)^p$，未匹配的代理人对该总和的贡献为 0。因此，我们可以通过求解二分图 $N \times G$ 上的最大权匹配（匹配所有物品），计算出最优的 EFX$_0$ 分配；该匹配大小为 m，边权重为 $w(i, g) := v_i(g)^p$。已知此问题可在多项式时间内求解。

情形 $m \geq n$ **（即** $c \geq 0$**）**。我们首先展示非零边际效用的一个关键结构性推论。

Claim. 若 $m \geq n$，则每个 EFX$_0$ 分配 $\mathcal{A} = (A_1, \ldots\ldots, A_n)$ 都满足 $A_i \neq \varnothing$ 对所有 $i \in N$.

命题的证明。反设 $A_i = \varnothing$ 对某个 $i \in N$成立。由于 $m \geq n$，剩余的 $n-1$ 个物品束中总共有 m 件物品，因此某个代理人 $j \neq i$ 拥有 $|A_j| \geq 2$。任取一个 $g \in A_j$。于是 $A_j \setminus \{g\} \neq \varnothing$，根据 NMU（等价地，$v_i(h) > 0$ 对所有物品 h成立），我们有 $v_i(A_j \setminus \{g\}) > 0 = v_i(A_i)$，这违反了 EFX_0。□

现在，固定 $m = n + c$ with $c \in \{0, 1, 2, 3\}$。我们将至少获得两件物品的代理人称为重型代理人。对于分配 $\mathcal{A}$，定义

$$H(\mathcal{A}) := \{i \in N : |A_i| \geq 2\} \quad \text{and} \quad k := |H(\mathcal{A})|.$$

根据命题，在任何 EFX_0 分配中，每位代理人都至少获得一件物品，因此，每位代理人获得一件物品之外的“额外”物品总数恰好为

$$\sum_{i \in N} (|A_i| - 1) = m - n = c.$$

每位重型代理人对该总和的贡献至少为 1，因此 $k \leq c$。此外，由于物品束两两不相交，

$$\Big| \bigcup_{i \in H(A)} A_i \Big| = \sum_{i \in H(A)} |A_i| = \sum_{i \in H(A)} (1 + (|A_i| - 1)) \\ = k + c \leq 2c.$$

特别是，当 $c \leq 3$ 时，所有非单件物品束的并集至多包含 $2c \leq 6$ 件物品。

现在我们来描述该算法。由于对于 $m \leq n + 3$，EFX_0 分配均存在，因此最优值

$$\text{OPT} := \max_{\mathcal{A} \in \Pi_{\text{EFX}_0}(G)} W_p(\mathcal{A})$$

是定义良好的。

我们首先枚举重型部分（即分配给重型代理人的部分）。然后，对于每个 $k \in \{0, 1, \ldots, c\}$（仅当 $c = 0$时才可能有 $k = 0$），枚举:

1. 一个满足 $|H| = k$ 的重型代理人集合 $H \subseteq N$；

2. 一个满足 $|S| = k + c$ 的物品集合 $S \subseteq G$；

3. 对 S 的一个带标号划分 $(B_i)_{i \in H}$，使得对于所有 $i \in H$，都有 $|B_i| \geq 2$。

令 $L := N \setminus H$，且令 $R := G \setminus S$。由于 $|G| = n + c$ 和 $|S| = k + c$，我们有 $|R| = n - k = |L|$。因此，任何对该部分分配的补全都必须为 L 中的每个轻型代理人恰好分配一个来自 R 的物品。

对于每个重型代理人的物品束 B_i 以及每个代理人 $x \in N$，定义

$$\tau_x(B_i) := \max_{g \in B_i} v_x(B_i \setminus \{g\}), \tau_\ell := \max_{i \in H} \tau_\ell(B_i) \text{ for } \ell \in L,$$

约定$\tau_\ell := 0$ 当 $H = \varnothing$时。考虑任意双射 $\pi : L \to R$ 以及补全 $\mathcal{A}^\pi$，其中该补全为每个重型代理 $i \in H$ 分配物品束 B_i，为每个轻型代理人 $\ell \in L$ 分配单元素集合 $\{\pi(\ell)\}$。则 $\mathcal{A}^\pi$是 EFX_0 当且仅当:

(i) 对于所有互不相同的 a，$i \in H$、$v_a(B_a) \geq \tau_a(B_i)$；

(ii) 对所有 $\ell \in L$, $v_\ell(\pi(\ell)) \geq \tau_\ell$。

事实上，当被嫉妒的物品束是单元素集合时，EFX$_0$ 约束总是成立的，因为移除其中唯一的物品后会留下 $\varnothing$。因此，只有对重型代理人物品束的嫉妒需要考虑。固定 $i \in H$ 和 $x \in N$。从 x 指向 i 的 EFX$_0$ 约束为：对所有 $g \in B_i$，$v_x(A_x^\pi) \geq v_x(B_i \setminus \{g\})$，等价地，$v_x(A_x^\pi) \geq \tau_x(B_i)$。若 $x = a \in H$，则 $A_x^\pi = B_a$，得到 (i)；若 $x = \ell \in L$，则 $A_x^\pi = \{\pi(\ell)\}$，对 $i \in H$取最大值后即可得到 (ii)。反向结论可通过相同的分类讨论得出。

如果条件(i)不成立，我们就舍弃当前的重型部分。

接下来，在 $L \times R$ 上构造一个二分图，当且仅当 $v_\ell(g) \geq \tau_\ell$时，图中包含一条边(ℓ, g)。一个完美匹配$\pi: L \to R$ 对应于满足条件(ii)的可行补全，因此可得到一个 EFX$_0$ 分配。

在所有可行完美匹配中，我们优化 p-均值福利。令 u_i 表示补全后分配中代理人 i的效用。在固定的一次迭代中，重型代理的效用 $u_i = v_i(B_i)$为常数，因此优化 p-均值福利可归结为仅对轻型分配进行优化：

- 若 $p > 0$，则最大化 $\sum_{\ell \in L} v_\ell(\pi(\ell))^p$ （以 $w(\ell, g) = v_\ell(g)^p$为权重的最大权完美匹配）。
- 若 $p = 0$，则最大化 $\sum_{\ell \in L} \log v_\ell(\pi(\ell))$（以 $w(\ell, g) = \log v_\ell(g)$为权重的最大权完美匹配）。
- 若 $p < 0$，则最小化 $\sum_{\ell \in L} v_\ell(\pi(\ell))^p$ （成本为 $c(\ell, g) = v_\ell(g)^p$ 的最小费用完美匹配）。

这些是等价变换，因为函数 $f(x) = x^{1/p}$ 对 $p > 0$严格递增、对 $p < 0$严格递减，而对于 $p = 0$，我们使用标准的纳什福利对数目标函数。我们求解相应的分配问题（例如，使用匈牙利算法或最小费用流）。如果不存在完美匹配，则舍弃该重型部分。否则，记录该重型部分对应的最佳补全，最后输出所有迭代中记录的最佳分配。

现在我们证明正确性。设 $\mathcal{A}^*$ 是一个使 p-均值福利最大化的 EFX$_0$ 分配。根据命题，$\mathcal{A}^*$ 中的所有物品束均非空。因此，$|H(\mathcal{A}^*)| \leq c$，并令 $S^* := \bigcup_{i \in H(\mathcal{A}^*)} A_i^*$。如上所示，$|S^*| = |H(\mathcal{A}^*)| + c \leq 2c$，且重型部分 $(H(\mathcal{A}^*), S^*, (A_i^*)_{i \in H(\mathcal{A}^*)})$ 已在前面的枚举中出现。在该次迭代中，由 $\mathcal{A}^*$ 诱导的轻型代理人分配根据定义满足条件 (ii)，因此对应于一个完美匹配。由于 $\mathcal{A}^*$ 是 EFX$_0$，条件 (i) 也成立。匹配子程序会为这个固定的重型部分返回一个最优补全，从而使福利至少达到$W_p(\mathcal{A}^*)$。从所有迭代中选出最佳结果，即可返回一个达到 OPT 的 EFX$_0$ 分配。最后，由于在 NMU 下 EFX$_0$ 与 EFX 等价，返回的分配也满足 EFX，且在所有 EFX 分配中最优。

