arXiv:2601.12932v1 [math.GN] 19 Jan 2026

预序拓扑空间的 Stone 对偶

Jean Goubault-Larrecq

2026年1月21日

摘要

预序拓扑空间是带有预序的拓扑空间。我们提出一种类似 Stone 对偶的预序拓扑空间对偶，其灵感来自 Jung-Moshier 和 Jakl 提出的双拓扑空间对偶，以及 Bonsangue、Jacobs 和 Kok 提出的预序集对偶。

1 引言

这项工作源于我与 Nesta van der Schaaf 讨论他关于有序局部的研究（Van der Schaaf，2024），另见 Heunen 和 Van der Schaaf（2024）。有序局部旨在成为一种不含点的有序拓扑空间理论，正如局部理论是一种不含点的拓扑空间理论；其新意在于加入偏序。他们的策略是为局部赋予偏序，主要结果则是在满足作者所谓“具有开锥且点足够多”这一性质的有序拓扑空间范畴，与满足某一性质（•）的有序局部范畴之间建立伴随（Heunen 和 Van der Schaaf，2024，定理 6.3）。性质（•）有些棘手，因为它提到了局部的点，而在规定局部的性质时，人们通常会尽量避免提及点。

本文提出了另一种在（预）有序拓扑空间与局部概念的另一种丰富化形式之间建立的伴随。（实际上有三种伴随，取决于我们是否希望能够处理未来、过去，或两者。）我们不必将范围限制在（预）有序拓扑空间的任何子范畴，也没有任何条件会在局部侧提及点。虽然这些定义看起来会很复杂，但总体思路相当简单：借鉴 Bonsangue 等人（1995）关于预序集合的 Stone 对偶概念，并将其与 Jung 和 Moshier（2007年）关于双拓扑空间的另一种对偶结合起来，再加上 Jakl（2018）所做的改进。我将在第 2 节中作更详细的说明。

对于某些预序拓扑空间，已有几种不同的对偶性方案。值得注意的是，紧偏序空间范畴（其态射为连续保序映射）与以稳定

连续空间为对象、以完美映射为态射的范畴等价（Nachbin，1948，1965）。（偏序空间是指具有偏序且其图在积中闭合的拓扑空间。我们不定义其他术语。）通常的 Stone伴随$\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$ 限制后给出了紧偏序空间范畴与稳定连续框架范畴之对偶之间的等价，不过需要注意，前一个范畴中的态射是连续映射，而非完美映射。另有一种类似的伴随适用于完美映射和完美locale态射（参见 Escard´o（1999）及其中所列参考文献，包括 Banaschewski 和 Br¨ummer（1988）的早期研究）；将其与 Nachbin 的等价结合起来，便得到紧偏序空间对偶性。本文的方法不要求紧致性，适用于所有预序拓扑空间，而不只是偏序空间。

2 基本思路、预备知识与概要

我们用$\mathbf{Top}$ 表示拓扑空间及连续映射构成的范畴。给定任意拓扑空间 X，其开子集构成一个框架 $\mathcal{O}X$。框架是一个完备格，其中任意上确界对二元下确界满足分配律。框架同态是框架之间保持任意上确界和有限下确界的映射。框架及框架同态构成范畴$\mathbf{Frm}$。它的对偶范畴 $\mathbf{Frm}^{op}$ 是局部范畴。存在一个函子$\mathcal{O}$: $\mathbf{Top} \to \mathbf{Frm}^{op}$。我们已经定义了它在对象上的作用。它对态射 $f\colon X \to Y$ 的作用由 $\mathcal{O}f \overset{定义}{=} f^{-1}$给出。反过来，存在一个函子$\mathbf{pt}\colon \mathbf{Frm}^{op} \to \mathbf{Top}$，它是 $\mathcal{O}$ 的右伴随——用符号表示为 $\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$。这就是（以现代视角解读的）*Stone* 对偶，参见 Goubault-Larrecq（2013年，第 8.1 节）。

预序拓扑空间（X，$\leq$）是一个带有预序 $\leq$的拓扑空间 X。我们也简单地将（X，$\leq$）记作 X，并将其预序记作 $\leq_X$。我们提出一种适用于这类空间的 Stone 对偶形式，其依据是以下思想。

集合上的预序也可以等价地由其所有向上闭子集构成的集族来描述；该集族构成一个 Alexandroff拓扑，也就是任意开集交集仍为开集的拓扑。Bonsangue等人（1995，第 6.4 节）描述了这类空间的一种类似 Stone 对偶: 他们提出的 Alexandroff空间的对偶由完全分配格给出，态射为完备格同态。（参见 Bonsangue等人（1995）中的引理 6.5；由此可知，作者所称的由其 M-素元生成的完备格，实际上就是完全分配格。）完全分配格是满足 $\bigwedge_{i\in I}\bigvee_{j\in J_i} x^i_j = \bigvee_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\bigwedge_{i\in I} x^i_{f(i)}$ 的完备格，其中对任意族 $(x^i_j)_{i\in I,\ j\in J_i}$，$I$ 和 J_i 是任意集合。 $\prod_{i\in I} J_i$ 是所有将每个元素 $i \in I$ 映射到 J_i中某个元素的映射所构成的空间。记号 $\vee$ 和 $\bigvee$ 表示上确界， $\wedge$和 $\bigwedge$ 表示下确界。完备格同态保持所有上确界和下确界。

从将预序集视为带有 Alexandroff 拓扑的空间这一观点出发，预序拓扑空间是一种特殊的双拓扑空间，

也就是说，它是带有两个拓扑的空间。多位作者提出了双拓扑空间的 Stone 式对偶，尤以 Jung 和 Moshier（2007年）以及 Jakl（2018）的工作为代表：按照 Jakl 的表述方式，这些对偶是*d*-框架，即由两个关系 con（一致性）和 tot（全性）连接、并满足某些条件的一有序对框架。我们将结合这两种方法。

对此有几种变体。第二种拓扑，即预序 $\leq$的 Alexandroff拓扑，可以再配上第三种拓扑，也就是反预序的 Alexandroff拓扑$\geq$。我们将用红色标出使用第二种拓扑（但不一定使用第三种）时所需的内容，蓝色标出使用第三种拓扑（但不一定使用第二种）时的情况，并用紫色标出同时纳入二者及其相互作用时的情况。因此，你可以戴上能让你只读普通文本和红色文本、只读普通文本和蓝色文本、只读普通文本、红色文本和蓝色文本，或阅读全部内容的眼镜来阅读本文；这样你就会同时看到一种关于无序空间的理论，以及三种不同的关于有序空间的理论。可以把红色文本看作一种向未来看的理论，蓝色文本看作一种向过去看的理论，而紫色则是一种将二者结合起来的理论。

关于序理论和拓扑中的概念，我们将参考标准文献 Abramsky and Jung (1994); Gierz et al. (2003); Goubault-Larrecq (2013年)。A偏序集是一个偏序集。偏序集 P 中的一个有向族是一个非空族 $(x_i)_{i\in I}$，满足任意两个元素 x_i, x_j 都有一个共同的上界x_k。P 中的下闭子集 A 是指满足以下条件的集合：若 $y \in A$ 且 $x \leq y$，则 $x \in A$，其中 $\leq$ 是 P 上的序。P 的 *Scott* 闭子集是指下闭且对有向族的上确界封闭的子集。P 中的上闭子集 A 是指满足以下条件的集合：若 $x \in A$ 且 $x \leq y$，则 $y \in A$。当同一个集合 P上有多个偏序时，我们会明确指出所用的偏序，例如 $\leq$-下闭或 $\leq$-Scott 闭。

本文的安排如下。我们落实上述策略，并在第 3 节定义 ad-框架。在第 4 节，我们证明预序拓扑空间与 ad-框架之间存在伴随$\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$。类似于素化（它是通常的 Stone 对偶伴随 $\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$ 所产生的一种自然构造），我们在第 5 节探讨 ad-豪斯多夫化，并在第 6 节将其与素化进行比较。与 $\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$ 一样，我们在第 7 节证明伴随$\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$ 是幂等的。Van der Schaaf 关于有序局部的概念有一项优势：他的伴随提升了伴随$\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$。我们在第 8 节证明，$\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$ 中也存在类似情形。

3 ad-框架

遵循第 2 节所提出的策略，我们将 *ad*-框架 定义为一个元组 $(\Omega\ L,$ tot, con, sup, sub$)$，其中 Ω 是一个框架，L 是一个完全分配格，而 tot、con $\subseteq \Omega \times L$ 是满足下列所列某些性质的二元关系。我们有时将 tot 称为全性关系，将 con 称为一致性关系，将 sup 称为包含关系，并将 sub 称为包含关系。为了

陈述这些关系，我们需要引入以下记号，其灵感来源于 Jakl（2018）：

- 我们用 $\leq$ 表示 Ω 和 L 上的序，用 $\wedge$ 表示二元下确界，用 $\bigwedge$ 表示任意下确界，用 $\top$ 表示它们的顶元素，用 $\vee$表示二元上确界，用 $\bigvee$ 表示任意上确界，用 $\bot$ 表示它们的底元素；我们还用 $\geq$表示 $\leq$的反序；

- 我们用 $\sqsubseteq$表示 Ω 上的序 $\leq \times \leq \times L$（即“信息序”）；相应的下确界和上确界分别记为 $\sqcap$、$\bigsqcap$、$\sqcup$、$\bigsqcup$；顶元素为（$\top, \top$），底元素为（$\bot, \bot$）；

- 我们用 $\trianglelefteq$ 表示 Ω 上的 $\leq \times \geq$（即“逻辑序”）$\times L$；相应的下确界和上确界分别记为 $\wedge$、$\bigwedge$、$\vee$、$\bigvee$；顶元素为 $\overline{tt}_{\mathrm{def}} = (\top, \bot)$，底元素为 $\overline{ff}_{\mathrm{def}} = (\bot, \top)$。

基于这些记号，我们给出如下定义。

定义 3.1. 一个 ad-框架 是一个元组 $(\Omega\ L,$ tot, con, sup, sub) 其中 Ω 是一个框架，L是一个完全分配格，并且：

- tot 是 $\overline{\Omega} \times L$ 的一个 $\sqsubseteq$-上闭子集，包含 $\overline{ff}$、$\overline{tt}$，且在 $\wedge$ 和 $\bigvee$ 下闭；

- con 是 $\overline{\Omega} \times L$ 的一个 $\sqsubseteq$-*Scott* 闭子集，包含 $\overline{ff}$、$\overline{tt}$，且在$\wedge$ 和 $\bigvee$ 下闭；

- sup 是 $\Omega \times L$ 的一个 $\trianglelefteq$-上闭子集，包含 $(\bot, \bot)$、$(\top, \top)$，且在 $\sqcap$ 和 $\bigsqcup$ 下闭；

- sub 是 $\Omega \times L$ 的一个 $\trianglelefteq$-*Scott* 闭子集，包含 $(\bot, \bot)$、$(\top, \top)$，且在 $\sqcap$和 $\bigsqcup$ 下闭；

- 满足以下交互律：– 对所有满足 $u = v$ 或 $a = b$ 的 $(u, a) \in con$ 和 $(v, b) \in tot$，$(u, a) \sqsubseteq (v, b)$；– 对所有满足 $u = v$ 或 $a = b$ 的 $(u, a) \in sub$ 和 $(v, b) \in sup$，$(u, a) \trianglelefteq (v, b)$；– 对每个 $(u, a) \in con \cap sub$，$u = \bot$；– 对每个 $(v, b) \in tot \cap sup$，$v = \top$；– 对每个 $(v, b) \in con \cap sup$，$b = \bot$；– 对每个 $(u, a) \in tot \cap sub$，$a = \top$。

理解定义 3.1 的最佳方式，是考察以下关于 ad-框架的典型例子。更一般地，建议将 ad-框架理解为预序拓扑空间的一种抽象，其中 Ω，M，tot，con，sup，sub 分别理解如下。

定义和引理 3.2。对于每个预序拓扑空间 X，我们将 $\mathcal{O}^{ad}X$ 定义为 $(\Omega\ L,\ \mathrm{tot},\ \mathrm{con},\ \mathrm{sup},\ \mathrm{sub})$ 其中：

- Ω 是 X 的开子集构成的格 $\mathcal{O}X$；
- L 是 X 的 $\leq_X$-上闭子集的集合；
- 对于每个 $(U,A)\in\Omega\times L$，$(U,A)\in\mathrm{tot}$ 当且仅当 $U\cup A=X$；
- 对于每个 $(U,A)\in\Omega\times L$，$(U,A)\in\mathrm{con}$ 当且仅当 $U\cap A=\emptyset$；
- 对于每个 $(U,A)\in\Omega\times L$，$(U,A)\in\mathrm{sup}$ 当且仅当 $U\supseteq A$；
- 对于每个 $(U,A)\in\Omega\times L$，$(U,A)\in\mathrm{sub}$ 当且仅当 $U\subseteq A$。

那么 $\mathcal{O}^{ad}X$ 是一个 *ad*-框架。

在继续之前，我们先注意到，$(U,A)\in\mathrm{sup}$ 当且仅当 $U\cup\neg A=X$，而 $(U,A)\in\mathrm{sub}$ 当且仅当 $U\cap\neg A=X$，其中 $\neg A$ 表示 A 在 X中的补集。元素 $A\in L$ 是 X的 $\leq_X$-上闭子集，而元素 $\neg A$（其中 $A\in L$）是 X的 $\leq_X$-下闭子集；sup 和 sub 则是 Ω 与 $\{\neg A\mid A\in L\}\cong L^{op}$ 之间的关系，仿照 Ω 与 L之间的 tot 和 con。

证明。Ω 显然是一个框架，并且很容易看出 L 是一个完全分配格。具体而言，在 L 中，上确界是并集，而下确界（不仅仅是有限下确界）是交集。于是，完全分配性归结为等式 $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}A^i_j=\bigcup_{f\in\prod_{i\in I}J_i}\bigcap_{i\in I}A^i_{f(i)}$，其中 A^i_j 是 $\leq_X$-上闭的；这是选择公理的一个经典例子。

沿用上文给出的记号 $\sqsubseteq$、$\trianglelefteq$ 等。

容易看出，tot 是 $\sqsubseteq$-向上闭的：若 $U\cup A=X$ 和 $U\subseteq V$,$A\subseteq B$，则 $V\cup B=X$。它包含 ff $=(\emptyset,X)$ 和 $=(X,\emptyset)$。对于所有 (U,A)、$(V,B)\in\mathrm{tot}$，$(U\cap V)\cup(A\cup B)=(U\cup A\cup B)\cap(V\cup A\cup B)=X\cap X=X$，因此 $(U,A)\wedge(V,B)=(U\cap V,A\cup B)\in\mathrm{tot}$。对于 tot 中每个有序对族 $(U_i,A_i)\in$，其中 $i\in I$，我们断言 $\bigvee_{i\in I}(U_i,A_i)=(\bigcup_{i\in I}U_i,\bigcap_{i\in I}A_i)$ 属于 tot。对于每个$x\in X$，要么 $x\in\bigcup_{i\in I}U_i$，要么 x 不属于任何 U_i；由于 $(U_i,A_i)\in\mathrm{tot}$，x 必属于 A_i，且对每个 $i\in I$ 都如此；因此 $x\in\bigcap_{i\in I}A_i$。

sup 是 $\trianglelefteq$-向上闭的，包含 $(\bot,\bot)$ 和 $(\top,\top)$，并且对 $\sqcap$ 和 $\bigsqcup$ 封闭，这些事实的证明与前面类似，只需对每个 $A\in L$将 A替换为 $\neg A$。具体而言，若 $(U,A)\in\mathrm{sup}$（即 $U\supseteq A$），且 $U\subseteq V$和 $A\supseteq B$，则 $V\supseteq B$。$\bot(=\emptyset)$ 包含 $\bot$，因此 $(\bot,\bot)\in\mathrm{sup}$，同理 $(\top,\top)\in\mathrm{sup}$（其中 $\top=X$）。若 $U\supseteq A$ 且 $V\supseteq B$，则 $U\cap V\supseteq A\cap B$，所以 sup 对 $\sqcap$封闭。若对每个 $i\in I$都有 $U_i\supseteq A_i$，则 $\bigcup_{i\in I}U_i\supseteq\bigcup_{i\in I}A_i$，所以 sup 对 $\bigsqcup$封闭。

