arXiv:2601.13005v1 [math.LO] 19 Jan 2026

可计算可枚举代数类上的同构关系

MENG-CHE "TURBO" HO、MARTIN RITTER 和 LUCA SAN MAURO

Abstract. 我们研究 *finitely generated*生成和 n生成可计算枚举代数类的同构关系的复杂度。这些代数通过可计算可枚举表示给出，即将可判定生成元集合上的项代数按可计算可枚举同余取商。我们的目标是建立一个系统框架，从可计算性理论的视角分析此类同构问题。为了比较它们的复杂度，我们采用 *computable reducibil-ity*这一概念，将这些关系与可计算可枚举集上的典范基准进行比较，例如 $=^{ce}$、E_0^{ce}以及由序数索引的族 $E_{\min}(\alpha)$。我们的研究有一个核心发现：代数结构与算法复杂度之间存在相互作用。我们证明，如果某个类中的每个代数都满足其同余格上的升链条件，那么相应的同构关系就可计算地归约到 $=^{ce}$。我们还将这一框架应用于若干具体情形。特别是，我们分析了有限生成交换半群、幺半群和群的同构关系，并将它们置于更广泛的分类问题图景之中。

1. Introduction

同构问题的复杂度在数理逻辑中占据核心地位，连接着理论计算机科学、组合学和描述集合论等各不相同的领域。在理论计算机科学中，经典的图同构问题以其独特之处而闻名：它是少数既未被证明可高效求解、也未被证明为 NP 完全的自然问题之一（例如参见 [KST12]）。在描述集合论中，对自然的可数结构类的同构关系进行分类——由 Friedman 和 Stanley 开创 [FS89]——依赖于博雷尔可约性框架。该框架为比较等价关系的复杂度提供了系统方法，进而帮助评估能否通过"良好"的不变量将数学对象按同构分类。

在这一框架下，人们如今已充分认识到，对于许多熟悉的结构类 $\mathfrak{K}$（例如图、线性序、域、幂零群 [FS89]；布尔代数 [CG01]；无挠阿贝尔群 [PS24]），其同构关系具有最大复杂度：对于任意可数语言 L，关系 $\cong_L$ 都可博雷尔约化到 $\cong_{\mathfrak{K}}$。这一结果对分类前景构成了强有力的限制：任何试图用"显式"不变量为同构类型设定参数的方法，必然具有尽可能高的复杂度，至少从博雷尔可约性的角度看是如此。

可计算结构理论通过加入明确的有效性约束，进一步细化了复杂度的概念。可以通过考察图灵可计算嵌入 [KMVB07],来探究这一点；这类嵌入要求用图灵算子见证同构关系之间的归约。另一种方式与我们的研究背景更相关，即关注可计算结构 [FF09, FFH+12, Mon16], 之间同构关系的复杂度；也就是说，结构的论域为 ω（自然数集合），且其原子图可计算。每个这样的结构都由一个编码

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03C57, 20F10.*Key words and phrases.* 同构问题、可计算可枚举代数、可计算可约性、交换半群、升链条件。第一作者部分获得美国国家科学基金会 Grant No. DMS-2054558 和 No. DMS-2452314 的资助。第二作者感谢 Steffen Lempp 在本项工作初始阶段进行的许多有益讨论。第三作者是 INDAM-GNSAGA 的成员。作者感谢 Uri Andrews 进行了一次有益的讨论，该讨论促成了定理 4.11。

表示为一个自然数（即某个可计算表示的指标），因此，类 $\mathfrak{K}$ 中可计算对象之间的同构关系 $I(\mathfrak{K}) \subseteq \omega$成为某个指标集上的等价关系，其中 ω 表示自然数集合。

这里的核心概念是可计算可约性，即通过部分可计算函数比较可计算结构指标上的等价关系（形式定义见第 2.5 节）。因此，可计算可约性是博雷尔可约性的可计算类比——这一类比已在文献中得到广泛探讨（例如，[GG01、CHM12、CCK23、ASM24、ASM25]）——并自然引出复杂而精细的度结构，其微妙性质已得到深入研究（例如，[ASS20、AS19、ABSM23]）。耐人寻味的是，近期研究揭示，在可计算背景下衡量的同构关系复杂性，与描述集合论背景下的复杂性存在显著的定性差异；例如，p-群就体现了这一点（比较 [FS89，定理 5] 与 [FFH$^+$12，定理 4]）。

本文首次系统地研究了源自自然代数簇的可计算枚举代数类的同构问题复杂度。我们的方法受到泛代数中关于代数呈现算法复杂度的经典问题启发，并从明确的计算视角重新审视这些问题。传统上，对于某个代数结构簇，同构问题是要判定由有限表示（由有限多个生成元和定义关系构成）指定的两个代数是否同构（概述见 [KS95] ）。对这一经典情形的一种自然扩展是考虑可计算可枚举呈现，即将代数表示为项代数（其生成元集是可计算集）对可计算枚举同余关系取商所得的结构（见第 2.3 节）。Khoussainov 和 Selivanov [Kho18, Sel03], 开展了关于可计算枚举代数的早期开创性研究，后续研究见 [GKS16, GJKS14, FKST16, KM14]。

可计算枚举框架的一个显著优点是，一旦确定了一个簇 $\mathcal{V}$，每个自然数都可以解释为某个成员的可计算可枚举表示的指标 $\mathcal{V}$——因此，同构关系所涉及的定义域就是整个 ω。这使我们能够将同构视为自然数上的一个全等价关系，并研究其在全可计算归约下的复杂度。此外，可计算枚举框架忠实地体现了 Dehn 提出同构问题时的初衷。

在组合代数的基本判定问题中，同构问题尤为突出，它是 Dehn 在该领域初创时期提出的三个核心问题之一 [Deh11] 。尽管近期研究考察了可计算枚举代数中字问题的复杂度——见 [DRSMS20、DRSMS23、A Har], 及其中的参考文献，尤其是 [KK86]——但人们对这一背景下同构问题的复杂度所知甚少。少数值得注意的例外包括 Miller 的结果 [Mil71]：他证明了有限表示群的同构关系在可计算可约性下是Σ^0_1-完备的（尽管他没有使用现代术语，因为这些术语当时尚未被定义）；以及 Andrews、Harrison-Trainor 和 Ho 的结果 [AHTH25]：他们证明了 6-生成群的同构关系在可计算可约性下是 Σ^0_3-完备的。

本文首次系统地探讨了 n 生成代数类和有限生成可计算可枚举代数类的同构关系复杂度，从而有助于理解有限生成代数的复杂度图景（例如，[TV99] 展示了描述集合论视角，[HTH21] 展示了可计算视角）。

为了衡量这些同构关系的复杂度，我们采用可计算可约性框架，并考察一系列自然的基准等价关系，遵循 Coskey、Hamkins 和 Miller [CHM12] 的做法。在我们的分类中，有两个关系起着关键作用：

- $=^{ce}$，可计算可枚举集上的相等关系；
- E_0^{ce}，可计算可枚举集上最终相等的 Σ^0_3 关系；事实上，这是有限生成可计算可枚举代数的同构关系所能达到的最大复杂度。

我们工作的一个核心见解是，簇的自然代数性质会对相应同构关系的复杂度施加上界。特别是，我们证明如下结论：

- （定理 4.20 的非正式版本）如果一个可计算枚举代数类的同余格满足升链条件（*ACC*），那么相应的同构关系可计算地可约于 $=^{ce}$。

通过我们的分析，我们系统地评估了广泛自然的可计算枚举代数类的同构关系复杂度，包括有限生成的交换半群、幺半群和群（见图 3）。为进一步完善分类工具，我们利用序数扩展经典基准关系（例如 $E_{\min}$），从而建立新的基准，以阐明这些层级内部细致的复杂度差异。

1.1. **本文结构**。第 2 节介绍泛代数、可计算可枚举表示、同构关系、可计算可约性，以及可计算可枚举集上的标准基准等价关系所需的背景知识。第 3 节介绍一系列自然实例，其同构关系属于 $n \geq 1$ 的度 $E_{\min}(\omega \cdot n)$。第 4 节对低于 $=^{ce}$ 的同构关系展开更系统的研究，证明若干一般性结果——包括定理 4.20——并扩展第 3 节开创的自然实例分类。第 5 节转而讨论高于 $=^{ce}$ 的同构关系，并给出一个新的 Σ^0_3-完备同构关系实例。最后，第 6 节概述一系列尚未解决的问题，并提出未来研究方向。

2. Basic background

2.1. **可计算性理论**。我们假定读者熟悉可计算性理论中的基本概念（例如见 [Odi92]）。我们采用标准记号；最重要的是，ω 表示自然数集合，φ_e 表示第 e 个部分可计算函数，$W_e = \{x \in \omega \mid \varphi_e(x)\downarrow\}$ 表示第 e 个可计算枚举集，而 $W_{e,s}$ 表示 W_e 中在阶段 s 之前枚举出的元素所构成的限制。我们用 X' 表示集合 X 的图灵跳跃。

2.2. **泛代数**。我们简要介绍一些我们需要的概念。更全面的介绍可见，例如 [Grä08]。

代数签名 是由一族函数符号 $(f_i)_{i\in I}$ 以及一族自然数 $(n_i)_{i\in I}$ 组成的，后者称为元数，其中 I 是某个指标集。基于这样的签名的代数 由一个元组 $\mathcal{A} = (A, (f_i^{\mathcal{A}})_{i\in I})$ 给出，其中 A 是一个集合，而 $(f_i^{\mathcal{A}})_{i\in I}$ 是一族函数 $f_i^{\mathcal{A}}\colon A^{n_i} \to A$。若 $n_i = 0$，我们称 f_i 为一个常元 。

我们将只关注指标集 I 可判定且将 $i \in I$ 映射到 n_i 的元数函数可计算的代数。由于我们只处理代数签名，因此简称为签名。

设 $\mathcal{A} = (A, (f_i^{\mathcal{A}})_{i\in I})$ 是一个代数。若一个等价关系 $E \subseteq A^2$ 满足以下条件，则称其为同余关系：对于每个元数为 n_i 的函数符号 f_i

$$\forall (a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in E : f_i^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)\ E\ f_i^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n)$$

成立。于是，我们称 $\mathcal{A}/E := (\{[a]_E \mid a \in A\}, (f_i^{\mathcal{A}/E})_{i\in I})$ 为 A 的商，其中 $[a]_E$ 是 a 在 E 下的等价类，而 $f_i^{\mathcal{A}/E}([a_1]_E, \ldots, [a_{n_i}]_E) := [f_i^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_{n_i})]_E$。

Let $\mathcal{A} = (A, (f_i^{\mathcal{A}})_{i\in I})$ $\mathcal{B} = (B, (f_i^{\mathcal{B}})_{i\in I})$ 是同一签名下的两个代数。一个函数 φ 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的同态，如果对于每个元数为 n_i 的函数符号 f_i

$$\forall a_1, ..., a_{n_i} \in A : \varphi(f_i^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_{n_i})) = f_i^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), ..., \varphi(a_{n_i}))$$

成立。如果 φ 是满射，我们称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的同态像，记作 $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$。如果 φ 是双射，我们称 φ 是一个同构，且 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 同构，记作 $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$。给定一个同态$\varphi\colon A \to B$，令 $\ker(\varphi) := \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid \varphi(a_1) = \varphi(a_2)\}$ 为 φ 的核。容易验证，$\ker(\varphi)$ 是 A 上的同余关系。根据著名的第一同构定理（或同态基本定理），如果 $A \twoheadrightarrow \mathcal{B}$，由 φ 见证，那么 $\mathcal{B}$ 同构于 $\mathcal{A}$ 关于 $\ker(\varphi)$ 的商。此外，众所周知，如果 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的商，那么 $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$。

下面我们陈述第三同构定理，这是我们研究代数表示时所需要的。其证明可以在大多数代数学教材中找到（例如，[Gr¨a08]，，其中该定理被称为第二同构定理）。

定理 2.1（第三同构定理）。设 $\mathcal{A}$ 是一个代数，C_1 和 C_2 是 $\mathcal{A}$ 上的两个同余关系，且满足 $C_1 \subseteq C_2$。则 $D\colon = \{([a]_{C_1}, [b]_{C_1}) \mid a, b \in C_2\}$ 是 $\mathcal{A}/C_1$ 上的同余关系，并且 $(\mathcal{A}/C_1)/D \cong \mathcal{A}/C_2$。因此，$\mathcal{A}/C_1 \twoheadrightarrow \mathcal{A}/C_2$。

对于给定的签名 $\sigma = (f_i)_{i\in I}$，变量集合 X 上的 项代数 $\mathcal{T}_\sigma(X)$ 的论域是所有在 X 上的 σ-项的集合，记作 $T_\sigma(X)$，其函数定义如下：

$$f_i^{\mathcal{T}_\sigma(X)} : T_\sigma(X)^{n_i} \to T_\sigma(X), (t_1, ..., t_{n_i}) \mapsto f_i(t_1, ..., t_{n_i}).$$

如果上下文中已明确 σ，我们通常会省略它。

一个等式律 是由一对项（s，t）构成的，也记作 $s \approx t$；它们定义在某个签名 σ 上，并含有自由变量。设 σ 为一个签名，Λ 为 σ上的一组等式律。那么类

$$\mathcal{V} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ is an algebra over } \sigma \text{ and } \forall (s, t) \in \Lambda : \mathcal{A} \vDash s = t\}$$

称为簇 或等式类。根据伯克霍夫 HSP 定理，这等价于说，$\mathcal{V}$ 在取同态像、子代数和积的运算下封闭。

2.3. **可计算枚举表示**。在泛代数中，（固定签名下的）一个表示由一个生成集 X 和一组关于这些生成元的项方程 R 构成，记作 $\langle X, R\rangle$。设 $\approx_R$ 为由 R生成的同余关系，也就是说，$\approx_R$ 是包含 R 的最小同余关系（或者等价地说，是包含 R 以及所有可通过对称性、传递性和函数应用从 R 推导出的方程的二元关系）。如果一个代数同构于 $\mathcal{T}(X)/\approx_R$，则称它由 $\langle X, R\rangle$ 表示。要定义固定簇中的表示（例如群表示），可以令 $\approx_R$由 R 与该簇的等式律共同生成。本文将讨论不同的簇，因此我们将用 $\langle X, R\rangle_\mathcal{V}$ 表示簇 $\mathcal{V}$中的一个表示。

以下定义可见于例如 [DRSMS20]:

定义 2.2 ([DRSMS20])。若表示 $\langle X, R\rangle_\mathcal{V}$ 满足以下条件，则称其为可计算可枚举表示：

- $\mathcal{V}$ 其等式律构成一个可计算可枚举集，
- X 其是可判定的，并且
- R 其是可计算

可枚举的。

这一概念与可计算可枚举代数的常见定义（例如 [Kho18]）一致，因为可计算可枚举代数恰好是具有可计算可枚举表示的代数。因此，为了简化表述，本文将可计算可枚举代数定义为具有可计算可枚举表示的代数。

为了研究由可计算可枚举表示给出的可计算可枚举代数类上的同构关系，我们需要能够将表示编码为自然数。

首先请注意，给定签名和生成集后，可以固定一个从 X 上的项对到自然数的双射编码。因此，我们可以将表示中的恒等式集合视为一个编码恒等式的自然数集合，并将 W_e 记作由 W_e 编码的恒等式集合。因此，在一个簇中，如果生成集固定，我们就可以用自然数 e如果 来标识一个表示。

根据定义，生成元集合必须是可判定的，因此（在重命名的意义下）它只能是以下集合之一：$X_\omega := \{x_n \mid n \in \omega\}$ 和 $X_n := \{x_0, ..., x_{n-1}\}$，其中 $n \in \omega$。所以，我们可以立即为一个簇中所有可计算可枚举代数的可计算可枚举表示，以及一个簇中所有由 n 生成的可计算可枚举代数的可计算可枚举表示，定义一种编号（注意，要求代数恰好使用 n 个生成元来表示并不构成限制，因为生成集较小的表示总可以通过合并多余的生成元来模拟）。

注 2.3. 如果项对的集合是有限的（当不存在元数为 ≥ 1 的函数符号时，可能出现这种情况），我们可以固定一个映射，将其编码到自然数的某个初始段中。于是，对于给定的可计算可枚举集 W_e，W_e 中的一些元素可能并不编码任何恒等式。在本文中，这样的簇只会出现在命题 4.1 中。

定义 2.4. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇。则我们定义

$$\mathcal{V}[e] := \langle X_\omega \mid W_e \rangle_{\mathcal{V}}$$

以及对于任意 $n \geq 1$

$$\mathcal{V}_n[e] := \langle X_n \mid W_e \rangle_{\mathcal{V}}.$$

对于某个簇的有限生成代数类，我们无法固定生成元集合；然而，我们仍然可以用一种自然的方式对表示进行编码。

定义 2.5. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇。则我们定义

$$\mathcal{V}_{f.g.}[\langle k, e \rangle] = \langle X_k \mid W_e \rangle_{\mathcal{V}}$$

我们还用 $\mathcal{V}_n$ 指代来自 $\mathcal{V}$ 的 n生成可计算枚举代数类，并类似地用 $\mathcal{V}_{f.g.}$指代来自 $\mathcal{V}$的有限生成可计算枚举代数类。换言之，$\mathcal{V}_n = \{\mathcal{V}_n[e] \mid e \in \omega\}$ 和$\mathcal{V}_{f.g.} = \{\mathcal{V}_{f.g.}[\langle k, e \rangle] \mid k, e \in \omega\}$。

注意，在上述定义中，我们排除了 0 生成代数，因为此类中的两个表示只能通过恒等映射同构。这是因为项代数由常元生成，而同构映射会将常元映射到自身。此外，当我们谈论有限生成结构，即对于某个簇 $\mathcal{V}$而言的 $\mathcal{V}_n$ 和 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 时，我们只考虑有限型上的簇。否则，类型可能包含无限多个常元，这就违背了限制为有限生成的初衷。

下面给出一些关于给定类中表示的简单但重要的例子，即空恒等式集和全恒等式集。

例 2.6. 令 $e_\emptyset$ 为空集的一个指标。那么 $\mathcal{V}_n[e_\emptyset] = T(X_n)/\approx_\emptyset$，其中 $\approx_\emptyset$ 只包含该簇的恒等式。也就是说，$\mathcal{V}_n[e_\emptyset]$ 是 $\mathcal{V}$ 上由 n 个变量生成的自由代数。另外请注意，如果我们不用 $\emptyset$，而改用该簇恒等式所生成的同余中的任意其他子集，仍然会得到自由代数。

At 另一方面，令 e_ω 为 ω的一个指标。那么 $\mathcal{V}_n[e_\omega] = T(X_n)/\approx_\omega$，其中 $\approx_\omega$ 是完整同余
关系。也就是说，$\mathcal{V}_n[e_\omega]$是平凡的，即大小为 1。

在处理表示时，下面两个引理很有用。它们表明，向一个（不一定是可计算枚举的）表示中添加恒等式，相当于取商；反过来，在某种意义上也成立。它们将一种基本直觉形式化了——因此，之后我们会经常使用它们，但不再明确提及。

引理 2.7。 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，X 是一个集合，R、S 是 X 上的项方程集合，且 $R \subseteq S$。那么 $\langle X \mid R \rangle_{\mathcal{V}} \twoheadrightarrow \langle X \mid S \rangle_{\mathcal{V}}$。

证明。 这是第三同构定理（定理 2.1）在表示情形下的表述。若 $\approx_S, \approx_R$ 分别是由 S, R 诱导的同余关系，则 $T(X)/\approx_S$ 同构于 $T(X_n)/\approx_R$除以 $E := \{([s]_{\approx_R}, [t]_{\approx_R}) \mid s \approx_S t\}$所得的商。□