最后，我们证明该算法的运行时间。对于固定的 $c \leq 3$，有 $|S| = k + c \leq 2c \leq 6$。因此，$H$ 有 $\mathcal{O}(n^3)$ 种选择，S有 $\mathcal{O}(m^6)$ 种选择；将一个大小至多为 6 的集合划分为至多 3 个、每个大小至少为 2 的部分的带标签划分数量是常数。每次迭代都会在 $|L| = \mathcal{O}(n)$ 个顶点上求解一个指派问题，且所需时间为多项式时间。因此，整体运行时间关于输入规模是多项式的。

D.2 定理 6.2 的证明

为简化记号，我们记 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I}) := \max_{\mathcal{A} \in \Pi(G)} W_p(\mathcal{A})$，并记 $\mathrm{OPT}_p^{\mathrm{EFX}}(\mathcal{I}) := \max\{W_p(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \Pi(G)$ 为 EFX$\}$；约定若不存在 EFX 分配，则 $\mathrm{OPT}_p^{\mathrm{EFX}}(\mathcal{I}) := -\infty$。我们描述一个关于 c 的 XP 算法，该算法计算 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})$ 和 $\mathrm{OPT}_p^{\mathrm{EFX}}(\mathcal{I})$，然后比较二者。

我们描述一种 XP 时间算法（参数为 c），该算法计算 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})$ 和 EFX 分配可实现的最佳 p-均值福利，然后对两者进行比较。

令 $\Gamma = (N, G; E)$ 为二分图，当且仅当 $\in E$满足 i，g。若 Γ 没有大小为 n 的匹配，则不存在能让每个代理人都获得严格正效用的分配：事实上，若某个分配 $\mathcal{A}$ 满足 $v_i(A_i) > 0$ 对所有 i均成立，那么对于每个代理人 i，我们都能选取某个 $g_i \in A_i$，使得 $v_i(g_i) > 0$；物品束互不相交

就意味着 $\{(i,\ g_i)\}_{i\in N}$ 是一个大小为 n 的匹配，这就产生了矛盾。当 $p \le 0$ 时，我们约定，对于任何满足 $v_i(A_i) = 0$ （对某个代理人 i）的分配 $\mathcal{A}$，均有 $W_p(A) = 0$，因此在上述退化情形中，$\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I}) = 0$。由于定理假设 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I}) > 0$，我们处于非退化情形，此时 Γ 存在大小为 n 的匹配；特别地，任何达到 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})$ 的分配都会让每个代理人获得严格正效用，因此每个代理人至少收到一件物品。这也意味着 $m \ge n$ （等价地，$c \ge 0$）。

固定任意一个分配 $\mathcal{A} = (A_1、\ldots\ldots、A_n)$，其中每个代理人至少获得一个物品。将重型代理人和重型物品定义为

$$H(\mathcal{A}) := \{i \in N : |A_i| \ge 2\} \text{ and } S(\mathcal{A}) := \bigcup_{i\in H(\mathcal{A})} A_i.$$

由于对所有 i，$m = n + c$ 和 $|A_i| \ge 1$，每个代理人分到一个物品之外的“额外”物品数量为

$$\sum_{i\in N}(|A_i| - 1) = m - n = c.$$

轻型代理人（即满足 $|A_i| = 1$ 的代理人）对此总和的贡献为 0，而每个重型代理人至少贡献 1，因此 $|H(\mathcal{A})| \le c$。此外，由于物品束两两不相交，

$$\begin{aligned} |S(\mathcal{A})| = \sum_{i\in H(A)} |A_i| &= \sum_{i\in H(\mathcal{A})} (1 + (|A_i| - 1)) \\ &= |H(A)| + \sum_{i\in H(A)} (|A_i| - 1) \\ &= |H(A)| + c \le 2c. \end{aligned}$$

特别地，对于任意满足 $W_p(\mathcal{A}) > 0$ 的分配，重型代理人至多有 c 个，重型物品至多有 $2c$ 个。

对于物品束 $B \subseteq G$ 和代理人 $x \in N$，定义 EFX阈值

$$\tau_x(B) := \max_{g\in B: v_x(g)>0} v_x(B \setminus \{g\}),$$

按照约定，若 $\{g \in B$，则 $\tau_x(B) := 0$。对于 EFX_0,，去掉筛选条件 $v_x(g) > 0$，并对所有 $g \in B$ 取最大值。