让我们检查 con 是否为 $\sqsubseteq$-Scott 闭。若 $(U,A)\sqsubseteq(V,B)$，也就是说，若 $U\subseteq V$and $A\subseteq B$，并且若 $(V,B)\in\mathrm{con}$，也就是说，若 V and B 不相交，那么 U and A也不相交。因此 con 是下闭的。设 (U_i,A_i) 是 con 中的一个 $\sqsubseteq$-有向族。因此，对每个 $i\in I$，$U_i$and A_i都不相交。我们注意到，$(U_i,A_i)=(\bigcup^{\uparrow}_{i\in I}U_i,\bigcup^{\uparrow}_{i\in I}A_i)$必定属于 con，也就是说，$\bigcup^{\uparrow}_{i\in I}U_i$and $\bigcup^{\uparrow}_{i\in I}A_i$ 不可能相交。否则，设 x 属于交集。于是

$x \in U_i$ and $x \in A_j$，其中某个 $i,j \in I$成立。由有向性可知，我们可以找到 $k \in I$，使得 $(U_i, A_i),(U_j, A_j) \sqsubseteq (U_k, A_k)$；特别地，$x \in U_k$ and $x \in A_k$，这不可能，因为 U_k and A_k 不相交。

同理，sub 是 $\trianglelefteq$-Scott 闭的。若 $(U, A) \trianglelefteq (V, B)$，也就是说，若 $U \subseteq V$and $A \supseteq B$；并且若 $(V, B) \in$ sub，也就是说，若 $V \subseteq B$，则 $U \subseteq A$，所以 sub 是 $\trianglelefteq$-下闭的。对于 sub 中任意有向族 $(U_i, A_i)_{i\in I}$（也就是说，对每个 $i \in I$都有 $U_i \subseteq A_i$），其相对于 $\trianglelefteq$ 的上确界为 (U, A)，其中 $U \text{ def}= \bigcup^{\uparrow}_{i\in I} U_i$且 $A \text{ def}= \bigcap^{\downarrow}_{i\in I} A_i$，于是 $U \subseteq A$。事实上，对于每个 $x \in U$、每个$i \in I$，只需证明 $x \in A_i$。由于 $x \in U$，$x \in U_j$ 对某个 $j \in I$成立。由有向性，存在一个 $k \in I$，使得 (U_i, A_i)、$(U_j, A_j) \trianglelefteq (U_k, A_k)$。特别地，$U_j \subseteq U_k$，因此 $x \in U_k$，且 $A_i \supseteq A_k$；但 $U_k \subseteq A_k$，所以 $x \in A_i$。

关系 con 包含 ff $= (\emptyset, X)$ 和 $\overline{\ } = (X, \emptyset)$。对于所有 (U, A)、(V, B) $\in$con，$U \cap A = \emptyset$ 和 $V \cap B = \emptyset$，因此 $(U \cap V) \cap (A \cup B) = (U \cap V \cap A) \cup (U \cap V \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$，这表明 $(U, A) \wedge (V, B) = (U \cap V, A \cup B)$ 属于 con。对于 con 的每个元素族 (U_i, A_i)，其中 $i \in I$，我们断言$\bigsqcup_{i\in I}(U_i, A_i) = (\bigcup_{i\in I} U_i, \bigcap_{i\in I} A_i)$ 属于 con。否则，将存在一个点$x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ 属于$\bigcup_{i\in I} U_i$，因而属于某个 U_i。但是由于 $(U_i, A_i) \in$ con，x毕竟不能属于 A_i，这就产生了矛盾。

关系 sub 包含 $(\bot, \bot) = (\emptyset, \emptyset)$ 以及 $(\top, \top) = (X, X)$，因为 $\emptyset \supseteq \emptyset$且 $X \supseteq X$。对于所有 $(U, A),(V, B) \in$sub，我们有 $U \subseteq A$ 且 $V \subseteq B$，因此$U \cap V \subseteq A \cap B$，这表明 sub 对 $\sqcap$ 运算封闭。对于每个对族 $(U_i, A_i) \in$ sub，有 $i \in I$、$\bigcup_{i\in I} U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$，因此 sub 对 $\bigsqcup$ 运算封闭。

最后，我们检验交互律。

- 设 $(U, A) \in$con 且 $(V, B) \in$tot。因此 U 与 A 不相交，且$V \cup B = X$。如果 $U = V$，那么每个 $x \in A$ 都在 U 之外，因此也在 V 之外，故必在 B 中；所以 $A \subseteq B$，从而 $(U, A) \sqsubseteq (V, B)$。如果 $A = B$，那么每个 $x \in U$ 都在 A 之外，因此也在 B 之外，故必在 V 中；所以$U \subseteq V$，从而 $(U, A) \sqsubseteq (V, B)$。

- 设 $(U, A) \in$sub，且 $(V, B) \in$sup。因此 $U \subseteq A$且 $V \supseteq B$。若 $U = V$，则 $A \supseteq B$，故 $(U, A) \trianglelefteq (V, B)$。若 $A = B$，则 $U \subseteq V$，故 $(U, A) \trianglelefteq (V, B)$。
- 设 $(U, A) \in$con $\cap$sub。则 $U \cap A = \emptyset$且 $U \subseteq A$，故 $U = \emptyset$。
- 设 $(V, B) \in$tot $\cap$sup。则 $V \cup B = X$且 $V \supseteq B$，故 $V = X$。
- 设 $(V, B) \in$con $\cap$sup。则 $V \cap B = \emptyset$且 $V \supseteq B$，故 $B = \emptyset$。
- 设 $(U, A) \in$tot $\cap$sub。则 $U \cup A = X$且 $U \subseteq A$，故 $A = X$。

□

定义 3.3. 从一个 ad-框架同态 到一个 *ad*-框架 $(\Omega\ L,\ \text{tot},\ \text{con},\ \text{sup},\ \text{sub})$ 的 *ad*-框架同态 $(\Omega',\ L',\ \text{tot}',\ \text{con}',\ \text{sup}',\ \text{sub}')$ 是一个有序对 $(\varphi,\ p)$，其中：

- φ 是从Ω 到Ω'的框架同态，即 φ 保持任意上确界和有限下确界；

- p 是从 L 到 L'的完备格同态，即保持任意上确界和任意下确界；

- 有序对 (φ, p) 保全性：对每个 $(u, a) \in \mathsf{tot}$，$(\varphi(u)\ p(a)) \in \mathsf{tot}'$；
- 有序对 (φ, p) 保持一致性：对每个 $(u, a) \in \mathsf{con}$，$(\varphi(u)\ p(a)) \in \mathsf{con}'$；

- 有序对 (φ, p) 保持包含关系：对每个 $(u, a) \in \mathsf{sup}$，$(\varphi(u)\ p(a)) \in \mathsf{sup}'$；

- 有序对 (φ, p) 保持包含关系：对每个 $(u, a) \in \mathsf{sub}$，$(\varphi(u)\ p(a)) \in \mathsf{sub}'$。

ad-框架及 ad-框架同态构成一个范畴，记作 $\mathbf{adFrm}$。

预序拓扑空间构成一个范畴$\mathbf{PreTop}$，其对象是预序拓扑空间，态射是连续保预序映射——相对于底层拓扑空间连续，并且保持预序，即相对于给定的预序单调。

引理 3.4. 对于任意预序拓扑空间之间的连续保序映射 $f\colon X \to Y$，有序对 $\mathcal{O}^{ad} f \overset{def}{=} (f^{-1}, f^{-1})$ 是从 $\mathcal{O}^{ad} Y$ 到 $\mathcal{O}^{ad} X$ 的 *ad*-框架同态。这里，f^{-1} 表示将 Y 的每个子集（无论是开集还是 $\leq_Y$-上闭集）映射到其在 f 下原像的函数。

证明。令 $(\varphi, p)\ \mathrm{def} = \mathcal{O}^{ad} f$。显然，$\varphi$ 是框架同态，而p 是完备格同态。对于 $\mathcal{O}^{ad} Y$中的任意全对 (V, B)，$V \cup B = Y$，因此 $\varphi(V) \cup \varphi(B) = f^{-1}(V \cup B) = f^{-1}(Y) = X$。对于 $\mathcal{O}^{ad} Y$中的任意一致对 (V, B)，$V \cap B = \emptyset$，因此 $\varphi(V) \cap \varphi(B) = f^{-1}(V \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$。对于任意满足 $V \subseteq B$ 的有序对 (V, B)，$f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(B)$；$\supseteq$的情形同理。 □

推论 3.5. $\mathcal{O}^{ad}$ 是一个函子，从 $\mathbf{PreTop}$ 到 $\mathbf{adFrm}^{op}$。

4 $\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$ 伴随

PreTop 的终对象 1 是单点空间 $\{*\}$，它带有唯一可赋予的拓扑，也带有唯一可赋予的预序。于是，$\mathcal{O}\mathbf{1}$和 1 的 $\leq_{\mathbf{1}}$-上闭子集格都是$\{\emptyset, \mathbf{1}\}$，其中 $\emptyset$ 小于 $\mathbf{1}$。因此，$\mathcal{O}^{ad}\mathbf{1}$ 是四元格 $\{\emptyset, \mathbf{1}\}^2$。容易验证，其所有有序对都是全序的，除了 $(\emptyset, \emptyset)$；所有有序对都是相容的，除了 $(1, 1)$；所有有序对都满足包含关系，除了 $\mathrm{ff} = (\emptyset, 1)$；所有有序对都满足包含关系，除了 $\mathrm{ff} = (1, \emptyset)$。

从 ad-框架 $(\Omega\ L,\ \mathsf{tot},\ \mathsf{con})$ 到 $\mathcal{O}^{ad}\mathbf{1}$的 ad-框架同态 $(\varphi,\ p)$，完全由 $x \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi^{-1}(\mathbf{1})$ 和 $s \overset{定义}{=} p^{-1}(\mathbf{1})$ 刻画。由于 φ 是一个框架

同态，x 必须是 Ω 的元素所构成的完全素滤子。（Ω 的元素所构成的滤子是 Ω 的一个上闭子集 F，且对有限下确界封闭。当且仅当其补集对任意上确界封闭时，该滤子称为完全素；这也等价于：每个上确界属于 F 的族 $(x_i)_{i\in I}$ 中，都有某个 x_i 属于 F。）由于 p 是一个完备格同态，s必须是由 完备格 L的元素构成的完全素完备滤子；完备滤子是 L 的任意一个上闭子集，且对任意下确界封闭（而不仅仅对有限下确界封闭）。要求 $(\varphi,\ p)$ 保持全性、一致性、包含关系与包含这一事实反映在以下定义中。

定义 4.1。一个点属于一个 ad-框架 $\Omega L \overset{def}{=} (\Omega\ L,\ \mathsf{tot},\ \mathsf{con},\ \mathsf{sup},\ \mathsf{sub})$ 是一个有序对$(x,\ s)$ 其中：

- x 是 Ω 的元素构成的完全素滤子；
- s 是 L 的元素构成的完全素完备滤子；
- 每个有序对 $(u,a)\in \mathsf{tot}$ 都满足：$u\in x$ 或 $a\in s$；
- 每个有序对 $(u,a)\in \mathsf{con}$ 都满足：$u\notin x$ 或 $a\notin s$；
- 每个有序对 $(u,a)\in \mathsf{sup}$ 都满足：$u\in x$ 或 $a\notin s$；
- 每一有序对 $(u,a)\in \mathsf{sub}$ 都满足 $u\notin x$ 或 $a\in s$。

令$\boldsymbol{pt}^{ad}\Omega L$ 为预序拓扑空间 X：

- 其元素是ΩL中的点，
- 其开集是集合 $\mathcal{O}_u \overset{def}{=} \{(x,s)\in \boldsymbol{pt}^{ad}\,\Omega L \mid u\in x\}$，其中 u遍历Ω，
- 且其预序 $\leq_X$ 由 $(x,s)\leq_X (y,t)$ 给出，当且仅当 $s\subseteq t$。

对于每个 $a\in L$，我们也将 $\mathcal{A}_a$ 记作 $\{(x,s)\in \boldsymbol{pt}^{ad}\,\Omega L \mid a\in s\}$。

注记 *4.2*。（初次阅读时可跳过。）众所周知，Ω 的完全素滤子 x 恰好是某个唯一素元 p 所对应的集合 $\{u\in\Omega \mid u\not\leq p\}$（$p$ 是素元，当且仅当 $p\neq\top$，并且对于所有满足 $u\wedge v\leq p$的 $u,v\in\Omega$，都有 $u\leq p$ 或 $v\leq p$）。L 的完全素完备滤子 s 类似地可写作 $\{a\in L\mid a\not\leq q\}$，其中 q 是 L 中的某个唯一完全素元（q 是完全素元，当且仅当对于 L 中的每个族 $(a_i)_{i\in I}$，若 $\bigwedge_{i\in I} a_i\leq q$，则对于某个$i\in I$，有 $a_i\leq q$）。或者，s 也可表示为 $\uparrow b$，其中 b 是 L 中的某个唯一完全余素元（b 是完全余素元，当且仅当对于 L 中的每个族 $(a_i)_{i\in I}$，若 $b\leq \bigvee_{i\in I} a_i$，则对于某个 $i\in I$，有 $b\leq a_i$）。q 与 b 之间的关系是：对于任意 $a\in L$, $b\leq a$，当且仅当 $a\not\leq q$（当且仅当 $a\in s$）。对于任意两个元素 $q,b\in L$（不一定是完全素元/完全余素元），我们记 $q\pitchfork b$，当且仅当对于每个 $a\in L$, $b\leq a$，当且仅当 $a\not\leq q$。那么：

- 对于每个 $q \in L$，至多存在一个 $b \in L$ 使得 $q \pitchfork b$：事实上，如果存在两个这样的元素 b 和 b'，那么对于每个 $a \in L$，$b \leq a$ 都等价于 $b' \leq a$（也等价于 $a \not\leq q$），因此 $b \leq b'$ 且 $b' \leq b$，由此可得 $b = b'$；
- 对称地，对于每个 $b \in L$，至多存在一个 $q \in L$ 使得 $q \pitchfork b$；
- 若 $q \pitchfork b$，则 q 是完全素的，且 b 是完全余素的；事实上，若对于族 $(a_i)_{i\in I}$ 中的每个 L，若不存在 $i \in I$ 使得 $a_i \leq q$，则对于每个$i \in I$都有 $b \leq a_i$，因此 $b \leq \bigwedge_{i\in I} a_i$，所以 $\bigwedge_{i\in I} a_i \not\leq q$；证明 b 是完全余素的方式也类似。

那么，一个点可以由 Ω 的一个素元 p 以及 L 中的元素有序对 $q \pitchfork b$ 指定，前提是每个属于 *tot* 的有序对 $(u, a) \in$ 都满足 $u \not\leq p$ 或 $b \leq a$，每个属于 *con* 的有序对 $(u, a) \in$ 都满足 $u \leq p$ 或 $b \not\leq a$，每个属于 *sup* 的有序对 $(u, a) \in$ 都满足 $u \not\leq p$ 或 $a \leq q$，并且每个属于 *sub* 的有序对 $(u, a) \in$ 都满足 $u \leq p$ 或 $a \not\leq q$。利用 *tot* 是 $\sqsubseteq$- 上闭的、*con* 是$\sqsubseteq$- 下闭的、*sup* 是 $\trianglelefteq$- 上闭的、*sub* 是 $\trianglelefteq$-下闭的这一事实，这些条件可简化为：

- 对于每个 $a \in L$，若$(p, a) \in$ tot，则 $b \leq a$；并且对于每个 $u \in \Omega$，若 $(u, b) \in$ con，则 $u \leq p$；
- 对于每个 $a \in L$，若$(p, a) \in$ sup，则 $a \leq q$；并且对于每个 $u \in \Omega$，若$(u, q) \in$ sub，则 $u \leq p$。

备注 4.3。预序拓扑空间 X 是上半闭的（分别为下半闭）当且仅当每个点 $\uparrow_X x$（分别为上闭包 $\downarrow_X x$）相对于 $\leq_X$ 的下闭包 X是闭的。它是半闭的当且仅当它同时上半闭和下半闭。对于一个 *ad*-框架$\Omega L \overset{def}{=}$（$\Omega$ L，tot，con，sup，sub），考虑以下性质：