引理 2.8。(1) 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，且 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{V}$ 满足条件 $\mathcal{A}\twoheadrightarrow\mathcal{B}$。那么对于 $\mathcal{A}$ 的所有表示$\langle X\mid R\rangle_{\mathcal{V}}$，都存在一个 $S\supseteq R$ 满足条件 $\langle X\mid S\rangle_{\mathcal{V}}$，使得 $\mathcal{B}$是一个表示。

(2) 此外，如果证明 $\mathcal{A}\twoheadrightarrow\mathcal{B}$ 的同态是非单射的（等价地： $\mathcal{B}$ 同构于 $\mathcal{A}$ 的一个非平凡商），那么存在一个 S，使得包含是严格的，即 $S\supsetneq R$。

证明。**(1)** 设 $\langle X\mid R\rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个表示，并设 $\approx_R$ 是由 R 和该簇的恒等式生成的同余关系。因此， $\mathcal{A}\cong\mathcal{T}(X)/\approx_R$。由于 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个同态像，存在一个同余关系 $\approx$，使得

$$\mathcal{B}\cong(\mathcal{T}(X)/\approx_R)/\approx$$

我们定义 $S:=\{(s,t)\in\mathcal{T}(X)\times\mathcal{T}(X)\mid[s]_{\approx_R}\approx[t]_{\approx_R}\}$。由 $\approx$的自反性，$S\supseteq\approx_R$，因此 $S\supseteq R$ 也成立。此外， S 是 $\mathcal{T}(X)$ 上的一个同余关系：自反性、对称性和传递性都容易验证。为证明相容性，注意对任意 n 以及任意 n 元函数符号 f，

$$\begin{aligned}&s_1\ S\ t_1,...,s_n\ S\ t_n\implies[s_1]_{\approx_R}\approx[t_1]_{\approx_R},...,[s_n]_{\approx_R}\approx[t_n]_{\approx_R}\implies\\&\implies f^{\mathcal{T}(X)/\approx_R}([s_1]_{\approx_R},...,[s_n]_{\approx_R})\approx f^{\mathcal{T}(X)/\approx_R}([t_1]_{\approx_R},...,[t_n]_{\approx_R})\implies\\&\implies[f(s_1,...,s_n)]_{\approx_R}\approx[f(t_1,...,t_n)]_{\approx_R}\implies f(s_1,...,s_n)\ S\ f(t_1,...,t_n).\end{aligned}$$

还需证明 $\mathcal{T}(X)/S$ 与 $(\mathcal{T}(X)/\approx_R)/\approx$ 同构，因此也与 $\mathcal{B}$ 同构。

我们证明 $\varphi\colon\mathcal{T}(X)/S\to(\mathcal{T}(X)/\approx_R)/\approx$，$[t]_S\mapsto[[t]_{\approx_R}]_{\approx}$ 是一个同构。

- well-defined and injective:

$$[s]_S=[t]_S\iff sSt\iff[s]_{\approx_R}\approx[t]_{\approx_R}\iff[[s]_{\approx_R}]_{\approx}=[[t]_{\approx_R}]_{\approx}.$$

- 满射：这由定义立即得出。
- 同态：

$$\begin{aligned}&\varphi(f^{\mathcal{T}(X)/S}([s_1]_S,...,[s_n]_S))=\varphi([f(s_1,...,s_n)]_S)=[[f(s_1,...,s_n)]_{\approx_R}]_{\approx}\\=&[f^{\mathcal{T}(X)/\approx_R}([s_1]_{\approx_R},...,[s_n]_{\approx_R})]_{\approx}=f^{(\mathcal{T}(X)/\approx_R)/\approx}([[s_1]_{\approx_R}]_{\approx},...,[[s_n]_{\approx_R}]_{\approx})\\=&f^{(\mathcal{T}(X)/\approx_R)/\approx}(\varphi([s_1]_S),...,\varphi([s_n]_S)).\end{aligned}$$

(2) 在上述证明中，注意若 $\approx$ 非平凡，则存在 $s,\ t\in\mathcal{T}(X)$ 使得 $[s]_{\approx_R}\neq[t]_{\approx_R}$ 且 $[s]_{\approx_R}\approx[t]_{\approx_R}$。因此，$(s,\ t)\in S$，但 $(s,\ t)\notin\approx_R$，所以 $(s,\ t)\notin R$ 也成立。

□

在这篇论文的一个地方（命题 5.5），我们还需要一个适用于有限生成表示的引理 2.8 的“有效”版本。这个版本稍微不那么显然。

引理 2.9。设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，且 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}\in\mathcal{V}_{f.g.}$ 是可计算可枚举代数，满足 $\mathcal{A}\twoheadrightarrow\mathcal{B}$。那么，对于所有 X 为有限集的 $\mathcal{A}$ 的可计算可枚举表示 $\langle X\mid W_e\rangle_{\mathcal{V}}$，都存在一个可计算可枚举集 $W_i\supseteq W_e$，使得 $\langle X\mid W_i\rangle_{\mathcal{V}}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个表示。

证明。令 $\langle X,W_j\rangle_{\mathcal{V}}$ 为 $\mathcal{B}$的一个表示。我们知道这样的表示存在，因为 $\mathcal{B}$ 属于 $\mathcal{V}_{f.g.}$，而 $\mathcal{B}$作为 $\mathcal{A}$的同态像，其生成元数量不会超过 $\mathcal{A}$。令 $\approx_{W_e},\approx_{W_j}$ 分别为由 W_e,W_j生成的同余关系。注意，见证 $\mathcal{T}(X)/\approx_{W_e}\twoheadrightarrow\mathcal{T}(X)/\approx_{W_j}$ 的满同态 φ 是由对有限多个生成元的映射诱导的。同一映射也诱导了一个从 $\mathcal{T}(X)$到 $\mathcal{T}(X)/\approx_{W_j}$的满同态，我们称之为 φ'。对于项$t\in\mathcal{T}(X)$，求出 $\varphi'(t)$的一个代表项是可计算的，因为这只需要知道生成元映射到何处这一有限信息。因此，$\ker(\varphi')$是可计算枚举的，因为我们可以对每一对

项，沿着 φ' 进行，然后求解 $\langle X, W_j\rangle_{\mathcal{V}}$的可计算枚举字问题。但现在注意，$S := \{(s,t) \in \mathcal{T}(X) \times \mathcal{T}(X) \mid [s]_{\approx_{W_e}} \approx_{\ker(\varphi)} [t]_{\approx_{W_e}}\}$ 与 $\ker(\varphi')$等价。并且我们已在引理 2.8 的证明中证明，S 是一个同余关系，且 $\mathcal{T}(X)/S$ 与 $\mathcal{B}$同构。因此，对于可计算可枚举集 $\ker(\varphi') = S \supseteq W_e$的一个指标 i，$\langle X \mid W_i\rangle_{\mathcal{V}}$ 是 $\mathcal{B}$的一个表示。□

2.4. 可计算可枚举表示上的同构关系。 在代数中，给定簇 $\mathcal{V}$ 的同构问题（记作 $\mathrm{IP}(\mathcal{V})$），指的是 $\mathcal{V}$ 中有限表示的同构问题。

观察 2.10 （众所周知）。 对于任意簇 $\mathcal{V}$，$\mathrm{IP}(\mathcal{V})$ 是 Σ_1^0。

证明。 设 $\langle X \mid R\rangle$ 和 $\langle Y \mid S\rangle$ 是簇 $\mathcal{V}$ 中代数的有限表示。设 $\approx_R$ 和 $\approx_S$ 分别为由 R 和 S 生成的同余关系（以及 $\mathcal{V}$ 的等式律）。我们声称，$\mathcal{T}(X)/\approx_R \cong \mathcal{T}(Y)/\approx_S$ 当且仅当存在映射 $\varphi\colon X \to \mathcal{T}(Y)$ 和 $\psi\colon Y \to \mathcal{T}(X)$，使得以下条件成立：

$$\bigwedge_{x\in X} \psi'(\varphi(x)) \approx_R x, \tag{1}$$

$$\bigwedge_{y\in Y} \varphi'(\psi(y)) \approx_S y, \tag{2}$$

$$\bigwedge_{(r_1,r_2)\in R} \varphi'(r_1) \approx_S \varphi'(r_2), \tag{3}$$

$$\bigwedge_{(s_1,s_2)\in S} \psi'(s_1) \approx_R \psi'(s_2), \tag{4}$$

其中，φ'，ψ' 是 φ，ψ 到 $\mathcal{T}(X)$ $\mathcal{T}(Y)$的扩张，定义如下（ ψ'的情形类似）

对于 $x \in X$，• $\varphi'(x) = \varphi(x)$,

• $\varphi'(f(t_1, \ldots\ldots, t_n)) = f(\varphi'(t_1) \ldots\ldots, \varphi'(t_n))$，其中项为 t_1，……，$t_n \in \mathcal{T}(X)$，函数符号 f在 $\mathcal{V}$的签名中的元数为 n 。

命题的“ $\Longrightarrow$ ”方向：设 ϕ 是从 $\mathcal{T}(X)/\approx_R$ 到 $\mathcal{T}(Y)/\approx_S$的同构。显然，$\phi \restriction X$ 和 $\phi^{-1} \restriction Y$满足条件 (1)-(4)。

命题的“ $\Longleftarrow$ ”方向：我们证明 φ' 是从 $\mathcal{T}(X)/\approx_R$ 到 $\mathcal{T}(Y)/\approx_S$的同态，而 ψ' 是从 $\mathcal{T}(Y)/\approx_S$ 到 $\mathcal{T}(X)/\approx_R$的同态，并且它们互为反函数。由此立即可得，φ' 也是一个同构。为了证明 φ' （ ψ' 的情形类似）是同态，只需验证它在 $\approx_R$的等价类上良定义。接着，同态条件由 φ'的定义得出。因此，设对于项 t_1、$t_2 \in T(X)$，有 $t_1 \approx_R t_2$。这个等价关系可由方程集 $\hat{}\ R \subseteq R\hat{}$通过对称性、传递性和函数应用推导出来。根据条件 (3)，对于每个 $(r_1, r_2) \in R$，都有 $\varphi'(r_1) \approx_S \varphi'(r_2)$。因此，我们也能通过在 $t_1 \approx_R t_2$ 的推导中将每个出现的项替换为其在φ'下的像，推导出 $\varphi'(t_1) \approx_S \varphi'(t_2)$。这说明 φ' 是良定义的。 ψ' 是 φ' 的反函数这一事实（反过来的情形类似）可通过对项 $t \in \mathcal{T}(X)$作简单的项归纳来证明。基例 $t = x \in X$ 由条件 (1) 得出。对于归纳步骤，考虑$t = f(t_1, ..., t_n)$： $\psi'(\varphi'(f(t_1, ..., t_n))) = f(\psi'(\varphi'(t_1)) ..., \psi'(\varphi'(t_n)))$，根据归纳假设，它与 $\approx_R$等价于 $f(t_1, ..., t_n)$。至此，命题得证。

最后，检查条件 (1)-(4) 是 Σ_1^0，因为检查属于 $\approx_R$，$\approx_S$ 的成员资格，也就是字问题，是 Σ_1^0（可以可计算地枚举出所有能够从 R 或 S 中的方程推导出的方程）。映射 φ 和 ψ 是有限对象，因此询问它们是否存在只不过是另一个存在量词。因此，同构的存在性是一个 Σ_1^0-问题。□

接下来讨论可计算枚举表示之间的同构，我们在第 2.3 节中为所引入的类定义同构关系。

定义 2.11. 设 $\mathcal{V}$ 为一个簇，且设 $e, i \in \omega$。我们如下定义对应于 $\mathcal{V}$、$\mathcal{V}_n$ 和 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 的同构关系：

$$e \cong_{\mathcal{V}} i :\iff \mathcal{V}[e] \cong \mathcal{V}[i],$$
$$e \cong_{\mathcal{V}_n} i :\iff \mathcal{V}_n[e] \cong \mathcal{V}_n[i], \text{ and}$$
$$e \cong_{\mathcal{V}_{f.g.}} i :\iff \mathcal{V}_{f.g.}[e] \cong \mathcal{V}_{f.g.}[i]$$

注意，任何此类同构关系都是 ω 上的等价关系。此外，它们中的每一个都是 $=^{ce}$ 的商，也就是说，$=^{ce}$ 中的所有等价关系都成立（即它是 $=^{ce}$ 的超集）。

与观察 2.10 类似，可以看出，对于有限生成代数，同构关系至多为 Σ^0_3。

观察 2.12 (众所周知)。对于任意簇 $\mathcal{V}$，$\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 都是 Σ^0_3。

证明。考虑任意 $\langle k, e\rangle$ 和 $\langle j, i\rangle$，它们分别编码表示 $\langle X_k \mid W_e\rangle$ 和 $\langle X_j \mid W_i\rangle$。与观察 2.10 的证明一样，我们可以考察映射 $\varphi\colon X_k \to \mathcal{T}(X_j)$ 和 $\psi\colon X_j \to \mathcal{T}(X_k)$ 是否存在。由于我们的生成集仍然是有限的，因此可以沿用该证明中的条件 (1) 和 (2)。条件 (3) 和 (4) 则需要改为如下形式：

$$(\forall r_1, r_2)((r_1, r_2) \in W_e \implies \varphi'(r_1) \approx_{W_i} \varphi'(r_2)), \tag{3}$$
$$(\forall s_1, s_2)((s_1, s_2) \in W_i \implies \psi'(s_1) \approx_{W_e} \psi'(s_2)). \tag{4}$$

验证这一点刻画了同构的存在，其方法类似。条件 (3) 和 (4) 现在是 Π^0_2-语句，因此存在满足这些条件的 φ 和 ψ，现在是一个 Σ^0_3-语句。□

2.5. **可计算可枚举集上的可计算可约性与等价关系。** 设 E, F 是 ω上的等价关系。若存在一个可计算函数 $h\colon \omega \to \omega$，使得对所有 $x, y \in \omega$，则称 E 可计算地可约于 F，记作 $E \leq_c F$。

$$x \; E \; y \iff h(x) \; F \; h(y)$$

如果二者都 $E \leq_c F$ 并且 $F \leq_c E$，那么 E 和 F 是 可计算双向可约（或 可计算等价），记作 $E \equiv_c F$。

接下来，我们介绍一些关于可计算可枚举集的重要等价关系。这些等价关系定义在可计算可枚举集的指标上；也就是说，如果两个指标指向同一个集合，那么它们就属于同一个等价类。

定义 2.13 ([CHM12])。对于 $e, i \in \omega$ 我们定义

- $e =^{ce} i \iff W_e = W_i$,
- $e \; E_{\text{最小值}} \; i \iff \min(W_e) = \min(W_i)$ 或 $W_e = W_i = \emptyset$,
- $e \; E_{\text{最大值}} \; i \iff \max(W_e) = \max(W_i)$ $W_e = W_i = \emptyset$，或 W_e，W_i 两者都是无限的,
- $e \; E^{ce}_0 \; i \iff$ 对称差 $W_e \triangle W_i$ 是有限的。

定理 2.14 ([CHM12])。

- $E_{\text{最小}}$ 和 $E_{\text{最大}}$ 在可计算可约性下不可比较,
- $E_{\text{最小}} <_c =^{ce}$, $E_{\text{最大}} <_c =^{ce}$，以及
- $=^{ce} <_c E^{ce}_0$。

本文的一个重要分界线在于，给定的同构关系是否低于 $=^{ce}$。需要注意的是，尽管 $=^{ce}$ 在 m-可约性下是 Π^0_2-完备的，但它在可计算可约性下并不完备。事实上，这样的等价关系不可能存在。

定理 2.15 ([IMNN14])。 不存在 Π^0_2-完备的等价关系（在 $\leq_c$ 下）。事实上，对于每个等价关系 $R \in \Pi^0_2$，都存在一个等价关系 $S \in \Delta^0_2$，使得 $S \not\leq_c R$。

对我们而言，这意味着，证明某个同构关系是 Π^0_2，甚至是 Δ^0_2，并不足以确定其可约至 $=^{ce}$。

接下来，我们介绍单调性引理 [CHM12], ，借助它，我们可以通过对角化更容易地证明某些不可约性结果。该引理的证明中隐含地使用了递归定理；否则，我们就必须在每个不可约性证明中明确使用递归定理。

引理 2.16 （单调性引理， [CHM12]）。假设 $f:\ \omega \to \omega$ 在可计算可枚举集上是可计算的，并且定义良好，即，对于每个 e、i、 $W_e = W_i \implies W_{f(e)} = W_{f(i)}$。那么，对于每个 e、$i \in \omega$、
$W_e \subseteq W_i \implies W_{f(e)} \subseteq W_{f(i)}$。

请注意，单调性引理适用于任何可计算的 f，只要它将$=^{ce}$ 的某个商归约到 $=^{ce}$。

2.6. $E_{\min}$ **关于良序**。 Coskey、Hamkins 和 Miller [CHM12] 将 $E_{\min}$ 和 $E_{\max}$推广到了自然数上的任意可计算线性序，使用了 Dedekind 分割。对我们而言，只需考虑可计算良序上的 $E_{\min}$ 。这样，我们便可以采用一个更简单的定义；对于我们所考虑的情形，该定义与他们的定义等价。

定义 2.17. 设 $\mathcal{A}$是 ω上的一个可计算良序。我们将 $E_{\min}(\mathcal{A})$定义为： $e\ E_{\min}(\mathcal{A})\ i$ 当且仅当 W_e 和 W_i 具有相同的 $<_{\mathcal{A}}$最小元素，或二者均为空。

这些 $E_{\min}$等价关系具有以下性质：

(1) 对任意可计算良序 $\mathcal{A}$， $E_{\min}(\mathcal{A}) \leq_c =^{ce}$；(2) 存在两个序型（序数）相同但彼此不同的可计算良序 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ ，其中 $E_{\min}(\mathcal{A})$与 $E_{\min}(\mathcal{B})$不可计算双向可约；(3) 对任意两个序型不同的可计算良序 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ ， $E_{\min}(\mathcal{A})$与 $E_{\min}(\mathcal{B})$不可计算双向可约。

(1) 和 (3) 直接源自 [CHM12]在其定义背景下证明的类似结果。借助命题 2.21 和命题 2.22，我们分别在本文的背景和记号下证明 (2) 并重新证明 (3)。为此，我们使用以下两个简单引理，它们讨论了在可计算归约于可计算可枚举集上良定义时得以保持的性质。

引理 2.18. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是可计算良序，且 f 是一个从$E_{\min}(\mathcal{A})$ 到 $E_{\min}(\mathcal{B})$ 的可计算归约，并且该归约在可计算可枚举集上良定义。那么，$\min_{\mathcal{A}}(W_e) \leq_{\mathcal{A}} \min_{\mathcal{A}}(W_i)$ 蕴含$\min_{\mathcal{B}}(W_{f(e)}) \leq_{\mathcal{B}} \min_{\mathcal{B}}(W_{f(i)})$。

证明。 设 $a_e :=\min_{\mathcal{A}}(W_e)$ 且 $a_i :=\min_{\mathcal{A}}(W_i)$。归约 f 将 W_i 和 $\{a_i\}$ 映射到同一个$E_{\min}(\mathcal{B})$-等价类中。此外， f 将 W_e、$\{a_e\}$和 $\{a_e, a_i\}$ 映射到同一个 $E_{\min}(\mathcal{B})$-等价类中。根据单调性引理（引理 2.16）， $f(\{a_i\}) \subseteq f(\{a_e, a_i\})$，因此 $\min_{\mathcal{B}}(f(a_e, a_i})) \leq_{\mathcal{B}} \min_{\mathcal{B}}(f(\{a_i\}))$，从而也有 $\min_{\mathcal{B}}(W_{f(e)}) \leq_{\mathcal{B}} \min_{\mathcal{B}}(W_{f(i)})$。□