接下来，我们给出在固定物品分配给重型代理人的方案下，EFX 完成的刻画。取集合 $H \subseteq N$ 和 $S \subseteq G$，使得 $|S| = |H| + c$，并取 S 的带标号划分 $(B_i)_{i\in H}$，满足对所有 $i \in H$ 均有 $|B_i| \ge 2$。令 $L := N \setminus H$ 和 $R := G \setminus S$；则 $|L| = |R|$。对每个 $\ell \in L$，定义 $\tau_\ell := \max_{i\in H} \tau_\ell(B_i)$，并令 $\tau_\ell := 0$，若 $H = \varnothing$。

考虑一个补全 $\mathcal{A}^\pi$：它将物品束 B_i 分配给每个重型代理人 $i \in H$，并通过双射 $\pi : L \to R$，将单元素集合 $\{\pi(\ell)\}$ 分配给每个轻型代理人 $\ell \in L$。我们声称，$\mathcal{A}^\pi$ 是无嫉妒 EFX，当且仅当：

(i) for all distinct $a, i \in H$, we have $v_a(B_a) \ge \tau_a(B_i)$; and

(ii) 对所有 $\ell \in L$，均有 $v_\ell(\pi(\ell)) \ge \tau_\ell$。

命题的证明。对于所有代理人 $x,\ y \in N$ 以及所有满足 $v_x(g) > 0$ 的物品 $g \in A_y^\pi$，EFX 约束为：

$$v_x(A_x^\pi) \ \ge\ v_x(A_y^\pi \setminus \{g\}).$$

若 $y \in L$，则 A_y^π 是单元素集合，因此 $A_y^\pi \setminus \{g\} = \varnothing$，不等式变为 $v_x(A_x^\pi) \ge 0$，这由非负性可知成立。因此，只有满足 $y \in H$ 的约束才相关，即被比较物品束为某个重型物品束 B_i。

固定 $i \in H$ 和 $x \in N$。对所有满足 $v_x(g) > 0$ 的 $g \in B_i$ 所构成的约束族，等价于以下单个不等式：

$$v_x(A_x^\pi) \;\geq\; \max_{g \in B_i:\, v_x(g)>0} v_x(B_i \setminus \{g\}) \;=\; \tau_x(B_i).$$

如果 $x = a \in H$，那么 $A_x^\pi = B_a$，因此对于所有 $i \in H$，这些不等式恰好就是条件(i)。如果 $x = \ell \in L$，那么 $A_x^\pi = \{\pi(\ell)\}$ 且 $v_\ell(A_x^\pi) = v_\ell(\pi(\ell))$，因此要求上述条件对所有 $i \in H$ 成立，等价于$v_\ell(\pi(\ell)) \geq \max_{i \in H} \tau_\ell(B_i) = \tau_\ell$，这就是条件 (ii)。□

现在，我们首先计算 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})$。我们枚举福利为正的分配中所有可能的重型部分。对于每个整数 $k \in \{0, 1, \ldots, \min(c,\ n)\}$，枚举：

1. 一个满足 $|H| = k$的集合 $H \subseteq N$；

2. 一个满足 $|S| = k + c$的集合 $S \subseteq G$；

3. S 的一个带标号划分 $(B_i)_{i \in H}$，使得对所有 $i \in H$都有 $|B_i| \geq 2$。

请注意，如果 $c > 0$ 且每个代理人至少获得一件物品（等价地，$W_p(\mathcal{A}) > 0$ 对于 $p \leq 0$），那么必然有 $k \geq 1$；因此，$k = 0$情形仅在 $c = 0$时才相关。

对于固定的三元组 $(H,\ S,\ (B_i))$，令 $L := N \setminus H$ 且 $R := G \setminus S$，于是 $|L| = |R|$。若存在某个 $i \in H$ 使得$v_i(B_i) = 0$，则舍弃该三元组（因为按照我们对 $p \leq 0$的约定，此时每种补全的福利都为 0）。

任何具有正福利的补全都必须为每个 $\ell \in L$ 恰好分配一件来自 R的物品，因此对应于一个双射 $\pi : L \to R$，且对所有 $\ell \in L$都有 $v_\ell(\pi(\ell)) > 0$。对于固定的重型物品束，重型代理人对目标函数的贡献是常数，因此，在这类补全中优化 p-均值福利可归结为二分图 $L \times R$上的一个指派问题：