（usc）的每个元素 L 都是 $\{a \mid (u, a) \in \text{tot} \cap \text{con}\}$中元素的上确界；

(下半闭) 的每个元素都是 L 中元素的下确界 $\{a \mid (u, a) \in \text{sup} \cap \text{sub}\}$。

当 ΩL 具有形式 $\mathcal{O}^{ad}X$ 时，其中 X是某个预序拓扑空间，我们有：

- X 是上半闭的，当且仅当 $\mathcal{O}^{ad}X$ 满足 *(usc)*；
- X 是下半闭的，当且仅当 $\mathcal{O}^{ad}X$ 满足 *(lsc)*。

事实上，$\{A \mid (U, A) \in tot \cap con\}$ 的元素恰好是 $\leq_X$-上闭、闭的 X子集。若 X 是上半闭的，那么每个上闭子集 $A \in L$ 都是集合 $\uparrow_X x$, $x \in A$的并，而这些集合全都属于$\{A \mid (U, A) \in tot \cap con\}$。反之，若 L 的每个元素都是 $\{A \mid (U, A) \in tot \cap con\}$中元素的上确界，那么这对于形如 $\uparrow_X x$, $x \in X$的子集也成立。因此必定存在一对$(U, A) \in tot \cap con$，使得$A \subseteq \uparrow_X x$ 且 $x \in A$，这就迫使 $A = \uparrow_X x$成立；由于$(U, A) \in tot \cap con$，A 是闭的。因此 X 是上半闭的。若 X 是下半闭的，那么对于每个上闭子集 $A \in L$，其补集 $X \setminus A$ 是以下集合的并

$\downarrow_X x$, $x \in X \setminus A$。因此， A 是集合 $X \setminus \downarrow_X x$, $x \in X \setminus A$的交集。这些集合全都是开且上闭的，因而属于 $\{A \mid (U, A) \in sup \cap sub\}$，因为$(U, A) \in sup \cap sub$当且仅当 $U = A$。反之，若 L 的每个元素都是 $\{A \mid (U, A) \in sup \cap sub\}$中元素的下确界，那么特别地，对于每个点 $x \in X$，$X \setminus \downarrow_X x$ 都是开上闭集的交集。因此， $\downarrow_X x$ 是闭下闭集的并。其中一个——记作 C——将包含 x。由于 C 是下闭的，它必定包含 $\downarrow_X x$，且根据构造， $C \subseteq \downarrow_X x$；所以 $\downarrow_X x = C$ 是闭的，这表明 X 是下半闭的。特别地， X 是半闭的，当且仅当 $\mathcal{O}^{ad}X$ 同时满足*(usc)*和*(lsc)*。

引理 *4.4.* 对每个 *ad*-框架 $\Omega L \overset{def}{=} (\Omega\ L, tot, con, sup, sub)$，$pt^{ad}\Omega L$ 都是一个预序拓扑空间。它的上闭子集恰好是集合 $\mathcal{A}_a$，其中 $a \in L$。映射 $u \mapsto \mathcal{O}_u$ 是从 Ω 到格 $\mathcal{O}pt^{ad}\Omega L$ （即 $pt^{ad}\Omega L$ 的开子集构成的格）的满射框架同态，而映射 $a \mapsto \mathcal{A}_a$ 是从 L到 $pt^{ad}\,L$的上闭子集构成的格的满射完备格同态。

证明。容易看出，对于所有 $u, v \in \Omega$，都有 $\mathcal{O}_\top = X, \mathcal{O}_u \cap \mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{u \wedge v}$（因为 ΩL 的每个点 (x, s) 中的 x 都是一个滤子）；对于 Ω 的每个元素族 $(u_i)_{i \in I}$，都有 $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{u_i} = \mathcal{O}_{\bigvee_{i \in I} u_i}$（因为 ΩL 的每个点 (x, s) 中的 x 都是完全素的）。因此，集合族 $\mathcal{O}_u$（其中 $u \in \Omega$）构成$\mathbf{pt}^{ad}\Omega L$上的一个拓扑，并且 $u \mapsto \mathcal{O}_u$ 是一个满射框架同态。

我们记 X 为$\mathbf{pt}^{ad}\,\Omega L$，这样就可以使用记号 $\leq_X$、 $\downarrow_X$、 $\uparrow_X$。

类似地， $a \mapsto \mathcal{A}_a$ 是一个从 L 到完备格 $\mathcal{A}$ $\mathbf{def}=$ $\{\mathcal{A}_a \mid a \in L\}$的满射完备格同态。 $\mathcal{A}$ 中的每个元素 $\mathcal{A}_a$ 相对于 $\leq_X$都是上闭的：对于每个$(x, s) \in \mathcal{A}_a$，即 $a \in s$，以及每个满足$(x, s) \leq_X (y, t)$的点$(y, t) \in \mathrm{pt}^{ad}\,L$，也就是说满足 $s \subseteq t$的点，我们都有$a \in s \subseteq t$，因此$(y, t) \in \mathcal{A}_a$。反过来，我们希望证明，$X = \mathrm{pt}^{ad}\,L$ 中每个相对于 $\leq_X$ 上闭的子集 A 都具有某个$a \in L$所对应的形式 $\mathcal{A}_a$。我们先考虑特殊情形： A 是单个点$(x, s) \in X$的上闭包 $\uparrow_X (x, s)$。令 a $\mathbf{def}=$ $\bigwedge s$。由于 s 是完备滤子， a 属于 s，因而是 s的最小元；由此可知， s 是 L中a 的上闭包。于是， $\mathcal{A}_a$ 是由满足 $a \in t$的点(y, t)组成的集合，等价地说，是由满足 $s \subseteq t$ 的点组成的集合（因为 t 在 L中是上闭的），也就是 $\mathcal{A}_a = \uparrow_X (x, s)$。在一般情形下，设 X 中任意一个相对于 $\leq_X$上闭的子集为 A。那么 A 是各集合 $\uparrow_X x$的并，其中 x 遍历 A。每个集合 $\uparrow_X x$ 都可写成某个 $a_x \in L$所对应的 $\mathcal{A}_{a_x}$。因此$A = \bigcup_{x \in A} \mathcal{A}_{a_x} = \mathcal{A}_{\bigvee_{x \in A} a_x}$。 □

定义和引理 4.5。对于每个预序空间 X，都存在一个连续的保序映射 η_X: $X \to \boldsymbol{pt}^{ad}\,\mathcal{O}^{ad}X$，它将每个 $x \in X$ 映射到有序对$(\mathcal{N}_x, \mathcal{U}_x)$，其中 $\mathcal{N}_x$ 是 X中 x 的开邻域集合，而 $\mathcal{U}_x$是 X 中包含 x的 $\leq_X$-上闭子集族。

证明。我们验证 $(\mathcal{N}_x, \mathcal{U}_x)$ 是 $\mathcal{O}^{ad}X$ 的一个点。显然， $\mathcal{N}_x$ 是 $\mathcal{O}X$ 的元素所构成的完全素滤子。 $\mathcal{U}_x$ 显然在

格 $\mathcal{A}$ 中是 X 的 $\leq_X$-上闭子集，并且在任意交集下闭合。若 X 的 $\leq_X$-上闭子集的某个并 $\bigcup_{i\in I} A_i$ 属于 $\mathcal{U}_x$，也就是说包含 x，那么某个 A_i 包含 x，所以 $\mathcal{U}_x$ 是完全素的。对于每个全对 (U, A)，也就是说 $U \cup A = X$，我们验证 $U \in \mathcal{N}_x$ 或 $A \in \mathcal{U}_x$: 这仅表示 $x \in U$ 或 $x \in A$，显然成立。对于每个一致对 (U, A)，也就是说 $U \cap A = \emptyset$，我们不能有 $U \in \mathcal{N}_x$ 和 $A \in \mathcal{U}_x$，也就是说不能有 $x \in U$ 和 $x \in A$。对于每个包含关系中的有序对 (U, A)，也就是说满足 $U \supseteq A$ 的有序对，我们验证 $U \in \mathcal{N}_x$ 或 $A \notin \mathcal{U}_x$: 若 $A \in \mathcal{U}_X$，则 $x \in A \subseteq U$，所以 $U \in \mathcal{N}_x$。若 $U \subseteq A$，则我们验证 $U \notin \mathcal{N}_X$ 或 $A \in \mathcal{U}_x$: 若 $U \in \mathcal{N}_x$，则 $x \in U \subseteq A$，所以 $A \in \mathcal{U}_x$。因此，$(\mathcal{N}_x, \mathcal{U}_x)$ 是 $\mathcal{O}^{ad}X$ 的一个点。

对于每个 $U \in \mathcal{O}X$，$(\eta_X)^{-1}(\mathcal{O}_U) = \{x \in X \mid U \in \mathcal{N}_x\} = U$，因此 η_X 是连续的。对于所有满足 $x \leq_X y, \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_y$ 的 x，$y \in X$，由于每个包含 x 的 $\leq_X$-向上闭集也必须包含 y。根据$\mathbf{pt}^{ad}\,\mathcal{O}^{ad}X$ 上预序的定义，$\eta_X(x)$ 小于或等于 $\eta_Y(y)$。□

存在一个函子 pt^{ad}，它从 adFrm^{op} 到 PreTop。我们已在定义 4.1 中定义了它对对象的作用。给定 adFrm^{op} 中的一个态射 $\phi\colon \Omega L \to \Omega'$，也就是一个 ad- 框架同态 $\phi\,\mathrm{def}{=}(\varphi, p)\colon \Omega L' \to \Omega L$，我们将 $\mathrm{pt}^{ad}\,\phi$ 定义为把 ΩL 的每个点 (x, s) 映射到 $(\varphi^{-1}(x)\ p^{-1}(s))$。后者在类型上是正确的，因为 x 是 Ω 的子集，而 s 是 L 的子集，其中 $\Omega L = (\Omega\ L, \mathrm{tot}, \mathrm{con}, \mathrm{sup}, \mathrm{sub})$。

引理 4.6. *pt^{ad} 是从***adFrm**^{op} 到 **PreTop**的函子。

证明。采用上述记号，并令 $\Omega L'$ 为 $(\Omega', L', \mathrm{tot}', \mathrm{con}', \mathrm{sup}', \mathrm{sub}')$，我们首先验证 $\mathrm{pt}^{ad}\,\phi(x, s)$ 是 $\Omega L'$ 的一个点。由于 φ^{-1} 和 p^{-1} 与所有并和交集交换，$\varphi^{-1}(x)$ 是一个完全素滤子，而 $p^{-1}(s)$ 是一个完全素完备滤子。

对于 $\Omega' \times L'$ 中的每个全对 $(v,\ b)$，我们必须证明 $v \in \varphi^{-1}(x)$ 或$b \in p^{-1}(s)$。由于 ϕ 保持全性，$(\varphi(v)\ p(b))$ 属于 tot'。由于 $(x,\ s)$ 是一个点，因此必有 $\varphi(v) \in x$ 或 $p(b) \in s$，这正是我们要证明的。

对于 $\Omega' \times L'$ 中的每个一致对 (v, b)，我们必须证明 $v \notin \varphi^{-1}(x)$ 或 $b \notin p^{-1}(s)$。假设 $v \in \varphi^{-1}(x)$ 且 $b \in p^{-1}(s)$。那么 $\varphi(v) \in x$ 且$p(b) \in s$。由于 ϕ 保持一致性，且 $(v, b) \in \mathrm{con}$，因此 $(\varphi(v)\ p(b))$ 属于 con'。但是，由于 (x, s) 是一个点，我们必有 $\varphi(v) \notin x$ 或 $p(b) \notin s$，这不可能。

对于 $\in \mathrm{sup}'$ 中的每个有序对 (v, b)，我们必须证明 $v \in \varphi^{-1}(x)$ 或 $b \notin p^{-1}(s)$。由于 (φ, p) 保持包含关系，$(\varphi(v)\ p(b))$ 属于 sup；又由于 (x, s) 是一个点，$\varphi(v) \in x$ 或 $p(b) \notin s$，这正是我们要证明的。

若改为 $(v, b) \in \mathrm{sub}'$，则我们依赖这样一个事实：(φ, p) 保持包含关系，因此 $(\varphi(v)\ p(b)) \in \mathrm{sub}$。由于 (x, s) 是一个点，$\varphi(v) \notin x$ 或 $p(b) \in s$，所以$v \notin \varphi^{-1}(x)$ 或 $b \in p^{-1}(s)$。

接下来，我们需要证明$\mathbf{pt}^{ad}\,\phi$ 是连续且保序的。对于$\mathbf{pt}^{ad}\Omega L'$的每个开子集 $\mathcal{O}_v$，其中 $v \in \Omega'$，$(\mathbf{pt}^{ad}\,\phi)^{-1}(\mathcal{O}_v)$是由满足以下条件的点$(x, s)$组成的集合：$(\in \mathbf{pt}^{ad}\,\Omega L$，且 $\mathbf{pt}^{ad}\,\phi(x, s) \in \mathcal{O}_v)$，也就是说，满足

$v \in \varphi^{-1}(x)$，也就是说，满足 $\varphi(v) \in x$，而这正是 $\mathcal{O}_{\varphi(v)}$。因此，$\mathrm{pt}^{ad}\,\phi$ 是连续的。对于$\mathrm{pt}^{ad}\,\Omega L$ 中的任意两点(x,s)和(y,t)，若(x,s)低于(y,t)，也就是说，若 $s \subseteq t$, $p^{-1}(s) \subseteq p^{-1}(t)$，则点$\mathrm{pt}^{ad}\,\phi(x,s) = (\varphi^{-1}(x)\ p^{-1}(s))$低于$(\varphi^{-1}(y)\ p^{-1}(t))$ $= \mathrm{pt}^{ad}\,\phi(y,t)$。因此，$\mathrm{pt}^{ad}\,\phi$ 是单调的。

$\mathbf{pt}^{ad}$ 将恒等态射映为恒等态射并保持复合，这一事实显而易见。

□

备注 *4.7*。我们在备注 *4.3* 中证明了，函子 $\mathcal{O}^{ad}$ 将上半闭预序拓扑空间映为满足 *(usc)* 的 *ad*-框架，并将下半闭预序拓扑空间映为满足 *(lsc)* 的 *ad*-框架。反过来，对于每个 *ad*-框架 $\Omega L \overset{def}{=} (\Omega\ L, tot, con, sup, sub)$，我们断言，若 ΩL满足 *(usc)*，则 $X \overset{def}{=} pt^{ad}\,\Omega L$ 是上半闭的。令 $(x,s) \in X$。由于s 是 L的元素构成的完备滤子，它有一个最小元 a，并且 s 是 L 中大于或等于 a的元素的集合。根据 *(usc)*，a 是满足如下条件的元素 a' 的上确界：对于某个 $u' \in \Omega$，有 $(u', a') \in tot \cap con$。但 s是完全素的，因此其中一个这样的元素 a' 属于 s。由于 $a' \leq a$ 且 a 是 s中的最小元，我们必须得出结论：$a = a'$，也就是说，存在一个 $u \in \Omega$，使得 $(u,a) \in tot \cap con$。我们断言，$\uparrow_X(x,s)$ 是 $\mathcal{O}_u$ 的补集，因此是闭的。事实上，对于每个点 (y,t)，$(y,t) \in \uparrow_X(x,s)$ 当且仅当 $s \subseteq t$，当且仅当 $a \in t$。由于 $(u,a) \in tot \cap con$，且根据 ΩL的点的定义，我们有 $(u \in y$ 或 $a \in t)$ 且 $(u \notin y$ 或 $a \notin t)$，也就是说，$a \in t$ 当且仅当 $u \notin y$。因此，$(y,t) \in \uparrow_X(x,s)$ 当且仅当 $u \notin y$，当且仅当 $(y,t) \notin \mathcal{O}u$。

同样，若 ΩL满足 *(lsc)*，则 X 是下半闭的。证明如下。设 $(x,s) \in X$。由于 s 是完全素的，s的补集 $\bar{s}$ 对任意上确界封闭；因此 $\bar{s}$ 有一个最大元 a。根据 *(lsc)*，a 是满足以下条件的元素 a' 的下确界：对于某个 $u' \in \Omega$，$(u', a') \in sup \cap sub$。若所有这些元素都属于 $\bar{s}$，那么由于 s 是完备滤子，a 也会属于 $\bar{s}$。因此，这些元素中至少有一个 a' 属于 s。但是 $a \leq a'$，且由于 a 是 s中的最大元，$a' \leq a$，所以 $a = a'$。因此 a 本身满足：对于某个 $u \in \mathcal{O}u$，$(u,a) \in sup \cap sub$。我们断言，$\downarrow_X(x,s)$ 是 $\mathcal{O}_u$的补集，因此是闭的。事实上，对每个点 (y,t)，$(y,t) \in \downarrow_X(x,s)$ 当且仅当 $t \subsetneq s$，当且仅当 $s \subseteq t$，当且仅当 $a \notin t$。由于 $(u,a) \in sup \cap sub$，且根据 ΩL中点的定义，我们有 $(u \in y$ 或 $a \notin t)$ 和 $(u \notin y$ 或 $a \in t)$，也就是说，$a \in t$ 当且仅当 $u \in y$。因此，$(y,t) \in \downarrow_X(x,s)$ 当且仅当 $u \notin y$，当且仅当 $(y,t) \notin \mathcal{O}u$。