注意，由于归约保持等价类，我们还可以得出，如果 $\min_{\mathcal{A}}(W_e) <_{\mathcal{A}} \min_{\mathcal{A}}(W_i)$，那么 $\min_{\mathcal{B}}(W_{f(e)}) <_{\mathcal{B}} \min_{\mathcal{B}}(W_{f(i)})$。

对于良序 $\mathcal{A}$，元素a 在 $\mathcal{A}$ 中的秩 （或者，如果 $\mathcal{A}$ 从上下文中可以清楚看出，就简称秩）是初始段 $\{b \in \mathcal{A} \mid b <_{\mathcal{A}} a\}$的序型。

引理 2.19. 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是可计算良序，且 f 是从$E_{\min}(\mathcal{A})$ 到 $E_{\min}(\mathcal{B})$的可计算归约，并且在可计算可枚举集上良定义。设a_γ 是 W_e中关于 $\mathcal{A}$的最小元素，且 γ 是a_γ的$\mathcal{A}$秩。那么， $W_{f(e)}$ 中关于 $\mathcal{B}$的最小元素存在，且其 $\mathcal{B}$秩至少为 γ。

证明. 我们对 γ进行超限归纳来证明这一点。

- 基例：假设 $\gamma = 0$。因此， W_e 包含一个秩为 0 的 $\mathcal{A}$ 元素 a_0 ，所以它非空。令 i 为空集的一个指标。根据单调性引理（引理 2.16）， $W_i \subseteq W_e$蕴含 $W_{f(i)} \subseteq W_{f(e)}$。此外，由于 W_i 和 W_e 属于不同的 $E_{\text{最小值}}(\mathcal{A})$-类，因此有 $W_{f(i)} \subsetneq W_{f(e)}$。因此， $W_{f(e)}$ 不可能为空，故它有一个秩至少为 0 的最小元素$\mathcal{B}$。
- 后继情形：假设 γ 是 δ 的后继，并且该命题对秩为δ的 $\mathcal{A}$成立。注意，$\min_{\mathcal{A}}(W_e \cup a_\delta) <_{\mathcal{A}} \min_{\mathcal{A}}(W_e)$。我们可以对$W_e \cup a_\delta$ 应用归纳假设，得到它在 f 下的像的 $\mathcal{B}$-最小元素，其秩至少为 $\mathcal{B}\delta$。根据引理 2.18，$\min_{\mathcal{B}}(W_{f(e)})$ 的秩必定严格大于 δ，因此至少为γ。
- 极限情形：假设 γ 是一个极限序数，并假设该命题对所有 a_δ 的$\mathcal{A}$-秩为 $\delta < \gamma$的情形都成立。对于任意 $W_e \cup a_\delta$，我们可以应用归纳假设；对于 $\delta < \gamma$，可得 $f(W_e \cup a_\delta)$ 的 $\mathcal{B}$最小元素的 $\mathcal{B}$-秩至少为 δ。与后继情形类似，由引理 2.18 可知，$\min_{\mathcal{B}}(f(W_e))$ 的 $\mathcal{B}$-秩必定严格高于任意 $\min_{\mathcal{B}}(f(W_e \cup a_\delta))$ 的 $\delta < \gamma$-秩，因此至少等于它们的 $\mathcal{B}$-秩的极限，即 γ。

□

观察 2.20。 设 $\mathcal{A}$ 是一个可计算良序， E 是可计算可枚举集上的等价关系。若 E 可计算地可约于 $E_{\min}(\mathcal{A})$，则存在一个从 E 到$E_{\min}(\mathcal{A})$ 的可计算归约，且该归约在可计算可枚举集上良定义。

证明。 设 f 是一个可计算归约，其映射从 E 到 $E_{\min}(\mathcal{A})$。我们按如下方式定义作用于可计算可枚举集指标上的可计算函数 f'：对于任意可计算可枚举集 W_e，将以下元素枚举进 $W_{f'(e)}$

- 枚举进 $W_{f(e)}$ 的任意元素以及
- 对于枚举出的任意元素 m ，我们也会枚举任意 $n >_{\mathcal{A}} m$ （这是可行的，因为 $\mathcal{A}$ 是可计算的）。

对于任意 e， $W_{f(e)}$ 和 $W_{f'(e)}$ 是 $E_{\min}(\mathcal{A})$-等价的。因此， f' 也是一个归约。由于 E 是可计算可枚举集上的等价关系， $W_e = W_i$ 蕴含 eEi，而这又蕴含 $f(e)E_{\min}(\mathcal{A})f(i)$。因此， $W_{f(e)}$和 $W_{f(i)}$ 具有相同的 $\mathcal{A}$-最小元素。根据我们的构造，这意味着$W_{f'(e)} = W_{f'(i)}$。所以， f'在可计算可枚举集上是良定义的。□

命题 2.21。 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是可计算良序，并设 $E_{\min}(\mathcal{A}) \leq_c E_{\min}(\mathcal{B})$。那么存在一个从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的嵌入，且可由 $\mathbf{0}'$计算。

证明。 根据观察 2.20，令 f 为一个在可计算可枚举集上良定义的可计算归约。定义一个将 $\mathcal{A}$ 嵌入 $\mathcal{B}$ 的嵌入 g，如下：

$$g(a) := \min_{\mathcal{B}}(f(\{a\}).$$

为验证 g 是一个嵌入，注意到根据引理 2.18， $a_1 \leq_{\mathcal{A}} a_2$ 蕴含 $\min_{\mathcal{B}}(f(\{a_1\}) \leq_{\mathcal{B}} \min_{\mathcal{B}}(f(\{a_2\})$。此外，很容易看出，一次图灵跳跃就能计算 g。□

Bazhenov、Rossegger 和 Zubkov [BRZ22] 特别证明了，存在序型为 ω^2 的可计算良序 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，使得不存在一个可由 $\mathbf{0}''$ 计算的、将 $\mathcal{A}$ 嵌入 $\mathcal{B}$ 的嵌入。因此，命题 2.21 表明，存在序型相同的可计算良序，其对应的 $E_{\min}$-等价关系并非可计算双向可约。

命题 2.22. </style}令 为两个可计算序数，并令 为序型为 的可计算良序，为序型为 的可计算良序。那么 $(\mathcal{A}) \not\leq_c E_{\min}(\mathcal{B})$。

证明。根据观察 2.20，令 f 为一个在可计算可枚举集上良定义的可计算归约。令$a_\gamma \in \mathcal{A}$ 为一个秩为 $\gamma > \beta$的 $\mathcal{A}$ 元素。但根据引理 2.19，我们知道 $\min_{\mathcal{B}}(W_{f\{a_\gamma\}})$ 的秩至少为 γ，这就产生了矛盾。□

在 [CHM12], 中，序数与实际的良序之间没有区别，尽管同一序数的不同良序可能具有不同的 c 度。这不会影响他们的结果，但就我们的目的而言，我们需要更精确一些。我们尤其关注一种以更强意义“可计算”的良序：对于任意元素，我们都能可计算地知道它的秩，即准确知道它在序中的位置。因此，任何两个序型相同的此类良序也都是可计算同构的，其关联的 $E_{\min}$ 关系可计算双向可约。由此，我们可以用这些“强可计算”的良序来定义 $E_{\min}(\alpha)$，其 c 度也将是良定义的。此外，根据命题 2.22，我们知道，某个 $E_{\min}(\alpha)$ 的度不可能包含一个序型不同于 α 的良序 $\mathcal{B}$ 的 $E_{\min}(\mathcal{B})$。之后，我们将看到一些自然的同构关系例子，它们属于某些 $E_{\min}(\alpha)$ 的度，从而展示这一定义的实用性。

由于这是我们工作所需达到的最高范围，我们给出一个关于 ω^ω 的典范编码定义。注意，利用康托尔标准形，还可以将编码定义到 ϵ_0（$\{1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, ...\}$ 的上确界）。

定义 2.23。设 α 是一个不超过（包括） ω^ω 的可计算序数。也就是说，其中每个元素都有标准形 $\alpha = \omega^{e_1}c_1 + ..., \omega^{e_k}c_k$其中 $e_1, ..., e_k, c_1, ..., c_k \in \omega$且 $e_1 > ... > e_k$（这实质上是低于 ω^ω 的康托尔标准形）。设 h 是所有低于 α 的序数（表示为有限元组 $\langle e_1, ..., e_k, c_1, ..., c_k\rangle$）的一个双射且可计算的编码，且设 $\mathcal{A}_\alpha$ 是由 $n \leq_{\mathcal{A}_\alpha} m \iff h^{-1}(n) < h^{-1}(m)$ 定义的序关系。于是我们定义 $E_{\min}(\alpha) := E_{\min}(\mathcal{A}_\alpha)$。

命题 2.24。如果 $\alpha < \beta$ 那么 $E_{\min}(\alpha) <_c E_{\min}(\beta)$。

证明。“$E_{\min}(\alpha) \leq_c E_{\min}(\beta)$”：我们定义一个可计算归约 f，使得

$$e \; E_{\min}(\alpha) \; i \iff f(e) \; E_{\min}(\beta) \; f(i).$$

给定指标 e，我们提供一个有效过程来枚举 $W_{f(e)}$：对于进入 W_e 的任意元素 $n \in \omega$，我们计算其 $\mathcal{A}_\alpha$-秩 γ，并将一个 $\mathcal{A}_\beta$-秩为 γ 的 m 枚举到 $W_{f(e)}$ 中。于是，任意两个 W_e，W_i具有相同的 $\mathcal{A}_\alpha$-最小元素，当且仅当 $W_{f(e)}$，$W_{f(i)}$ 具有相同的 $\mathcal{A}_\beta$-最小元素。

“$E_{\min}(\beta) \not\leq_c E_{\min}(\alpha)$”：由命题 2.22 得出。 □

2.7. **代数类**。接下来，我们将研究以下簇中的 n-生成类和有限生成类：

- $\mathcal{AG}$：阿贝尔（交换）群，
- $\mathcal{UF}^m$：所有恰有 m 个函数符号且它们全都是一元（元数为 1）的代数，
- $\mathcal{CS}$：交换半群，以及
- $\mathcal{CM}$：交换幺半群。

此时，我们还要举例说明两个非常简单的交换半群表示，它们彼此同构，但这种同构并非由生成元的置换诱导。这个例子旨在展示判定两个表示是否同构的困难。

例 2.25. 考虑表示 $\langle a, b \mid a = a^2b^2\rangle$ 和 $\langle c, d \mid c = c^2d^3\rangle$。显然，$c \mapsto a, d \mapsto b$和 $c \mapsto b, d \mapsto a$都不能诱导同构。然而，这两个表示仍然同构：取映射 φ：$a \mapsto cd, b \mapsto d$和 ψ：$c \mapsto a^2b, d \mapsto b$，并检验观察 2.10 中给出的条件。

不过，已知对于有限表示，这是一个可判定问题。

定理 2.26 ([Taĭ74], [GS80])。 交换幺半群的有限表示的同构问题是可判定的。

3. Isomorphism relations in the $E_{\min}$-degrees

在本节中，我们证明 $\cong_{\mathcal{AG}_1}$、 $\cong_{\mathcal{UF}_1^1}$、 $\cong_{\mathcal{CS}_1}$和 $\cong_{\mathcal{CM}_1}$ 都与$E_{\min}$可计算等价，并且 $\cong_{\mathcal{AG}_n}$ 和 $\cong_{\mathcal{UF}_n^1}$ 与 $E_{\min}(\omega \cdot n)$可计算等价。

3.1. 单生成元半群与幺半群。 对于单生成元半群 $\mathcal{A}$（由 $X_1 =\{x\}$生成），通常会关联一个指标 和一个周期，其中指标是最小的 n，使得对于某个 $\ell \neq n$有 $x^n = x^\ell$ ；周期则是满足 $x^n = x^k$的最小 $k \neq n$ 对应的 $k - n$ 。众所周知，指标和周期共同刻画了同构类型。

命题 3.1 (众所周知)。 两个单生成元半群 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 同构，当且仅当它们具有相同的指标和周期。

以下观察也很有用。它们说明：(1) 随着添加更多恒等式，指标和周期都不会增加；(2) 对于给定的有限恒等式集，可以计算出指标和周期。

观察 3.2. 在单生成元半群中，取商时指标和周期都不会增加。

证明。 显然，添加更多恒等式绝不会增加指标。因此，只需证明周期不会增加。设 $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$，令 i_A, p_A 分别为 $\mathcal{A}$ 的指标和周期，并令 i_B, p_B分别为 $\mathcal{B}$的指标和周期。我们将证明 $x^{i_B} = x^{i_B+p_A}$ 在 $\mathcal{B}$ 中成立，这意味着 $\mathcal{B}$ 的周期至多为 p_A。

From $x^{i_B} = x^{i_B+p_B}$，由同余关系的相容性和传递性可知，

$$x^{i_B} = x^{i_B+p_B} = x^{i_B+2p_B} = \dots \tag{1}$$

$$x^{i_B+p_A} = x^{i_B+p_A+p_B} = x^{i_B+p_A+2p_B} = \dots \tag{2}$$

现在我们取一个 k，使得 $i_B + kp_B \geq i_A$。然后，由 $x^{i_A} = x^{i_A+p_A}$ （这成立是因为 $x^{i_A} = x^{i_A+p_A}$在 $\mathcal{A}$ 中成立，且 $\mathcal{B}$ 具有 $\mathcal{A}$的所有恒等式），根据相容性可得 $x^{i_B+kp_B} = x^{i_B+kp_B+p_A}$。结合 (1) 和 (2)，再由传递性可得 $x^{i_B} = x^{i_B+p_A}$。□

观察 3.3。 对于任意 e、$s \in \omega$，$A = \langle x \mid W_e$的指标和周期都是可计算的。特别地，指标是使得 $x^i = x^j$ 或 $x^j = x^i$ 成为非平凡关系的最小 i，而周期是所有使得 $x^i = x^j$ 成为非平凡关系的 $|i - j|$ 的最大公约数。

根据这些观察，我们能够证明，单生成元半群上的同构关系与 $E_{\min}$可计算等价。

定理 3.4。 $\cong_{\mathcal{CS}_1} \equiv_c E_{\min}$。

证明。 "$\leq_c$"：我们构造一个可计算的 $f : \omega \to \omega$，将 $\cong_{\mathcal{CS}_1}$-实例（可计算枚举集的指标，其中这些集合编码单生成元半群的表示）映射到 $E_{\min}$-实例（可计算枚举集的指标），使得

$$e \cong_{\mathcal{CS}_1} i \iff f(e)E_{\min}f(i) \iff \min(W_{f(e)}) = \min(W_{f(i)}) \text{ or } W_{f(e)} = W_{f(i)} = \emptyset.$$

设 $\mathcal{CS}_1[e]$是任意单生成元半群。我们按以下方式分阶段构造 $W_{f(e)}$ ：

- 只要 W_e 保持为空，也将$W_{f\ (e)}$ 留空。
- 如果一个方程进入 W_e，我们就计算所编码的单生成元半群的指标和周期，并将它们编码为一对，放入$W_{f(x)}$。指标和周期是可计算的，因为在每个阶段， W_e 中已有的元素都只有有限多个。

- 由于根据观察 3.2，新方程不会使指标和周期增加，因此我们最终会稳定在它们的真实值上。

现在， W_e和 W_i 具有相同的指标和周期，当且仅当 $W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 具有相同的最小元素，该元素编码了指标和周期（确切地说，我们必须选择一个配对函数，使得其中任一值减小时，配对值也随之减小）。

“$\geq_c$”：这次我们构造一个可计算的 f，将 $E_{\min}$实例映射到 $\cong_{\mathcal{CS}_1}$实例，使得

$$eE_{\min}i \iff f(e) \cong_{\mathcal{CS}_1} f(i).$$

给定一个可计算可枚举集 W_e，我们按如下方式构造 $W_{f(e)}$：

- 只要 W_e仍为空，就让 W_f（e）也保持为空（即， $\mathcal{CS}_1[f$（e）$]$是自由单生成元半群）。
- 对于某个进入 W_e 的 n，我们将 $x^n = x^{n+1}$ 的编码放入$W_{f\ (e)}$。
- 由于最终会到达 W_e的最小元素 n， $\mathcal{CS}_1[f(e)]$的指标和周期会稳定为 $\langle n,\ 1\rangle$。

现在，任意两个可计算可枚举集当且仅当它们具有相同的最小元素 n 时，由此得到的单生成元半群同构。□

定理 3.5。 $\cong_{\mathcal{CM}_1} \equiv_c E_{\min}$。

对此的证明与 $\cong_{\mathcal{CS}_1}$ 的证明完全相同，只不过现在恒等式的表现如同生成元的“第 0 次”幂。我们也可以用非常类似的方法证明， $\cong_{\mathcal{AG}_1}$ 和 $\cong_{\mathcal{UF}_1^1}$也属于这个度（不难证明， $\cong_{\mathcal{UF}_1^1}$ 也可以用指标和周期来刻画）。不过，这可以由更一般的 n 个生成元的情形推出；我们将在本节余下部分研究这一情形。

3.2. $\mathcal{UF}_n^1$。 接下来，我们分析具有单个一元函数符号的代数类 $\mathcal{UF}_n^1$ 的复杂度，并证明它们与 $E_{\min}(\omega \cdot n)$ 相同。为此，我们需要考察 $\mathcal{UF}_n^1$ 中代数结构的一些性质。我们通过有向图来考察这些代数，其中边关系由一元函数符号 f 给出。形式地，给定 $\mathcal{A} = (A,\ f) \in \mathcal{UF}_n^1$，我们将与 $\mathcal{A}$ 关联的图定义为 $G(\mathcal{A}) := (A,\ E_{\mathcal{A}})$，其中 $E_{\mathcal{A}} := \{(u,\ v) \in A \times A \mid f(u) = v\}$。

观察 3.6。 对于给定的 n，令 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{UF}_n^1$。那么， $\mathcal{A} \cong B$ 当且仅当 $G(\mathcal{A}) \cong G(\mathcal{B})$。

证明。 只需注意到，同态条件

$$\varphi(f^{\mathcal{A}}(u)) = f^B(\varphi(u))$$

对于代数同构 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，等价于以下条件

$$(u, v) \in E_{\mathcal{A}} \iff (\psi(u), \psi(v)) \in E_{\mathcal{B}}$$

对于有向图的同构 $\psi : G(\mathcal{A}) \to G(\mathcal{B})$。 □

对于给定的代数 $\mathcal{A}$，注意到两个生成元 a，b 属于 $G(\mathcal{A})$ 的同一个连通分支，当且仅当存在 i，j，使得 $f^i(a) = f^j(b)$ 位于 $\mathcal{A}$ 中。下文中，我们将由互不相同的顶点 v_0，v_1，.....构成、且对所有 $i \geq 0$ 都有一条从 v_i 到 v_{i+1} 的边的无限序列称为射线。此外，对于有向图 $G = (V,\ E)$ 和顶点 $v \in V$，我们将由从 $w\}$ 可达的 $\{w \in V \mid v$ 所诱导的子图定义为 $G \restriction v$。关于这些分支的以下基本观察将有助于我们对其进行刻画。