- 若 $p = 0$（纳什福利），则在满足 $v_\ell(g) > 0$ 的完美匹配中，最大化 $\sum_{\ell \in L} \log v_\ell(g)$。

- 若 $p < 0$（对任意实数 p），则在效用严格为正的情况下，最大化 W_p 等价于最小化 $\sum_{i \in N} v_i(A_i)^p$（因为函数 $f(x) = x^{1/p}$ 在 $p < 0$ 时递减）；对于固定的重型物品束，这可转化为在满足 $v_\ell(g) > 0$ 的完美匹配中最小化 $\sum_{\ell \in L} v_\ell(g)^p$。对于$p \to -\infty$，在固定的重型部分内，我们最大化 $\min_{\ell \in L} v_\ell(\pi(\ell))$，这可以通过瓶颈完美匹配求解。

我们在多项式时间内求解由此得到的最大权重（对于 $p = 0$）或最小成本（对于 $p < 0$）完美匹配，并在所有迭代中保留最佳解。令 $\mathcal{A}^*$ 表示一个达到 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})$ 的见证分配。

接下来，我们计算给定 EFX 分配时的最佳福利。对 $(H, S, (B_i))$ 重复相同的枚举。若对某个 $i \in H$，$v_i(B_i) = 0$，则舍弃。接下来，仅针对重型代理人之间的嫉妒比较强制满足 EFX 可行性：若存在互不相同的 $a, i \in H$，使得 $v_a(B_a) < \tau_a(B_i)$（上文的条件(i)），则舍弃该三元组。

对于每个 $\ell \in L$，计算 $\tau_\ell := \max_{i \in H} \tau_\ell(B_i)$（或者 $\tau_\ell := 0$，若 $H = \varnothing$）。在 $L \times R$ 上构建一个二分图，当且仅当满足以下条件时，加入一条边 (ℓ, g)：

$$v_\ell(g) > 0 \quad \text{and} \quad v_\ell(g) \geq \tau_\ell.$$

根据上文证明的刻画，该图中的完美匹配恰好对应于固定重型部分的 EFX 补全，且其中每个轻型代理人的效用均为正。在这些完美匹配中，按照步骤 1 中的同一目标函数进行优化。由于我们将结果与 $\mathrm{OPT}_p(\mathcal{I}) > 0$ 比较，因此将效用限制为严格为正，不会影响兼容性判定。取所有迭代中的最佳值，即得到 $\mathrm{OPT}_p^{\mathrm{EFX}}(\mathcal{I})$；若存在见证分配，令 $\mathcal{A}^{\mathrm{EFX}}$ 为该分配。

每个 EFX 分配都是一种分配，因此，$\mathrm{OPT}_p^{\mathrm{EFX}}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})$。因此，当且仅当 $\mathrm{OPT}_p^{\mathrm{EFX}}(\mathcal{I}) = \mathrm{OPT}_p(\mathcal{I})$ 时，存在一个全局 p-均值最优的 EFX 分配。若存在这样的 EFX 分配，则输出见证分配 $\mathcal{A}^{\mathrm{EFX}}$。

我们分析运行时间。对于每个 $k \leq c$，枚举包含 $\binom{n}{k}$ 种 H 和 $\binom{m}{k+c}$种 S选择。一个（$k+c$）-元素集合划分为 k 个部分的带标号划分，可以在时间（$k+c$）$^{\mathcal{O}(k+c)} \leq$ （$2c$）$^{\mathcal{O}(2c)}$内完成枚举；由于 $n+m \geq c$，该时间被（$n+m$）$^{\mathcal{O}(c)}$ 所吸收。每次迭代都在 $|L| = \mathcal{O}$（n）个顶点上求解一个指派实例，且可在多项式时间内完成（例如，匈牙利算法的运行时间为 $\mathcal{O}$（n^3））。因此，总运行时间为（$n+m$）$^{\mathcal{O}(c)}$，即属于 c 中的 XP。

对于 EFX_0,，将每个阈值定义中的筛选条件 $v_x(g) > 0$ 去掉（即对所有 $g \in B$ 取最大值），其余部分仍采用相同的枚举和匹配过程。该刻画及正确性证明可直接沿用，因为 EFX 与 EFX_0 的区别仅在于是否将对嫉妒代理人价值为零的物品纳入量化范围。