命题 4.8。对于每个预序拓扑空间 X、每个 *ad*-框架$\Omega L \overset{def}{=} (\Omega\ L, \mathsf{tot}, \mathsf{con}, \mathsf{sup}, \mathsf{sub})$以及每个连续保序映射 $f\colon X \to pt^{ad}\,\Omega L$，存在唯一的 *ad*-框架同态 $f^!\colon \Omega L \to \mathcal{O}^{ad}X$，使得$pt^{ad}\,f^! \circ \eta_X = f$。

证明。对于每个 $x \in X$，$f(x)$ 都是 ΩL 的一个点，我们将其记作 $(g(x)\ h(x))$；$g(x)$ 是 Ω 中元素的完全素滤子，而 $h(x)$ 是 L 中元素的完全素完备滤子。

如果 $f^!$ 存在，那么将其写作 (φ, p)，我们必须有：对于每个 $x \in X$，$f(x) = \mathrm{pt}^{ad} f!(\eta_X(x)) = \mathrm{pt}^{ad} f!(\mathcal{N}_x, \mathcal{U}_x)$（其中 $\mathcal{N}_x$ 是 x 的开邻域的完全素滤子，而 $\mathcal{U}_x$ 是包含 x的 $\leq_X$-上闭子集的完全素完备滤子）$= (\varphi^{-1}(\mathcal{N}_x)\ p^{-1}(\mathcal{U}_x))$。考察第一分量，我们必须有 $g(x) = \varphi^{-1}(\mathcal{N}_x)$，因此对于每个 $x \in X$，对于每个 $v \in \Omega$，$v \in g(x)$ 当且仅当 $\varphi(v) \in \mathcal{N}_x$，当且仅当 $x \in \varphi(v)$。因此，对于每个 $v \in \Omega$，$\varphi(v)$ 必须等于 $\{x \in X \mid v \in g(x)\}$。类似地，对于每个 $a \in L$，$p(a)$ 必须等于 $\{x \in X \mid a \in h(x)\}$。这表明，如果 $f^!$ 存在，则它是唯一的。

定义 $g^!(v)$ 为 $\{x \in X \mid v \in g(x)\}$，对每个 $v \in \Omega$，定义 $h^!(a)$ 为 $\{x \in X \mid a \in h(x)\}$，对每个 $a \in L$，并定义 $f^!$ 为 $(g^!, h^!)$。

我们验证 $g^!$ 是一个框架同态。对每个 $v \in \Omega$，以及每个$x \in X$，$x \in g^!(v)$ 当且仅当 $v \in g(x)$；根据 $g^!$ 的定义，当且仅当$g(x) \in \mathcal{O}_v$；因此，对每个 $v \in \Omega$，$g^!(v)$ 等于 $g^{-1}(\mathcal{O}_v)$。然而，g^{-1} 保持所有并和交集，而根据引理 4.4，$v \mapsto \mathcal{O}_v$ 是一个框架同态。因此，$g^!$ 是一个框架同态。

类似地，对每个 $a \in L$，$h^!(a) = h^{-1}(\mathcal{A}_a)$，因此 $h^!$ 是一个完备格同态，这是利用了根据引理 4.4，$a \mapsto \mathcal{A}_a$ 是一个完备格同态这一事实。

让我们检查 $f^!$ 是否保持全性。对于每个 $(v, b) \in \mathsf{tot}$，我们必须证明 $(g^!(v)\ h^!(b))$ 是全性的，也就是说，每个点 $x \in X$ 都属于 $g^!(v)$ 或属于 $h^!(b)$。由于 $f(x) = (g(x)\ h(x))$ 是 $\Omega\mathcal{L}$ 的一个点，并且由于 $(v, b) \in \mathsf{tot}$，我们必须有 $v \in g(x)$ 或 $b \in h(x)$，也就是 $x \in g^!(v)$ 或 $x \in h^!(b)$。

让我们检查 $f^!$ 是否保持一致性。对于每个 $(v, b) \in \mathsf{con}$，我们必须证明 $(g^!(v)\ h^!(b))$ 是一致的，也就是说，$g^!(v)$ 与 $h^!(b)$ 不相交。交集中的一个点将是一个点 $x \in X$，满足 $v \in g(x)$ 且$a \in h(x)$。由于 $f(x) = (g(x)\ h(x))$ 是 $\Omega\mathcal{L}$ 的一个点，并且由于 $(v, b) \in \mathsf{con}$，我们必须有 $v \notin g(x)$ 或 $b \notin h(x)$，从而导致矛盾。

我们验证 $f^!$ 保持包含关系。对于每个 $(v,\ b) \in \mathsf{sup}$，我们必须证明 $g^!(v) \supseteq h^!(b)$。对于每个点 $x \in h^!(b)$，b 属于 $h(x)$。但是，$f(x) = (g(x)\ h(x))$ 是 $\Omega\mathcal{L}$ 中的一个点，并且 $(v,\ b) \in \mathsf{sup}$，因此 $v \in g(x)$ 或 $b \notin h(x)$。由于$b \in h(x)$，我们得到 $v \in g(x)$，从而得到 $x \in g^!(v)$。

我们验证 $f^!$ 保持包含关系。对于每个 $(v,\ b) \in \mathsf{sub}$，我们必须证明 $g^!(v) \subseteq h^!(b)$。对于每个 $x \in g^!(v)$，v属于 $g(x)$。由于 $f(x) = (g(x)\ h(x))$ 是 $\Omega\mathcal{L}$ 中的一个点，并且 $(v,\ b) \in \mathsf{sub}$，我们有 $v \notin g(x)$ 或 $b \in h(x)$。但是 $v \in g(x)$，所以$b \in h(x)$，换句话说 $x \in h^!(b)$。

最后，对于每个 $x \in X$，$\mathrm{pt}^{ad} f!(\eta_X(x)) = ((g^!)^{-1}(\mathcal{N}_x), (h^!)^{-1}(\mathcal{U}_x)) = (\{v \in \Omega \mid g^!(v) \in \mathcal{N}_x\}, \{b \in L \mid h^!(b) \in \mathcal{U}_x\}) = (\{v \in \Omega \mid x \in g^!(v)\}, \{b \in L \mid x \in h^!(b)\}) = (\{v \in \Omega \mid v \in g(x)\}, \{b \in L \mid b \in h(x)\}) = (g(x)\ h(x)) = f(x)$。 □

我们将命题 4.8 改述如下。

定理 4.9。 在$\mathbf{PreTop}$ 和$\mathbf{adFrm}^{op}$之间存在一个$\boldsymbol{pt}^{ad}$ 伴随 $\mathcal{O}^{ad} \dashv$，其单位为 η。

定理 4.9 是 Stone伴随 $\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$ 在 $\mathbf{Top}$ 与$\mathbf{Frm}^{op}$之间的类似形式。

5 ad-豪斯多夫化

通常的 Stone伴随 $\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$ 产生一个单子 $\mathbf{pt}\,\mathcal{O}$，即素化单子。对于一个拓扑空间 X，有一种更简单且自然同构的方式来描述 $\mathbf{pt}\,\mathcal{O}X$，即如下空间 X^s—— X 的标准逼近化，其定义如下。 X^s 的点是 X的不可约 闭子集 C，即满足以下条件的非空闭集 C ： 对于 X 的任意闭子集 C_1和 C_2，若 $C \subseteq C_1 \cup C_2$，则 C 包含于 C_1 或 C_2中。等价地，闭集 C 是不可约的，当且仅当对于开集的任意有限族 U_1、……、 U_n，如果 C 与其中每一个相交，则 C 与 $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ 相交。 X^s 的开子集是集合 $\diamond U \overset{\text{def}}{=} \{C \in X^s \mid C \cap U \neq \emptyset\}$ （Goubault-Larrecq，2013年，第8.2节）。

类似地，我们称$\mathbf{pt}^{ad}\,\mathcal{O}^{ad}X$ 为 X 的*ad*-豪斯多夫化。其点是满足以下条件的有序对 $(\mathcal{N},\mathcal{U})$:

1. $\mathcal{N}$ 是 X 的开子集上的完全素滤子；2. $\mathcal{U}$ 是 $\leq_X$-上闭子集上的完全素完备滤子；3. 对于由开子集 U 和 X 的 $\leq_X$-上闭子集 A 构成的每个全对 (U, A)，若 $U \cup A = X$，则 $U \in \mathcal{N}$ 或 $A \in \mathcal{U}$ ；4. 对于由开子集 U 和 X 的 $\leq_X$-上闭子集 A 构成的每个一致对 (U, A)，若 $U \cap A = \emptyset$，则 $U \notin \mathcal{N}$ 或 $A \notin \mathcal{U}$；5. 对于由开子集 U 和 X 的 $\leq_X$-上闭子集 A 构成的每个有序对 (U, A)，若 $U \supseteq A$，则 $U \in \mathcal{N}$ 或 $A \notin \mathcal{U}$；6. 对于由开子集 U 和 X 的 $\leq_X$-上闭子集 A 构成的每个有序对 (U, A)，若 $U \subseteq A$，则 $U \notin \mathcal{N}$ 或 $A \in \mathcal{U}$。

我们可以将其简化如下。

条目 1。由于 $\mathcal{N}$ 是 X的开子集的完全素滤子， X 中不属于 $\mathcal{N}$ 的最大开子集的补集是 X的不可约闭子集 C，而 $\mathcal{N}$是与C相交的 X 的开子集的集合。换言之，我们可以用 C表示 $\mathcal{N}$； C是 X的（标准）素化 X^s 中的一个点。

条目 2. $\mathcal{U}$ 使情况进一步简化。由于 $\mathcal{U}$ 是一个完备滤子， $\mathcal{U}$ 中所有元素的交集仍属于 $\mathcal{U}$。换言之，存在 X 的一个 $\leq_X$-上闭子集 A，使得 A 是 X 中包含 A 的所有 $\leq_X$-上闭子集的集合。此外，由于 $\mathcal{U}$ 是完全素的，并且 A是所有子集 $\uparrow_X x$、$x \in A$ 的并集（其中 $\uparrow_X$ 表示相对于 $\leq_X$的上闭包），因此对于某个 $x \in A$，$\uparrow_X x$ 必属于 $\mathcal{N}$。换言之，对于某个 $x \in A$，$A \subseteq \uparrow_X x$ 成立。反向包含显然成立，因此 A 是某个点 $x \in X$的 $\leq_X$-上闭包。（一般来说，此点并不唯一，除非

$\leq_X$ 是反对称的。）由此可知，$\mathcal{U}$ 正是 X 中包含 x的所有 $\leq_X$-上闭子集的集合。点 x 在 $\leq_X \cap \geq_X$意义下唯一确定，其中 $\leq_X \cap \geq_X$是与 $\leq_X$ 相关联的等价关系（若 $\leq_X$ 是反对称的，则该等价关系就是相等关系）。记 x的等价类为 $[x]_X$。那么，对于某个唯一的等价类 $[x]_X$，$\mathcal{U}$ 就是 X 中包含 x的所有 $\leq_X$-上闭子集的集合。

条目 3。全性条件于是表述为：对于每个开子集 U of X，对于每个 $\leq_X$-上闭子集 A of X，若 $U \cup A = X$，则 U与 C或 $x \in A$相交。我们声称，这个条件等价于 $C \cap \downarrow_X x$非空，其中 $\downarrow_X$ 表示关于 $\leq_X$的下闭包。若该条件成立，那么取 U 为 C 的补集，并取 A为 $\downarrow_X x$的补集，可得 $U \cap A$ 不可能等于 X；取补集后，$C \cap \downarrow_X x$ 非空。反过来，若 $C \cap \downarrow_X x$ 非空，那么取交集中的 y。对于每个开子集 U of X，对于每个$\leq_X$-上闭子集 A of X，若 U 不与 C 和 $x \notin A$ 相交，那么特别地，y 不属于 U，且 y 不属于 A（否则，由于 $y \in \downarrow_X x$，也就是说由于$y \leq_X x$，并且由于 A 是 $\leq_X$-上闭的，x 就会属于 A），因此 $U \cup A \neq X$。这就是全性条件的逆否命题。

条目 4。一致性的条件表述如下：对于每个开子集 U 以及每个 $\leq_X$-上闭子集 A，若其为 X的子集且满足 $U \cap A = \emptyset$，则 U与 C 不相交，或者 $x \notin A$。我们声称，这等价于 $C \subseteq cl(\uparrow_X x)$，其中$cl$ 表示在 X中的闭包。事实上，若 $C \subseteq cl(\uparrow_X x)$不成立，那么对于 U取 $cl(\uparrow_X x)$的补集，对于 A取 $\uparrow_X x$，便有 $U \cap A = \emptyset$ 但$x \in A$，因此根据该条件，U 与 C 不相交；但这意味着 $C \subseteq cl(\uparrow_X x)$，这是不可能的。反过来，若 $C \subseteq cl(\uparrow_X x)$，那么对于每个开子集 U 以及每个 $\leq_X$-上闭子集 A，若其为 X 的子集且满足 U与 C 相交（因而也与 $\uparrow_X x$相交，设交点为 y），并且 $x \in A$，那么 U 就会与 A相交（交点为 y）。这就是该条件的逆否命题。

第5项。与第3项对称，关于包含的条件等价于以下事实：$C \cap \uparrow_X x \neq \emptyset$，其中 $\uparrow_X$ 是关于 $\leq_X$的上闭包。事实上，关于包含的条件等价于：对于每个开集 U 以及每个 $\leq_X$-上闭集 A，只要 $U \supseteq A$，U 就与 C 或 $x \notin A$相交。若该条件成立，则取 C 的补集作为 U，取 $\uparrow_X x$ 的补集作为 A，我们有 $U \cap C = \emptyset$ 和 $x \in A$，因此根据逆否命题可得 $U \not\supseteq A$；换言之，$C \cap \uparrow_X x \neq \emptyset$。反之，若 $C \cap \uparrow_X x \neq \emptyset$，则对于每个开集 U 以及每个 $\leq_X$-上闭集 A，只要 $U \supseteq A$，若 $x \in A$，则 $\uparrow_X x \subseteq A \subseteq U$；由于 C 与 $\uparrow_X x$相交，它必然也与更大的集合 U相交。

第6项。与第4项对称，关于包含关系的条件等价于 $C \subseteq cl(\downarrow_X x)$。事实上，关于包含关系的条件等价于：对于每个开集 U 以及每个 $\leq_X$-上闭集 A，若 $U \subseteq A$，则 U 与 C 不相交，或 $x \in A$。若该条件成立，令 U 为 $cl(\downarrow_X x)$ 的补集，并令 A 为 $\downarrow_X x$的补集。我们有 $\downarrow_X x \subseteq cl(\downarrow_X x)$，因此$U \subseteq A$，从而 U 与 C 不相交，或 $x \in A$。但是 x 不属于 A，所以 U与 C不相交，这意味着 $C \subseteq cl(\downarrow_X x)$。反之，若 $C \subseteq cl(\downarrow_X x)$，那么对于每个开集 U 以及每个 $\leq_X$-上闭集 A，若 $U \subseteq A$，且 U与 C不相交，我们希望证明 $x \in A$。由于 U与 C相交，

U 与 $cl(\downarrow_X x)$ 相交，因此也与 $\downarrow_X x$ 相交。设 $y \in U \cap \downarrow_X x$。由于 $U \subseteq A$, y 属于 A；但 $y \leq_X x$ 且 A 是 $\leq_X$-上闭的，所以 $x \in A$。