观察 3.7。令 $\mathcal{A} \in \mathcal{UF}_n^1$。

(1) $G(\mathcal{A})$的任意顶点的出度（离开该顶点的边数）恰好为1。(2) $G(\mathcal{A})$ 的无限分支中不能包含环。

(3) 设 $G(\mathcal{A})$的一个无限连通分量为 G' 。那么，存在一个顶点 $v \in G'$ ，使得 v 可从任意生成元到达，并且按照以下意义，它是最小的此类顶点：对于任意可从某个生成元到达的顶点 $u \neq v$， v 均无法到达 u。此外， G' 的同构类型由有限图 $G' \restriction v$刻画。

证明。 (1) 为使 f 良定义，每个顶点的出度都必须为 1。

(2) 假设某个连通分支含有一个环。那么存在一个生成元 $a \in G'$ ，使得 $f^i(a) = f^j(a)$，其中 $i < j$。该分支中的任何其他生成元都必须有一条路径通向这个环。因此，该分支是有限的。

(3) 对任意两个生成元 a， $b \in G'$，存在 i， j，使得 $f^i(a) = f^j(b)$。因此，存在一个从任意生成元都可达的顶点。 u 可以选为最小的：若某个u 可从它到达，且该u 又可从任意生成元到达，我们就可以用 u 替换 v ——这个过程必定会停止，因为任何 f-前驱链都必须是有限的。现在注意到， $G' \restriction v$ 必定是有限的。此外， G' 中不属于 $G' \restriction v$ 的边和顶点恰好构成一条射线，起点为 v。因此，假设有两个这样的图 G'， F'，它们分别对应两个无限分支；令 v 和 w 分别为从该分支中任意生成元都可达的最小顶点。那么，从 $G' \restriction v$ 到 $F' \restriction w$ 的同构必须将 v 映到 w （它们是仅有的没有出边的顶点），因此可以扩展为从 G' 到 F'的同构。因此，无限分支的同构类型由这些有限子图刻画。

□

作为（1）的推论，请注意，对于 $G(\mathcal{A})$ 中的任意顶点，都有一条从该顶点出发的唯一射线。图1展示了一个有限连通分量和一个无限连通分量的示例，以及刻画无限连通分量的有限图是什么样子。

基于这些观察，我们现在为 $\mathcal{UF}_n^1$ 中的代数给出一个不变量。首先，我们需要一种将有限有向图编码为自然数的方法，使得顶点数减少时，编码也随之减小。为此，对所有有限有向图（的同构类型）进行枚举，先列出大小为 1 的图，再列出大小为 2 的图，依此类推。然后，令 $m(\mathcal{A})$ 为 $G(\mathcal{A})$ 中无限连通分量的数量，并令 $I(\mathcal{A})$ 为这样一个有限图的编码：它与 $G(\mathcal{A})$ 相同，只是根据观察 3.7 (3)，将每个无限连通分量替换为刻画它的有限子图。注意，这些刻画无限连通分量的有限图仍然不可能包含环，因此不同于 $G(\mathcal{A})$ 中的有限连通分量。由此可见，显然 $I(\mathcal{A})$ 已足以刻画同构类型，但我们将 $m(\mathcal{A})$ 和 $I(\mathcal{A})$ 这一对作为不变量，因为正如我们将看到的，它与 $E_{\min}(\omega^2)$ 配合良好。

命题 3.8。 令 $\mathcal{A} \in \mathcal{UF}_n^1$。那么，可以从 $\mathcal{A}$ 的有限表示中可计算地得到 $m(\mathcal{A})$ 和 $I(\mathcal{A})$ 。

证明。 要计算 $m(\mathcal{A})$，只需记录哪些生成元属于同一个连通分支。这可以可计算地完成。

对于 $I(\mathcal{A})$，我们对表示中的有限方程集进行归纳，以证明其可计算性。如果没有方程，则 $G(\mathcal{A})$ 中的每个 n 分支都是一条射线。因此， $I(\mathcal{A})$ 是具有单个顶点且没有边的图的 n 个副本。对于归纳步骤，假设我们有一个不变量，由有限连通分支 I_0、.....、I_k 组成，其中每个分支分别对应于 $G(\mathcal{A})$ 的一个（不一定有限的）连通分支 G_0、.....、G_k。假设向表示中加入了一个（非平凡）方程，将一个顶点 $u \in G_i$ 与一个顶点 $v \in G_j$ 合并。我们区分以下情况：

(1) $i \neq j$， G_i 和 G_j 均为无限，(2)
$i = j$， $G_i = G_j$ 为无限，

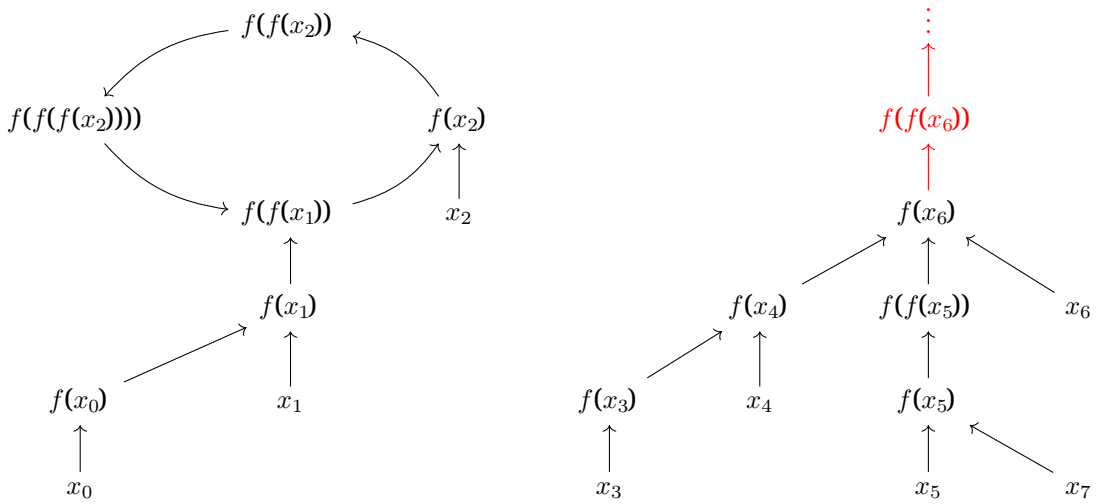

FIGURE 1. $\mathcal{UF}^1_{f.g.}$中的一个代数示例。这里有两个连通分量；左边的是有限的，右边的是无限的。在无限连通分量中，未标成红色的部分（即位于 $f(x_6)$及其下方的所有部分）就是刻画该连通分量的有限图。

(3) $i \neq j$， G_i 和 G_j 均为有限，(4) $i = j$， $G_i = G_j$ 为有限，(5) $i \neq j$，G_i 为无限， G_j 为有限。

请注意，在上述每种情况下，合并之后，两个被合并的顶点都将位于同一个连通分量 G'中。在 $G(\mathcal{A})$中， G' 取代了 G_i 和 G_j，而其他所有连通分量都保持不变。因此，只需证明我们能够根据 I_i 和 I_j计算出 G' 的不变量 I' 。

如果我们知道 G' 是有限的，就可以按如下方式计算它（从而计算 I'）：首先，我们通过枚举顶点之间的相等关系来寻找一个环，直到发现一个环，也就是说，发现对于某个生成元 x 和 k， $l \geq 0$， $k \neq j$，有 $f^k(x) = f^l(x)$。于是，我们可以考察由以下顶点组成的有限集：由 x 生成、直到环为止的顶点，以及由该连通分量中另一个生成元生成、直到与某个由 x生成的顶点相连为止的顶点。接下来很容易看出，我们只需穷尽计算这个顶点集中的所有合并（表示中的所有方程及其推论）即可。这样就处理了第3至第5种情况。

对于情形 1，很容易看出， G' 是通过合并从 u 和 v 开始的两条（唯一的）射线$u = u_0$， u_1，..... 和 $v = v_0$， v_1，.....而由 G_i 和 G_j 得到的。因此， I' 由 I_i 和 I_j 按如下方式得到。

- 如果 u 和 v 已经分别属于 I_i 和 I_j ，我们只需合并属于 I_i 和 I_j 的射线部分。
- 否则，如果 $u \notin I_i$，我们首先添加从 I_i 开始的射线的初始段，直到（包括） u_0。如果 $v \notin I_j$，我们同样修改 I_j 。然后，只需合并 u 和 v 即可（因为二者中至少有一个没有后继）。

对于情况 2，可能出现两种情形。如果 u和 v 到连接两条（唯一）从 u和 v出发的射线的顶点的距离相同，我们同样可以将它们合并，直到该顶点。如果

否则，我们知道会出现一个环，因此可以按照情况 3–5 处理。由此，对于所有情况，我们都能计算出添加该方程后得到的不变量。□

下文中，$<_{\text{lex}}$ 表示对偶的字典序，其定义与通常一样：$(x_1, y_1) <_{\text{lex}} (x_2, y_2) \iff x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 < y_2)$。

观察 3.9。设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{UF}_n^1$，其中 $\mathcal{A}$ 由 $\langle X_n \mid R\rangle$ 有限表示，且 $\mathcal{B}$ 由 $\langle X_n \mid S\rangle$ 有限表示，并且 $\approx_R \subsetneq \approx_S$，其中 $\approx_R, \approx_S$ 分别是由 R, S 生成的同余关系。那么，$(m(\mathcal{B})\ I(\mathcal{B})) <_{\text{lex}} (m(\mathcal{A})\ I(\mathcal{A}))$。

证明。不失一般性，假设 S 恰好包含一个额外的非平凡方程（即不能由 R 推出的方程）。由此，结论可通过归纳法得出。

假设 $I(\mathcal{A})$ 是由有限连通分支 $I_0, \ldots, I_k$ 构成的图的编码，其中每个分支都对应于 $G(\mathcal{A})$ 的一个（不一定有限的）连通分支 $G_0, \ldots, G_k$。再假设 $\mathcal{B}$ 的表示中的附加方程将 G_i 的一个顶点与 G_j 的一个顶点合并。同样，我们区分以下几种情况：

(1) $i \neq j$，G_i 和 G_j 都是无限的；(2) $i = j$，$G_i = G_j$ 是无限的；(3) $i \neq j$，G_i 和 G_j 都是有限的；(4) $i = j$，$G_i = G_j$ 是有限的；(5) $i \neq j$，G_i 是无限的，G_j 是有限的。

令 G' 为替代 $G(\mathcal{B})$ 中的 G_i 和 G_j 的连通分量。因此，在 $I(\mathcal{A})$ 中，G' 的不变量 I' 替代了 I_i 和 I_j。在情况 1 和 5 中，$m(\mathcal{B}) < m(\mathcal{A})$。情况 3 和 4 只涉及有限连通分支，因此，由于 G' 的顶点数将少于 G_i，G_j，I' 的顶点数也必然少于 I_i，I_j。因此，$m(\mathcal{B}) = m(\mathcal{A})$，且 $I(\mathcal{B}) < I(\mathcal{A})$。对于情况 2，注意到（如命题 3.8 的证明中所述），要么 I' 是通过合并至少两个顶点得到的，要么会出现一个环。如果前者成立，$m(\mathcal{B}) = m(\mathcal{A})$，且 $I(\mathcal{B}) < I(\mathcal{A})$。如果后者成立，$m(\mathcal{B}) < m(\mathcal{A})$。□

命题 3.10。$\cong_{\mathcal{UF}_n^1} \equiv_c E_{\min}(\omega \cdot n)$。

证明。“$\geq_c$”：为了定义一个从 $E_{\min}(\omega \cdot n)$ 到 $\cong_{\mathcal{UF}_n^1}$ 的归约 f，在每个阶段，我们计算当前 $E_{\min}(\omega \cdot n)$-实例的最小元素的秩 $\omega \cdot k + j$（其中 $k < n$），并将方程组置入

- $f^{j+1}(x_k) = f^j(x_k)$, and
- $f(x_i) = x_i$ for $i > k$

$\cong_{\mathcal{UF}_n^1}$-实例中。首先，注意如果出现了一个新的最小元素，相应的方程总是已经蕴含了对前一个最小元素进行编码的方程。因此，在任意阶段，$\cong_{\mathcal{UF}_n^1}$-实例的同构类型都由 $E_{\min}(\omega \cdot n)$-实例中对应于当前最小元素的方程决定。

其次，注意关联图的每个连通分量始终恰好包含一个生成元，因此始终会有 n 个连通分量。对于给定的 k 和 j，对应于生成元 $x_0, \ldots, x_{k-1}$ 的连通分量将是一条射线。对应于 x_k 的连通分量由一条长度为 j 的路径和末端一个大小为 1 的环组成。其他连通分量仅由一个大小为 1 的环组成。

任意两个 $E_{\min}(\omega \cdot n)$-实例都会在有限阶段稳定到其实际的最小元素。现在很容易看出，如果最小元素不同，因而秩也不同，那么相应的 $\cong_{\mathcal{UF}_n^1}$-实例将不同构（反之亦然：最小元素相同则同构）。因此，f 是一个归约。

“$\leq_c$”：我们再次分阶段构造归约。给定一个 $\cong_{\mathcal{UF}_n^1}$-实例 W_e，我们构造一个 $E_{\min}(\omega^2)$-实例 $W_{f(e)}$。在任意有限阶段，若 $\mathcal{A}$ 是 W_e 在该阶段给出的代数，则计算 $m(\mathcal{A})$ 和 $I(\mathcal{A})$，它们刻画了同构类型。然后，将秩为

$\omega \cdot m(\mathcal{A}) + I(\mathcal{A})$ 中的元素放入 $W_{f(e)}$。根据观察 3.9，$\omega \cdot m(\mathcal{A}) + I(\mathcal{A})$ 将是 $W_{f(e)}$ 在该阶段的最小元素。

对于任意 $\cong_{\mathcal{UF}^1_n}$-实例，在每个阶段，不变量 $(m(\mathcal{A}), I(\mathcal{A}))$ 都必须稳定下来，因为根据观察 3.9，它是包含于 ω^2 中的下降序列。当 $(m(\mathcal{A}), I(\mathcal{A}))$ 稳定下来时，同构类型以及 $W_{f(e)}$ 也会稳定下来。因此，对于任意两个 $\cong_{\mathcal{UF}^1_n}$-实例 W_e 和 W_i，通过考虑一个足够晚的阶段，使两者的同构类型都稳定下来，我们看到，$\cong_{\mathcal{UF}^1_n}$-实例同构，当且仅当 $\min(W_{f(e)}) = \min(W_{f(i)})$。根据命题 3.8，$f$ 的可计算性成立。因此，f 是一个可计算归约。□

推论3.11。$\cong_{\mathcal{UF}^1_n} <_c \cong_{\mathcal{UF}^1_{n+1}}$。

证明。由命题 3.10 和命题 2.24 可得。□

我们还证明了 $\cong_{\mathcal{UF}^1_{f.g.}}$ 可归约到 $E_{\min}(\omega^2)$。反向可约性在这里不成立，因为即使对于空集作为 $E_{\min}(\omega^2)$- 实例，我们也必须在 $\cong_{\mathcal{UF}^1_{f.g.}}$ - 实例中确定一定数量的生成元。与由 n 生成的情形不同，在这种情形下不存在可以通过取商得到任何其他代数的“顶元素”。

命题3.12。$\cong_{\mathcal{UF}^1_{f.g.}} <_c E_{\min}(\omega^2)$。

证明。“$\leq_c$”：证明与命题 3.10 中 $\leq_c$ 方向的证明相同。

“$\not\geq_c$”：假设存在一个从 $E_{\min}(\omega^2)$ 到 $\cong_{\mathcal{UF}^1_{f.g.}}$ 的可计算归约 f。我们在各个阶段构造 $E_{\min}(\omega^2)$ 的两个实例 W_e 和 W_i，使得它们无法被 f 正确映射为 $\cong_{\mathcal{UF}^1_{f.g.}}$-实例。根据递归定理，我们固定指标 e, i。

- 在阶段 0，W_e 和 W_i 都是空的。
- 然后，从第一种情况开始，在以下两种情况之间交替进行：– 此时，W_e 和 W_i 属于同一个 $E_{\text{最小}}(\omega^2)$-类。我们等待，直到看到 f 作用于 W_e 和 W_i 的像所表示的代数同构。我们可以通过计算（命题 3.8）并比较它们的不变量来判定这一点。一旦发生这种情况，即它们具有相同的不变量 m，I，我们就将秩为 $\omega \cdot m + I$ 的元素放入 W_e。如果这种情况始终没有发生，则 f 不是归约。观察 3.9（结合前面阶段的构造：W_i的最小元素若存在，必定来自某个前商的同构类型）保证此时 W_e 和 W_i 属于不同的 $E_{\text{最小}}(\omega^2)$-类。– 此时，W_e 和 W_i 属于不同的 $E_{\text{最小}}(\omega^2)$-类。我们等待，直到看到这些表示不同构（同样，这可以由命题 3.8 判定）。一旦发生这种情况，就将 W_e 当前的最小元素放入 W_i。如果这种情况始终没有发生，则 f 不是归约。

我们断言，不能无限次地在这两种情形之间交替。事实上，每次切换情形时，不变量（m，I）都会严格下降；但（m，I）必须最终稳定，因为它是一个包含在 ω^2 中的严格递减序列，这由观察 3.9 可知。因此，我们最终必定稳定在其中一种情形。在任一种情形下，我们都能进行对角化，因此 f 不可能是可计算归约。□

3.3. $\mathcal{AG}_n$。我们进一步证明，n-生成阿贝尔群的同构关系也属于 $E_{\min}(\omega \cdot n)$ 的度，而有限生成阿贝尔群的同构关系低于 $E_{\min}(\omega^2)$。这是由一些众所周知的结果推出的。

命题 3.13. $\cong_{\mathcal{AG}_n} \equiv_c E_{\min}(\omega \cdot n)$。

证明。“$\leq_c$”：根据有限生成阿贝尔群基本定理，$\mathcal{AG}_n$ 中的每个代数都有唯一的分解为 $\mathbb{Z}^i \oplus \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/k_m\mathbb{Z}$，其中 k_i 整除 k_{i+1}（因此其顺序也是唯一的）。

数值 i、k_1、.....、k_m 可以通过有限表示计算得出，例如根据表示中的方程计算史密斯标准形（参见 [New 97]）。

因此，我们可以通过在每个有限阶段根据有限表示计算出数值 i、k_1..... k_m，并将元素 $\omega \cdot i + \langle k_1 ... ... k_m \rangle$ 加入 $E_{\min}(\omega \cdot n)$ 实例，来构造我们的归约。请注意，只要 i 不变， k_1..... k_m 中的每一个都只能减小，因此，通过选择合适的元组编码，我们可以确保最后加入的元素是 $E_{\min}(\omega \cdot n)$ 实例的最小元素。由分解的唯一性可立即得出，这个归约是正确的（即它保留等价性和非等价性）。

“$\geq_c$”：我们可以用阿贝尔群 $\mathbb{Z}^i \oplus \mathbb{Z}/k!$ 来编码秩为 $\omega \cdot i + k$ 且满足 $i < n$ 的元素。容易验证，这些群都是可计算可枚举表示的。此外，如果秩降低，我们可以通过取商得到对其进行编码的阿贝尔群。□

与命题 3.12 类似，命题 3.13 证明中“$\leq_c$”方向的论证对有限多个生成元也成立，而另一个方向则可以通过对角化来处理（此处使用命题 3.13 中的不变量）。因此我们得到以下结果。

命题 3.14. $\cong_{\mathcal{AG}_{f.g.}} <_c E_{\min}(\omega^2)$

然而请注意，由于对于 $\mathcal{UF}^1_{f.g.}$ 和 $\mathcal{AG}_{f.g.}$，我们都有与小于 ω^2的序数相对应的不变量，因此至少可以证明它们是等价的。