这引出了如下定义。回顾一下，$[x]_X$ 表示关于 $\leq_X \cap \geq_X$ 的 $x \in X$ 的等价类。

定义 *5.1.* 预序拓扑空间 X 的 *ad*-豪斯多夫化 X^{ads} 是由有序对 $(C, [x]_X)$ 构成的集合，其中 $C \in X^s$, $x \in X$, C 与 $\downarrow_X x$,$C \subseteq cl(\uparrow_X x)$ 相交，C 与 $\uparrow_X x$ 相交，且 $C \subseteq cl(\downarrow_X x)$。其拓扑由开集 $\diamond^{ad} U \stackrel{def}{=} \{(C, [x]_X) \in X^{ads} \mid C \cap U \neq \emptyset\}$ 构成，其预序规定：当且仅当包含 x 的 X 的 $\leq_X$-上闭子集族包含于包含 y 的 X 的 $\leq_X$-上闭子集族中，当且仅当 $x \leq_X y$ 时，$(C, [x]_X)$ 小于或等于 $(D, [y]_X)$。

与我们在本定义之前的讨论中所做的相反，X^{ads} 的任意一点 $(C, [x]_X)$ 都会给出 $\mathbf{pt}^{ad}\,\mathcal{O}^{ad}X$ 中的一点 $(\mathcal{N}, \mathcal{U})$：令 $\mathcal{N}$ 为 X 中与 C 相交的开子集 U 的集合，并令 $\mathcal{U}$ 为 X 中包含 x 的 $\leq_X$-上闭子集的集合；构造 $(C, [x]_X) \mapsto (\mathcal{N}, \mathcal{U})$ 与 $(\mathcal{N}, \mathcal{U}) \mapsto (C, [x]_X)$ 互为逆构造。通过这一双射，开子集 $\mathcal{O}_U$ 被映至 $\diamond^{ad} U$，而 $\mathbf{pt}^{ad}\,\mathcal{O}^{ad}X$ 上的预序被映至定义 5.1 中给出的预序。换言之，

事实 5.2。对于每个预序拓扑空间，X^{ads} 在 **PreTop** 中与 $\mathbf{pt}^{ad}\,\mathcal{O}^{ad}X$ 同构。

通过此同构，单位 η_X: $X \to \mathbf{pt}^{ad}\,\mathcal{O}^{ad}X$（经由复合）映为一个映射，我们仍记作 η_X，它从 X 映到 X^{ads}，并将每个点 $x \in X$ 映至 $(cl(\{x\})\ [x]_X)$。这是与伴随 $\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$ 相关联的单子 $^{ads} \cong \mathbf{pt}^{ad}\,\mathcal{O}^{ad}$ 的单位。其在态射上的作用可通过追踪 $\mathbf{pt}^{ad}\,\mathcal{O}^{ad}$ 经由该同构后的作用得到。现在我们将其明确写出。记 $f[C]$ 为 C 在 f 下的像。

命题 5.3. 对于预序拓扑空间之间的每个连续保序映射 f: $X \to Y$，函子 ^{ads} 作用于 f 后得到连续保序映射 f^{ads}: $X^{ads} \to Y^{ads}$，其定义为 $f^{ads}(C, [x]_X) \stackrel{def}{=} (cl(f[C])\ [f(x)]_Y)$，对每个 $(C, [x]_X) \in X^{ads}$ 均成立。

证明。对于预序拓扑空间之间的每个连续保序映射 f: $X \to Y$，$\mathcal{O}^{ad}f$: $\mathcal{O}^{ad}Y \to \mathcal{O}^{ad}X$ 是 (φ, p) def $= (f^{-1}, f^{-1})$（参见引理 3.4），于是 $\mathrm{pt}^{ad}\,\mathcal{O}^{ad}f$ 将 $\mathcal{O}^{ad}X$ 中的每个点 $(\mathcal{N}, \mathcal{U})$ 映射为 $(\varphi^{-1}(\mathcal{N}), p^{-1}(\mathcal{U}))$。当 $\mathcal{N}$ 是与 C 相交的 X 的开子集所构成的完全素滤子时，$\varphi^{-1}(\mathcal{N})$ 是 Y 的开子集 V 所构成的完全素滤子，其中这些开子集满足 $\varphi(V) = f^{-1}(V) \in \mathcal{N}$，也就是说，满足 $f^{-1}(V)$ 与 C 相交；亦即满足 V 与 $f[C]$ 相交，或者等价地，满足 $cl(f[C])$。当 $\mathcal{U} = [x]_X$ 时，$p^{-1}(\mathcal{U})$ 是 Y 的 $\leq_Y$-上闭子集 B 所构成的完全素完备滤子，其中这些子集满足 $p(B) = f^{-1}(B)$ 包含 x，也就是说，是那些包含 $f(x)$ 的子集所构成的滤子。 □

对于 X 的每个 $\leq_X$-向上闭子集 A，令 $[A] \text{定义}= \{(C, [x]_X) \in X^{ads} \mid x \in A\}$。

引理 5.4。对于任意预序拓扑空间 X，映射 $\diamond^{ad}$ 是 $\mathcal{O}X$ 到 $\mathcal{O}X^{ads}$ 的序同构。映射 $A \mapsto [A]$ 是 $\leq_X$ 的 X 的上闭子集格到 X^{ads} 的上闭子集格的序同构。

证明。根据 X^{ads} 上拓扑的定义，$\diamond^{ad}$ 是满射。它是单调的：若 $U \subseteq V$ 属于 $\mathcal{O}X$，则对每个 $(C, [x]_X) \in \diamond^{ad}U$，$C$ 与 U 相交，因此 C 与 V 相交，故 $(C, [x]_X) \in \diamond^{ad}V$。我们断言 $\diamond^{ad}$ 反映序关系，即对所有 $U, V \in \mathcal{O}X$，$\diamond^{ad}U \subseteq \diamond^{ad}V$ 蕴含 $U \subseteq V$。对每个 $x \in U$, cl, $(\{x\})$ 与 U 相交（在 x 处），因此 $\eta_X(x) = (cl(\{x\})\ [x]_X)$ 属于 $\diamond^{ad}U$。若 $\diamond^{ad}U \subseteq \diamond^{ad}V$，则 $\eta_X(x)$ 也必属于 $\diamond^{ad}V$，也就是说 $cl(\{x\}$ 必须与 V 相交。于是 $\{x\}$ 必须与 V 相交，因此 $x \in V$。由于 x 在 U 中任意，$U \subseteq V$。

我们将映射 $A \mapsto [A]$ 记为 f，其中 A 遍历 X 的 $\leq_X$ 上闭子集。注意，$f(A)$ 是上闭的：若 $(C, [x]_X) \in f(A)$，即若 $x \in A$，且若 $(C, [x]_X)$ 低于 $(D, [y]_X)$，即若 $x \leq_X y$，那么 y 属于 A，因此 $(D, [y]_X) \in f(A)$。显然，f 是单调的。设 A、B 是 X 的两个 $\leq_X$ 上闭子集，并假设 $f(A) \subseteq f(B)$。对于每个 $x \in A$，$\eta_X(x)$ 都属于 $f(A)$，因而属于 $f(B)$，这意味着 $x \in B$。因此 $A \subseteq B$。我们刚刚证明了 f 是单调序反映。

还需证明 f 是满射。设 $\mathcal{A}$ 是 X^{ads} 的一个向上闭子集。我们将 A 定义为 $\{x \in X \mid (C, [x]_X) \in \mathcal{A}$，其中 $C \in X^s\}$。A 是 $\leq_X$-上闭的：若 $x \in A$，即若 $(C, [x]_X) \in \mathcal{A}$，其中 $C \in X^s$，且若 $x \leq_X y$，则 $\eta_X(y)$ 在 X^{ads} 中高于 $(C, [x]_X)$；由于 $\mathcal{A}$ 是向上闭的，$\eta_X(y) \in \mathcal{A}$，故 $y \in A$。最后，$f(A)$ 是由满足如下条件的点 $(D, [x]_X)$ 构成的集合：$(C, [x]_X) \in \mathcal{A}$，其中 $C \in X^s$，因此它包含 $\mathcal{A}$。反过来，每个这样的点 $(D, [x]_X)$ 在 X^{ads} 中都高于（且低于）$(C, [x]_X)$，因此属于 $\mathcal{A}$，因为 $\mathcal{A}$ 是向上闭的；这说明 $f(A) \subseteq \mathcal{A}$，从而 $f(A) = \mathcal{A}$。

□

引理 5.5. 对于任意预序拓扑空间 X，对于每个 $U \in \mathcal{O}X$,$\eta_X^{-1}(\diamond^{ad}U) = U$；对于每个 $\leq_X$-上闭子集 A *of* X, $\eta_X^{-1}([A]) = A$。

证明。 $\eta_X^{-1}(\diamond^{ad}U)$由满足条件 $(cl(\{x\})\ [x]_X) \in \diamond^{ad}U$ 的点 x组成，即满足 $cl(\{x\})$ 与 U相交的点，或者等价地，满足 $\{x\}$ 与U相交的点；这正是 U。 $\eta_X^{-1}([A])$ 由满足条件 $(cl(\{x\})\ [x]_X)$ 的点 x组成，也就是说，$[x]_X$ 可以写成某个 $y \in A$ 的 $[y]_A$。由于 A 是 $\leq_X$-上闭的，因此是若干等价类的并集，这等价于 $x \in A$。

□

在无序拓扑空间的情形下，$\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$ 伴随的单位在某个空间上是双射，当且仅当它是同胚；这又当且仅当 X 是康托尔正规的，也就是说，每个不可约闭子集都是某个唯一点的闭包。

定义与引理 5.6。对于预序拓扑空间 X，以下条件等价：

1. $\eta_X : X \to X^{ads}$ *is bijective;*
2. η_X: $X \to X^{ads}$ 是 **PreTop** 中的一个同构；

3. X 是 *ad*-饱和的，也就是说，每个不可约对都等于 $(cl(\{x\})\ [x]_X)$，其中 x 是 X的唯一点。不可约对是指形如 $(C, [x]_X)$ 的有序对，其中 $C \in X^s$ 和 $x \in X$，且 C 与 $\downarrow_X x$相交，$C \subseteq cl(\uparrow_X x)$，$C$ 与$\uparrow_X x$ 相交，且 $C \subseteq cl(\downarrow_X x)$。

证明。 条件 3 只是对条件 1 的另一种表述，而条件 2 显然蕴含条件 1。下面证明 1 蕴含 2。假设 η_X 是双射，并令 g 为其逆映射。我们需要证明 g 连续且单调。由引理 5.5，$\eta_X^{-1}(\diamond^{ad}U) = U$ 对每个 $U \in \mathcal{O}X$ 都成立；因此 $g^{-1}(U) = \diamond^{ad}U$，这表明 g 连续。类似地，对于 X 中每个 $\leq_X$- 上闭子集 A，都有 $g^{-1}(A) = [A]$。由于 $[A]$ 在 X^{ads} 中是上闭的（引理 5.4），对于 X 中每个 $\leq_X$-上闭子集 A，$g^{-1}(A)$ 都是上闭的；由此不难推得 g 是单调的。 □

6 素化与 ad-豪斯多夫化

素化与 ad-豪斯多夫化之间有什么联系？二者确实有相似之处，我们在此将其明确说明。

令 **Ind** 为一个函子，它将每个拓扑空间 X 映射为预序拓扑空间 X，并在 X 上赋予平凡预序（其中每个点都小于或等于其他所有点）。此函子在态射上的作用是恒等映射。

命题 6.1. $^{ads} \circ$ ***Ind***与 ***Ind***$\circ^s$之间存在自然同构。

证明。我们先考察对象。设 X 是一个拓扑空间。若 X 为空，则 $(\mathbf{Ind}X)^{ads}$ 为空，而 X^s 也为空。因此，设 X 非空，并取 $x \in X$。x 关于 $\sim$ 的等价类就是 X 本身。因此，$(\mathbf{Ind}X)^{ads}$ 的点是满足以下条件的有序对 (C, X)：$C \in X^s$ 与 C 相交（显然成立），$C \subseteq cl(\uparrow_X x) = X$（同样显然成立），$C$ 与 $\uparrow_X x = X$ 相交（显然成立），且 $C \subseteq cl(\downarrow_X x) = X$（仍然显然成立）。这表明映射 $(C, X) \mapsto C$ 是从 $(\mathbf{Ind}X)^{ads}$ 到 X^s的双射。开集 $\diamond U$ 的原像是 $\diamond^{ad}U$，因此这是一个同胚。此外，在 $(\mathbf{Ind}X)^{ads}$ 中，(C, X)总是小于或等于(D, X)，所以 $(\mathbf{Ind}X)^{ads}$ 上的预序是平凡预序。

我们已经获得了一个同构 $(C,\ X) \mapsto C$，它将 $(\mathbf{Ind}X)^{ads}$ 映射到任意拓扑空间 X 的 $\mathbf{Ind}(X^s)$ 上。（当 X 为空时，这也成立。）

自然性意味着，对于每个连续映射 $f\colon X \to Y$，将其视为从 $\mathbf{Ind}X$ 到 $\mathbf{Ind}Y$ 的连续保序映射；对于每个 $(C,\ [x]_X) \in X^{ads}$，$f^{ads}(C,\ [x]_X)$ 的第一分量等于 $f^s(C)$。但是$f^s(C) = cl(f[C])$，因此该结论由命题 5.3 得出。 □

在谱的另一个极端，令**Discr** 为一个函子，它将每个拓扑空间 X 映射到具有离散预序（即等号关系）的预序拓扑空间 X。它在态射上也作用为恒等映射。此时，ad-豪斯多夫化不起作用。

命题 6.2. $^{ads} \circ \boldsymbol{Discr}$与恒等函子之间存在自然同构。

证明。对于每个拓扑空间 X，$(\mathrm{Discr}X)^{ads}$ 的点是满足以下条件的有序对 (C, x)：C 与 $\downarrow_X x = \{x\}$ 相交（也就是说，$x \in C$），$C \subseteq cl(\uparrow_X x) = cl(\{x\})$，$C$ 与 $\uparrow_X x = \{x\}$ 相交（等价地，再次有 $x \in C$），并且 $C \subseteq cl(\downarrow_X x) = cl(\{x\})$。这些条件等价于要求 $C = cl(\{x\})$。那么映射 $(cl(\{x\}), x) \mapsto x$ 是从 $(\mathrm{Discr}X)^{ads}$ 到 X 的同构，并且容易看出它在 X 中是自然的。 □

最后一个必要的构造，是将每个拓扑空间 X 赋予其特化预序 $\leq$，从而将它视为预序拓扑空间。（特化预序 $\leq$定义为：$x \leq y$ 当且仅当每个包含 x 的开集也包含 y；这又当且仅当 x 属于 $\{y\}$ 的闭包。）我们用 $\downarrow$ 表示相对于 $\leq$的下闭包，用 $\uparrow$表示相对于 $\leq$的上闭包。再用 $\equiv$表示 $\leq \cap \geq$。那么 X^{ads} 有点奇怪：它由满足以下条件的有序对 $(C, [x]_X)$ 构成：C 与 $\downarrow x$ 相交，$C \subseteq cl(\uparrow x)$，$C$ 与 $\uparrow x$ 相交，并且 $C \subseteq cl(\downarrow x) = \downarrow x$。如果只考虑红色选项，下面是一个极端情形。设想 X 关于 $\leq$有最小元 $\bot$ 和最大元 $\top$。那么 $\bot$ 属于 C，也属于 $\downarrow x$，而 $\top$ 属于 $\uparrow x$，所以 $cl(\uparrow x) = X$ 包含 C，因此 C 平凡地与 $\downarrow x$ 相交，并且包含关系 $C \subseteq cl(\uparrow x)$ 也显然成立。因此，在这种情况下，X^{ads} 是 X^s 与 $X/\equiv$的积，配备如下拓扑（非-T_0）：其开子集为 $\diamond U \times X/\equiv$、$U \in \mathcal{O}X$；其（非反对称）预序由 $(C, [x]_X) \leq (D, [y]_X)$ 当且仅当 $x \leq y$ 给出。如果只考虑蓝色选项，那么 C 与 $\uparrow x$ 相交当且仅当 $x \in C$；这与 $C \subseteq cl(\downarrow x) = \downarrow x$ 合起来意味着 $C = \downarrow x$。于是 X^{ads} 的点仅有形如 $(\downarrow x, [x]_X)$ 的点。类似于命题 6.2，我们可以证明 X^{ads} 同构于 X 的 T_0-反射，也就是将 X 按$\equiv$取商所得的空间，其特化序是将 $\leq$ 按 $\equiv$取商所得的序。最后，在蓝色和红色兼有的选项中，X^{ads} 的点仅有形如 $(C, [x]_X)$ 且满足 $C = \downarrow x$ 的点，与仅红色的情形一样；此时 C 平凡地与 $\uparrow x$ 相交，且 $C = \downarrow x \subseteq \downarrow\uparrow x \subseteq cl(\uparrow x)$。因此，与仅红色的情形一样，$X^{ads}$ 也是 X 的 T_0-反射，并赋有其特化序。

我们用 $|X|$ 表示预序拓扑空间 X的底层拓扑空间，并考察$|X^{ads}| \cong |X|^s$ 是否成立，其中 $\cong$ 表示同胚。$|\ |$ 可扩展为一个函子 $|\ |\colon \mathbf{PreTop} \to \mathbf{Top}$，它将每个连续保序映射 f 映射为仅视作连续映射的 f。

注 6.3。 设 X 是一个预序拓扑空间。一般而言，$|X^{ads}| \cong |X|^s$并不成立。事实上，令 X 为一个带有离散预序的拓扑空间 $|X|$。根据命题 *6.2*，X^{ads} 与 X同构，因此$|X^{ads}| \cong |X|^s$ 当且仅当 $|X| \cong |X|^s$，也当且仅当 $|X|$ 是康托尔正规。因此，取任意一个非 *sober* 空间作为 $|X|$，即可得到一个反例。

命题 6.4。 对于每个 上半闭 且 下半闭 预拓扑空间 X，使得每个不可约闭子集 C 都包含一个点 x

使得 $C \subseteq \uparrow_X x$ 和 $C \subseteq \downarrow_X x$，映射 $(C,\ [x]_X) \mapsto C$ 是从 $|X^{ads}|$到 $|X|^s$的同胚，并且关于 X是自然的。

对于每个 T_1 康托尔正规的预拓扑空间 X，映射 $(C, [x]_X) \mapsto C$ 是从 $|X^{ads}|$ 到 $|X|^s \cong |X|$ 的同胚，并且关于 X 自然。

证明。令 π 为映射 $(C, [x]_X) \mapsto C$。对于 X 的每个开子集 U，$\pi^{-1}(\diamond U) = \diamond^{ad} U$，因此 π 连续。这也说明，当 π 是双射时，π 是同胚。

如果 X 是上半闭、下半闭的，并且每个不可约闭子集 C 都包含一个点 x，使得 $C \subseteq \uparrow_X x$ 和 $C \subseteq \downarrow_X x$，那么对于 X 的每个不可约闭子集 C，我们选取这样一个点 $x \in C$。于是 C 与 $\downarrow_X x$ 相交，$C \subseteq cl(\uparrow_X x)$，$C$ 与 $\uparrow_X x$ 相交，且 $C \subseteq cl(\downarrow_X x)$，因此 $(C, [x]_X)$ 是一个不可约对，它经 π 映射到 C。因此 π 是满射。如果存在两个点 x、$y \in C$，使得 $C \subseteq \uparrow_X x$、$\uparrow_X y$（或 $C \subseteq \downarrow_X x$、$\downarrow_X y$），那么 $x \in \uparrow_X y$ 且 $y \in \uparrow_X x$，因此 $y \leq x \leq x$，进而 $[x]_X = [y]_X$；将 $\uparrow_X$ 换成 $\downarrow_X$ 同理可得，这表明 π 是单射。

若 X 是 T_1 且为康托尔正规，则每个不可约闭子集 C 都属于 X 的形式 $\{x\}$，且对应于唯一的点 x，此时显然有 C 与$\downarrow_X x$相交 $C \subseteq cl(\uparrow_X x)$，$C$ 与 $\uparrow_X x$相交，且 $C \subseteq cl(\downarrow_X x)$。因此，$|X^{ads}|$的点以及 $|X|^s$的点恰好都是单元素集，这表明π 是双射，并且 $|X|^s \cong |X|$ 同时也是。

为验证自然性，设 $f\colon X \to Y$是单调连续映射。根据命题 5.3，f^{ads}将 $(C, [x]_X)$ 映射到 $(cl(f[C])\ [f(x)]_Y)$，因此 $\pi(f^{ads}(C, [x]_X)) = cl(f[C]) = f^s(C) = f^s(\pi(C, [x]_X))$. □

7 $\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$ 伴随是幂等的

通常的伴随 $\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$ 是幂等的，我们在此证明 $\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$ 也有类似结论。这意味着要证明，对于每个 ad-框架 $\Omega\mathcal{L}$，$\eta_{\mathbf{pt}^{ad}\Omega\mathcal{L}}$ 都是同构；等价地，根据定义与引理 5.6，对于每个 ad-框架 $\Omega\mathcal{L}$，$\mathbf{pt}^{ad}\Omega\mathcal{L}$ 都是 ad-饱和。与幂等伴随相关的单子总是幂等单子，其中幂等单子指其乘法是自然同构的单子（还有几种等价定义）。

定义 7.1. 预序拓扑空间 X 是ad-T_0，当且仅当其（底层拓扑空间的）特化序 $\leq$ 与预序 $\leq_X$ 的交集X 是反对称的。

等价地，X 是 ad-T_0，当且仅当对于同一等价类中的任意两点 x 和 y，相对于 $\equiv_X$（即 $\leq_X \cap \geq_X$），若满足 $x \neq y$，则存在一个开子集 U，它属于 X，包含 x 而不包含 y，或包含 y 而不包含 x。

引理 7.2。 预序拓扑空间 X 是 *ad*-饱和，当且仅当它是 *ad*-T_0，并且其唯一的不可约对是形如 $(cl(\{x\})\ [x]_X)$，$x \in X$的不可约对。

证明。设 X 是 ad-饱和的，其特化预序为 $\leq$。设 x 和 y 是 X 中的两个点，使得 $x \leq y$、$y \leq x$、$x \leq_X y$ 和 $y \leq_X x$。记$\downarrow$ 为关于 $\leq$的下闭包，我们知道 $cl(\{x\}) = \downarrow x$。于是$\eta_X(x) = (\downarrow x,\ [x]_X) = (\downarrow y,\ [y]_X) = \eta_X(y)$。$\eta_X(x)$和 $\eta_X(y)$都属于$\mathbf{pt}^{ad}\, X$，因此是不可约对，从而必定形如 $(\downarrow z,\ [z]_X)$，其中 z是唯一的点。由此可得 $x = z = y$。因此 X 是 ad-T_0。

反过来，假设 X 是 ad-T_0，且它仅有的不可约对都具有 $(cl(\{x\})\ [x]_X)$ 这种形式，或者等价地，具有 $(\downarrow x,\ [x]_X)$ 这种形式。于是每个不可约对都恰好具有这种形式，我们需要证明 x 是唯一的。但是，如果 $(\downarrow x,\ [x]_X) = (\downarrow y,\ [y]_X)$，那么 $x \leq y \leq x$ 且 $x \leq_X y \leq_X x$，因此由 ad-T_0 性可知 $x = y$。 □

定理 7.3。对于每个 *ad*-框架 $\Omega L \overset{def}{=} (\Omega\ L,\ \mathsf{tot},\ \mathsf{con},\ \mathsf{sup},\ \mathsf{sub})$，$\boldsymbol{pt}^{ad}\,\Omega L$ 是 *ad*-康托尔正规。$\mathcal{O}^{ad} \dashv \boldsymbol{pt}^{ad}$ 伴随是幂等的。*ad*-豪斯多夫化单子^{ads} 是幂等的。

证明。我们只需证明第一个断言，其余结论随之成立。令 $X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pt}^{ad}\Omega L$。回顾（见定义 4.1），它的开集是形如 $\mathcal{O}_u \overset{\text{def}}{=} \{(x,s) \in \mathrm{pt}^{ad}\,\Omega L \mid u \in x\}$ 的集合，其中 u 遍历 Ω。因此，其特化预序 $\leq$ 定义为：$(x,s) \leq (y,t)$ 当且仅当对每个满足 $(x,s) \in \mathcal{O}_u$ 的 $u \in \Omega$，都有 $(y,t) \in \mathcal{O}_u$；当且仅当对每个 $u \in x$，u 都属于 y；当且仅当 $x \subseteq y$。我们还回顾，预序 $\leq_X$ 定义为：$(x,s) \leq_X (y,t)$ 当且仅当 $s \subseteq t$。因此，若 $(x,s) \leq (y,t)$，$(y,t) \leq (x,s)$，$(x,s) \leq_X (y,t)$ 且 $(y,t) \leq_X (x,s)$，则 $x = y$ 且 $s = t$。所以 X 是 ad-T_0。

为了证明 X 是 ad-饱和的，我们使用引理 7.2。考虑任意不可约对 $(C,\ [(x,\ s)]_X)$，并证明它必定具有以下形式：对于某个点 $(x_0,\ s_0) \in X$，为 $(\downarrow(x_0,\ s_0), [(x_0,\ s_0)]_X)$。这里，$\downarrow$是关于特化序 $\leq$的向下闭包，而正如我们刚刚看到的，该特化序就是第一分量上的包含关系。由于 $[(x,\ s)]_X$必须等于 $[(x_0,\ s_0)]_X$，我们将 s_0 定义为 s。

我们将 x_0 定义为 $\bigcup_{(y,t)\in C} y$。下面验证 x_0 是 Ω 的元素上的完全素滤子。由于是完全素滤子的并集，x_0 向上闭且非空。证明 x_0 在二元下确界下闭稍微复杂一些。令 u、$v \in x_0$。根据 x_0的定义，存在元素 (y,t)、$(y',t') \in C$，使得 $u \in y$和 $v \in y'$。等价地，$(y,t) \in \mathcal{O}_u$ 且 $(y',t') \in \mathcal{O}_v$。于是，$C$ 与 $\mathcal{O}_u$ 相交（在 (y,t) 处），并且 $\mathcal{O}_v$相交于 (y',t')。由于 $C \in X^s$，它是不可约的，因此 C 与 $\mathcal{O}_u \cap \mathcal{O}_v$相交，而根据引理 4.4，这恰好就是 $\mathcal{O}_{u\wedge v}$。因此，对于某个 $(y'',t'') \in C$，$u \wedge v$属于 y''。由于 $y'' \subseteq x_0$,$u \wedge v \in x_0$。所以，x_0 是一个滤子。最后，我们证明 x_0 是完全素的。设 $(u_i)_{i\in I}$ 是 Ω 中的任意族，其上确界属于 x_0。那么该上确界属于某个 $(y,t) \in C$ 对应的 y，且由于 y 是完全素滤子，某个 u_i 必定属于 y，因而属于 x_0。

让我们验证 $(x_0,\ s_0)$ 属于 $X = \mathbf{pt}^{ad}\,\Omega L$，也就是说，它是 ΩL 的一个点。我们必须检查六个条件（参见定义 4.1）。

- 我们刚刚验证了第一点，即 x_0 是 Ω 的元素构成的完全素滤子。

• 第二点，即 s_0 是 L 的元素构成的完全素完备滤子，显然成立，因为 $s_0 = s$。

• 对于第三种情况，设 $(u, a) \in \mathrm{tot}$。我们希望证明 $u \in x_0$ or$a \in s_0$。由于 $(C, [(x, s)]_X)$ 是一个不可约对， C与 $\downarrow_X(x, s)$ 相交，设交点为 (y, t)。由于 (y, t) 是 ΩL 中的一个点，且 $(u, a) \in \mathrm{tot}$，因此必有$u \in y$ or $a \in t$。由于 $(y, t) \in C$，根据 x_0 的定义，我们有 $y \subseteq x_0$。由于 $(y, t) \in \downarrow_X(y, s)$，我们有 $t \subseteq s$。若 $u \in y$，则 $y \in x_0$；若 $a \in t$，则$a \in s = s_0$。

• 对于第四种情况，设 $(u, a) \in \mathrm{con}$。我们希望证明 $u \notin x_0$ or $a \notin s_0$。为导出矛盾，假设 $u \in x_0$ and $a \in s_0$。由于$u \in x_0$，存在一个点 $(y, t) \in C$，使得 $u \in y$。因此 $(y, t) \in\mathcal{O}_u$。由于 $(C, [(x, s)]_X)$ 是一个不可约对， $C \subseteq cl(\uparrow_X(x, s))$，其中 cl 表示 X 中的闭包。因此 $\mathcal{O}_u$ 与 $cl(\uparrow_X(x, s))$ 相交，进而也必与 $\uparrow_X(x, s)$ 相交。设 (y', t') 是该交集中的一个点。由于 $(y', t') \in \mathcal{O}_u$，$u$属于 y'。由于 $(y', t') \in \uparrow_X(x, s)$，我们有 $(x, s) \leq_X (y', t')$，故 $s \subseteq t'$；又因为 $a \in s_0 = s$， a 属于 t'。我们找到了一个有序对 $(u, a) \in \mathrm{con}$，使得 $u \in y'$ and $a \in t'$。这是不可能的，因为 (y', t') 是 ΩL 中的一个点；事实上，这与点的定义中的第四个条件（定义 4.1）相矛盾。

• 对于第五个，令（u， a）$\in$ sup。我们希望证明 $u \in x_0$ 或 $a \notin s_0$。等价地，我们假设 $a \in s_0$，并断言 $u \in x_0$。由于（C，［（x， s）］$_X$）是一个不可约对，C与 $\uparrow_X$（x， s）相交，设交于（y， t）。由于（y， t）是ΩL 中的一个点，并且（u， a）$\in$sup，我们必有 $u \in y$或$a \notin t$，或者等价地： $a \in t$蕴含 $u \in y$。我们有 $a \in s_0 = s$，且（x， s）$\leq_X$（y， t），所以 $s \subseteq t$，从而 $a \in t$。因此 $u \in y$。由于（y， t）$\in C$，根据 x_0的定义，我们有 $y \subseteq x_0$，所以 $u \in x_0$。

• 对于第六个条件，令 $(u, a) \in \mathrm{sub}$。我们希望证明 $u \notin x_0$ or $a \in s_0$。等价地，假设 $u \in x_0$，并希望证明 $a \in s_0$。由于 $u \in x_0$，存在一点 $(y, t) \in C$使得 $u \in y$。因此 $(y, t) \in \mathcal{O}_u$。由于 $(C, [(x, s)]_X)$ 是一个不可约对， $C \subseteq cl(\downarrow_X(x, s))$。因此 $\mathcal{O}_u$ 与 $cl(\downarrow_X(x, s))$ 相交，进而也与 $\downarrow_X(x, s)$ 相交。令 (y', t') 为该交集中的一点。由于 $(y', t') \in \mathcal{O}_u$, $u \in y'$。由于 $(y', t') \in \downarrow_X(x, s)$，我们有有 $(y', t') \leq_X (x, s)$，所以 $t' \subseteq s$。我们有一个有序对 $(u, a) \in \mathrm{sub}$，且 (y', t') 是 ΩL 的一点。根据定义点的第六个条件， $u \notin y'$ or$a \in t'$。由于 $u \in y'$，可得 $a \in t'$，进而得到 $a \in s$。由于$s = s_0$，我们得到所需结论 $a \in s_0$。

已知 (x_0, s_0) 是 X 的一个点，我们证明它属于 C。由于 C 是闭集，其补集是 X 的一个开子集，因此必为某个 $u \in \Omega$ 所对应的 $\mathcal{O}_u$。若 (x_0, s_0) 不属于 C，则它属于 $\mathcal{O}_u$，所以 u 将属于 x_0。根据 x_0 的定义，这意味着存在一个点 $(y, s) \in C$，使得 $u \in y$。条件 $u \in y$ 可改写为 $(y, s) \in \mathcal{O}_u$，这与 $(y, s) \in C$ 矛盾。

我们利用这一点证明 $C = \downarrow(x_0,\ s_0)$。由于 C 是闭集，它特别地是特化预序 $\leq$ 下的下闭集；由于 $(x_0,\ s_0) \in C$，$\downarrow(x_0,\ s_0) \subseteq C$。对于反向包含关系， C 中的每个点 $(y,\ s)$ 根据 x_0 的定义都满足 $y \subseteq x_0$，也就是说，满足 $(y,\ s) \leq (x_0,\ s_0)$。

总之， $C = \downarrow(x_0,\ s_0)$，其中 $s_0 = s$。此外，由于 $(x_0,\ s_0)$ 和 $(x,\ s)$ 的第二分量相同， $[(x_0,\ s_0)]_X = [(x,\ s)]_X$，因此 $(C,\ [(x,\ s)]_X) = (\downarrow(x_0,\ s_0), [(x_0,\ s_0)]_X)$。□

8 $\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$ 伴随提升了 $\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$ 伴随