命题 3.15. $\cong_{\mathcal{AG}_{f.g.}} \equiv_c \cong_{\mathcal{UF}^1_{f.g.}}$

证明。“$\leq_c$”：在每个阶段，按照命题 3.13 的“$\leq_c$”方向所述，计算 $\cong_{\mathcal{AG}_{f.g.}}$ 实例的不变量数值 $i, k_1, ..., k_m$。按照命题 3.10 的 “$\geq_c$” 方向所述，构造 $\cong_{\mathcal{UF}^1_{f.g.}}$ 实例。

“$\geq_c$”：在每个阶段，按照命题 3.10 的“$\leq_c$”方向所述，计算 $\cong_{\mathcal{UF}^1_{f.g.}}$ 实例的不变量数 m、I、F。按照命题 3.13 的“$\geq_c$”方向构造 $\cong_{\mathcal{AG}_{f.g.}}$ 实例。□

4. Below $=^{ce}$ and ACC

本节进一步研究 $=^{ce}$ 以下的等价关系。在这里，我们关注同余格中的升链条件（ACC）所带来的后果；升链条件是某些代数类的一种结构性质。这也使我们能够推导出一般性结果，作为系统描绘 $=^{ce}$ 以下等价关系的一步。

不过，在探讨与升链条件的联系之前，本节首先为簇中可计算枚举结构上的同构关系给出一个下界。

命题 4.1。 在可计算可约性下，存在一个最小的非平凡（即具有多于一个等价类）同构关系，即无函数符号的2生成集上的同构关系。

证明。 在没有函数符号（包括常元）的情况下，代数就是一个没有结构的集合，而项代数只包含生成元。称这个簇为 $\mathcal{S}$。如果令 x_0, x_1 为两个生成元，那么 $\mathcal{S}_2$ 恰好包含两个代数（在同构意义下），即 $\{x_0\}$ 和 $\{x_0, x_1\}$。我们论证，相应的同构关系可计算地归约到任何其他非平凡的同构关系，例如 $\mathcal{C} \in \{\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_{f.g.}\}$，其中 V 是一个簇。给定一个 $\mathcal{S}_2$ 实例 e，只要 $x_0 = x_1$ 尚未进入 W_e，我们就将 $W_{f(e)}$ 定义为空集（平凡同余关系）。一旦 $x_0 = x_1$ 进入 W_e，我们就将 $W_{f(e)}$ 定义为 ω（全同余关系），也就是说，开始将每个$n \in \omega$ 枚举进 $W_{f(e)}$。显然，在非平凡的同构关系中， $\emptyset$ 和 ω 必须属于不同的等价类。□

注意，这个等价关系不是可计算枚举的。因此，由于有限表示上的同构关系至多是可计算枚举的（观察 2.10），它们绝不可能与任何可计算可枚举代数上的同构关系可计算等价，除非它们处于平凡度。

4.1. 升链条件与同态开性。 这里，我们给出同余格满足升链条件的正式定义。代数的同余格是该代数所有同余关系按包含关系排序所构成的格。

定义 4.2。 偏序集 $(P, \trianglelefteq)$（即 $\leq$ 是定义在 P上的自反、反对称且传递的二元关系）满足升链条件（*ACC*），如果对每个升序列

$$p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots$$

元素 $p_i \in P$，都存在一个 $n \in \omega$ s.t.

$$p_n = p_{n+1} = p_{n+2} = \dots$$

如果一个代数的同余格满足升链条件，我们就说该代数满足升链条件。如果一个代数类中的所有代数都满足升链条件，我们就说该类满足升链条件。

注意，对于一个簇 $\mathcal{V}$，类 $\mathcal{V}_n$ 满足升链条件，当且仅当 $\mathcal{V}[\emptyset]$ （以 n 个生成元生成的自由代数）满足升链条件；并且 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 满足升链条件，当且仅当对每个 $n \geq 1$， $\mathcal{V}_{f.g.}[n, \emptyset]$ 都满足升链条件。此外，如果 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 满足升链条件，那么对每个 $n \geq 1$， $\mathcal{V}_n$ 也满足升链条件。

此外，我们立即得到以下非常简单但重要的引理。

引理 4.3. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，且 $\mathcal{C} \in \{\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_{f.g.}\}$ 满足升链条件。那么，对于每个 e，都存在方程枚举的某个阶段 s，此时同构类型稳定，即

$$\mathcal{C}[W_{e,s}] \cong \mathcal{C}[W_{e,s+1}] \cong \mathcal{C}[W_{e,s+2}] \cong \dots$$

证明。 同构类型若发生无穷多次变化，就需要同余关系发生无穷多次变化，这与升链条件矛盾。□

定义 4.4. 如果一个代数类包含两个代数 $\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$，使得 $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$、 $\mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$，但 $\mathcal{A} \ncong \mathcal{B}$，那么它就是同态开的。

因此，同态开意味着包含两个互为同态像（即商）的代数，但它们并不同构。请注意，这一性质与非霍普夫性有关——如果一个代数 $\mathcal{A}$ 不同构于它的任何真商，我们就称它为霍普夫代数。下面，我们汇总一些重要观察，说明前面提到的这些性质之间的联系。

观察 4.5 (众所周知**)。** 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，且设 $\mathcal{C} \in \{\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_{f.g.}\}$。那么，

(1) $\mathcal{C}$ 满足升链条件 $\iff$ 中的每个代数都有有限表示，(2) $\mathcal{C}$ 满足升链条件 $\implies$ 中的每个代数都是霍普夫的，(3) $\mathcal{C}$ 中的每个代数都是霍普夫的 $\implies$ $\mathcal{C}$ 不是同态开的。

证明。 (1) 对于 $\implies$ 方向，假设满足升链条件，并取任意代数 $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$，再固定 $\mathcal{A}$的一个表示。设 R 是该表示中的方程集。定义

- $R_0 := \emptyset$
- 如果 R 中有一个方程尚未由 R_i推出，则定义 $R_{i+1} := R_i \cup \{s \approx t\}$。否则，结束构造。

如果构造永不停止，那么由 R_i、 $i \geq 0$ 生成的同余将严格递增，这与升链条件矛盾。因此，存在某个有限集 R_i 的方程，它已经蕴含了 R中的所有方程。这证明了 $\mathcal{A}$存在有限表示。

对于 $\impliedby$ 方向，取任意一条无限同余链，并注意到它们的并必定具有有限表示。但这条链中必有一个同余包含这个有限表示，因此该链最终稳定。

(2) 假设存在一个非霍普夫代数 $\mathcal{A}$，即存在一个非单射同态映射作为 $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ 的见证。对这个同态映射反复迭代，我们得到一个序列

$$\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A} \twoheadrightarrow \dots$$

其中每个满射都是真满射。由引理 2.8 可知，这会产生一个无限升链的同余，这与升链条件矛盾。

(3) 令 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}$ 为见证，表明 $\mathcal{C}$ 是同态开。那么 $\mathcal{A}$ 通过 $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ 映到自身的一个非平凡同态像，因此不是霍普夫的。

□

特别地，若 $\mathcal{A}$ 是具有升链条件的簇 $\mathcal{C}$ 中的代数，那么 $\mathcal{A}$ 的任何真商都不同构于 $\mathcal{A}$。在后续章节中，我们将使用这一事实而不再明确提及。

4.2. 具有升链条件的类的例子。 现在我们来考察一些具有升链条件的具体类。首先考虑簇 $\mathcal{CS}$ 和 $\mathcal{CM}$（交换半群和交换幺半群）。在这些簇中，每个有限生成代数都有有限表示 [R´ed65]，而观察 4.5 表明，这等价于具有升链条件。从命题 3.10 和命题 3.13 的证明中，可以很容易地得出，$\mathcal{UF}^1$ 和 $\mathcal{AG}$ 的有限生成代数类也具有升链条件。

因此，对于 $\mathcal{V} \in \{\mathcal{UF}^1, \mathcal{AG}, \mathcal{CS}, \mathcal{CM}\}$，我们有 $\mathcal{V}_n$，$\mathcal{V}_{f.g.}$ 作为满足升链条件的类的例子。让我们看看它们彼此之间的比较关系。我们将证明，$\cong_{\mathcal{CS}_2}$（因而 $\cong_{\mathcal{CM}_2}$ 也）已经高于$E_{\min}(\omega^2)$，进而高于任何 $\cong_{\mathcal{UF}^1_n}$ 和 $\cong_{\mathcal{AG}_n}$。

命题 4.6. $E_{\min}(\omega^2) \leq_c \cong_{\mathcal{CS}_2}$。

证明。我们通过构造一个 $\cong_{\mathcal{CS}_2}$-实例 $W_{f(e)}$（带有生成元来建立可计算归约 f x_0、x_1）从一个 $E_{\min}(\omega^2)$-实例 W_e 出发，按以下阶段构造：

- 只要 W_e 仍为空，就让$W_{f(e)}$ 也保持为空。
- 若有一个元素进入 W_e，使得此时最小元素的秩为 $\omega \cdot i + j$，我们就进行如下操作：– 将 $x_0^j x_1^i = x_0^{j+1} x_1^i$ 放入$W_{f(e)}$，以编码当前情形。– 我们要确保先前阶段的信息不会残留下来。因此，对于 $k > i$，我们还要添加$x_0 x_1^k = x_0^2 x_1^k$。

还需验证这确实是一个归约，也就是说：

$$e \; E_{\min}(\omega^2) \; i \iff \mathcal{CS}_2[f(e)] \cong \mathcal{CS}_2[f(i)].$$

“$\Longrightarrow$”：注意，对于任意一个 $E_{\min}(\omega^2)$-实例，都存在一个阶段，使其稳定到秩为 $\omega \cdot i + j$的实际最小元素。两个等价的 $E_{\min}(\omega^2)$-实例具有相同的最小元素，即相同的 i，j，因此，在二者都稳定之后，会将“编码方程”$x_0^{j+1} x_1^i = x_0^{j+2} x_1^i$ 和针对 $k > i$ 的“删除方程” $x_0 x_1^k = x_0^2 x_1^k$ 加入它们在 f 下的像中（即 $\cong_{\mathcal{CS}_2}$-实例）。现在，容易验证，由于同余关系与函数应用相容，这两个方程总能推出先前阶段添加的每一个方程。因此，这两个 $\cong_{\mathcal{CS}_2}$-实例具有相同的同余关系，因而同构。

“$\Longleftarrow$”：假设两个 $E_{\min}(\omega^2)$-实例 S_1，S_2 并不等价。因此，在稳定化之后，S_1 中秩为 $m_1 := \omega \cdot i_1 + j_1$ 的最小元素与 S_2 中秩为 $m_2 := \omega \cdot i_2 + j_2$的最小元素不同。不妨设 $m_1 < m_2$。令 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$ 分别为 S_1 和 S_2 在 f 下的像所对应的表示。直接检验可知，按照我们的构造，加入到 $\mathcal{A}_1$ 中的最后两个方程（“编码方程”和“删除方程”）蕴含加入到 $\mathcal{A}_2$ 中的任意方程。因此，$\mathcal{A}_1$ 是 $\mathcal{A}_2$ 的商。此外，它还是真商，因为进入 $\mathcal{A}_1$ 的最后一个编码方程不可能是 $\mathcal{A}_2$ 中其他方程的推论。由于满足升链条件，取真商必然会改变同构类型，因此 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 在两种情况下都不同构。□

同样的思路也适用于一个推广版本。

定理 4.7. $E_{\min}(\omega^n) \leq_c \cong_{\mathcal{CS}_n}$，对于 $n \geq 2$。

证明。可计算可枚举集 We 将先前的证明推广，以编码 n系数。我们使用方程 $x_0^{c_0}x_1^{c_1}...x_{n-1}^{c_{n-1}} = x_0^{c_0+1}x_1^{c_1}...x_{n-1}^{c_{n-1}}$来编码 $\omega^{n-1}c_{n-1} + ... + \omega c_1 + c_0$ 是最小元素的秩。为了抹去先前阶段的信息，我们添加方程 $x_0x_1^{k_1}...x_{n-1}^{k_{n-1}} = x_0^2x_1^{k_1}...x_{n-1}^{k_{n-1}}$，对所有满足 $\omega^{n-1}k_{n-1} + ... + \omega k_1 > \omega^{n-1}c_{n-1} + ... + \omega c_1$ 的k_1, ..., k_{n-1}均如此。验证这确实是一个归约的过程与之前类似。□

接下来，我们证明 $E_{\min}(\omega^n)$ 是最优的，也就是说， $E_{\min}(\omega^n + 1)$ 不能归约到 $\cong_{\mathcal{CM}_n}$，因此也不能归约到 $\cong_{\mathcal{CS}_n}$。这需要做一些准备工作。

以下设 $\mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。 $\mathbb{N}_\infty$ 上的自然序在 $\mathbb{N}_\infty$ 中元素构成的 n 元组上诱导出偏序 $\leq$。对于一个 $v \in \mathbb{N}_\infty^n$ 和一个集合 $S \subseteq \mathbb{N}^n$，如果对所有 $w \in S$ 都有 $v \not\geq w$，我们就称 v 优于 S。

令 $F_n = \{x_0^{\epsilon_0}...x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}\}$ 为自由交换幺半群，其中我们将 $x_0^{\epsilon_0}...x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}$ 视为每个元素的标准代表，并令 $\leq_{\text{lex}}$ 为 F_n 上自然的字典序（良序）。对于 $i < n$，我们定义映射 $\pi_i \colon F_n \to \omega$，其定义为 $\pi_i(x_0^{\epsilon_0}...x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}) = \epsilon_i$。

我们首先为 $\mathcal{A} = \langle X_n \mid W \rangle$ 中的每个非平凡（即 $\mathcal{A} \ncong F_n$）表示给出一个（部分）不变量。令 $\varphi \colon F_n \to \mathcal{A}$ 为自然投影映射，并定义

$$S(\mathcal{A}) := \{(\epsilon_0, ..., \epsilon_{n-1}) \in \mathbb{N}^n \mid (x_0^{\epsilon_0}...x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}) >_{\text{lex}} \min(\varphi^{-1}(x_0^{\epsilon_0}...x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}))\}.$$

注意，由于 $\mathcal{A}$ 非平凡， $S(\mathcal{A})$非空。直观地说，我们用每个等价类中最小的元素来表示该等价类，因此 $S(\mathcal{A})$是那些不再表示 $\mathcal{A}$中任何元素的词（的指数）的集合。

容易看出， $S(\mathcal{A})$所表示的词在乘以任意生成元x_i, $i < n$后仍属于该集合。也就是说，如果$(\epsilon_0, ..., \epsilon_{n-1}) \in S(\mathcal{A})$，那么对任意 $i < n$，$(\epsilon_0, ..., \epsilon_i + 1, ..., \epsilon_{n-1})$也属于 $S(\mathcal{A})$。等价地，我们可以说 $S(\mathcal{A})$在自然偏序下向上闭。

现在，对于每个集合 $M \subseteq \mathbb{N}^n$，我们都可以定义一个不变量 $\gamma(M) := \omega^{n-1}a_{n-1} + ... + \omega a_1 + a_0$，如下所示:

$$\begin{aligned} A_i := \{&x \in \mathbb{N}_\infty^n \mid x = (x_0, ..., x_{n-1}) \text{ has } i\text{-many } \infty,\ x \text{ beats } M,\\ &\text{and no } x' := (x'_0, ..., x'_{n-1}) \neq x \text{ with } x'_j = x_j \text{ or } x'_j = \infty \text{ for } j < n \text{ beats } M\}\\ a_i &:= |A_i|. \end{aligned}$$

由此，我们可以为非平凡表示 $\mathcal{A}$ 定义不变量 $\gamma(\mathcal{A})$，其定义为 $\gamma(\mathcal{A}) := \gamma(S(\mathcal{A}))$。图2展示了一个二生成表示的不变量示例。

要使这个定义对我们有用，必须确保系数是自然数。因此，相应的集合必须是有限的。

观察 4.8. 在上述对 $\gamma(M)$的定义中，对于所有 $i < n$， A_i 都是有限的。

证明。反设 A_i 是无限的。根据链反链原理， A_i 必定包含无限反链或无限链。根据狄克森引理，可以排除前一种情况（容易看出，狄克森引理对 $\mathbb{N}_\infty^n$也成立）。对于后一种情况，取链中的一个元素 $x = (x_0, ..., x_{n-1})$，使得对于所有 $i < n$，要么 x_i在链的坐标 i上是极大的，要么链在坐标 i上不存在极大元素。现在考虑这条无限链的上确界$x' = (x'_0, ..., x'_{n-1})$。注意到 $x' \neq x$，并且对于所有$i < n$， $x'_j = x_j$或 $x'_j = \infty$。此外，容易验证 x' 也大于 M，这与 x 属于 A_i矛盾。□

观察 4.9。如果 $M \supseteq N$，那么 $\gamma(M) \leq \gamma(N)$。此外，如果 M、N在自然偏序下向上闭，那么 $M \supset N$蕴含 $\gamma(M) < \gamma(N)$。

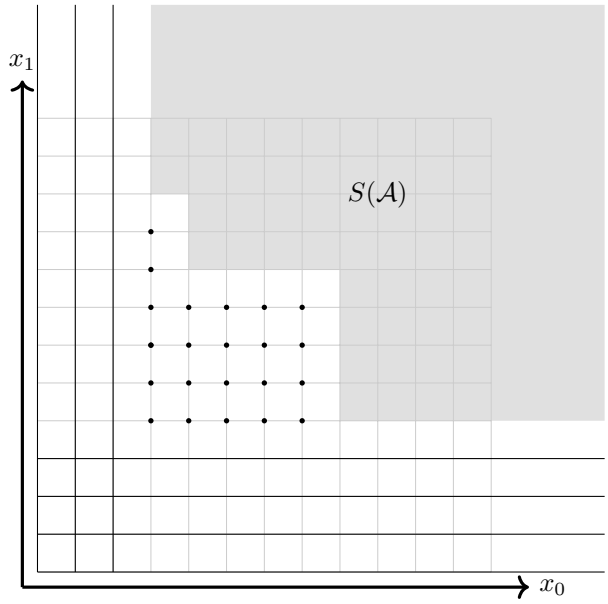

FIGURE 2. 对于某个二生成表示 $\mathcal{A}$的$\mathcal{A}(S)$，不变量的计算方式示意图。点表示 A_0 中的元素，线表示 A_1中的元素。根据它们的基数，我们得到 $\gamma(A) = \omega \cdot 7 + 22$。

证明。假设 $M \supseteq N$。对于 $i < n$，设 A_i 是计算 $\gamma(M) = \omega^{n-1}a_{n-1} + ... + a_0$ 所依据的集合，并设 B_i 是计算 $\gamma(N) = \omega^{n-1}b_{n-1} + ... + b_0$ 所依据的集合。我们断言，对于每个 $i < n$，以及 $A_i \setminus B_i$ 中的每个元素，都存在 $B_j \setminus A_j$ 中的一个元素，使得 $j > i$。特别地，我们有 $A_{n-1} \subseteq B_{n-1}$。这意味着，对于满足 $A_k \neq B_k$ 的最大 k，必有 $A_k \subsetneq B_k$。此外，容易验证，在假设 M，N 向上闭且 $M \supset N$ 的情况下，这样一个满足 $A_k \neq B_k$ 的 k 必定存在。

为证明该断言，令 $i < n$，并令 $z \in A_i \setminus B_i$。注意，由于 z 击败了 M，它也必定击败 N。因此，要使 z不属于 B_i，就必须存在一个 $z' = (z'_0, ..., z'_{n-1}) \neq z$，满足 $z'_k = z_k$或 $z'_k = \infty$，对于$k < n$ 而言，它击败了 N。选取这样一个 z'，使其值为 ∞的坐标数 j 最大。容易验证，这个 z' 属于 B_j。然而，z' 并未击败 M（否则 z 就不会属于 A_i），因此 $z' \in B_j \setminus A_j$。□