我们回顾一下，存在一个函子 $|_| \colon \mathbf{PreTop} \to \mathbf{Top}$，它将每个预序拓扑空间映射到底层拓扑空间，并将每个连续保序映射 f 映射为 f 仅视为连续映射。

命题 8.1. 函子 $|_| \colon \mathbf{PreTop} \to \mathbf{Top}$ 是拓扑的。

证明。 显然，函子 $|_|$ 是忠实的。因此，在如下意义下，**Top** 中的每个态射 $g\colon |X| \to |Y|$ 至多可提升为一个态射 $g\colon X \to Y\colon |g| = g$；当且仅当 g 不仅连续，而且相对于 $\leq_X$ 和 $\leq_Y$ 是单调的时，这种提升才存在。

考虑任意 $|_|$-源 $(g_i\colon |E| \to |Y_i|)_{i\in I}$，其中每个 g_i 都是连续映射。 E 是一个拓扑空间，而每个 Y_i 都是预序拓扑空间。我们通过规定：对于 E， $x \leq_X x'$ 当且仅当对每个 $i \in I$ 都有 $g_i(x) \leq_{Y_i} g_i(x')$，从而在 E 上定义一个预序 $\leq_X$，并将所得的预序拓扑空间称为 X。（因此 $|X| = E$。）于是，每个 g_i 都提升为连续预序映射 $g_i\colon X \to Y_i$；换言之， g_i 相对于 $\leq_X$ 和 $\leq_{Y_i}$ 是单调的。此外，对于每个连续映射 $h\colon |Z| \to X$， h 提升为从 Z 到 X 的态射，当且仅当 h 相对于 $\leq_Z$ 和 $\leq_X$ 是单调的；当且仅当对于每个 $i \in I$， $g_i \circ h$ 相对于 $\leq_Z$ 和 $\leq_{Y_i}$ 是单调的；当且仅当对于每个 $i \in I$， $g_i \circ h$ 提升为 $Z \to Y_i$。因此，映射 g_i 构成一个 $|_|$-初始提升。我们已经证明，每个 $|_|$-源都有一个（必然唯一的）$|_|$-初始提升。

对于每个拓扑空间 E， E 的 $|_|$-纤维由满足 $|X| = E$ 的预序拓扑空间 X 组成。这可以等同于 E 上的预序集合。当且仅当 E 上的恒等映射可提升到 $X \to Y$ 时，此纤维才具有由 $X \leq Y$ 给出的预序。鉴于 X 和 Y 都是预序，当且仅当 $\leq_X$ 包含于 $\leq_Y$ 中时， $X \leq Y$ 成立。包含预序具有反对称性，而这一性质正是将 $|_|$ 定义为遗忘型函子的特征。所有这些性质使 $|_|$ 成为一个拓扑函子。□

拓扑函子总是具有左伴随和右伴随。$|_|$ 的左伴随是离散函子 **Discr**，而右伴随是不可分函子 **Ind**。

特别地，拓扑函子保持所有极限和所有余极限。它们还会创建所有极限和余极限。因此，**PreTop** 是完备且余完备的。

仿照这些构造，还有一个函子，我也将其记作 $|\,|$，从$\mathbf{adFrm}$ 到$\mathbf{Frm}$，因而也从$\mathbf{adFrm}^{op}$ 到$\mathbf{Frm}^{op}$。在对象上，它将每个 ad-框架 $(\Omega\ L,\ \mathrm{tot},\ \mathrm{con})$ 映射到 Ω。在态射上，它将每个 ad-框架同态 $(\varphi,\ p)$ 映射到 φ。

$|\,|$ 是拓扑的可能性不大；事实上，$|\,|$ 是忠实函子的可能性也不大。不过，这里有一个类似于不可分函子的构造，我将其记作$\mathbf{Ind}$，就像（预序）拓扑空间中的情形一样。如果一个框架仅含一个元素（即 $\bot = \top$），我们就称它为平凡的；否则称为非平凡的。为简单起见，下面我们只考虑非平凡框架。唯一的平凡框架是单元素框架，$\mathcal{O}^{ad}(\emptyset)$。

定义与引理 *8.2.* 对每个非平凡框架 Ω，令 $Ind(\Omega)$ 为 $(\Omega\ \{0,1\}, tot_{Ind}, con_{Ind}, sup_{Ind}, sub_{Ind})$，其中 $0 < 1$，tot_{Ind} 中的有序对 (u, a) 满足：u 是 Ω 的最大元 $\top$ 或 $a = 1$；con_{Ind} 中的有序对 (u, a) 满足：u 是 Ω 的最小元 $\bot$ 或 $a = 0$；sup_{Ind} 中的有序对 (u, a) 满足：$u = \top$ 或 $a = 0$；sub_{Ind} 中的有序对 (u, a) 满足：$u = \bot$ 或 $a = 1$。那么 $Ind(\Omega)$ 是一个 ad-框架。

证明。显然，$\{0,1\}$ 是完全分配完备格。我们沿用第 3 节中的记号 $\sqsubseteq$、$\trianglelefteq$ 等。于是：

- $\mathrm{tot}_{\mathbf{Ind}}$ 是 $\sqsubseteq$-上闭的。如果 $(u,\ a) \in \mathrm{tot}_{\mathbf{Ind}}$，那么要么 $u = \top$，并且任何更大的有序对的第一分量都是 $\top$；要么 $a = 1$，并且任何更大的有序对的第二分量都是 1。

- $\mathrm{sup}_{\mathbf{Ind}}$ 是 $\trianglelefteq$-上闭的。如果 $(u,\ a) \in \mathrm{sup}_{\mathbf{Ind}}$，那么要么 $u = \top$，并且任何$\trianglelefteq$-更大的有序对的第一分量都是 $\top$；要么 $a = 0$，并且任何 $\trianglelefteq$-更大的有序对的第二分量都是 0。

- $\mathrm{tot}_{\mathbf{Ind}}$ 包含 $ff \overset{\mathrm{def}}{=} (\bot,\ 1)$ 和 $\overset{\mathrm{def}}{=} (\top,\ 0)$。

- $\mathrm{sup}_{\mathbf{Ind}}$ 包含 $(\bot,\ 0)$ 和 $(\top,\ 1)$。这显然成立。

- 对于所有 $(u,\ a),\ (v,\ b) \in \mathrm{tot}_{\mathbf{Ind}}$，我们希望证明 $(u,\ a) \wedge (v,\ b) \overset{\mathrm{def}}{=} (u \wedge v,\ a \vee b)$ 属于 $\mathrm{tot}_{\mathbf{Ind}}$。当 $a \vee b = 1$ 时，这显然成立。否则，$a \vee b = 0$，因此 $a = b = 0$，于是 $u = v = \top$，从而 $u \wedge v = \top$。

- 对于所有 $(u,\ a),\ (v,\ b) \in \mathrm{sup}_{\mathbf{Ind}}$，我们希望证明 $(u,\ a) \sqcap (v,\ b) = (u \wedge v,\ a \wedge b)$ 属于 $\mathrm{sup}_{\mathbf{Ind}}$。若 $a = 0$ 或 $b = 0$，则 $a \wedge b = 0$，这显然成立。否则，$u = \top$ 且 $v = \top$，因此 $u \wedge v = \top$，这也显然成立。

- 对于每个属于 $\mathrm{tot}Ind$ 的有序对族 $(u_i,\ a_i) \in$，我们断言 $\bigvee_{i \in I}(u_i,\ a_i)$ 定义为 $= (\bigvee_{i \in I} u_i,\ \bigwedge_{i \in I} a_i)$，且属于 $\mathrm{tot}_{\mathbf{Ind}}$。若 $\bigwedge_{i \in I} a_i = 1$，则此断言成立。否则，某个 a_i 等于 0。于是，相应的 u_i 等于 $\top$，进而$\bigvee_{i \in I} u_i = \top$。

- 对于每个有序对族 $(u_i,\ a_i) \in \mathrm{sup}_{\mathbf{Ind}}$，我们断言 $\bigsqcup_{i \in I}(u_i,\ a_i)$ 定义 $= (\bigvee_{i \in I} u_i,\ \bigvee_{i \in I} a_i)$ 属于 $\mathrm{sup}_{\mathbf{Ind}}$。若 $a_i = 0$ 对某个 $i \in I$ 成立，则显然，因为$\bigvee_{i \in I} a_i = 0$。否则，$u_i = \top$ 对每个 $i \in I$ 都成立，因此 $\bigvee_{i \in I} u_i = \top$。

• conInd 是 $\sqsubseteq$-Scott 闭的。若 $(u,a) \sqsubseteq (v,b) \in$ conInd，则或者 $v = \bot$且 $u = \bot$，或者 $b = 0$且 $a = 0$，因此 $(u,a) \in$ conInd。设 $(u_i,a_i)_{i\in I}$ 是 conInd 中的一个有向族，u 定义= $\bigvee_{i\in I} u_i$，a 定义= $\bigvee_{i\in I} a_i$。若 $u = \bot$ 或者 $a = 0$，则 $(u,a) \in$ conInd。否则，某个 u_i 不同于 $\bot$，且某个 a_j 等于 1。由有向性，存在一个指标 $k \in I$，使得 $(u_i,a_i),(u_j,a_j) \sqsubseteq (u_k,a_k)$。因此 $u_k \neq \bot$且 $a_k = 1$。但这是不可能的，因为 $(u_k,a_k) \in$ conInd。

• subInd 是 $\trianglelefteq$-Scott 闭的。若 $(u,a) \trianglelefteq (v,b) \in$ subInd，则要么 $v = \bot$，从而 $u = \bot$，因为 $u \leq v$；要么 $b = 1$，从而 $a = 1$，因为 $a \geq b$。对于 subInd 中任意一个 $\trianglelefteq$-有向族 $(u_i,a_i)_{i\in I}$，其 $\trianglelefteq$-上确界为 (u,a)，即 $u = \bigvee_{i\in I} u_i$ 且 $a = \bigwedge_{i\in I} a_i$，我们断言 $u = \bot$ 或 $a = 1$。否则，$u \neq \bot$，这意味着对于某个 $i \in I$，有 $u_i \neq \bot$；并且 $a \neq 1$，这意味着对于某个 $j \in I$，有 $a_j \neq 1$。由有向性，存在一个 $k \in I$，使得 (u_i,a_i)、$(u_j,a_j) \trianglelefteq (u_k,a_k)$。特别地，$u_i \leq u_k$ 且 $a_j \geq a_k$。由于 $(u_k,a_k) \in$ subInd，$u_k = \bot$ 或 $a_k = 1$。但是，$u_k = \bot$ 将意味着$u_i = \bot$，这是不可能的；而 $a_k = 1$ 将意味着 $a_j = 1$，这也是不可能的。

• con_{Ind} 包含 $ff = (\bot,1)$ 和 $_{\text{def}} = (\top,0)$。

• sub_{Ind} 包含 $(\bot,0)$ 和 $(\top,1)$。显然如此。

• 对于所有属于 con_{Ind} 的 $(u,a),(v,b)$，我们希望证明 $(u,a) \wedge (v,b) = (u \wedge v, a \vee b)$ 属于 con_{Ind}。当 $a \vee b = 0$ 时结论成立。否则，$a = 1$ 或 $b = 1$。若 $a = 1$，则 $u = 0$，因此 $u \wedge v = 0$；若 $b = 1$，则 $v = 0$，所以 $u \wedge v = 0$ 也成立。

• 对于所有属于 sub_{Ind} 的 $(u,a),(v,b)$，我们希望证明 $(u,a) \sqcap (v,b) = (u \wedge v, a \wedge b)$ 属于 sub_{Ind}。若 $a \wedge b = 1$，显然如此。否则，$a \wedge b = 0$，因此$a = 0$ 或 $b = 0$。若 $a = 0$，则 $u = \bot$，因此 $u \wedge v = \bot$；同理，若 $b = 0$，则 $v = \bot$，因此 $u \wedge v = \bot$。

• 对于每个有序对族 $(u_i,a_i) \in \text{con}_{\text{Ind}}$，我们断言 $\bigvee_{i\in I}(u_i,a_i) = (\bigvee_{i\in I} u_i, \bigwedge_{i\in I} a_i)$ 属于 con_{Ind}。当 $\bigwedge_{i\in I} a_i = 0$ 时，这显然成立。否则，每个 a_i 都等于 1，因此每个 u_i 都等于 $\bot$。于是 $\bigvee_{i\in I} u_i = \bot$。

• 对于每个有序对族 $(u_i,a_i) \in \text{sub}_{\text{Ind}}$，我们断言 $\bigsqcup_{i\in I}(u_i,a_i) = (\bigvee_{i\in I} u_i, \bigvee_{i\in I} a_i)$ 属于 sub_{Ind}。当 $\bigvee_{i\in I} a_i = 1$ 时，这显然成立。否则，$\bigvee_{i\in I} a_i = 0$，因此对于每个 $i \in I$，都有 $a_i = 0$。由于 $(u_i,a_i) \in \text{sub}_{\text{Ind}}$，这意味着对于每个 $i \in I$，都有 $u_i = \bot$，从而 $\bigvee_{i\in I} u_i = \bot$。

• 交互律。– 设 $(u,a) \in \text{con}_{\text{Ind}}$ 且 $(v,b) \in \text{tot}_{\text{Ind}}$。我们希望证明：如果 $u = v$，那么 $a \leq b$；如果 $a = b$，那么 $u \leq v$。首先假设 $u = v$。我们有 $u = \bot$ 或 $a = 0$（因为 $(u,a) \in \text{con}_{\text{Ind}}$），并且有 $v = \top$ 或 $b = 1$（因为 $(v,b) \in \text{tot}_{\text{Ind}}$）。如果 $a \leq b$ 不成立，则我们将有 $a = 1$ 和 $b = 0$,

因此 $u = \bot$ 和 $v = \top$，这与 $u = v$矛盾。其次，我们假设$a = b$。如果 $a = b = 0$，那么由于 $(v, b) \in \mathsf{tot}_{\mathbf{Ind}}$，$v = \top$，从而$u \leq v$，显然成立。如果 $a = b = 1$，那么由于 $(u, a) \in \mathsf{con}_{\mathbf{Ind}}$，$u = \top$，因此 $u \leq v$，显然成立。

– 设 $(u, a) \in \mathsf{sub}_{\mathbf{Ind}}$ 且 $(v, b) \in \mathsf{sup}_{\mathbf{Ind}}$。我们要证明，若$u = v$，则 $a \geq b$；若 $a = b$，则 $u \leq v$。先假设$u = v$。若 $a \geq b$ 不成立，则有 $a = 0$ 和 $b = 1$。然而，由于 $(u, a) \in \mathsf{sub}_{\mathbf{Ind}}$，这将推出 $a = 0$，而由于 $(v, b) \in \mathsf{sup}_{\mathbf{Ind}}$，这将推出$b = 1$，与 $u = v$矛盾。接下来，假设 $a = b$。若 $a = b = 0$，则 $(u, a) \in \mathsf{sub}_{\mathbf{Ind}}$ 推出$u = \bot$，因此 $u \leq v$。若 $a = b = 1$，则 $(v, b) \in \mathsf{sup}_{\mathbf{Ind}}$ 推出$v = \top$，因此 $u \leq v$。

– 设 $(u, a) \in \mathsf{con}_{\mathbf{Ind}} \cap \mathsf{sub}_{\mathbf{Ind}}$。则 $u = \bot$ 或 $a = 0$，且 $u = \bot$ 或 $a = 1$。无论 a 等于 0 还是 1，都必有 $u = \bot$。– 设 $(v, b) \in \mathsf{tot}_{\mathbf{Ind}} \cap \mathsf{sup}_{\mathbf{Ind}}$。则 $v = \top$ 或 $b = 1$，且 $v = \top$ 或$b = 0$。无论如何，$v = \top$。– 设 $(v, b) \in \mathsf{con}_{\mathbf{Ind}} \cap \mathsf{sup}_{\mathbf{Ind}}$。则 $v = \bot$ 或 $b = 0$，且 $v = \top$ 或 $b = 0$。无论如何，$b = 0$。事实上，$b \neq 0$ 将推出 $v = \bot$ 和$v = \top$，这不可能，因为 Ω 是非平凡的。– 设 $(u, a) \in \mathsf{tot}_{\mathbf{Ind}} \cap \mathsf{sub}_{\mathbf{Ind}}$。则 $u = \top$ 或 $a = 1$，且 $u = \bot$ 或$a = 1$。无论如何，$a = 1$。事实上，$a \neq 1$ 将推出 $u = \top$ 和$u = \bot$，这不可能，因为 Ω 是非平凡的。