总之，γ 是 $\mathcal{CM}_n$中非平凡表示的严格递减 ω^n 不变量。不过要注意，对于同一同构结构的两个表示，γ 可能不同（例如例 2.25 中的表示）。此外，容易看出，两个不同的表示可能具有相同的 γ，因此，即使对于表示而言，它也不是完全不变量。

接下来，我们观察到，可以“从上方”可计算地逼近 γ。

观察 4.10。存在一个可计算函数，给定非平凡表示 $\mathcal{A} = \langle X_n \mid W_e \rangle$ 和 $s \in \omega$，输出一个 $\gamma_s(\mathcal{A})$，使得

(1) $\gamma(\mathcal{A}) \leq \gamma_s(\mathcal{A})$ 对所有 $s \in \omega$，(2) $\gamma_t(\mathcal{A}) \leq \gamma_s(\mathcal{A})$ 对所有 $t \geq s$，(3) 存在一个阶段 s，使得 $\gamma_t(\mathcal{A}) = \gamma(\mathcal{A})$ 对所有 $t \geq s$。

证明。 注意，给定一个表示 $\mathcal{A}$，可以从所生成同余关系的一个枚举中可计算地枚举出 $S(\mathcal{A})$。我们用 $S(\mathcal{A})_s$ 表示截至阶段 s枚举出的 $S(\mathcal{A})$。由于我们只考虑非平凡表示，不妨假设 $S(\mathcal{A})_s$ 非空。

给定表示 $\mathcal{A}$ 和 $s \in \omega$，我们定义 $\gamma_s(\mathcal{A}) := \gamma(S(\mathcal{A})_s)$。我们声称可以计算$\gamma_s$。令 $z = (z_0, ..., z_{n-1})$ 为有限集 $S(\mathcal{A})_s$ 中所有元素的逐坐标最大值。设 A_i, $i < n$ 如不变量的定义所述，即决定不变量系数的集合。根据观察 4.8，这些都是有限集。它们的基数就是 γ_s 的系数，因此只需证明我们可以计算所有 $i < n$ 对应的 A_i。我们通过归纳法完成这一点，假设已经计算出满足 $j > i$ 的 A_j。为计算 A_i，遍历所有具有 i 个无穷坐标的 n 元组 $x = (x_0, ..., x_{n-1})$，并要求所有非无穷坐标 k 均满足 $x_k \leq z_k$。如果某个 x 满足 A_i 的定义要求，就选取它（这需要先计算所有 $j > i$ 对应的 A_j）。首先，很容易看出搜索空间是有限的，因此计算会终止。其次，搜索空间之外的任何元组都不可能属于 A_i：如果某个 $x = (x_0, ..., x_{n-1}) \in A_i$ 满足 $x_k > z_k$，那么 $(x_0, ..., x_{k-1}, \infty, x_{k+1}, ..., x_{n-1})$ 仍会胜过 $S(\mathcal{A})_s$，这就产生了矛盾。

条件 1. 和 2. 由观察 4.9 得出。为验证条件 3.，注意到由于$S(\mathcal{A})$ 在自然偏序下向上闭，因此它由其极小元素“生成”。根据狄克森引理，极小元素只能有有限多个，因此存在一个阶段 s，届时它们已全部被枚举。由于容易看出，任意元组集合与其向上闭包具有相同的不变量，$\gamma_s(\mathcal{A}) = \gamma(\mathcal{A})$。□

定理 4.11. $E_{\min}(\omega^n + 1) \not\leq_c \cong_{\mathcal{CM}_n}$。

证明。 现在假设 f 是从 $E_{\min}(\omega^n + 1)$ 到 $\cong_{\mathcal{CM}_n}$ 的一个可计算归约。根据递归定理，固定两个由我们控制的指标 e 和 i。我们考虑以下用于枚举 $E_{\min}(\omega^n + 1)$ 的实例 W_e 和 W_i 的算法：

- 阶段 0. 我们从空的 W_e 和 $W_i = \{\omega^n\}$ 开始。我们等待，直到 $W_{f(e)}$ 或 $W_{f(i)}$ 中至少一个非空。令 s_0 为枚举 $W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 中出现这种情况的阶段。然后我们构造 $W_e = W_i = \{\omega^n\}$ 并进入下一阶段。

- 阶段 $2\ell - 1$。我们等待，直到看到（在阶段 $s_{2\ell-2}$之后）$W_{f(e)}$ 与 $W_{f(i)}$ 是 $\cong_{\mathcal{CM}_n}$-等价的。根据定理 2.26，我们可以判定这一点。令 $s_{2\ell-1}$ 为在$W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 的枚举中这一情况发生的阶段。遍历 $t \geq 0$，我们根据观察 4.10 计算近似值$\gamma_t(\langle X_n \mid W_{f(i)\ s_{2\ell-1}} \rangle)$，并将其放入 W_i。一旦 W_i 的最小元素发生变化，我们就停止并进入下一阶段。
- 阶段 2ℓ。我们等待，直到看到（在阶段 $s_{2\ell-1}$之后）$W_{f(e)}$ 与 $W_{f(i)}$ 是 $\cong_{\mathcal{CM}_n}$-非等价的。同样，这一点是可判定的。令 $s_{2\ell}$ 为在 $W_{f(e)}$ 和$W_{f(i)}$ 的枚举中这一情况发生的阶段。然后，我们将 W_i 中的所有内容复制到 W_e，并进入下一阶段。

我们的构造确保在偶阶段开始时，$W_e \subsetneq W_i$ 和它们不$E_{\min}(\omega^n + 1)$-等价，但 $W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 是 $\cong_{\mathcal{CM}_n}$-等价的；而在奇阶段开始时，$W_e = W_i$ 和，特别是，是 $E_{\min}(\omega^n + 1)$-等价的，但 $W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 不 $\cong_{\mathcal{CM}_n}$-等价。我们进一步声称，在奇阶段，如果我们看到 $W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 变得 $\cong_{\mathcal{CM}_n}$-等价，那么构造最终总会降低 W_i 的最小元素，从而进入下一阶段。

事实上，在 $W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 的枚举的每个 $s_{2\ell+1}$ 阶段，对于 $\ell > 0$，我们都会考察自阶段 $s_{2\ell-1}$ 以来$W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 如何变化。它们在阶段 $s_{2\ell-1}$ 是$\cong_{\mathcal{CM}_n}$-等价的，但在阶段 $s_{2\ell}$ 变得不等价。因此，必定有某个新的（即并非由先前的恒等式推出的）恒等式进入这两个集合中的一个。然而，在阶段 $s_{2\ell+1}$，$W_{f(i)}$ 和 $W_{f(e)}$ 又重新等价了；但根据升链条件和非霍普夫性，我们不可能让其中一个的 $\cong_{\mathcal{CM}_n}$-类不发生变化。因此，它们都必定枚举出了某个新的恒等式。特别地，这意味着 $\langle X_n \mid W_{f(i),\ s_{2\ell+1}} \rangle$ 必定

是 $\langle X_n \mid W_{f(i),\ s_{2\ell-1}}\rangle$ 的真商。因此，根据观察 4.9，

$$\gamma(\langle X_n \mid W_{f(i),s_{2\ell+1}}\rangle) < \gamma(\langle X_n \mid W_{f(i),s_{2\ell-1}}\rangle).$$

在奇数阶段 $2\ell+1$ 开始时，W_i 的最小元素是在阶段 $2\ell-1$ 加入的。它是一个近似值 $\gamma_u(\langle X_n \mid W_{f(i),\ s_{2\ell-1}}\rangle)$，其中 $u>0$；因此，根据观察 4.10，它大于或等于 $\gamma(\langle X_n \mid W_{f(i),\ s_{2\ell-1}}\rangle)$。所以，再根据观察 4.10，必定存在一个 t，使得 $\gamma_t(\langle X_n \mid W_{f(i),\ s_{2\ell+1}}\rangle)$ 严格小于该最小元素。这就证明了该断言。

但现在，根据升链条件，$W_{f(i)}$ 和 $W_{f(e)}$ 最终必定会停止改变 $\cong_{\mathcal{CM}_n}$-类；因此，我们会在有限阶段停下。无论在奇数阶段还是偶数阶段，我们都实现了对角化，所以 f 不可能是一个归约。□

推论 4.12. $E_{\min}(\omega^\omega) \not\leq_c \cong_{\mathcal{CM}_{f.g.}}$.

证明。我们通过对一个从 $E_{\min}(\omega^\omega)$ 到 $\cong_{\mathcal{CM}_{f.g.}}$ 的可计算归约 f 进行对角化。再次固定两个指标 e 和 i。令 $\langle k,j\rangle$（这是 $\langle X_k \mid W_j\rangle_{\mathcal{CM}}$ 的编码）为 i 在 f 下的像。进行相同的构造，只是在阶段 0 将 ω^k 放入 W_i（之后再放入 W_e）。□

因此，我们得到的图景与第 3.2 节和第 3.3 节中 ω^2 下文所述的结果相似。只是我们无法证明同构关系可归约到 $E_{\min}$ 关系。困难在于，对于交换半群，我们不知道任何适用于同构类型的（完备）不变量。特别是，已知的证明表明，它们的同构问题（即有限表示的情形）是可判定的（见定理 2.26），但该证明不是一致的；也就是说，问题的实例（一对表示）是作为一个整体归约到另一个（可判定的）问题的，并且目前没有已知的归约能够一致地映射表示。因此，即使对下面这个看似无害的问题给出肯定回答，也可能需要更深入地理解交换半群的同构问题。

问题 4.13. 是否存在一个可计算序数 α，使得 $E_{\min}(\alpha)$ 高于 $\cong_{\mathcal{CS}_n}$，对于 $n\geq 2$ (或高于$\cong_{\mathcal{CS}_{f.g.}}$)?

4.3. **升链条件的推论**。在第4节的其余部分，我们将展示一些关于低于 $=^{ce}$的同构关系的一般结果。事实证明，升链条件有许多推论，其中最重要的是低于 $=^{ce}$（见定理 4.20）。这些一般结果也让我们的示例簇 $\mathcal{AG}$、$\mathcal{UF}^1$、$\mathcal{CS}$、$\mathcal{CM}$ 的图景更加完整（见图 3）。

首先，我们推广一个关于 $\mathcal{UF}^1$ 和 $\mathcal{AG}$的结果，即命题3.12和命题 3.14中 $\not\geq_c$方向的结论。回顾一下，IP($\mathcal{V}$)表示 $\mathcal{V}$中有限表示的代数的同构问题。

定理4.14. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，使得 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 满足升链条件，且IP($\mathcal{V}$) 是可判定的。设$(\alpha_n)_{n\geq 1}$ 为一个序数序列，使得对所有 $n\geq 1$，$\cong_{\mathcal{V}_n} \leq_c E_{\min}(\alpha_n)$。那么 $E_{\min}(\lambda) \not\leq_c \cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$，其中 λ 是$(\alpha_n)_{n\geq 1}$的上确界。

证明。假设存在一个可计算归约 f 从 $E_{\min}(\lambda)$ 到 $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$。在各个阶段中，我们构造 W_i 和 W_j 的两个实例 $E_{\min}(\lambda)$，使其无法被 f正确映射到 $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$-实例。根据递归定理，我们固定指标 i,j。它们分别经由 f 映射到表示$\langle X_{k_i} \mid W_{e_i}\rangle$ 和 $\langle X_{k_j} \mid W_{e_j}\rangle$。非一致地固定 $k>k_i$，并令 g 为见证 $\cong_{\mathcal{V}_k} \leq_c E_{\min}(\lambda)$ 的归约。根据观察 2.20，不失一般性地，我们可以假设 g 在可计算可枚举集上是良定义的。此外，令 h 为一个函数，它将一个由 k_i生成元生成的有限表示转换为一个由k生成元生成的表示，即对于任意指标 e，

$$\langle X_{k_i} \mid W_e\rangle \cong \langle X_k \mid W_{h(e)}\rangle.$$

注意到 h 是可计算的：在由 k生成元生成的表示中，可以将额外的生成元 $x_{k-1}, ..., x_{k_i}$与 x_0 合并，从而去除它们。

现在，构造 W_i， W_j:

- 我们从 W_i 和 W_j 都为空开始。
- 阶段 2ℓ。在此阶段， W_i 和 W_j 属于同一个 E最小(λ)-类。我们等待某个阶段$s_{2\ell}$ ，该阶段在 $s_{2\ell-1}$ 之后（如果 $\ell > 0$），使得$\langle X_{k_i} \mid W_{e_i,\ s_{2\ell}}\rangle$ 和$\langle X_{k_j} \mid W_{e_j,\ s_{2\ell}}\rangle$ 同构。根据我们关于 IP($\mathcal{V}$) 可判定的假设，我们可以判定这一点。而这最终必然会发生，因为我们假设 f 是一个归约，并且由于升链条件，同构类型必须在某个有限阶段稳定下来（引理 4.3）。因此，一旦找到这个阶段，就开始将所有属于 $W_{g\circ h\ (e)}$ 的元素枚举进W_i ，其中 e 是$W_{e_i,\ s_{2\ell}}$的一个指标。我们声称，这使得 W_i 和W_j 不再是非-E最小(λ)-等价的。
- 阶段 $2\ell+1$。在此阶段， W_i和 W_j属于不同的 $E_{\min}$(λ)-类。我们等待，直到发现这两个表示不同构（根据我们关于 IP($\mathcal{V}$) 可判定的假设，这一点仍然是可判定的）。我们称此为阶段 $s_{2\ell+1}$。一旦发生这种情况（如果始终没有发生，则 f不是一个归约），就开始将 $W_{g\circ h(e)}$中的所有元素枚举到 W_j 中，其中 e 是 $W_{e_i,s_{2\ell}}$的一个指标。我们声称，这使得 W_i 和W_j $E_{\min}$(λ)-等价。

但是，根据引理 4.3，这两个表示的同构类型最终必定稳定下来，稳定在偶阶段或奇阶段。在这两种情况下，我们都能得到对角化，因为 f 没有正确地将 W_i 映射到 W_j。

剩下唯一要证明的是：在偶阶段之后， W_i 和 W_j 不是 $E_{\min}$(λ)-等价的；在奇阶段之后，它们是 $E_{\min}$(λ)-等价的。我们通过归纳法证明这一点。

- 对于阶段 0，即 W_j 仍为空时，请注意，我们选择的 k 严格大于 k_i。因此，表示 $\langle k \mid h(W_i)\rangle$ 必定是 $\langle k \mid \emptyset\rangle$的一个不同构商。因此，根据 g的单调性（引理 2.16）， W_i 将不再被枚举到空集。

- 对于任意偶数阶段 2ℓ， $\ell > 0$，首先注意，由于 h 保持同构类型，且归约 g 在可计算可枚举集上良定义，因此是单调的（引理 2.16），我们知道，对于递增的阶段 s， $g \circ h$ 对 $\langle X_{k_i} \mid W_{e_i,\ s}\rangle$的映像，其最小元素将递减；若同构类型发生变化，则严格递减。根据归纳假设，我们的断言对 2ℓ之前的所有阶段都成立。因此，我们的构造在阶段 2ℓ 之前有效，并确保在阶段 $s_{2(\ell-1)}$ 与 $s_{2\ell}$之间，表示（ W_i、 W_j 在f下的映像）先变为不同构，随后又变为同构。由于升链条件蕴含非霍普夫性（观察 4.5），因此，$\langle X_{k_i} \mid W_{e_i,\ s_{2(\ell-1)}}\rangle \ncong \langle X_{k_i} \mid W_{e_i,\ s_{2\ell}}\rangle$。现在，在阶段 2ℓ之后， W_i 被枚举到后者在 $g\circ h$下的映像，而 W_j仍被枚举到前者在 $g \circ h$ 下的映像。因此，它们并非 $E_{\min}$(λ)-等价。
- 对于任意奇数阶段 $2\ell + 1$，只需注意二者都被枚举到$g \circ h$ 在$W_{e_i,s_{2\ell}}$之下的像中。

在该断言的证明中，为了便于阅读，我们忽略了这样一个事实： W_i, W_j 也可能包含在先前阶段枚举的元素。但是，正如该断言的证明中所指出的，对于递增的阶段 s，$\langle X_{k_i} \mid W_{e_i,s}\rangle$ 在 $g \circ h$ 之下的像的最小元素会递减。因此，先前阶段的元素无关紧要。

这就完成了该定理的证明。 □

我们已经从命题 3.10 和命题 3.13 得知，对于 $n \geq 1$， $\cong_{\mathcal{UF}^1_n}$ 和 $\cong_{\mathcal{AG}_n}$ 在 c-可约性下都构成严格递增序列。现在我们证明，对于其有限生成类满足升链条件且具有可判定的同构问题的任意簇，这一结论都成立（特别地， $\mathcal{CS}$ 和 $\mathcal{CM}$ 也如此）。

Theo注 4.15. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，使得 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 满足升链条件，且 IP($\mathcal{V}$)可判定。那么 $\cong_{\mathcal{V}_n} <_c \cong_{\mathcal{V}_{n+1}}$。

证明。 假设存在一个从 $\cong_{\mathcal{V}_{n+1}}$ 到 $\cong_{\mathcal{V}_n}$的可计算归约 f 。我们分阶段构造 $\cong_{\mathcal{V}_{n+1}}$ 的两个实例 W_e 和 W_i ，使它们无法被f正确映射为 $\cong_{\mathcal{V}_n}$实例。根据递归定理，我们固定指标 e, i。

- 阶段 0。我们从 W_e 和 W_i 均为空开始。因此，在此阶段， $\mathcal{V}_{n+1}[e]$ 和 $\mathcal{V}_{n+1}[i]$ 看起来同构。我们查看 $W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 的枚举阶段，并等待 $\mathcal{V}_n[f(e)]$和 $\mathcal{V}_n[f(i)]$ 在某个阶段看起来同构。这最终必定会发生；否则，我们就可以停止构造，而 f 将不是一个归约（请记住，由于升链条件，根据引理 4.3，同构类型会在有限阶段稳定下来）。发生这种情况后，就将此阶段（即 $W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 的枚举阶段）定义为阶段 t_0。然后将 $\{x_{n-1} = x_n\}$ 放入 W_e。

- 阶段 1。在此阶段， $\mathcal{V}_{n+1}[e]$ 和 $\mathcal{V}_{n+1}[i]$ 看起来不同构。我们查看 $W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 的枚举阶段，并等待 $\mathcal{V}_n[f(e)]$ 和 $\mathcal{V}_n[f(i)]$ 在 t_0 之后的某个阶段看起来不同构。同样，这最终必定会发生；否则 f 将不是一个归约。发生这种情况后，就将此阶段（即 $W_{f(e)}$ 和 $W_{f(i)}$ 的枚举阶段）定义为阶段 t_1。然后将 $\{x_{n-1} = x_n\}$ 放入 W_i。
- 阶段 $2k$, $k \geq 1$。在此阶段， $\mathcal{V}_{n+1}[e]$ 和 $\mathcal{V}_{n+1}[i]$ 看起来同构。我们考察 $W_f(e)$ 和 $W_f(i)$ 的枚举阶段，并等待直到 $\mathcal{V}_n[f(e)]$ 和 $\mathcal{V}_n[f(i)]$ 在 t_{2k-1}之后的某个阶段看起来同构。这种情况最终必定会再次发生；否则 f 就不是一个归约。一旦发生这种情况，就将此阶段（即 $W_f(e)$ 和 $W_f(i)$ 的枚举阶段）定义为阶段 t_{2k}。然后，将当前（即在阶段 t_{2k}）位于 $W_f(e)$ 中的方程集放入W_e。注意，这会使 $\mathcal{V}_{n+1}[e]$和 $\mathcal{V}_{n+1}[i]$ 看起来不同构：当前（阶段 $2k$）$\mathcal{V}_{n+1}[e]$ 看起来同构于阶段 t_{2k} 的 $\mathcal{V}_n[f(e)]$ ，而 $\mathcal{V}_{n+1}[i]$ 看起来同构于阶段 $2(k-1)$ 之后的 $\mathcal{V}_{n+1}[e]$，后者看起来同构于阶段 $t_{2(k-1)}$ 的 $\mathcal{V}_n[f(e)]$ 。并且在阶段 $t_{2(k-1)}$ 和 t_{2k} 之间， $\mathcal{V}_n[f(e)]$和 $\mathcal{V}_n[f(i)]$ 先变得不同构，随后又变得同构。由升链条件和观察 4.5 可知，取商总会产生一个新的同构类型，因此 $\mathcal{V}_n[f(e)]$ 在阶段 t_{2k} 的同构类型不同于阶段 $t_{2(k-1)}$ 的同构类型。