□

令 $\mathbf{Frm}_*$ 为由非平凡框架组成的 $\mathbf{Frm}$ 的全子范畴。称一个 ad-框架 $\Omega\mathcal{L} \overset{\text{def}}{=} (\Omega\ L, \text{全性}, \text{一致性}, \text{上确界}, \text{下确界})$ 是非平凡的，当且仅当 Ω 是非平凡的。令$\mathbf{adFrm}_*$ 为由非平凡 ad-框架组成的 $\mathbf{adFrm}$的全子范畴。

定义与引理 8.3。 存在一个函子 $\mathit{Ind}\colon \mathbf{Frm}_* \to \mathbf{adFrm}_*$，它在对象上的定义如定义与引理 *8.2* 所述，并将每个框架同态 $\psi\colon \Omega \to \Omega'$ 映射为 $(\psi, \mathrm{id}_{\{0,1\}})$。

证明。我们需要证明 $(\psi, \mathrm{id}_{\{0,1\}})$ 是一个 ad-框架同态。显然，ψ 是一个框架同态，而 $\mathrm{id}_{\{0,1\}}$ 是一个完备格同态。对于所有 $u \in \Omega$ 和 $a \in \{0, 1\}$，若 $u = \top$ 或 $a = 1$，则 $\psi(u) = \top$（因为 ψ将 $\top$ 映射为 $\top$）或 $a = 1$，这说明 $(\psi, \mathrm{id}_{\{0,1\}})$ 保持全性；若 $u = \bot$ 或 $a = 0$，则 $\psi(u) = \bot$（因为 ψ 将 $\bot$ 映射为 $\bot$）或 $a = 0$，这说明 $(\psi, \mathrm{id}_{\{0,1\}})$ 保持一致性。若 $u = \top$ 或 $a = 0$，则 $\psi(u) = \top$ 或 $a = 0$，这说明 $(\psi, \mathrm{id}_{\{0,1\}})$ 保持包含关系。若 $u = \bot$ 或 $a = 1$，则 $\psi(u) = \bot$ 或 $a = 1$，这说明 $(\psi, \mathrm{id}_{\{0,1\}})$ 保持包含关系。

显然，$\mathbf{Ind}$ 保留恒等态射和复合。 □

定义与引理 8.4。 对于每个非平凡 *ad*-框架 $\Omega\mathcal{L} \overset{def}{=} (\Omega\ L, \mathsf{tot}, \mathsf{con}, \mathsf{sup}, \mathsf{sub})$，存在一个 *ad*-框架同态 $\epsilon_{\Omega\mathcal{L}}\colon \mathit{Ind}|\Omega\mathcal{L}| \to \Omega\mathcal{L}$ 定义如下

$(\mathrm{id}_\Omega, bnd_L)$，其中 $bnd_L\colon \{0,1\} \to L$ 将 0 映射到 L 的最小元 $\bot$，并将 1映射到 L 的最大元 $\top$。

证明。恒等映射 id_Ω 是框架同态。显然，bnd_L 是完备格同态。

下面证明 $\epsilon_{\Omega L}$ 保持全性。设 (u,a) 是 $\mathrm{Ind}|\Omega L|$ 中的全对，即 $u=\top$ 或 $a=1$。于是 $\epsilon_{\Omega L}(u,a) = (u, bnd_L(a))$。若 $a=1$，则后者等于 $(u,\top)$。但是 ff def $=(\bot, \top)$ 属于 tot，而 tot 是 $\sqsubseteq$-上闭的，其中$\sqsubseteq$ 是信息序 $\leq \times \leq$。因此 ff $\sqsubseteq (u,\top)$，所以 $(u,\top) \in$ tot。若$a=0$，则 $u=\top$，所以 $\epsilon_{\Omega L}(u,a) = (\top,\bot) =$tt，而 tt 属于 tot。两种情况下，$\epsilon_{\Omega L}(u,a) \in \top$。

现在我们证明 $\epsilon_{\Omega L}$ 保持一致性。设 (u,a) 是 $\mathrm{Ind}|\Omega L|$ 中的一致对，即 $u=\bot$ 或 $a=0$。于是 $\epsilon_{\Omega L}(u,a) = (u, bnd_L(a))$。如果 $a=1$，那么 $u=\bot$，后者等于 $(\bot,\top) =$ff，且属于 con。如果 $a=0$，那么 $\epsilon_{\Omega L}(u,a) = (u,\bot) \sqsubseteq (\top,\bot) =$。由于 $\in$con 且 con 是 Scott 闭的，特别地，关于 $\sqsubseteq$，$\epsilon_{\Omega L}(u,a) \in$ con。

接下来，我们证明 $\epsilon_{\Omega L}$ 保持包含关系。设 (u,a) 是 $\mathrm{Ind}|\Omega L|$ 中由包含关系关联的一对，即 $u=\top$ 或 $a=0$。我们希望证明 $(u, bnd_L(a)) \in$sup。如果 $a=0$，则 $(u, bnd_L(a)) = (u, \bot)$。由于 $(\bot,\bot) \in$sup，且 sup 是 $\trianglelefteq$-上闭的（其中 $\trianglelefteq$ 是逻辑序 $\leq \times \geq$），所以 $(u,\bot)$ 也属于 sup。如果 $a=1$，则 $u=\top$，因此 $(u, bnd_L(a)) = (\top,\top)$，其属于 sup。

最后，我们证明 $\epsilon_{\Omega L}$ 保持包含关系。设 (u,a) 是 $\mathrm{Ind}|\Omega L|$ 中一对关于包含关系相关的有序对，即 $u=\bot$ 或 $a=1$。若 $a=0$，则 $u=\bot$，因此 $(u, bnd_L(a)) = (\bot,\bot)$，它属于 sub。若 $a=1$，则 $(u, bnd_L(a)) = (u,\top)$。但是 $(u,\top) \trianglelefteq (\top,\top) \in$ sub，而 sub 是 $\trianglelefteq$-Scott 闭的，因此是 $\trianglelefteq$-下闭的，故 $(u,\top) \in$ sub。 □

注记 8.5. 映射 $bnd_L\colon \{0,1\} \to L$ 是从 $\{0,1\}$ 到 L 的唯一的完备格同态，因为任何这样的同态都必须将 0 映射到 $\bot$，并将 1 映射到 $\top$。

命题 *8.6.* 对于每个非平凡帧 Ω'、每个非平凡 *ad*-框架 $\Omega L \stackrel{def}{=} (\Omega\ L, tot, con, sup, sub)$，以及每个 *ad*-框架同态 $(\varphi, p) : Ind(\Omega') \to \Omega L$，存在唯一的框架同态 $\psi: \Omega' \to |\Omega L|$，使得 $\epsilon_{\Omega L} \circ Ind(\psi) = (\varphi, p)$。

因此存在一个伴随 $\mathbf{adFrm}_*^{op}\colon |\,| \dashv \boldsymbol{Ind}\colon \mathbf{Frm}_*^{op}$，其单位为 ϵ。

证明。我们来讨论 ψ 的存在性和唯一性。条件 $\epsilon_{\Omega L} \circ \mathbf{Ind}(\psi) = (\varphi,\ p)$ 意味着 $(\psi,\ bnd_L) = (\varphi,\ p)$。唯一性显然成立。为了证明存在性，我们先注意到，根据备注 8.5，$p = bnd_L$，并定义 ψ 为 φ。

命题的最后一部分可通过反转箭头得出。 □

令$\mathbf{Top}_*$ 为$\mathbf{Top}$ 的全子范畴，其对象为非空拓扑空间；令$\mathbf{PreTop}_*$ 为 $\mathbf{PreTop}$ 的全子范畴，其对象为非空预序拓扑空间。

定理 8.7。 下列交换方块在同构意义下交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PreTop}_* & \xrightarrow{\mathcal{O}^{ad}} & \mathbf{adFrm}_*^{op} \\ \uparrow{\scriptstyle Ind} & & \uparrow{\scriptstyle Ind} \\ \mathbf{Top}_* & \xrightarrow{\mathcal{O}} & \mathbf{Frm}_*^{op} \end{array}$$

证明。从一个非空拓扑空间 X 出发， $\mathcal{O}^{ad}\mathrm{Ind}X$ 是非平凡的 ad-框架（$\mathcal{O}X$, $\{\emptyset, X\}$, tot, con），其中，属于 tot 的有序对（U， A） $\in \mathcal{O}X \times \{\emptyset, X\}$满足 $U \cup A = X$，属于 con 的满足$U \cap A = \emptyset$，属于 sup 的满足 $U \supseteq A$，属于 sub 的满足 $U \subseteq A$。注意， $U \cup A = X$ 当且仅当 $U = X$ 或 $A = X$：若 $A \neq X$，则 A 为空，此时 $U \cup A = X$ 可简化为 $U = X$。此外，$U \cap A = \emptyset$ 当且仅当 $U =$ 或 $A = \emptyset$：若 $A \neq \emptyset$，则 $A = X$，且 $U \cap A = \emptyset$可简化为 $U = \emptyset$。接下来，$U \supseteq A$ 当且仅当 $U = X$ 或 $A = \emptyset$，而 $U \subseteq A$ 当且仅当 $U = \emptyset$ 或 $A = X$。

因此，$(\mathcal{O}X, \{\emptyset, X\}$,tot, con, sup,sub) 与 $(\mathcal{O}X, \{0, 1\}$, $\mathrm{tot}_{\mathbf{Ind}}$, $\mathrm{con}_{\mathbf{Ind}}$, $\mathrm{sup}_{\mathbf{Ind}}$, $\mathrm{sub}_{\mathbf{Ind}}$) 同构，也就是说，与 Ind($\mathcal{O}X$) 同构。这表明，西南到西北再到东北的箭头复合，在同构意义下与西南到东南再到东北的箭头复合相同。 □

注 8.8。 人们或许会想，是否存在一个箭头方向相反的交换方块，即 $|\boldsymbol{pt}^{ad}| \cong \boldsymbol{pt}|\ |$。这意味着，对于每个 ad-框架 $\Omega\mathcal{L}$， $|\boldsymbol{pt}^{ad}\,\Omega\mathcal{L}|$ （自然地）同构于 $\boldsymbol{pt}|\Omega\mathcal{L}|$，但这并不成立。当 $\Omega\mathcal{L} = \mathcal{O}^{ad}X$，且对象是一个预序拓扑空间 X 时，这一点就已经不成立。事实上，此时 $|\boldsymbol{pt}^{ad}\,\Omega\mathcal{L}| \cong |X^{ads}|$，而 $\boldsymbol{pt}|\Omega\mathcal{L}| \cong |X|^s$；根据注 *6.3*，任何带有离散预序的非康托尔正规空间都是一个反例。

9 结论

我们得到了一个伴随 $\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$，介于 **PreTop** 和 $\mathbf{adFrm}^{op}$之间；更确切地说，是三个伴随：红色、蓝色和两者。与 van der Schaaf 的伴随（Heunen and Van der Schaaf, 2024；Van der Schaaf, 2024）一样，它提升了通常的 $\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$ 伴随，前提是将其限制在非空拓扑空间和非平凡 ad-框架上。这一前提是该理论的一个小缺陷，我认为我们可以接受。

伴随 $\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$ 与 $\mathcal{O} \dashv \mathbf{pt}$伴随有许多良好性质。值得注意的是，我们证明了存在一种 ad-豪斯多夫化，它是幂等的（等价地，单子是幂等的）。

根据备注 4.3 和备注 4.7， $\mathcal{O}^{ad} \dashv \mathbf{pt}^{ad}$ 会具体化为上半闭（分别是下半闭，以及半闭）预序有序拓扑空间与满足性质(usc)（分别是(lsc)，以及两者兼具）的 ad-框架之间的伴随关系。理论中有一点让我颇为困扰：似乎无法用这种方式刻画偏序拓扑空间，也就是说，图在

X 其序关系的图在 $X \times X$中闭的有序拓扑空间。从某种意义上说，ad-框架缺少一种直接描述序关系 $\leq$本身的方式，只能处理上闭和下闭子集。

本文尚未发展的一项内容是*ad-*局部格理论。正如局部格不过是态射方向相反的框架，ad-局部格也不过是态射方向相反的 ad-框架。目前有一项广泛的研究计划，旨在将已知的有序拓扑空间定理转化为 ad-局部格上的相应定理，并在此过程中使它们成为无点的。人们希望，已知定理的无点类比能够具有构造性，这与 Isbell、Johnstone、Banaschewski、Escard´o 等人在无序情形下制定并推进的一项研究计划相呼应。例如，可以先看看 Lawson（2023）关于偏序空间中链的研究结果。

人们还可以期待，ad-局部格理论会包含一些新定理，这些定理在非无点的框架中没有对应结果，例如 Isbell 的稠密性定理（Isbell，1981）。

我对这一领域的兴趣源于好奇，也希望将本文发展的理论扩展到为流寻找 Stone 型对偶上；流是一种带有局部 预序的拓扑空间模型（Krishnan，2009）。

最后，Stone 型对偶与逻辑密切相关，因此应当探究 ad-框架的逻辑是什么。一个自然的思路是参照 Jakl（2018，第 6 章）。还应探究它与直觉主义 S4 逻辑（Wolter 和 Zakharyaschev，1997）之间的联系：其中直觉主义对应拓扑，而 S4 模态对应序。

10 致谢

感谢 Nesta van der Schaaf 与我讨论有序局部。我们还谈到了广义相对论中的时间空间；由于我对此几乎一无所知，所以没有在本文中提及，尤其没有讨论无点时间空间为何在其中如此重要：参见 Nesta 的博士论文（Van der Schaaf，2024）。

参考文献

Abramsky, S. 和 Jung, A.（1994）。域理论。载于 Abramsky, S.、Gabbay, D. M. 和 Maibaum, T. S. E.（编），《计算机科学逻辑手册》，第 3 卷，第 1–168 页。牛津大学出版社。

Banaschewski, B. 和 Br¨ummer, G. C. L. (1988). 稳定连续框架。《剑桥哲学学会数学汇刊》，104:7–19。Bonsangue, M. M.、Jacobs, B. 和 Kok, J. N. (1995). 超越素空间的对偶：拓扑空间与观测框架。《理论计算机科学》，151:79–124。

Escard´o, M. H. (1999). 关于稳定紧致局部的紧正则余反射。《电子理论计算机科学札记》，20:213–228。MFPS XV，《程序语义数学基础》，第十五届会议。Gierz, G.、Hofmann, K. H.、Keimel, K.、Lawson, J. D.、Mislove, M. 和 Scott, D. S. (2003). 连续格与域，《数学及其应用百科全书》第93卷。剑桥大学出版社。Goubault-Larrecq, J. (2013). 非豪斯多夫拓扑与域论——点集拓扑选题，《新数学专著》第22卷。剑桥大学出版社。Heunen, C. 和 Van der Schaaf, N. (2024). 有序局部。《纯粹与应用代数学杂志》，228:107654。Isbell, J. (1981). 局部中的乘积空间。《美国数学会会刊》，81(1):116–118。Jakl, T. (2018). *D*-框架作为双拓扑空间的代数对偶。博士论文，查理大学和伯明翰大学。Jung, A. 和 Moshier, M. A. (2007). 双拓扑空间的霍夫曼–米斯洛夫定理。《电子理论计算机科学札记》，173:159–175。可见于 https://achimjungbham.github.io/pub/papers/ HM-journal.pdf。Krishnan, S. (2009). 局部预序空间的一个便捷范畴。《应用范畴结构》，17(5):445–466。另见 arXiv:0709.3646v3 [math.AT]，2008年12月。Lawson, J. (2023). 偏序空间中的链。偏序空间中的链，61:123—137。Nachbin, L. (1948). 关于有序一致空间。《科学院纪要（巴黎）´科学部》，MR 9(455):774–775。英译本见 Nachbin (1965)。Nachbin, L. (1965).《拓扑与序》。范诺斯特兰德，普林斯顿，新泽西州。译自1950年的专著《拓扑与序》（葡萄牙语）。罗伯特·E·克里格出版公司于1967年、1976年在纽约州亨廷顿再版。van der Schaaf, N. (2024). 走向无点时空。博士论文，信息学院，爱丁堡大学。可见于 http://arxiv.org/ abs/2406.15406v2。Wolter, F. 和 Zakharyaschev, M. (1997). 直觉主义模态逻辑与经典模态逻辑之间的关系。《代数与逻辑》，36:121–155。