- 阶段 $2k+1$, $k \geq 1$。在这个阶段， $\mathcal{V}_{n+1}[e]$ 和 $\mathcal{V}_{n+1}[i]$ 看起来不同构。我们考察$W_{f(e)}$ 和$W_{f(i)}$ 的枚举阶段，并等待直到在 t_{2k}之后的某个阶段， $\mathcal{V}_n[f(e)]$ 和 $\mathcal{V}_n[f(i)]$ 看起来不同构。这最终必定会发生；否则， f就不是一个归约。一旦发生这种情况，就将这个阶段（即$W_{f(e)}$ 和$W_{f(i)}$的枚举阶段）定义为阶段 t_{2k+1}。然后将 W_e 中的所有元素复制到 W_i中。由于根据我们的构造，W_i 始终是 W_e的子集，因此它们现在作为集合将是等价的。

但根据引理 4.3，这两个 $\mathcal{V}_n$-表示的同构类型最终必定稳定下来，要么在偶数阶段，要么在奇数阶段。两种情况下我们都会得到对角化，因为 f 没有正确地将 W_i 映射到 W_j。□

命题 4.16。 $\cong_{\mathcal{CS}_2} \leq_c \cong_{\mathcal{CM}_2} \leq_c \cong_{\mathcal{CS}_3} \leq_c \cong_{\mathcal{CM}_3} \leq_c \cdots$

证明。 显然， $\cong_{\mathcal{CM}_n}$ 可归约到 $\cong_{\mathcal{CS}_{n+1}}$，因为对于任意由 n生成的交换幺半群，都存在一个与之同构的由$(n+1)$生成的交换半群，只需将额外的生成元设为单位元即可。

证明 $\cong_{\mathcal{CS}_n} \leq_c \cong_{\mathcal{CM}_n}$ 同样直接明了，但验证起来还需要多花些功夫。为定义一个可计算归约 f，对于给定的 W_e（它编码一个方程集 R），令 $W_{f(e)}$ 也编码同一个集合 R。请记住，我们不能直接将 f 定义为恒等映射，因为在 $\mathcal{CS}_n$ 和 $\mathcal{CM}_n$中，项上的方程编码方式不同。接下来需要确认同构和非同构性质均得到保留。令 $\mathcal{T}_{\mathcal{CS}}(X_n)$ 表示签名为交换半群的 X_n 上的项代数， $\mathcal{T}_{\mathcal{CM}}(X_n)$ 表示签名为交换幺半群的 X_n 上的项代数。考虑半群 $\mathcal{S} := \mathcal{T}_{\mathcal{CS}}(X_n)/R_{\mathcal{CS}}$，其中 $R_{\mathcal{CS}}$ 是定义在

$\mathcal{TCS}(X_n)$上由 R生成的同余关系。因此， $\mathcal{S}$ 由 $\mathcal{CS}_n[e]$表示。类似地，以相同方式定义的幺半群$\mathcal{M} := \mathcal{TCM}(X_n)/R_{\mathcal{CM}}$ 由 $\mathcal{CM}_n[f(e)]$表示。我们声称， $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{M}$， $[t]_{R_{\mathcal{CS}}} \mapsto [t]_{R_{\mathcal{CM}}}$ 是一个半群嵌入，其满射像为 $\mathcal{M} \setminus \{[1]_M\}$:

- 良定义： $t_1 R_{\mathcal{CS}} t_2$ 蕴含 $t_1 R_{\mathcal{CM}} t_2$，因为在$R_{\mathcal{CS}}$ 中证明 t_1 与 t_2 等价的推导，在 $R_{\mathcal{CM}}$中同样成立。
- 单射：对于 t_1， $t_2 \in \mathcal{TCS}(X_n)$， $t_1 R_{\mathcal{CM}} t_2 \implies t_1 R_{\mathcal{CS}} t_2$。注意，对于在 $R_{\mathcal{CM}}$中证明 t_1 与 t_2 等价的推导，也存在一个不使用单位元 1 的推导。这是因为，除了 1 所在的等价类外，每个等价类中都有一个不以 1 为子项的项。因此，我们也可以在 $R_{\mathcal{CS}}$中推导出 t_1与 t_2 等价。
- 是同态且满射到 $\mathcal{M} \setminus \{[e]_M\}$：由定义可知。

现在很容易验证，对于任意两个半群 $\mathcal{S}_1$， $\mathcal{S}_2$ 及它们在 f下各自的像 $\mathcal{M}_1$， $\mathcal{M}_2$， $\mathcal{S}_1$， $\mathcal{S}_2$之间的同构可以与 φ 复合，从而得到$\mathcal{M}_1$， $\mathcal{M}_2$之间的同构，反之亦然。□

推论 4.17. $\cong_{\mathcal{CS}_{f.g.}} \equiv_c \cong_{\mathcal{CM}_{f.g.}}$。

证明。 注意到，命题 4.16 中具有一致性。 □

Th下一个显而易见的问题是，命题 4.16 中的可约性是否为严格的。对此， e 我们可以 只能给出部分答案，而 $\cong_{\mathcal{CS}_n} \leq_c \cong_{\mathcal{CM}_n}$ 是否为严格的仍是一个悬而未决的问题。

命题 4.18. $\cong_{\mathcal{CM}_n} <_c \cong_{\mathcal{CS}_{n+1}}$，对于 $n \geq 1$。

证明。 注意，从 $\langle X_{n+1} \mid \emptyset\rangle_{\mathcal{CS}}$ 可以通过取商得到一个与$\langle X_n \mid \emptyset\rangle_{\mathcal{CM}}$ 同构的代数（将额外的生成元变为单位元）。因此，可以用与证明定理 4.15 中不可约性相同的思路来证明不可约性。构造中唯一的改动是：在阶段 0 和阶段 1，不再加入使额外生成元合并的方程，而是加入使额外生成元成为单位元的方程。□

命题 4.19。 设 $\mathcal{V}$ 是任意一个簇。那么，对任意 n，都有 $\cong_{\mathcal{V}_n} \leq_c \cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 。如果 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 满足升链条件，且 $\mathrm{IP}(\mathcal{V})$ 是可判定的，那么该不等式是严格的。

证明。 $\leq_c$部分由 f 处理： $e \mapsto \langle n,\ e\rangle$。如果 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 满足升链条件，且 IP($\mathcal{V}$) 可判定，那么根据定理 4.15， $\cong_{\mathcal{V}_n}$、 $n \geq 1$构成一个严格递增链。因此，由于 $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 高于其中每一个，它必定严格高于它们。□

In 在以下定理中，我们从 ACC 得出 $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 复杂度的上界 e.

定理 4.20。 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，其中 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 具有升链条件。则 $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 可归约于 $=^{ce}$。

证明。 为了处理枚举的各个阶段，我们引入记号 $\cong_s$ ，表示截至阶段 s所枚举出的表示之间的同构关系。因此， $\cong_s$ 定义在有限表示上，从而 Σ^0_1 （观察 2.10）。此外（通过某种适当的编码），我们将 $=^{ce}$ 所定义于其上的可计算可枚举集视为由 ω列 ω 组成，并将 i列中的元素 m 记为 $m^{[i]}$。

我们使用无穷多个工作者，从给定的编码 $p = \langle n,\ e\rangle$ 为表示 $\langle X_n \mid W_e\rangle_{\mathcal{V}}$构造一个可计算可枚举集 $W_{f(p)}$ 。

- 工作者 0：将 $\{m^{[p]} \mid m \in \omega\}$ 复制到 $W_{f(p)}$。
- 工作者 $\langle q,\ r,\ s\rangle$：等待，直到 $\mathcal{V}_{f.g.}[q] \cong_s \mathcal{V}_{f.g.}[r]$。如果发生这种情况，该工作者就将 $W_{f(q)}$ $_s$复制到 $W_{f(r)}$中，并确保复制发生在阶段 s之后。

“ $\Longrightarrow$ ”：假设 $\mathcal{V}_{f.g.}[q] \cong \mathcal{V}_{f.g.}[r]$。设 $x \in W_{f(q),\ s}$。设 t 为两个同构类型都稳定下来的阶段。工作者 $\langle q,\ r,\ \max(s,\ t)\rangle$ 最终会看到 $\mathcal{V}_{f.g.}[q] \cong_{\max(s,t)} \mathcal{V}_{f.g.}[r]$，并将 x 放入$W_{f(r)}$。

“ $\Longleftarrow$ ”：假设 $\mathcal{V}_{f.g.}[q] \ncong \mathcal{V}_{f.g.}[r]$。根据观察 4.5，$\mathcal{V}_{f.g.}$ 满足升链条件意味着 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 不是同态开。因此，不失一般性，假设 $\mathcal{V}_{f.g.}[q] \not\twoheadrightarrow \mathcal{V}_{f.g.}[r]$。令 s 为两个同构类型都已稳定的阶段。取某个 $n^{[q]}$，它在阶段 s之后才进入 $W_{f(q)}$。注意，$n^{[q]}$不能直接复制到 $W_{f(r)}$中。假设 $n^{[q]}$ 经过中间集合 $W_{f(h_0)}$ …, $W_{f(h_m)}$。这只有在存在阶段 $s_0 < s_1 < ... < s_{m+1}$，且它们都大于 s时才可能发生，使得

$$\mathcal{V}_{f.g.}[q] \cong_{s_0} \mathcal{V}_{f.g.}[h_0], \mathcal{V}_{f.g.}[h_0] \cong_{s_1} \mathcal{V}_{f.g.}[h_1], ..., \mathcal{V}_{f.g.}[h_m] \cong_{s_{m+1}} \mathcal{V}_{f.g.}[r].$$

但也要注意，显然，对于所有 $i \in \{0, ..., m\}$，在阶段 s_{i+1}的 $\mathcal{V}_{f.g.}[h_i]$ 都是在阶段 s_i的 $\mathcal{V}_{f.g.}[h_i]$ 的同态像。因此，在阶段 s_{m+1} 的 $\mathcal{V}_{f.g.}[r]$ 是在阶段 s_0的 $\mathcal{V}_{f.g.}[q]$ 的同态像。此外，$s < s_0, s_{m+1}$，所以两者都已稳定为实际的同构类型。这与我们关于 $\mathcal{V}_{f.g.}[q] \not\twoheadrightarrow \mathcal{V}_{f.g.}[r]$的假设矛盾。因此我们知道，$n^{[q]}$ 也不能间接复制到$W_{f(r)}$中，这意味着 $W_{f(q)}$ 和 $W_{f(r)}$ 不同。□

注意，$=^{ce}$ 是一个 Π^0_2 等价关系，因此 $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 必须是 Π^0_2。在下一个定理中，我们证明，对于具有可判定字问题或同构问题的类，$\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 必须是 Δ^0_2。然而，是 Δ^0_2 并不意味着已经低于 $=^{ce}$（见定理 2.15）。我们用 WP($\mathcal{V}$) 表示簇 $\mathcal{V}$中有限表示的字问题。

定理 4.21. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，其中 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 满足升链条件。那么

(1) $\mathrm{WP}(\mathcal{V})$ 是可判定的 $\Longrightarrow$ $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 是Δ^0_2,

(2) $\mathrm{IP}(\mathcal{V})$ 是可判定的 $\Longrightarrow$ $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 是Δ^0_2。

Proof. (1) 我们只需给出一个 Σ^0_2-定义，因为定理 4.20 蕴含其属于 Π^0_2 .

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{V}_{f.g.}$ 分别由表示 $\langle X_k \mid W_e\rangle$ 和 $\langle X_j \mid W_i\rangle$ 给出。设$\approx_{W_e}, \approx_{W_i}$分别是由 W_e, W_i生成的同余关系。从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 存在同构，可以表述如下：$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \iff \exists \varphi : X_k \to \mathcal{T}(X_j)$，使得其扩张 $\varphi' : \mathcal{T}(X_k) \to \mathcal{T}(X_j)$到所有项（如观察 2.10 的证明中所述）是从 $\mathcal{T}(X_k)/\approx_{W_e}$ 到 $\mathcal{T}(X_j)/\approx_{W_i}$的同构。

要求存在 φ 会增加一个存在量词，因此只需证明检查 φ' 是否为同构是一个 Σ^0_2 命题。我们必须检查良定义性、单射性和满射性——然后根据 φ' 的定义可知它是一个同态。我们使用升链条件，将这些条件表述为关于有限表示的字问题——根据假设，该字问题是可判定的。我们用 $=_{\mathcal{A},t}$（类似地，用 $=_{\mathcal{B},t}$）表示与$\langle X_k \mid W_{e,t}\rangle$的字问题相关联的等价关系。

- 等价类上的良定义性：∃ 阶段 t_0，使得 $\forall t > t_0$ 和 ∀ 项 s_1, s_2，如果$s_1 =_{\mathcal{A},t} s_2$ 那么 $\varphi(s_1) =_{\mathcal{B},t} \varphi(s_2)$。
- 单射性：∃ 阶段 t_0，使得 $\forall t > t_0$ 和 ∀ 项 s_1, s_2，如果 $\varphi(s_1) =_{\mathcal{B},t} \varphi(s_2)$ 那么$s_1 =_{\mathcal{A},t} s_2$。
- 满射性：对于每个生成元 $x \in \{x_0, ..., x_{j-1}\}$、∃项 v和 ∃阶段 t，使得 v由 $\varphi(x_0)$ ..., $\varphi(x_{k-1})$ 和 $v =_{\mathcal{B},t} x$生成。

(2) 根据极限引理，集合 Δ^0_2 当且仅当其特征函数是某个可计算函数的极限。考虑函数

$$f(\langle k, e\rangle, \langle l, i\rangle, s) = \begin{cases} 1, & \text{if } \langle X_k \mid W_{e,s}\rangle_{\mathcal{V}_n} \cong \langle X_l \mid W_{i,s}\rangle_{\mathcal{V}_n} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据 IP($\mathcal{V}$) 的可判定性， f 是可计算的。根据升链条件， $\mathcal{V}_{f.g.}$ 中可计算枚举表示的同构类型最终会稳定。因此，特征函数

$$\chi_{\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}}(\langle k,e\rangle,\langle l,i\rangle)=\lim_{s\to\infty} f(\langle k,e\rangle,\langle l,i\rangle,s)$$

$\cong_{\mathcal{V}_n}$ 的极限是可计算函数 f。

□

推论 4.22。 如果 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 不仅满足升链条件，而且$\mathrm{WP}(\mathcal{V})$ 或$\mathrm{IP}(\mathcal{V})$ 可判定，那么$\mathcal{V}_{f.g.}<_c=^{ce}$。

这由定理 4.20 和定理 4.21 得出，尤其适用于 $\mathcal{CS}$ （根据定理 2.26）。有了这些结果，我们现在可以展示所讨论的同构关系图景。图 3 汇总了迄今为止我们已证明的、低于 $=^{ce}$ 的结果，以及$\mathcal{UF}_1^2$的分类；后者将在第 5 节中证明。

本节余下部分将给出关于另一个重要基准关系 $E_{\max}$的两个一般性结果。第一个结果指出，其度不可能包含同构问题可判定的有限生成代数的同构关系。第二个结果指出， $E_{\max}$不能归约到满足升链条件且同构问题可判定的类上的同构关系。

命题 4.23。 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，其中 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 满足升链条件，且 $\mathrm{IP}(\mathcal{V})$ 是可判定的。那么 $E_{\max}\not\leq_c\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$。

证明。 反设存在这样一个归约 f ，将 $E_{\max}$ 归约到 $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$。考虑如下构造的可计算可枚举集 W_e 和 W_i（其中 e、i 由递归定理固定）：

- 我们从 W_e 和 W_i 均为空集开始。
- 阶段 $2k$。此时， W_e 和 W_i 属于同一个 $E_{\text{最大}}$类。我们等待，直到发现由 f 作用于 W_e 和 W_i 所得像所表示的代数同构。根据 IP($\mathcal{V}$) 可判定这一假设，我们可以判定这一点。一旦发生这种情况，就将 k 放入 W_e。如果这种情况始终没有发生，那么 f 就不是一个归约。
- 阶段 $2k+1$。此时， W_e 和 W_i 属于不同的 $E_{\text{最大}}$类。我们等待，直到发现这些表示不同构（同样，根据 IP($\mathcal{V}$) 可判定这一假设，这一点是可判定的）。一旦发生这种情况，就将 k 放入 W_i。如果这种情况始终没有发生，那么 f 就不是一个归约。

现在，对于每个 k， W_e 在阶段 $2(k+1)$ 之后的像是一个表示，其同余关系严格大于 W_e 在阶段 $2k$ 之后的像的同余关系。这意味着存在一个严格递增的同余关系序列，这与升链条件矛盾。□

由此，我们也立即得到，对所有 $n\geq 1$， $E_{\max}\not\leq_c\cong_{\mathcal{V}_n}$。

命题 4.24。 设 $\mathcal{V}$ 是一个有限型簇，且$\mathrm{IP}(\mathcal{V})$可判定。那么，对于 $n\geq 1$， $\mathcal{V}_{f.g.}$和 $\mathcal{V}_n$均不能属于 $E_{\max}$的度。

证明。 假设存在一个有限型簇 $\mathcal{V}$ ，且 IP($\mathcal{V}$) 可判定，使得对于某个n， $\cong_{\mathcal{V}_n}$或 $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 与 $E_{\max}$是 c-等价的。我们先证明 $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$的情形，另一种情形可类似证明。首先，注意到若 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 满足升链条件，就会与命题 4.23 矛盾。因此，我们可以假设 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 中存在一个代数，其同余格包含一条无限严格递增的同余关系链。令 R 为由该序列之并生成的同余关系。那么 R 不可能是有限生成的，否则某个商将包含这些生成方程。因此，特别地，R 不可能是全同余，因为对于有限型簇，全同余是有限生成的。此外， R 与全同余表示的代数不同构。现在，考虑从$\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}}$ 到 $E_{\max}$的归约 f 。若将其与一个从 2^ω 到 2^ω 、把各集合向下填充至极大元的函数复合，就得到另一个在可计算可枚举集上良定义的归约。因此

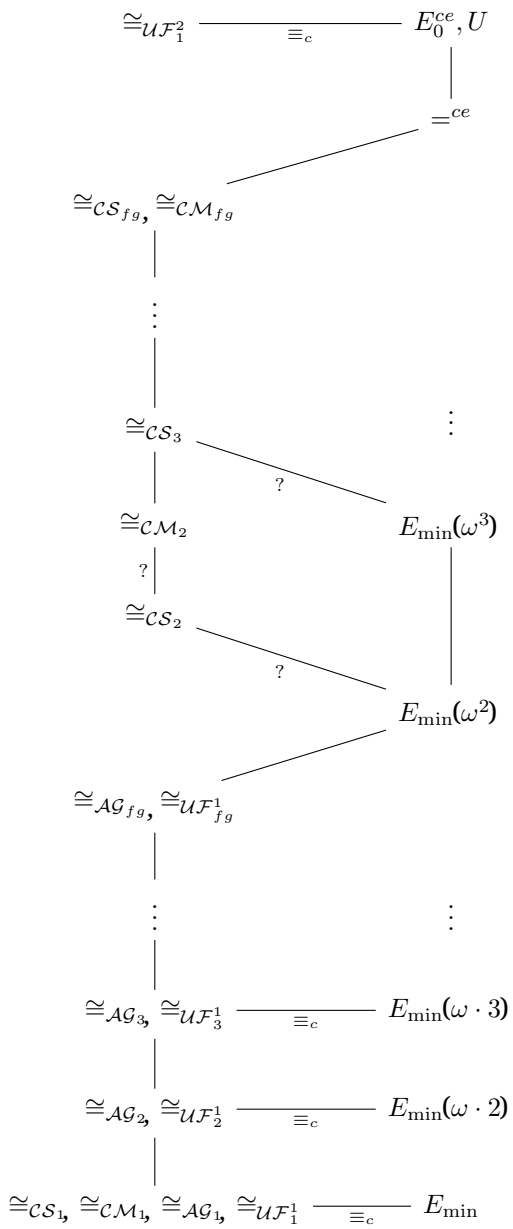

FIGURE 3. 本文研究的同构关系与已充分理解的等价关系的比较。问号表示我们不知道这种可约性是否严格。除严格可约性外，我们省略了不可约性结果。

不失一般性，假设 f 在可计算可枚举集上良定义。根据单调性引理（引理 2.16），f 需要将 R 和全同余都映射到包含所有 $W_{f(g(\emptyset))} \neq W_{f(g(\{0\}))} \neq W_{f(g(\{0,1\}))} \neq \ldots$ 的超集。因此，两者都被映射到无限集。然而，这意味着它们被映射到$E_{\max}$-等价的集合，矛盾。□

此外，注意，如果某个同构关系高于 $E_{\min}$ （我们的所有示例关系都是如此），那么它就不能归约到 $E_{\max}$。否则，$E_{\min}$ 就可以归约到$E_{\max}$，这就矛盾了。

5. Above $=^{ce}$ and Σ^0_3-completeness.

本节汇总我们关于 $=^{ce}$ 的上述结果。我们证明 $\mathcal{UF}_1^2$ 是 Σ^0_3-完全的。这是 Σ^0_3-完全类的又一个例子，此外还有 6-生成群 [AHTH25]。接着，我们利用同态开性推导出一般性结果：在同态开类上，没有任何同构关系低于 $=^{ce}$。

我们引入一个 Σ^0_3-完全等价关系 U，它来自 [ASM25], ，随后我们将其归约到$\sim^{=}_{\mathcal{UF}_1^2}$。

定义 5.1. 对于一个可计算可枚举集 $W_e \subseteq \mathbb{Z}$ （通过某种可计算编码）和 $x \in \mathbb{Z}$，我们定义 $W_e + x = \{w + x \mid w \in W_e\}$ 为将 W_e 平移 x所得的结果。定义 U 为ω 上的等价关系，使得 eUi 当且仅当存在某个 $x \in \mathbb{Z}$ 使得 $W_e + x = W_i$。

定理 5.2 ([ASM25])**.** U 是一个 Σ^0_3-完全等价关系。

定理 5.3. $\cong_{\mathcal{UF}_1^2}$ 是一个 Σ^0_3-完全等价关系。

证明。 我们证明 U 可计算地归约到 $\cong_{\mathcal{UF}_1^2}$，其中 $\mathcal{UF}_1^2$ 的语言为 $\{f, g\}$，其中 f, g是两个一元函数。考虑由全域 $\{a_i, b_i, b'_i, b''_i, c_i, c'_i, c''_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 定义的代数（见图 4），并且

- $f(a_i) = b_i$ 和 $g(a_i) = c_i$,
- $f(b_i) = a_{i+1}$ 和 $g(c_i) = a_{i-1}$,
- $g(b_i) = b'_i$ 和 $f(c_i) = c'_i$,
- $f(b'_i) = g(b'_i) = b''_i = f(b''_i) = g(b''_i)$,
- $f(c'_i) = g(c'_i) = c''_i = f(c''_i) = g(c''_i)$.

注意，该代数由 $a = a_0$ 生成，并且在 $\mathcal{UF}_1^2$中有一个可计算可枚举表示。

现在我们给出一个从 U 到 $\mathcal{UF}_1^2$ 的可计算归约 h 。给定某个 $e \in \omega$，通过枚举上述表示并同时枚举以下内容，来给出表示 $h(e)$:

$$b'_z = b''_z \text{ and } c'_z = c''_z$$

当我们看到 z 进入 W_e 时，将其加入 $h(e)$。

因此显然 h 是可计算的。我们需要验证它是一个归约。假设 eUi，且 $W_e + z = W_i$。那么很容易验证，由 $a_n \mapsto a_{n+z}$ 定义的同态是 $h(e)$ 与 $\cong h(i)$ 之间的一个同构。另一方面，假设 $h(e) \cong h(i)$。那么从 $h(e)$ 到 $h(i)$ 的同构必定将 a_0 映到某个 a_z，因为它们是由 $g^2 f^2$ 固定的元素。接着很容易验证 $W_e + z = W_i$，并且 eUi。□

顺带一提，这改进了 [AHTH25], 中的一个辅助结果；该文证明了对于无穷多个一元函数符号， Σ^0_3-完备性成立。

关于含一元函数符号的代数，其字问题和同构问题目前所知甚少。如果下面的问题答案为“是”，那么这将是一个例子：其有限表示的字问题或同构问题是可判定的，但其可计算可枚举表示上的同构关系是 Σ^0_3-完全的。目前尚不清楚这样的例子是否存在。

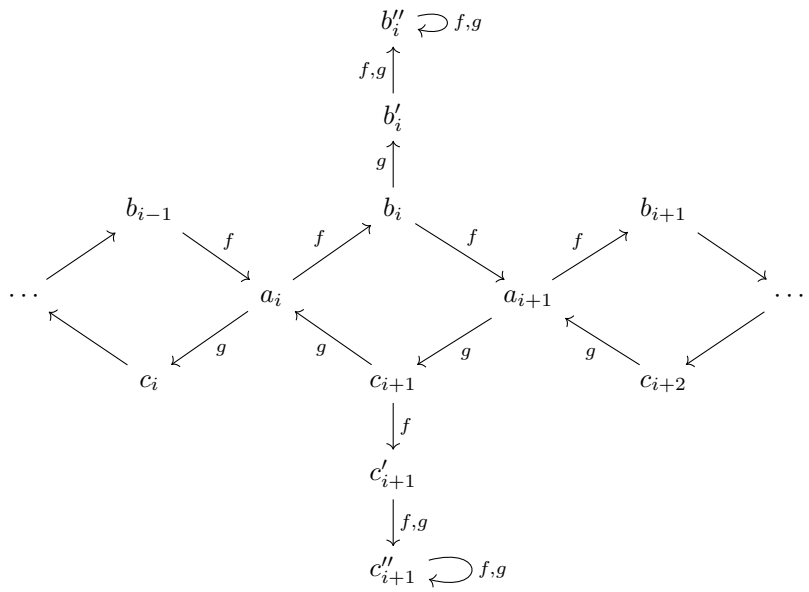

FIGURE 4. 定理 5.3 中的代数

问题 5.4. $\mathcal{UF}_n^m$、 $m \geq 2$、 $n \geq 1$ 是否具有可判定的字问题或同构问题（即针对有限表示而言）？

在定理 4.20 中，我们已经证明，ACC 蕴含可约到 $=^{ce}$。逆方向是否成立仍是一个开放问题，即不满足 ACC 是否蕴含不可约到 $=^{ce}$。针对这一问题，我们目前得到的最强结果如下。

命题 5.5。 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，其中 $\mathcal{V}_{f.g.}$ 是同态开。则 $\cong_{\mathcal{V}_{f.g.}} \not\leq =^{ce}$。

证明。 为导出矛盾，假设 f 是从 $\cong_{\mathcal{V}_n}$ 到 $=^{ce}$的归约。令 $\mathcal{A} \ncong \mathcal{B}$ 见证同态开性。根据引理 2.9，非一致地选取编码 $\langle g_i, i\rangle$、$\langle g_k, k\rangle$，分别表示 $\mathcal{A}$ 的表示，并选取编码 $\langle g_j, j\rangle$ 表示 $\mathcal{B}$的一个表示，使得 $W_i \subsetneq W_j \subsetneq W_k$。由于 f 是一个归约，$\mathcal{V}_{f.g.}[\langle g_i, i\rangle] \cong \mathcal{V}_{f.g.}[\langle g_k, k\rangle] \ncong \mathcal{V}_{f.g.}[\langle g_j, j\rangle]$ 蕴含 $W_{f(\langle g_i,i\rangle)} = W_{f(\langle g_k,k\rangle)} \neq W_{f(\langle g_j,j\rangle)}$。然而，由于 f 在可计算可枚举集上是良定义的，根据引理 2.16，它是单调的，因此我们有 $W_{f(\langle g_i,i\rangle)} \subsetneq W_{f(\langle g_j,j\rangle)} \subsetneq W_{f(\langle g_k,k\rangle)}$，矛盾。□

6. FURTHER QUESTIONS

我们最后提出一系列由本文分析自然引出的开放问题。这些问题有助于进一步深入理解可计算枚举代数的同构关系的复杂度图景，尤其是与升链条件（升链条件）以及诸如 $=^{ce}$ and Σ_3^0-完备性这样的基准度相关的结构特征。

Our 迄今为止的结果表明存在一种二分现象：我们分析过的所有具体例子要么满足 升链条件 要么表现出最大复杂度，即为 Σ_3^0-完备。这引出了以下问题：

问题 6.1. 是否存在某类不满足升链条件的可计算枚举代数，其同构关系不是 Σ_3^0-完全的？更广泛地说，是否存在严格介于$=^{ce}$ 与 Σ_3^0-完全度之间的同构关系？是否存在与 $=^{ce}$ 可计算等价的同构关系？

我们所举例子另一个引人注目的特点是它们的可比较性：我们研究的所有同构关系在可计算可约性下两两可比较。不过，我们认为这只是当前研究范围所造成的表象，因此提出：

问题 6.2. 是否存在两个可计算枚举代数类，它们的同构关系在可计算可约性下不可比较？更进一步，是否存在这类不可比较关系的“自然”例子？

这与一个更广泛的结构性问题有关：度 $E_{\min}(\alpha)$ 在分类同构关系中扮演什么角色。请注意，$E_{\min}(\alpha)$ 目前只在 ω^ω 以下定义，而它或许可以扩展到 ε_0，因此这个问题有一定的解释空间。

问题 6.3. 对于某个适当的序数 α，每个具有升链条件的类的同构关系是否都可计算双向可约于某个 $E_{\min}(\alpha)$？

最后，在我们考察过的所有非 Σ^0_3 完备例子中，同构关系的复杂度都随着生成元数量的增加而严格上升。这引出了以下问题，旨在探究更微妙的行为：

问题 6.4. 是否存在一个非平凡簇 $\mathcal{V}$ 和一个整数 $n \geq 1$，使得 $\cong_{\mathcal{V}_n} \equiv_c \cong_{\mathcal{V}_{n+1}}$，但 $\cong_{\mathcal{V}_n}$ 严格低于 Σ^0_3 完备度？

总体而言，这些问题旨在推动对可计算枚举代数同构关系复杂度的结构刻画。具体来说，我们希望：从结构上说明何时同构关系严格低于 $=^{ce}$；并清楚理解哪些结构特征会使同构关系成为 Σ^0_3-完全。

References

[ABSM23] Uri Andrews、Daniel F Belin 和 Luca San Mauro。关于自然数上的等价关系中可计算可约性的结构。 *The Journal of Symbolic Logic*，88(3):1038–1063，2023。[AHar] Uri Andrews 和 Meng-Che Ho。算法有限群、通用群和 $*$-通用群。，即将发表。[AHTH25] Uri Andrews、Matthew Harrison-Trainor 和 Meng-Che Ho。关于群的判定问题复杂性的两个结果。 *International Journal of Algebra and Computation*，35(02):311–327，2025。[AS19] Uri Andrews 和 Andea Sorbi。ceer 结构中的并与交。 *Journal of Symbolic Logic* 89 2 918 944, 2024 *Computability* 8 3 4 193 241, , ( ): – 。[ASM24] Uri Andrews 和 Luca San Mauro。研究可计算 Friedman–Stanley 跳。 *The Journal of Symbolic Logic* 84 2 2019 , ( ): – 。[ASM25] Uri Andrews 和 Luca San Mauro。可计算可约性框架中可数博雷尔等价关系的类比。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，153(08):3577–3593，2025。[ASS20] Uri Andrews、Noah Schweber 和 Andrea Sorbi。ceer 的理论能够计算真算术。 *Annals of Pure and Applied Logic* 171 8 102811, 2020 *Annals of Pure and Applied Logic*, , ( ): 。[BRZ22] Nikolay Bazhenov、Dino Rossegger 和 Maxim Zubkov。代数结构的双可嵌入范畴性。 *Annals of Pure and Applied Logic*，173(3):103060，2022。[CCK23] John D Clemens、Samuel Coskey 和 Gianni Krakoff。等价关系的可计算可约性与有效跳算子。 *The Journal of Symbolic Logic*，88(2):540–561，2023。[CG01] Riccardo Camerlo 和 Su Gao。可数布尔代数同构关系的完备性。 *Transactions of the American Mathematical Society*，353(2):491–518，2001。[CHM12] Samuel Coskey、Joel David Hamkins 和 Russell Miller。自然数上等价关系在可计算可约性下的层级。 *Computability*，1(1):15–38，2012。[Deh11] Max Dehn。¨论无限离散群。 *Mathematische Annalen*，71(1):116–144，1911。[DRSMS20] Valentino Delle Rose、Luca San Mauro 和 Andrea Sorbi。字问题与 ceer。 *Mathematical Logic Quarterly* 66 3 341 354, 2020 , ( ): – 。[DRSMS 23] Valentino Delle Rose、Luca San Mauro 和 Andrea Sorbi。通过可计算可约性对有限生成代数的字问题进行分类。 *International Journal of Algebra and Computation* 33 04 751 768, , ( ): – 。2023

[FF09] Ekaterina B Fokina 和 Sy-David Friedman。可计算结构类上的等价关系。载于 *Conference on Computability in Europe*，第 198–207 页。Springer，2009。[FFH+12] Ekaterina B Fokina、Sy-David Friedman、Valentina Harizanov、Julia F Knight、Charles McCoy 和 Antonio Montalb´an。可计算结构上的同构关系。 *The Journal of Symbolic Logic*，77(1):122–132，2012。[FKST16] Ekaterina Fokina、Bakhadyr Khoussainov、Pavel Semukhin 和 Daniel Turetsky。由可计算可枚举等价关系实现的线性序。 *The Journal of Symbolic Logic*，81(2):463–482，2016。[FS89] Harvey Friedman 和 Lee Stanley。可数结构类的博雷尔可约性理论。 *The Journal of Symbolic Logic* 54 3 894 914, 1989 ，( ): – 。[GG01] Su Gao 和 Peter Gerdes。可计算可枚举等价关系。 *Studia Logica* 27 59, ，第 – 页。[GJKS14] 2001
Alexander Gavruskin、Sanjay Jain、Bakhadyr Khoussainov 和 Frank Stephan。由递归可枚举等价关系实现的图。 *Annals of Pure and Applied Logic*，165(7-8):1263–1290，2014。[GKS16] Alex Gavryushkin、Bakhadyr Khoussainov 和 Frank Stephan。由递归可枚举结构诱导的等价关系之间的可约性。 *Theoretical Computer Science*，612:137–152，2016。[Gr¨a08] George Gr¨atzer。 *Universal algebra*。Springer，2008。[GS80] Fritz Grunewald 和 Daniel Segal，一些一般算法。一：算术群。 *Annals of Mathematics* 112 3 531 ，( ): –583，1980。[HTH 21] Matthew Harrison-Trainor 和 Meng-Che Ho。有限生成群在有限生成结构中具有普遍性。 *Annals of Pure and Applied Logic*，172(1):102855，2021。[IMNN14] Egor Ianovski、Russell Miller、Keng Meng Ng 和 Andre Nies。来自可计算性理论的等价关系与预序的复杂度。 *The Journal of Symbolic Logic*，79(3):859–881，2014。[Kho18] Bakh Khoussainov。可计算可枚举结构之旅（教程讲座）。载于 *Sailing Routesin the World of Computation: 14th Conference on Computability in Europe*， *CiE 2018*， *Kiel*， *Germany*， *July 30–August 3*，2018 年， *Proceedings 14*，第 1–19 页。Springer，2018。[KK86] Nadim Kasymov 和 Bakhadyr Khoussainov。有限生成可枚举代数与绝对局部有限代数。 *Vychisl. Systemy*，116:3–15，1986。[KM14] Bakhadyr Khoussainov 和 Alexei Miasnikov。群、半群和代数的有限呈示扩张。 *Transactions of the American Mathematical Society*，366(3):1455–1474，2014。[KMVB07] Julia F Knight、Sara Miller 和 Michael Vanden Boom。图灵可计算嵌入。 *The Journal of Symbolic Logic* 72 3 901 918, 2007 ，( ): – 。[KS95] Olga G Kharlampovich 和 Mark V Sapir。簇中的算法问题。 *International Journal of Algebra and Computation* 5 04 05 379 602, 1995 ，(n): – 。[KST12] Johannes Kobler、Uwe Sch ¨ oning 和 Jacobo Toran´ 。 *The graph isomorphism problem: its structural complexity* 2012 Springer Science，71] Mil *On group-theoretic decision problems and their classification*Charles F Miller。[。第 68 号。Princeton University Press，1971。16] Mon ´ *The Journal of* Antonio Montalb[an。没有中间同构问题的结构类。，( ): – 。97] New *Linear algebra and its applications*Morris Newman。史密斯标准形。[，254(1-3):367–381，1997。92] Odi *Classical recursion theory: The theory of functions and sets of natural numbers*Piergiorgio Odifreddi。[，第 125 卷。Elsevier，1992。24] PS *Annals of Mathematics* 199 3 1177 1224, 2024 Gianluca Paolini 和 Saharon Shelah。无挠阿贝尔群是博雷尔完备的。[，( ): – 。´R65] ed´L´aszl´o R *The theory of finitely generated commutative semigroups*edei。[。Pergamon Press，1965。03] Sel *Computability and Models* Victor Selivanov。正结构。 *Perspectives East and West*[，第 321–350 页，2003。˘Ta74] ı *Mathematics of the USSR-Sbornik* 22 1 104, 1974 MA Ta[ıclin。交换半群的同构问题。 ，( ): 。99] TV *Journal of Algebra*Simon Thomas 和 Boban Velickovic。有限生成群同构关系的复杂性。，217(1):352–373，1999。

Natural Sciences Division, New College of Florida
Email address: mho@ncf.edu

Institute of Discrete Mathematics and Geometry, Vienna University of Technology
Email address: martin.ritter@tuwien.ac.at

Department of Humanistic Research and Innovation, University of Bari
Email address: lucafrancesco.sanmauro@uniba.it